



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
& ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΠΟΛΥΕΔΡΑ - ΠΟΛΥΤΟΠΑ

Διπλωματική Εργασία

Αγγελική Παπασπυροπούλου

Αθήνα

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

A/A	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1.	Διονύσιος Λάμπας (επιβλέπων καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής	
2.	Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	
3.	Παναγιώτης Σπύρου	Επίκουρος Καθηγητής	

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	vi
1 Πλατωνικά στερεά	1
1.1 Τα πλατωνικά στερεά: Από τον Πλάτωνα στον Kepler	1
1.2 Σύνδεση των τεσσάρων στοιχείων (φωτιά, γη, αέρα, νερό) με τα κανονικά στερεά (τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, εικοσάεδρο)	6
1.3 Η εξήγηση του Πλάτωνα για τη δημιουργία της φύσης και την κατανόησή της	9
1.4 Η ανακάλυψη των πλατωνικών στερεών	10
1.5 Ο δυϊσμός των πλατωνικών στερεών και οι ομάδες των συμμετριών τους	13
1.6 Συμμετρίες τετραέδρου	14
1.7 Συμμετρίες κύβου-οκταέδρου	15
1.8 Συμμετρίες δωδεκαέδρου-εικοσαέδρου	18
2 Στερεά με έδρες κανονικά πολύγωνα και τα δυϊκά τους	21
2.1 Αρχιμήδεια στερεά	21
2.2 Μεταβατικότητα	32
2.3 Ομοιόμορφα πολύεδρα	34
2.4 Quasi-regular πολύεδρα	37
2.5 Στερεά Catalan	38
2.6 Στερεά Johnson (Δελτάεδρα)	46
2.7 Πρίσματα - Αντιπρίσματα	49
2.8 Kepler-Poinsot στερεά	50
2.8.1 Σύμβολο Schläfli	51
2.9 Ζονόεδρα (Zonohedra)	53

3 Το πρόβλημα της «ύπαρξης» μαθηματικών αντικειμένων και η κατασκευασσιμότητα κανονικών πολυγώνων	59
3.1 Το πρόβλημα της «ύπαρξης» μαθηματικών αντικειμένων	59
3.2 Κατασκευάσιμα πολύγωνα	61
3.3 Γιατί τα πέντε Πλατωνικά στερεά είναι τα μοναδικά κανονικά πολύεδρα . . .	64
4 Η συμβολή των Descartes, Euler, Poincaré στην ανάπτυξη της θεωρίας των πολυέδρων	67
4.1 Το Θεώρημα του Descartes	67
4.2 Ο τύπος του Euler και τα αποτελέσματά του	69
5 Εφαρμογές της θεωρίας των πολυέδρων στην Άλγεβρα	71
5.1 Η λύση της εξίσωσης 5ου βαθμού	71
5.2 Οι πολυεδρικές ομάδες συμμετριών	74
5.2.1 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού τετραέδρου T_d	74
5.2.2 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού οκταέδρου O_h	74
5.2.3 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού εικοσαέδρου I_h	75
6 Τα Μαθηματικά από το 300 π.χ. μέχρι την Αναγέννηση	77
6.1 Τα Μαθηματικά στην Αλεξάνδρεια μετά τον Ευκλείδη	77
6.2 Η παρακμή της επιστήμης - Τα Μαθηματικά στο Μεσαίωνα	81
7 Η προοπτική (perspective) στην τέχνη και η κανονικότητα	87
7.1 Τι είναι η Προοπτική	87
7.2 Η ιστορία της Προοπτικής μέχρι την Αναγέννηση	88
7.3 Brunelleschi, ο εφευρέτης της Προοπτικής	89
7.4 Η Προοπτική της Αναγέννησης	90
7.5 Τα πολύεδρα στην Τέχνη	94
7.5.1 Albrecht Dürer	100
7.6 Wenzel Jamnitzer - Abraham Sharp	107
7.7 Σύνδεση της προοπτικής με την αστρονομία	108
7.8 Ο ρόλος των κατόπτρων στην ανάπτυξη της Προοπτικής	109
8 Τα πολύεδρα στη σύγχρονη τέχνη	111

8.1	Puzzles, πλακοστρώσεις και origami	111
8.1.1	Puzzles	111
8.1.2	Πλακοστρώσεις	112
8.1.3	Origami	114
8.2	Καλλιτέχνες και μαθηματικοί	114
9	Πολύτοπα	123
9.1	Πολύτοπα ειδικής μορφής	125
9.2	Ο αριθμός f_k των k -διάστασης εδρών ενός πολύτοπου	128
9.3	Κανονικά πολύτοπα	130
9.3.1	Κανονικά πολύτοπα στις 4 διαστάσεις	130
9.3.2	Κανονικά πολύτοπα για διαστάσεις $d \geq 5$	135
10	Το θεώρημα του άνω φράγματος για πολύτοπα κάθε διάστασης	139
10.1	Εισαγωγή	139
10.2	Κυκλικά πολύτοπα - Γειτονικά πολύτοπα	141
10.3	Το πλέγμα εδρών του πολυτόπου P	149
10.4	Πολυεδρικά και πολυτοπικά συμπλέγματα	151
10.5	Κυψελοποιησιμότητα - Τρόπος κυψελοποίησης - Κυψελοποιήσιμα συμπλέγματα	156
10.6	Το $\mathbf{h}$ -διάνυσμα ενός d -πολυτόπου και οι εξισώσεις Dehn-Sommerville	162
10.7	Το Θεώρημα του Άνω Φράγματος	168
10.8	Πέντε ανοικτά προβλήματα σχετικά με τα κυρτά πολύτοπα	174
	Βιβλιογραφία	177

Εισαγωγή

Στη Γεωμετρία, πολύεδρο ορίζεται ένα τρισδιάστατο σχήμα, το οποίο φράσσεται από πεπερασμένα πολύγωνα. Η λέξη της αρχαίας ελληνικής γλώσσας «έδρα», σημαίνει βάση. Το πολύεδρο - πάντα με τη γεωμετρική έννοια - είναι η τρισδιάστατη εκδοχή του πολυτόπου, που ορίζεται σε κάθε διάσταση (Κεφάλαιο 9).

Στο 1ο και 2ο κεφάλαιο της εργασίας, αναφέρονται κυρίως τα Πλατωνικά και Αρχιμήδεια στερεά που μελετήθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους, οι οποίοι ασχολήθηκαν μόνο με κυρτά πολύεδρα (αυτός είναι και ο λόγος που ο Kepler και ο Poinsot ανακάλυψαν τόσους αιώνες αργότερα τα ομώνυμα πολύεδρα-αστέρες).

Η υψηλή συμμετρία των Πλατωνικών αλλά και των Αρχιμήδειων στερών, έχει σαν αποτέλεσμα την αισθητική και μαθηματική τους αξία.

Η έννοια της μεταβατικότητας είναι απαραίτητη για να ακολουθήσουν τα ομοιόμορφα και ψευδοκανονικά στερεά (υπάρχουν μόνο δύο που είναι κυρτά). Ακολουθεί ο πίνακας των Catalan στερεών (δυϊκών των Αρχιμήδειων στερεών) και με συντομία αναφέρονται τα στερεά Johnson και τα πρίσματα-αντιπρίσματα. Τα Kepler-Poinsot, σαν κανονικά μη κυρτά πολυέδρα, εξετάζονται χωριστά από την ευρύτερη οικογένεια των ομοιόμορφων πολυέδρων. Τα ζονόεδρα προσεγγίζονται σαν αθροίσματα Minkowski αλλά και με τον ορισμό του H. S. M. Coxeter.

Η κατασκευασιμότητα των κανονικών πολυγώνων (Κεφάλαιο 3) κρίνεται ενδιαφέρουσα, όχι μόνο γιατί από τα πολύγωνα κατασκευάζονται τα πολυέδρα, αλλά και γιατί προβλήματα ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων, απασχόλησαν διαχρονικά τους μαθηματικούς. Με το θεώρημα του Descartes στο 4ο κεφάλαιο, αποδεικνύεται αλγεβρικά ότι τα μόνα κανονικά κυρτά στερεά είναι ακριβώς τα πέντε Πλατωνικά. Ακόμη, με τον τύπο του Euler μπορούμε να διαπιστώνουμε αν δύο αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των κορυφών και των εδρών αντίστοιχα μπορούν να συνυπάρξουν ή όχι σε ένα κυρτό πολυέδρο.

Στο 5ο κεφάλαιο υπάρχει μια ιστορική αναδρομή πάνω στις προσπάθειες επίλυσης των εξισώσεων, και κυρίως των εξισώσεων 5ου βαθμού, όπου φαίνεται η αλληλεπίδραση της Θεωρίας Ομάδων με τις γεωμετρικές συμμετρίες. Αναφέρονται ακόμη οι ισόμορφες ομάδες των κλάσεων συζυγίας των πολυεδρικών ομάδων.

Το 6ο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη αφήγηση της πορείας της μαθηματικής επιστήμης από το 300 μ.Χ. μέχρι την Αναγέννηση.

Το 7ο κεφάλαιο αναφέρεται στην Προοπτική, που χρησιμοποιήθηκε από τους σημαντικότερους καλλιτέχνες της Αναγέννησης, πολλοί από τους οποίους υπήρξαν και μαθηματικοί. Οι μαθηματικοί-καλλιτέχνες αγαπούσαν ιδιαίτερα τα πολύεδρα, τα οποία εμφανίζονταν σε μεγαλειώδη έργα τους («Μελαγχολία» του Dürer).

Αλλά και οι νεώτεροι καλλιτέχνες, όπως ο Escher, δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα πολύεδρα. Στη σύγχρονη εποχή έχουν προκύψει προβλήματα πλακοστρώσεων και τομών (dissections) που συνδέονται άμεσα με τα πολύεδρα (Κεφάλαιο 8).

Το 9ο και ιδιαίτερα το 10ο κεφάλαιο, που αναφέρεται στο θεώρημα του Άνω Φράγματος, αποτελούν το καθαρά μαθηματικό μέρος της εργασίας.

Το θεώρημα του Άνω Φράγματος αφορά το μέγιστο αριθμό των k -εδρών ενός d -πολύτοπου για κάθε k με $0 \leq k \leq d-1$, όταν δίνεται το πλήθος των κορυφών n με $n \geq d+1$. Αποδείχτηκε αρκετά πρόσφατα (1970), ωστόσο από τις αρχές του 20ου αιώνα απασχόλησε μαθηματικούς όπως τον Gale, Grünbaum και άλλους.

Τα κυκλικά πολύτοπα, που παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην εικασία του Άνω Φράγματος, η οποία διατυπώθηκε το 1957 από τον Motzkin, είχαν ανακαλυφθεί πολύ νωρίς (1907) από τον Καραθεοδωρή. Συνδέθηκαν άμεσα με τα «γειτονικά-simplicial» πολύτοπα.

Ο Peter McMullen στηριζόμενος στις εξισώσεις Dehn-Sommerville και στην ιδιότητα της «κυψελοποιησιμότητας» (shellability) (η οποία αποδείχτηκε από τους Mani και Bruggesser το 1970) κατάφερε να αποδείξει τον Ιούλιο του 1970 το Θεώρημα του Άνω Φράγματος, αφού επινόησε και τον ορισμό του h -διανύσματος για κάθε πολύτοπο.

Θεωρώ ότι η επαφή των μαθητών (ακόμα και αυτών της πρώτης τάξης του Λυκείου) με τα κανονικά πολύεδρα θα βοηθούσε στην πρώιμη κατανόηση πολλών γεωμετρικών ιδιοτήτων και εννοιών όπως οι συμμετρίες (περιστροφές, ανακλάσεις, κλπ).

Ο H. S. M. Coxeter μέσα σε λίγες γραμμές δίνει έμφαση στη μαθηματική αξία των κανονικών πολυέδρων, αλλά και στην ομορφιά τους σαν αντικείμενα. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

«Ο κύριος λόγος που μελετάμε τα κανονικά πολύεδρα είναι ο ίδιος, όπως στην εποχή των Πυθαγορείων, καθώς τα συμμετρικά τους σχήματα απευθύνονται ιδιαίτερα στην αισθητική μας. Κάποιος που πιστεύει ότι τα μαθηματικά είναι τόσο χρήσιμα όσο και όμορφα, θα πρέπει να θυμάται ότι τα πολύτοπα έχουν εφαρμογές όχι μόνο στη γεωμετρία των αριθμών, αλλά ακόμα και σε πολύ πρακτικά θέματα όπως η θεωρία των επικοινωνιών και του γραμμικού προγραμματισμού.»

Θέλω να ευχαριστήσω των επιβλέποντα Αν. Καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα για το θέμα που επέλεξε και μου εμπιστεύθηκε, για την ιδέα του να συμπεριληφθεί το Θεώρημα του Άνω Φράγματος στην εργασία μου και την κατάλληλη βιβλιογραφία και καθοδήγηση που μου παρείχε και τον Επ. Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου για τις συμβουλές του. Ιδιαίτερος ευχαριστώ την Αν. Καθηγήτρια κ. Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα για την πολύτιμη βοήθειά της στο κεφάλαιο που αναφέρεται στο Θεώρημα του Άνω Φράγματος. Επίσης ευχαριστώ τον μεταπτυχιακό φοιτητή του Φυσικού Τμήματος κ. Ναβίτ Κωνσταντίνου για την ηλεκτρονική επιμέλεια της εργασίας.

Αθήνα

Φεβρουάριος 2010

Κεφάλαιο 1

Πλατωνικά στερεά

1.1 Τα πλατωνικά στερεά: Από τον Πλάτωνα στον Kepler

Προγενέστεροι φιλόσοφοι του Πλάτωνα, όπως ο Εμπεδοκλής (495-435 π.Χ.) θεωρούσαν ότι τα υλικά σώματα είναι συνδυασμοί τεσσάρων αρχικών στοιχείων: φωτιά, γη, αέρας, νερό. Αποσπάσματα που έχουν διασωθεί από το έργο του «Περί Φύσεως» αναδεικνύουν τις απόψεις του αρχαίου Έλληνα φιλόσοφου για την εναλασσόμενη κυριαρχία της Φιλίας (φιλότης) και της Διαμάχης (Νείκος) πάνω στα τέσσερα ριζώματα (πυρ, αήρ, ύδωρ, γη).

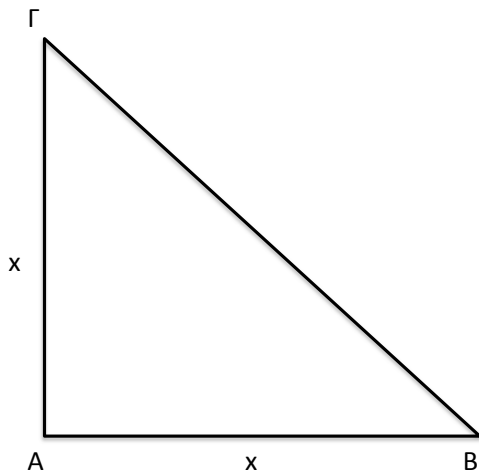
Ο Λεύκιππος, φιλόσοφος του 5ου αιώνα π.Χ. εισηγητής της ατομικής θεωρίας και ο μαθητής του Δημόκριτος, διατύπωσαν την υπόθεση ότι η ύλη αποτελείται από άτομα. Τα άτομα, μέσω συνδυασμών σχηματίζουν τα σώματα.

Ο Πλάτων ωστόσο ήταν αυτός που ασχολήθηκε πρώτος με τη διαφοροποίηση των τεσσάρων στοιχείων.

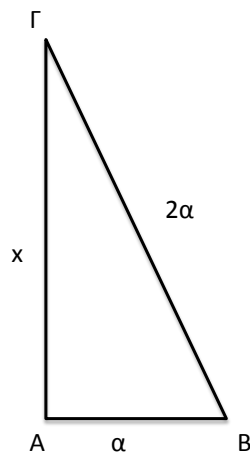
Κάθε στερεό - σύμφωνα με τη θεωρία του - έχει σαν σύνορό του επίπεδες επιφάνειες που αποτελούνται από τρίγωνα. Τα θεμελιώδη τρίγωνα που παράγουν τα επίπεδα σχήματα είναι δύο ειδών:

- Το ορθογώνιο και ισοσκελές

- Το ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο με την ιδιότητα: η μικρότερη από τις κάθετες πλευρές του να ισούται με το μισό της υποτείνουσας (53δ, Τίμαιος).



1.1.1α': ορθογώνιο ισοσκελές



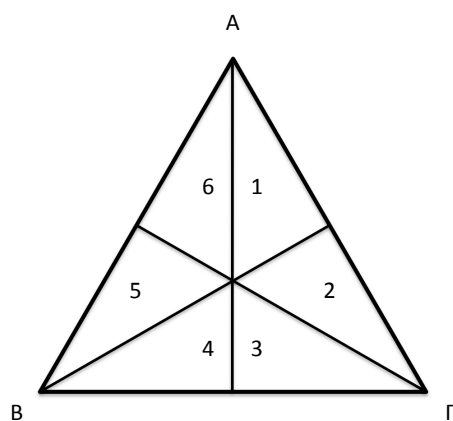
1.1.1β': ορθογώνιο σκαληνό με τη μικρότερη από τις κάθετες πλευρές να ισούται με το μισό της υποτείνουσας

Σχήμα 1.1.1: Τα θεμελειώδη πλατωνικά τρίγωνα.

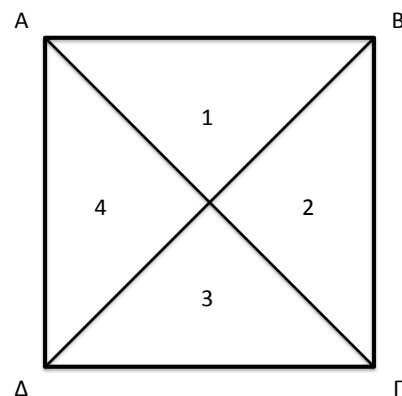
Έξι τρίγωνα του είδους 1.1.1β' τοποθετημένα όπως το σχήμα 1.1.2α' δημιουργούν το ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ τέσσερα σχήματα του 1.1.1α' είδους δημιουργούν, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.2β' το τετράγωνο.

Από τα «τέλεια» αυτά σχήματα, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο, ο Πλάτων θα προχωρήσει στη δημιουργία των τεσσάρων (από τα πέντε) κοσμικών σχημάτων: του τετράεδρου, του οκτάεδρου, του εικοσάεδρου και του κύβου.

Κανονικό τετράεδρο Στηριζόμενο σε μια από τις τέσσερις τριγωνικές έδρες του μοιάζει με πυραμίδα (σχήμα 1.1.3). Τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα τοποθετούνται με τρόπο ώστε κάθε τρεις από τις επίπεδες γωνίες τους να δημιουργούν μια στερεά γωνία.

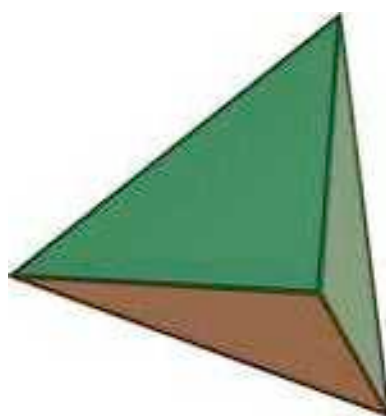


1.1.2α': ισόπλευρο τρίγωνο



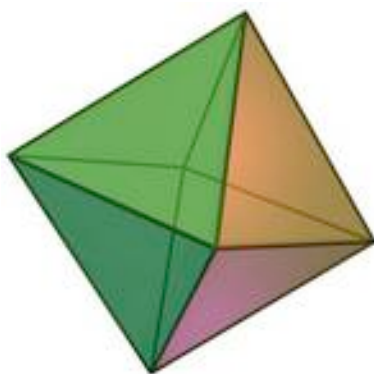
1.1.2β': τετράγωνο

Σχήμα 1.1.2: Το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο.



Σχήμα 1.1.3: Το κανονικό τετράεδρο (4 κορυφές, 4 έδρες, 6 ακμές).

Κανονικό οκτάεδρο Σχηματίζεται από οκτώ έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε η κάθε μία από τις έξι στερεές γωνίες του να αποτελείται από τέσσερις επίπεδες γωνίες (σχήμα 1.1.4).



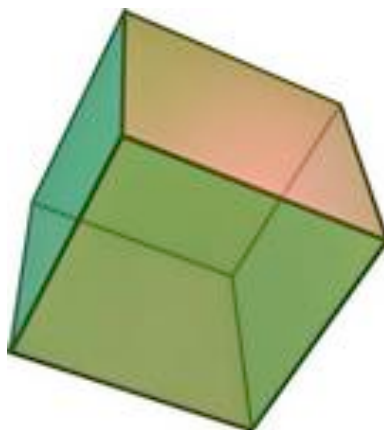
Σχήμα 1.1.4: Το κανονικό οκτάεδρο (6 κορυφές, 8 έδρες, 12 ακμές).

Κανονικό εικοσάεδρο Σχηματίζεται από είκοσι έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) οι οποίες σχηματίζουν δώδεκα στερεές γωνίες, που έχουν σαν σύνορό τους πέντε επίπεδες γωνίες (σχήμα 1.1.5).



Σχήμα 1.1.5: Το κανονικό εικοσάεδρο (12 κορυφές, 20 έδρες, 30 ακμές).

Κύβος Έξι τετράγωνα τοποθετούνται μαζί με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μία από τις οκτώ στερεές γωνίες του να αποτελείται από τρεις επίπεδες γωνίες (σχήμα 1.1.6).



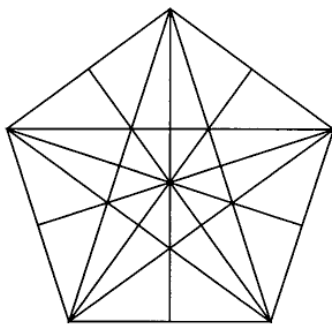
Σχήμα 1.1.6: Ο κύβος (8 κορυφές, 6 έδρες, 12 ακμές).

Το 5ο πλατωνικό στερεό, το κανονικό δωδεκάεδρο, αποτελείται από δώδεκα κανονικά πεντάγωνα ίσα μεταξύ τους. Είναι το στερεό που «ο Θεός χρησιμοποιούσε για να κεντά τους αστερισμούς σε ολόκληρο τον ουρανό» (55γ, Τίμαιος).



Σχήμα 1.1.7: Το κανονικό δωδεκάεδρο (20 κορυφές, 12 έδρες, 30 ακμές).

Οι δώδεκα πενταγωνικές έδρες συσχετίστηκαν με τους δώδεκα οίκους του ζωδιακού, ή με τους δώδεκα μήνες του έτους. Κάθε πενταγωνική έδρα (βλέπε σχήμα 1.1.8) αποτελείται από 30 τρίγωνα που αντιστοιχούν στους 30 βαθμούς κάθε οίκου, ή ακόμη και στις 30 ημέρες κάθε μήνα.



Σχήμα 1.1.8: Η πενταγωνική έδρα του κανονικού δωδεκάεδρου που αποτελείται από 30 ορθογώνια τρίγωνα.

1.2 Σύνδεση των τεσσάρων στοιχείων (φωτιά, γη, αέρα, νερό) με τα κανονικά στερεά (τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, εικοσάεδρο)

Α. Φωτιά - Τετράεδρο Το τετράεδρο με τον ελάχιστο αριθμό εδρών είναι το ελαφρύτερο με τις πιο κοφτερές γωνίες, γνωρίσματα της φωτιάς. Στο άγαλμα του John Robinson, «Η φωτιά του Προμηθέα» (σχήμα 1.2.9) έχουμε μια αναπαράσταση της αντιστοιχίας φωτιά-τετράεδρο.

Β. Γη - Κύβος Ο κύβος στηριζόμενος σε οποιαδήποτε τετραγωνική του έδρα εκφράζει τη σταθερότητα, χαρακτηριστικό της γήινης ύλης, της οποίας το βάρος έχει κατακόρυφη διεύθυνση με την πεποίθηση που επικρατούσε τότε ότι η γη βρίσκεται σε ηρεμία στο κέντρο του κόσμου.

Γ. Αέρα - Οκτάεδρο Στο στοιχείο του αέρα αντιστοιχεί το οκτάεδρο. Στις μεταγενέστερες του Πλάτωνα συνδέσεις των στοιχείων με τα κοσμικά στερεά ανήκει η σύνδεση του οξυγόνου - βασικού συστατικού του αέρα - με το σύμβολο Ο (οκτάεδρο). Την εποχή του Πλάτωνα, καθώς το οκτάεδρο φαίνεται σαν το σχήμα που «κρέμεται» από τις αντίθετες γωνίες, με το τετράγωνό του να βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των γωνιών αυτών, διαιρώντας το σχήμα σε δύο ίσα μέρη, ακριβώς όπως κρέμεται μια σφαίρα από τους πόλους της, δείχνει την «κίνηση»,

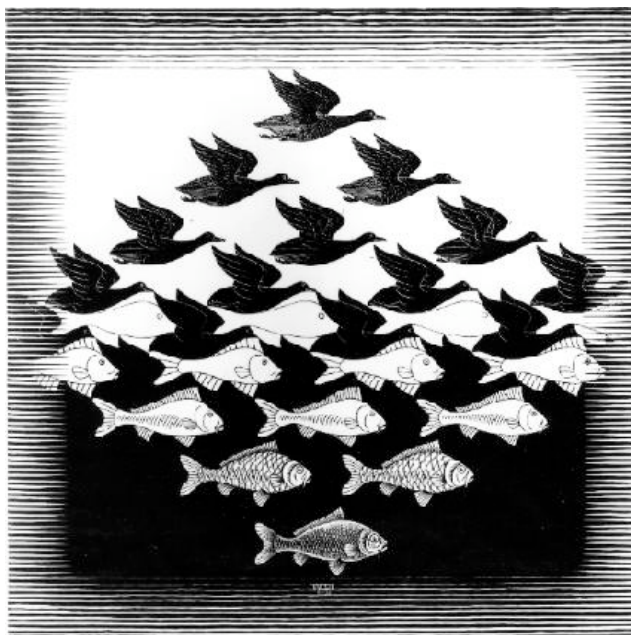


Σχήμα 1.2.9: Η φωτιά του Προμηθέα.

βασικό χαρακτηριστικό του αέρα, του πιο κινητικού στοιχείου της φύσης.

Δ. Νερό - Εικοσάεδρο Ο μεγάλος αριθμός των εδρών του εικοσάεδρου συμβολίζει την υγρασία, χαρακτηριστικό του νερού, η οποία συγκρατεί τα σύνορα άλλων αντικειμένων.

Ο Αριστοτέλης επινόησε την ύπαρξη ενός πέμπτου στοιχείου, του αιθέρα, που επικρατεί έξω από τη γη και από το οποίο είναι δημιουργημένα τα ουράνια σώματα. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ο ουρανός διέφερε θεμελιακά από τον γήινο κόσμο. Είχε παρατηρήσει ότι τα ουράνια σώματα είναι φωτεινά και διαγράφουν ατέρμονες κινήσεις, παραμένοντας άφθαρτα και αμετάβλητα. Άρα υπέθεσε την ύπαρξη μιας άγνωστης ενεργειακής μορφής. Ο Αριστοτέλης δεν συνέδεσε τον αιθέρα με το δωδεκάεδρο παρά την «θειότητα» του στερεού αυτού. Την χαριστική βολή στον αιθέρα έδωσε το 1905 ο Einstein με τη θεωρία της Σχετικότητας.



Σχήμα 1.2.10: Λιθογραφία του M. C. Escher, Ουρανός & Ύδωρ I, 1938.

Στο διάλογο «Τίμαιος» του Πλάτωνα, ο Τίμαιος αναφερόμενος στα κοσμικά σχήματα επιχειρεί να μαθηματικοποιήσει τη φύση. Διηγείται πώς το «σχήμα του κόσμου» δημιουργήθηκε από την αναλογία:

$$\frac{\text{φωτιά}}{\text{αέρας}} = \frac{\text{αέρας}}{\text{νερό}} = \frac{\text{νερό}}{\text{γη}}$$

Η γη και η φωτιά συνδέονται μέσω του νερού και του αέρα που είναι οι γεωμετρικοί μέσοι της αναλογίας (η προέλευσή της πιθανότατα από τους Πυθαγόρειους). Ο Τίμαιος δίνει στο σώμα του κόσμου το σχήμα της σφαίρας η οποία είναι το τέλει στερεό, εκθειάζοντας την ομορφιά, συμμετρία και πληρότητά της.

Η σφαίρα περικλείει τα κοσμικά σχήματα και μόνο αυτά τα πέντε κανονικά πολύεδρα μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα.

Ο Πρόκλος (412-485μ.Χ.), Έλληνας νεοπλατωνικός φιλόσοφος-μαθηματικός, μαθητής του Πλάτωνα και σχολιαστής των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, θεωρούσε τη σφαίρα σαν το τέλει σχήμα γιατί έχει το μεγαλύτερο όγκο από όλα τα στερεά που έχουν το ίδιο με αυτήν εμβαδόν επιφανείας. Ο Πλάτων υποστήριζε ότι τρία μόνο από τα κανονικά πολύεδρα, το τετράεδρο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο έχουν τη δυνατότητα να μετασχηματίζονται αμοιβαία. Τον

ισχυρισμό του απέδωσε στην ιδέα ότι τα τέσσερα στερεά σχηματίζονται από τα δύο θεμελιώδη του τρίγωνου. Το τετράεδρο, οκτάεδρο και εικοσάεδρο σχηματίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει τη μία κάθετο πλευρά του ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Ο κύβος που συνδέθηκε με τη γη, προέρχεται από το τρίγωνο του άλλου είδους (το ορθογώνιο ισοσκελές) αφού οι έδρες του είναι τετράγωνα. Για το λόγο αυτό ο Πλάτων πίστευε ότι τα μέρη της γης δε μετασχηματίζονται σε μέρη άλλου είδους.

1.3 Η εξήγηση του Πλάτωνα για τη δημιουργία της φύσης και την κατανόησή της

Ο Πλάτων επιχείρησε να εξηγήσει πώς τα τέσσερα στοιχεία: φωτιά, γη, αέρας και νερό, συνδυαζόμενα σε διάφορες αναλογίες παράγουν ουσίες υλικές οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Το νερό π.χ. θερμαινόμενο από τη φωτιά διασπάται και τα θραύσματά του επανασυνδεόμενα παράγουν δύο μόρια αέρα (ατμού) και ένα μόριο φωτιάς. Επινόησε την παρακάτω εξίσωση, εξισώνοντας τον αριθμό των τριγώνων και στα δύο μέλη.

$$\langle \text{υγρό} \rangle \xrightarrow{\text{θερμότητα}} 2 \langle \text{αέριο} \rangle + \langle \text{φωτιά} \rangle$$

$$20 = 2 \cdot 8 + 4$$

Με την αντιστοίχιση αυτή των γεωμετρικών μοντέλων των κανονικών πολυέδρων στα φυσικά στοιχεία των προγενέστερων φιλοσόφων του, ο Πλάτων μπόρεσε να εξηγήσει φαινόμενα όπως π.χ. την εξάτμιση (υπό συνθήκες) του νερού σε υδρατμούς (αέρα). Παρά την κριτική που δέχτηκε η εξίσωσή του, δεν παύει να αποτελεί ένα παράδειγμα που ενισχύει το ρόλο της Γεωμετρίας στην εξήγηση της δομής του κόσμου.

Ο Johannes Kepler (1571-1630), ιδιαίτερα γνωστός για τους «νόμους» του που αφορούν την κίνηση γύρω από τον Ήλιο των πλανητών, παρ' ότι δέχτηκε ότι υπάρχει σύνδεση των στοιχείων με τα πέντε κοσμικά στερεά, λόγω κοινών ιδιοτήτων τους, θεωρούσε ότι ο αριθμός

των στοιχείων και η υπόθεση ότι η γη είναι ακίνητη στο κέντρο του κόσμου είναι θέματα πιο ενδιαφέροντα για συζήτηση, παρά ο αριθμός των κοσμικών σχημάτων και η σύνδεσή τους με τα στοιχεία. Ο Kepler ως προς την επιστημονική του φιλοσοφία υπήρξε «Πυθαγόρειος». Πίστευε ότι η Δημιουργία αποτελεί μια ολότητα, ενώ η φύση περιγράφεται με μαθηματικές σχέσεις.

Η άποψή του για τη Δημιουργία ερχόταν σε αντίθεση με την πλατωνική και αριστοτελική άποψη ότι η Γη είναι διαφορετική από το υπόλοιπο Σύμπαν (υπερσελήνιος κόσμος) και ότι σε αυτήν ισχύουν διαφορετικοί νόμοι.

Η προσπάθειά του ήταν να ανακαλύψει νόμους για ολόκληρο το σύμπαν με την κατάληξη της διατύπωσης των τριών νόμων του. Έδωσε εξηγήσεις για τις επιδράσεις των ουράνιων σωμάτων σε γήινα φαινόμενα, όπως την επίδραση της Σελήνης στις παλίρροιες.

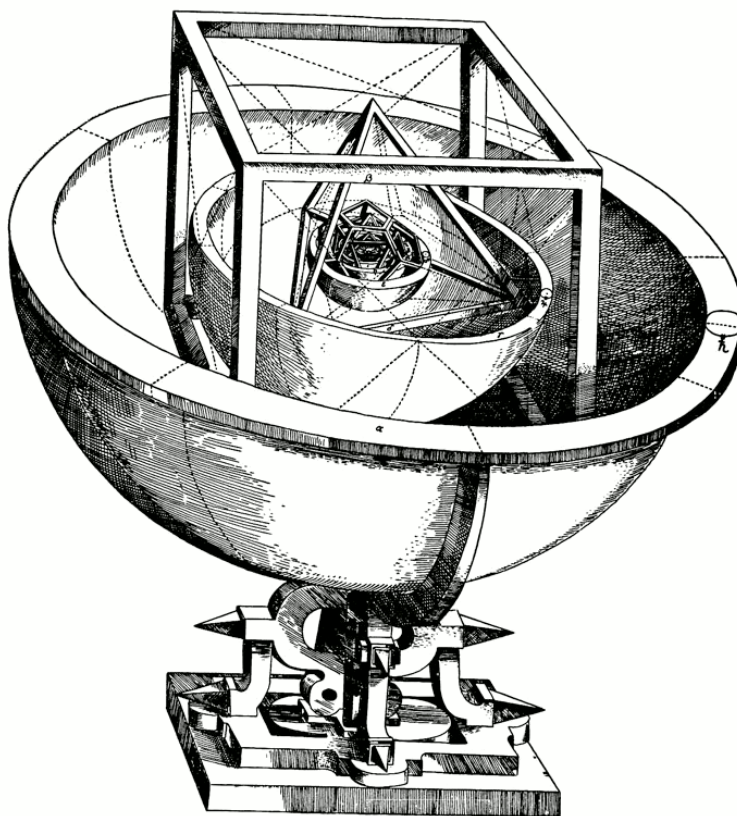
Σκεπτόμενος σαν Πυθαγόρειος για τον αριθμό των τέλειων πολυέδρων, δε θεώρησε ότι ήταν σύμπτωση πως ο αριθμός τους (5) ήταν κατά μια μονάδα μικρότερος του αριθμού 6 των μέχρι τότε γνωστών πλανητών.

Σαν υποστηρικτής του ηλιοκεντρικού συστήματος, προσπάθησε να αποδείξει ότι οι αποστάσεις των πλανητών από τον Ήλιο δίνονται από τις ακτίνες σφαιρών εγγεγραμμένων στα κανονικά πολυέδρα, έτσι ώστε η σφαίρα του ενός πλανήτη να αποτελεί περιγεγραμμένη σφαίρα του πολυέδρου του εσωτερικού του πλανήτη. Η πιο εσωτερική τροχιά, αυτή του Ερμή, είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μικρότερη σφαίρα.

Το σχήμα των πολυέδρων Στον Κρόνο αντιστοιχίζει τον κύβο, στον Δία το τετράεδρο, στον Άρη το δωδεκάεδρο, στην Αφροδίτη το εικοσάεδρο και στον Ερμή το οκτάεδρο. Η Γη αντιπροσωπεύει το διαχωριστικό σώμα μεταξύ των δύο ομάδων των στερεών αυτών.

1.4 Η ανακάλυψη των πλατωνικών στερεών

Ο διάλογος «Τίμαιος» του Πλάτωνα, είναι το παλαιότερο κείμενο που έχει διασωθεί και αναφέρεται στα κοσμικά σχήματα. Ο κύβος και το τετράεδρο (πυραμίδα) ήταν γνωστά στους Πυθαγορείους, αλλά και σε προγενέστερους του Ελληνικού, πολιτισμούς. Οι Ετρούσκοι που κατοίκησαν στην Ιταλία το 500 π.Χ είχαν κοσμήματα σχήματος δωδεκαεδρικού.



Σχήμα 1.3.11: Το μοντέλο με βάση τα πλατωνικά στερεά για το ηλιακό σύστημα του Kepler

Μια πειστική εξήγηση για την πρώιμη ανακάλυψη του δωδεκαέδρου από Ετρούσκους και Πυθαγορείους είναι το γεγονός ότι στην Ιταλία υπήρχαν άφθονα κοιτάσματα πυριτίου (ορυκτό με κρυστάλλους σχεδόν δωδεκαεδρικούς και κυβικούς). Οι κυριώτερες πηγές που έχουμε για την ανακάλυψη του τετραέδρου κύβου, δωδεκαέδρου (από τους Πυθαγορείους), και του οκταέδρου και εικοσαέδρου (από τον Θεαίτητο) είναι αυτές του Ευδήμου (370-300 π.Χ.) και του νεοπλατωνικού Σύριου φιλόσοφου Ιάμβλιχου (245-325 μ.Χ.).

Ο Θεαίτητος (415-369 π.Χ) σπουδαίος Αθηναίος μαθηματικός, δίδασκε στην Ακαδημία του Πλάτωνα, και μαζί με τον Εύδοξο συνέβαλε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Από τα μαθηματικά του επιτεύγματα ήταν και η γενίκευση για την ασυμμετρία (ο δάσκαλός του Θεόδωρος ο Κυρηναίος είχε αποδείξει την «ασυμμετρία» των τετραγωνικών ριζών των 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 και 17).

Ο Πλάτωνας για να τιμήσει τη μνήμη του Θεαίτητου, έγραψε τον ομώνυμο διάλογο.



Σχήμα 1.3.12: Το πιάτο του Wenzel, από τον Wenzel Jamnitzer, 1568.

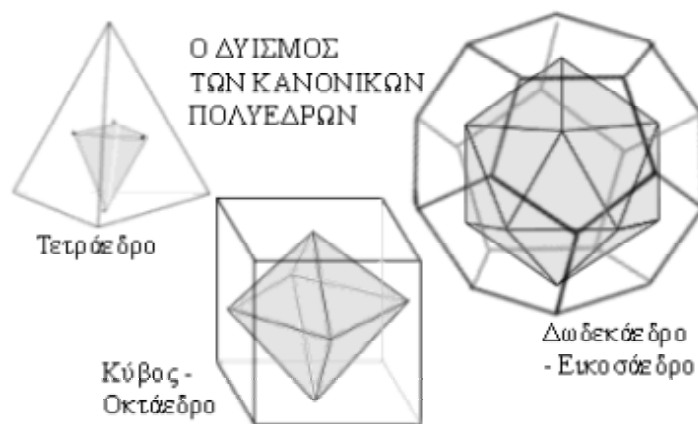
Κατά τον Sir Thomas Heath, η καθυστέρηση της ανακάλυψης του κανονικού οκτάεδρου οφείλεται στο ότι ενώ η πυραμίδα ήταν γνωστή στους μαθηματικούς εκείνης της εποχής, το οκτάεδρο δεν παρουσίαζε μαθηματικό ενδιαφέρον, αφού δεν ήταν παρά μια διπλή πυραμίδα. Η ανακάλυψη της έννοιας της κανονικότητας για τα πλατωνικά στερεά, έδωσε στο οκτάεδρο την μαθηματική του αξία. Η κανονικότητα είναι η συνθήκη που προσδίνει στα στερεά αυτά την ιδιαίτερη γοητεία τους έναντι των άλλων στερεών. «Τα πολύεδρα που έχουν ίσες κανονικές έδρες, αλλά και επί πλέον μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα είναι ακριβώς τα πέντε πλατωνικά στερεά: κανονικό τετράεδρο, κύβος, κανονικό οκτάεδρο, κανονικό δωδεκάεδρο και κανονικό εικοσάεδρο».

1.5 Ο δυϊσμός των πλατωνικών στερεών και οι ομάδες των συμμετριών τους

Ορισμός 1.5.1. Δύο πολύεδρα είναι *δυϊκά* αν τα κέντρα των εδρών του ενός συμπίπτουν με τις κορυφές του άλλου και αντίστροφα.

(Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός για τα δυϊκά πολύτοπα θα δοθεί στο κεφάλαιο 9.)

Τα δυϊκά γεωμετρικά σχήματα είναι αλληλοπαραγόμενα, π.χ. ο κύβος, δυϊκό σχήμα του κανονικού οκτάεδρου, μετασχηματίζεται με λογικό τρόπο σε οκτάεδρο και αντίστροφα. Το δυϊκό σχήμα του κανονικού τετράεδρου είναι ο εαυτός του. Είναι δηλαδή αυτοπαραγόμενο στερεό. Το δυϊκό του δωδεκαέδρου είναι το εικοσάεδρο. Το πλήθος επομένως των εδρών γίνεται πλήθος κορυφών και αντίστροφα για τα δυϊκά στερεά.

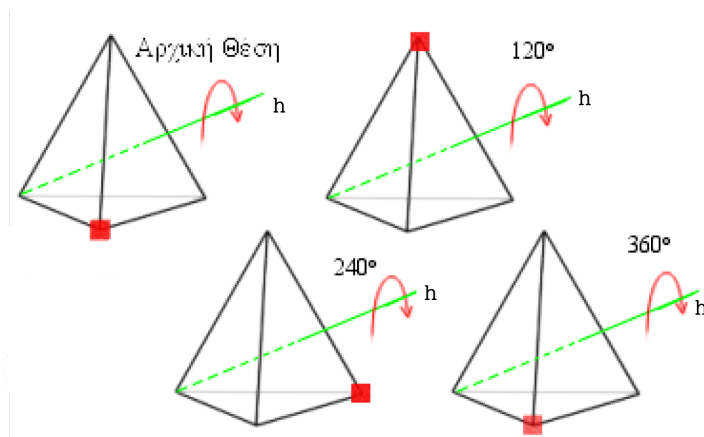


Σχήμα 1.5.13: Ο δυϊσμός των κανονικών πολυέδρων

Οι ομάδες συμμετρίας των δυϊκών σωμάτων είναι οι ίδιες, αφού κάθε ισομετρία που αφήνει αναλλοίωτο ένα σχήμα θα αφήνει αναλλοίωτο και το δυϊκό του.

1.6 Συμμετρίες τετραέδρου

Το κανονικό τετράεδρο έχει έδρες 4 ισόπλευρα τρίγωνα, 4 κορυφές σε κάθε μία από τις οποίες ενώνονται 3 ακμές. Οι δυνατές συμμετρίες (περιστροφές-ανακλάσεις) φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:

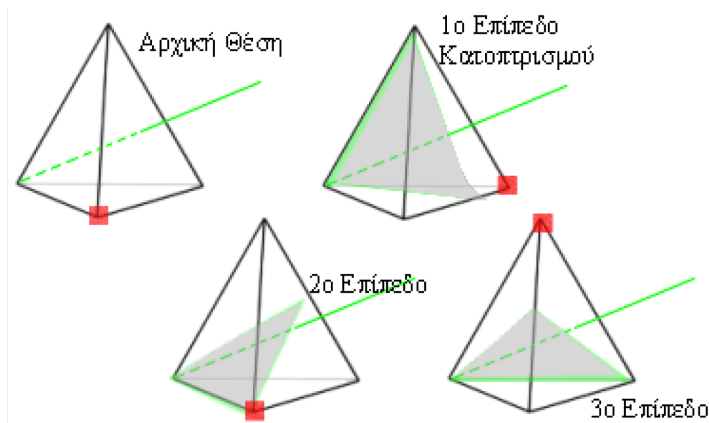


Σχήμα 1.6.14: Οι περιστροφικές συμμετρίες του τετραέδρου ως προς ευθεία (h)

Επειδή υπάρχουν τρεις άξονες (h) για κάθε τετράεδρο, θα έχουμε $3 \times 4 = 12$ περιστροφικές

συμμετρίες.

Το παρακάτω σχήμα δίνει τους κατοπτρισμούς:



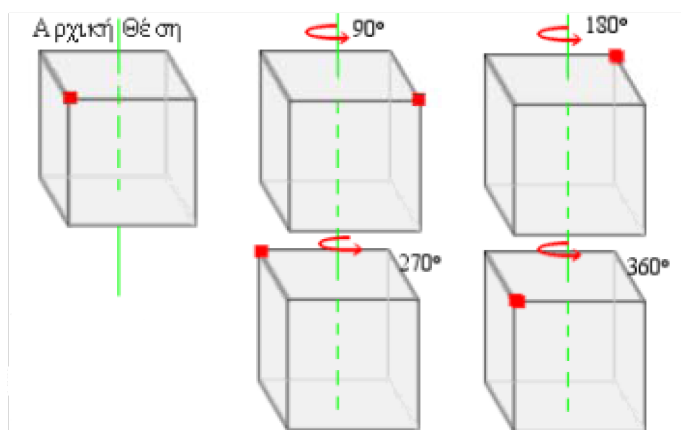
Σχήμα 1.6.15: Οι κατοπτρικές συμμετρίες του τετραέδρου ως προς διάφορα επίπεδα

Υπάρχουν επομένως $3 \times 4 = 12$ κατοπτρισμοί.

Άρα η ομάδα συμμετριών του κανονικού τετραέδρου, η λεγόμενη «τετραεδρική» αποτελείται από 24 στοιχεία (συμμετρίες) και συμβολίζεται με το γράμμα T_d (tetrahedron).

1.7 Συμμετρίες κύβου-οκταέδρου

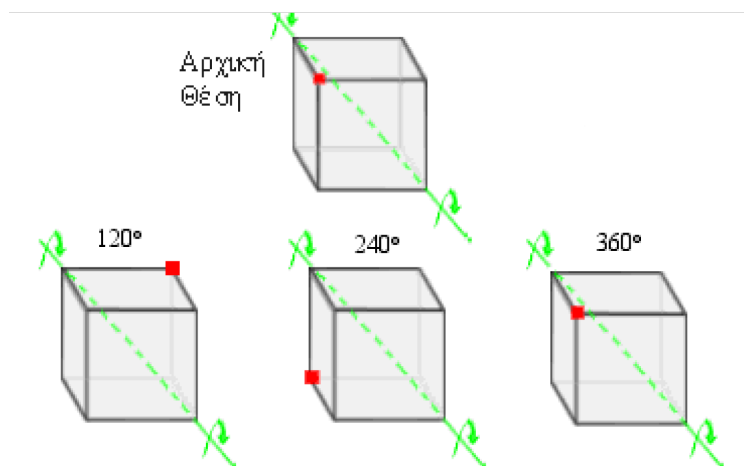
Περιστροφές κύβου Για τις περιστροφικές συμμετρίες του κύβου: Υπάρχουν 3 ευθείες-άξονες που διέρχονται από τα κέντρα κάθε ζεύγους παραλλήλων εδρών, και ως προς καθεμία ο κύβος έχει 4 περιστροφικές συμμετρίες. (περιστροφές του κύβου γύρω από έναν άξονα κατά 90° , 180° , 270° , 360° αντίστοιχα) χωρίς αλλαγή του προσανατολισμού του κύβου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.7.16: Περιστροφικές συμμετρίες του κύβου ως προς έναν από τους κάθετους άξονες

Έχουμε συνολικά $4 \times 3 = 12$ περιστροφικές συμμετρίες.

Ο κύβος έχει 4 διαγώνιες ευθείες ως προς τις οποίες έχει τρεις περιστροφικές συμμετρίες για κάθε μία διαγώνιο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

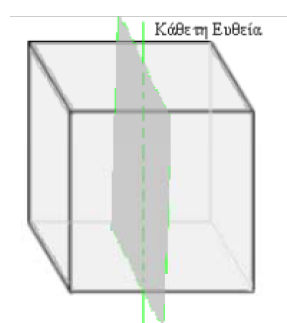


Σχήμα 1.7.17: Περιστροφικές συμμετρίες ως προς μία από τις 4 διαγωνίους του κύβου.

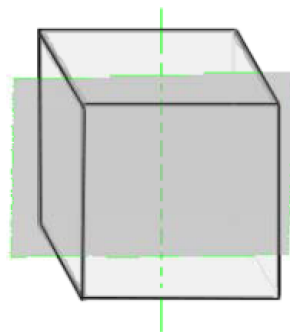
Επομένως ο κύβος έχει συνολικά 24 περιστροφικές συμμετρίες, όπως και το δυϊκό του σχήμα, το κανονικό οκτάεδρο.

Κατοπτρισμοί κύβου Κάθε κάθετος άξονας ορίζει τέσσερα διαφορετικά επίπεδα που είναι ανά δύο κάθετα. Υπάρχουν τέσσερις κατοπτρικές συμμετρίες για κάθε άξονα, άρα συνολικά

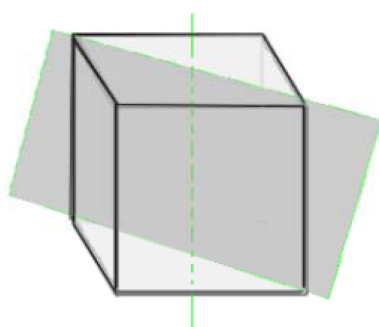
$3 \times 4 = 12$ κατοπτρικές συμμετρίες (σχήμα 1.7.18).



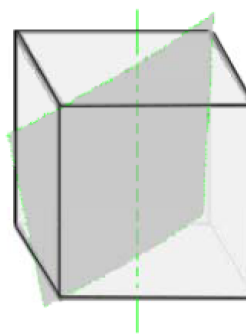
1.7.18α: 1ο επίπεδο κατοπτρικής συμμετρίας



1.7.18β: 2ο επίπεδο κατοπτρικής συμμετρίας



1.7.18γ: 3ο επίπεδο κατοπτρικής συμμετρίας



1.7.18δ: 4ο επίπεδο κατοπτρικής συμμετρίας

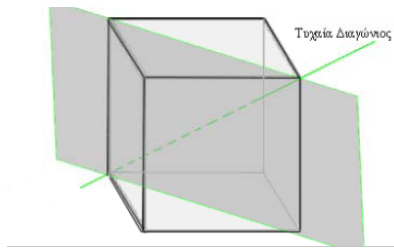
Σχήμα 1.7.18: Τα κάθετα επίπεδα κατοπτρικής συμμετρίας του κύβου.

Όμοια, για κάθε μία από τις τέσσερις διαγωνίους ορίζονται τρία επίπεδα ανάκλασης όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7.19

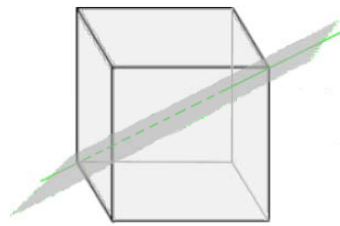
Άρα συνολικά έχουμε $3 \times 4 = 12$ κατοπτρισμούς.

Ο κύβος όπως και το κανονικό οκταέδρο έχουν επομένως 48 συμμετρίες (24 περιστροφικές και 24 κατοπτρικές).

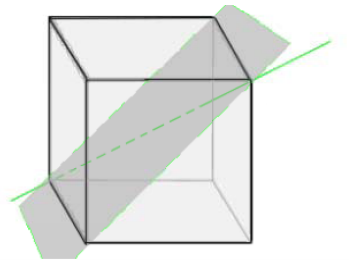
Ο Weyl απέδειξε ότι οι συμμετρίες κάθε κανονικού πολυέδρου αποτελούν ομάδα. Η ομάδα συμμετριών του κανονικού οκταέδρου και του κύβου ονομάζεται «οκταεδρική» και συμβολίζεται με το γράμμα O_h (octahedron).



1.7.19α': 1ο διαγώνιο επίπεδο



1.7.19β': 2ο διαγώνιο επίπεδο



1.7.19γ': 3ο διαγώνιο επίπεδο

Σχήμα 1.7.19: Τα διαγώνια επίπεδα κατοπτρικής συμμετρίας του κύβου.

1.8 Συμμετρίες δωδεκαέδρου-εικοσαέδρου

Η ομάδα των περιστροφών του εικοσαέδρου έχει τάξη ίση με 60 και είναι ισομορφική με την ομάδα A_5 των άρτιων μεταθέσεων ενός συνόλου με 5 στοιχεία.

Η ομάδα όλων των συμμετριών του εικοσαέδρου έχει τάξη 120 και συμβολίζεται με το γράμμα I_h (ikosahedron).

Σε αντίθεση με τα επίπεδα σχήματα (τρίγωνο-τετράγωνο-πεντάγωνο) τα οποία δεν μετασχηματίζονται το ένα στο άλλο, στο χώρο έχουμε τη δυνατότητα μετάβασης από το δωδεκάεδρο ή το εικοσαέδρου στον κύβο και από τον κύβο στο τετράεδρο.

Οι 12 κορυφές του εικοσαέδρου και οι 6 από τις ακμές του βρίσκονται στην επιφάνεια ενός νοητού κύβου. Οι 8 κορυφές του κύβου συμπίπτουν με τις 8 κορυφές ενός δωδεκαέδρου που έχει ακμή ίση με αυτή του εικοσαέδρου. Οι υπόλοιπες 12 κορυφές του δωδεκαέδρου και 6 από τις ακμές του βρίσκονται στην επιφάνεια ενός άλλου κύβου, του οποίου η ακμή βρίσκεται σε λόγο με την ακμή του πρώτου νοητού κύβου, ίσο με τον αριθμό $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.618$.

Με τον ίδιο τρόπο, οι 6 ακμές κάθε τετραέδρου μπορούν να ορίσουν τις διαγωνίους των 6 εδρών ενός κύβου και οι 4 κορυφές του τετραέδρου να συμπίσουν με 4 από τις κορυφές του κύβου, ενώ οι υπόλοιπες 4 κορυφές του κύβου μαζί με τις 6 άλλες διαγώνιες σχηματίζουν ένα τετράεδρο. Οι 20 κορυφές του δωδεκαέδρου είναι οι κορυφές πέντε τετραέδρων.

Στην παράγραφο 5.2, (Οι πολυεδρικές ομάδες συμμετριών), αναφέρονται εκτενέστερα οι ομάδες των συμμετριών των πέντε πλατωνικών στερεών.

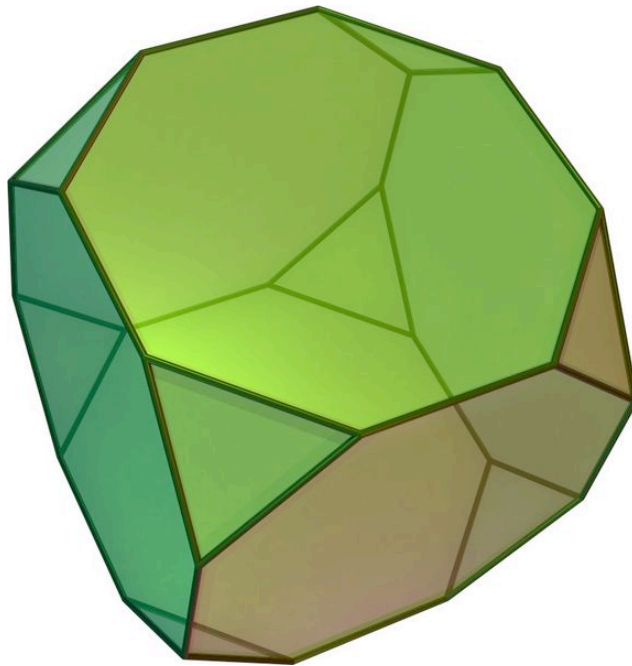
Κεφάλαιο 2

Στερεά με έδρες κανονικά πολύγωνα και τα δυϊκά τους

2.1 Αρχιμήδεια στερεά

Στο 5ο βιβλίο της «Συναγωγής» του Πάππου (290-350μ.Χ.) αναφέρονται 13 ημικανονικά πολυέδρα που περιγράφηκαν από τον Αρχιμήδη και προς τιμήν του φέρουν το όνομα «Αρχιμήδεια». Τα στερεά αυτά είναι «επιφανειακά» κανονικά, με την έννοια ότι κάθε έδρα τους είναι κανονικό πολύγωνο, ωστόσο όλες οι έδρες τους δεν είναι του ίδιου είδους πολύγωνα, όπως δείχνει το σχήμα 2.1.1.

Στα Αρχιμήδεια στερεά κάθε κορυφή είναι «ισοδύναμη» με κάθε άλλη με τις έδρες γύρω από κάθε κορυφή να είναι είναι τοποθετημένες με την ίδια διάταξη. Είναι εύλογο λοιπόν, γιατί τα Αρχιμήδεια στερεά χρησιμοποιήθηκαν τόσο από μαθηματικούς, αλλά και από καλλιτέχνες. Το ρομβοκυβοκτάεδρο έχει μετατραπεί στο αστέρι της Βηθλεέμ με την προέκταση των 26 πλευρών του, έτσι ώστε αυτές να μοιάζουν με ακτίνες άστρου. Αυτά τα γλυπτά διακοσμητικά αστέρια τα συναντάμε σε οβελίσκους. Διακοσμούν ακόμη και εκκλησίες εποχής Μπαρόκ.



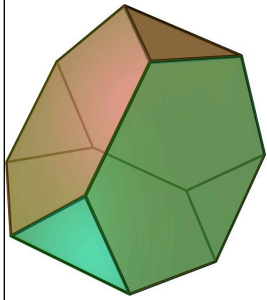
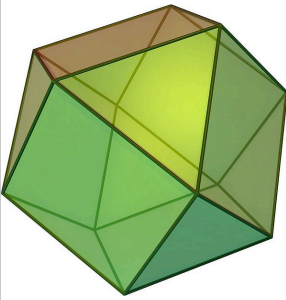
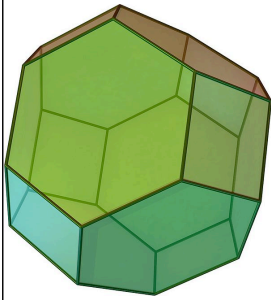
Σχήμα 2.1.1: Ο κόλουρος κύβος (Σε κάθε κορυφή του συναντώνται: τρίγωνο-οκτάγωνο-οκτράγωνο κυκλικά).

Ο Πάππος από την Αλεξάνδρεια περιγράφει τα Αρχιμήδεια στερεά σε χειρόγραφο που έχει διατυπωθεί στη Βιβλιοθήκη του Βατικανού. Ο Johannes Kepler (1571-1630) ήταν ο επόμενος που έγραψε για τα Αρχιμήδεια στερεά στο έργο του «*Harmonices Mundi*» παρ' ότι κάποια από αυτά τα στερεά είχαν επανακαλυφτεί από άλλους. Ο Kepler απέδειξε ότι είναι ακριβώς 13. (Η αναφορά γίνεται στο Βιβλίο II του έργου του «*De Congruentia Figurarum Harmonicarum*» Πρόταση XXVIII, σελίδες 61-65), δίνοντάς τους σύγχρονα ονόματα.

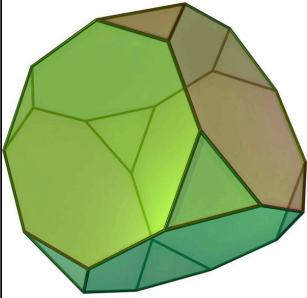
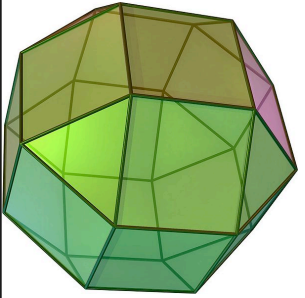
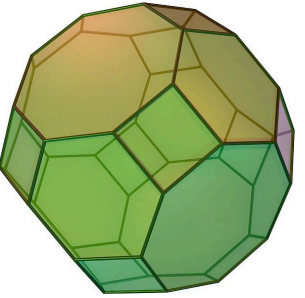
Ακολουθεί η αναφορά του Πάππου από το έργο του «Συναγωγή».

«Αν και μπορούμε να συλλάβουμε στερεά πράγματα με όλα τα είδη επιφανειών, εκείνα που αξίζουν την προσοχή μας, είναι αυτά που φαίνονται κανονικά. Αυτά δεν είναι μόνο τα πέντε σχήματα του θεϊκού Πλάτωνα, δηλαδή το τετράεδρο και ο κύβος, το οκτάεδρο και το δωδεκάεδρο, με πέμπτο το εικοσάεδρο, αλλά και τα στερεά - 13 στον αριθμό - που ανακαλύφθηκαν από τον Αρχιμήδη και περικλείονται από ισόπλευρα και ισογώνια αλλά όχι ίσα πολύγωνα.»

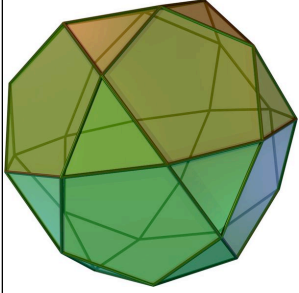
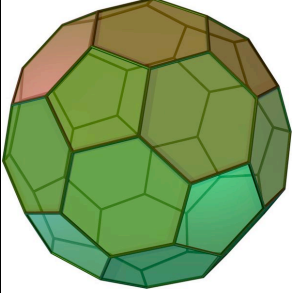
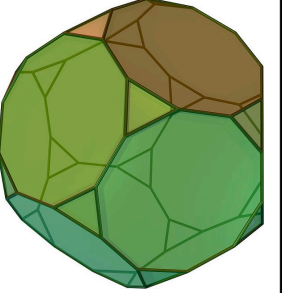
Πίνακας 2.1: Τα Αρχιμήδεια στερεά.

A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
1.	κόλουρο τετράεδρο (truncated tetrahedron) (3.6.6)		Το πρώτο σχήμα με οκτώ έδρες 4 τρίγωνα και 4 εξά- γωνα.
2.	κυβοκτάεδρο (cuboctahedron) (3.4.3.4)		Μετά από αυτό έρχονται τρία σχήματα με 14 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 6 τετράγωνα,
3.	κόλουρο οκτάεδρο (truncated octahedron) (4.6.6)		το δεύτερο με 6 τετράγωνα και 8 εξάγωνα
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

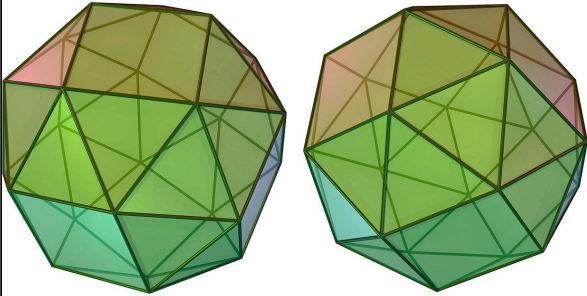
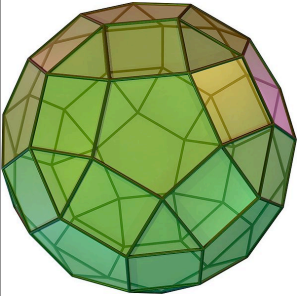
Πίνακας 2.1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
4.	κόλουρος κύβος (truncated cube) (3.8.8)		και το τρίτο με 8 τρίγωνα και 6 οκτάγωνα.
5.	ρομβοκυβοκτάεδρο (rhombicuboctahedron) (3.4.4.4)		Μετά από αυτά έρχονται δύο σχήματα με 26 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 18 τετράγωνα
6.	κόλουρο κυβοκτάεδρο (truncated cuboctahedron) (4.6.8)		το δεύτερο με 12 τετράγωνα, 8 εξάγωνα και 6 οκτάγωνα.
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

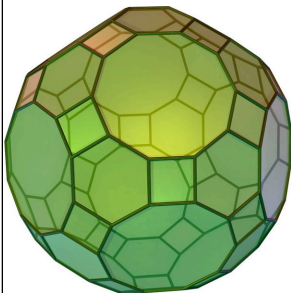
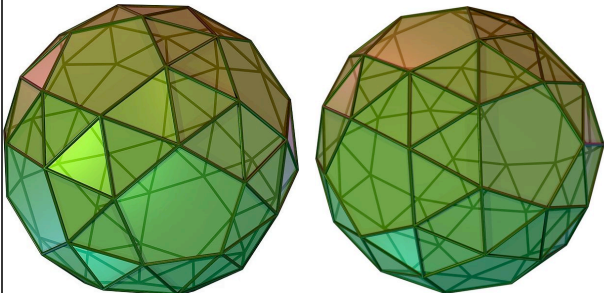
Πίνακας 2.1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
7.	εικοσιδωδεκάεδρο (icosidodecahedron) (3.5.3.5)		Μετά απ' αυτά έρχονται 3 σχήματα με 32 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα,
8.	κόλουρο εικοσάεδρο (truncated icosahedron) (5.6.6)		το δεύτερο με 12 πεντάγωνα και 20 εξάγωνα
9.	κόλουρο δωδεκάεδρο (truncated dodecahedron) (3.10.10)		και το τρίτο με 20 τρίγωνα και 12 δεκάγωνα.
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

Πίνακας 2.1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

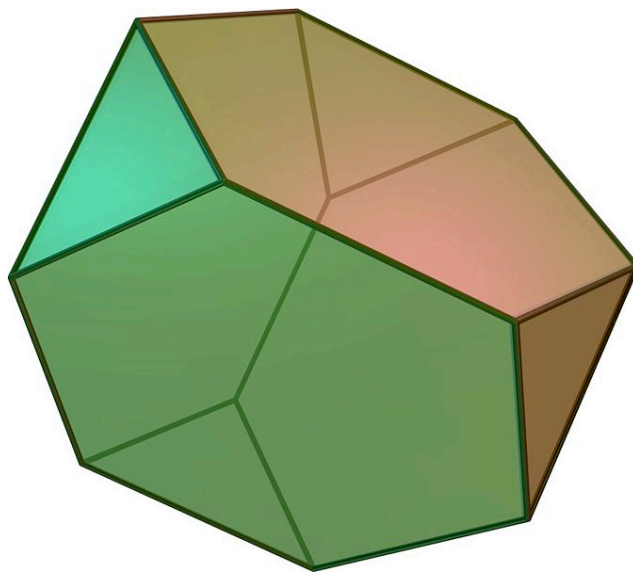
A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
10.	κολοβός κύβος (snub cube) (3.3.3.3.4)		Μετά από αυτά έρχεται ένα σχήμα με 38 έδρες, με 32 τρίγωνα και 6 τετράγωνα.
11.	ρομβικοσιδωδεκάεδρο (rhombicosidodecahedron) (3.4.5.4)		Μετά από αυτό έρχονται δύο σχήματα με 62 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα, 30 τετράγωνα και 12 πεντάγωνα,
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

Πίνακας 2.1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
12.	κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο (truncated icosidodecahedron) (4.6.10)		Το δεύτερο με 30 τετράγωνα, 20 εξάγωνα και 12 δεκάγωνα.
13.	κολοβό δωδεκάεδρο (snub dodecahedron) (3.3.3.3.5)		Μετά από αυτά έρχεται το τελευταίο, ένα σχήμα με 92 έδρες, με 80 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα.

Τα Αρχιμήδεια στερεά συζητήθηκαν σε έργο που δεν έχει διασωθεί από τον Αρχιμήδη. Κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, οι μαθηματικοί και οι καλλιτέχνες επανεφεύραν όλα τα στερεά. Η έρευνα αυτή ολοκληρώθηκε με τα πρίσματα-αντιπρίσματα και τα μη κυρτά στερεά, γνωστά μας ως Kepler-Poinsot πολύεδρα.

Το χαρακτηριστικό των Αρχιμήδειων στερεών είναι ότι κάθε έδρα είναι κανονικό πολύγωνο, και γύρω από κάθε κορυφή τα ίδια πολύγωνα εμφανίζονται με την ίδια σειρά. Π.χ. εξάγωνο-εξάγωνο-τρίγωνο στο κόλουρο τετράεδρο



Σχήμα 2.1.2: Το κόλουρο τετράεδρο. Σε κάθε κορυφή του απαντώνται με την ίδια σειρά τα ίδια πολύγωνα: εξάγωνο-εξάγωνο-τρίγωνο.

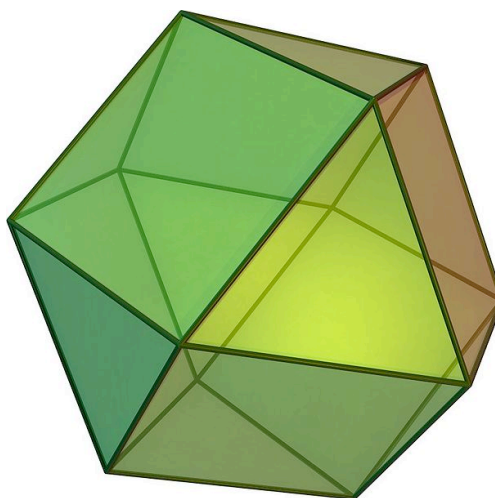
Αντίθετα με τα Πλατωνικά σχήματα στα Αρχιμήδεια εμφανίζονται δύο και περισσότερων ειδών πολύγωνα. Ο πιο ακριβής ορισμός ενός Αρχιμήδειου σχήματος θα μπορούσε να είναι ο εξής:

Ορισμός 2.1.1. Κυρτό πολύεδρο που συνίσταται από κανονικά πολύγωνα και οι κορυφές του είναι «ισοδύναμες».

Λέγοντας «ισοδύναμες» εννοούμε ότι αν επιλέγονται δύο κορυφές υπάρχει τρόπος περιστροφής ή ανάκλασης του πολυέδρου, έτσι ώστε να φαίνεται αναλλοίωτο με τη μία κορυφή να έχει μετακινηθεί στη θέση της άλλης.

Ο Kepler επεσήμανε ότι με αυτό τον ορισμό, υπάρχουν και άλλες δυνατότητες στερεών: πρίσματα-αντιπρίσματα. Παρακάτω δίνονται παραδείγματα πώς μπορούν να εμφανίζονται γύρω από μια κορυφή ενός Αρχιμήδειου στερεού τα πολύγωνα.

Παράδειγμα 2.1.1. Για το κυβοκτάεδρο (σχήμα 2.1.3) έχουμε το συμβολισμό (3.4.3.4) για το σχηματισμό κορυφής (vertex configuration) που σημαίνει ότι κάθε κορυφή περικλείεται από ένα τρίγωνο, ένα τετράγωνο, ένα τρίγωνο ένα τετράγωνο σε κυκλική διάταξη.



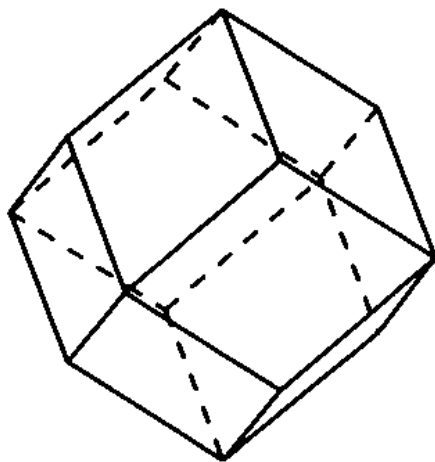
Σχήμα 2.1.3: Το κυβοκτάεδρο (3.4.3.4)

Το σύμβολο Schläfli¹, $\{p, q\}$, δείχνει σχηματισμό κορυφής (vertex configuration) $p.q.p.q$ ή $(p.q)^2$. Για το κυβοκτάεδρο 3.4.3.4, για το εικοσιδωδεκάεδρο 3.5.3.5.

Πέντε από τα Αρχιμήδεια στερεά προέρχονται από την αποκοπή των πέντε πλατωνικών στερεών, για παράδειγμα, το κόλουρο τετράεδρο από την αποκοπή του κανονικού τετραέδρου. Αποκοπή είναι η απόσπαση όλων των γωνιών γύρω από μια κορυφή με ένα συμμετρικό τρόπο. Τα στερεά κόλουρο κυβοκτάεδρο και κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο δεν προκύπτουν, όπως και ο Kepler ισχυρίζεται, από αποκοπή, αλλά γιατί μοιάζουν να προέρχονται

¹Το σύμβολο Schläfli στο 2.8 Kepler-Poinsot στερεά, σελίδα 50

από την αποκοπή πχ. ενός κυβοκταέδρου. Για το λόγο αυτό το στερεό κόλουρο κυβοκτάεδρο ονομάστηκε μεγάλο ρομβο-κυβοκτάεδρο. Το στερεό που ονομάστηκε από τον Kepler ρομβο-κυβοκτάεδρο έχει έδρες κοινές με τρία πολύεδρα: ένα κύβο, ένα οκτάεδρο και με ένα πολύεδρο με έδρες ρόμβους (βλ. σχήμα 2.1.4).



Σχήμα 2.1.4: Το ρομβο-κυβοκτάεδρο.

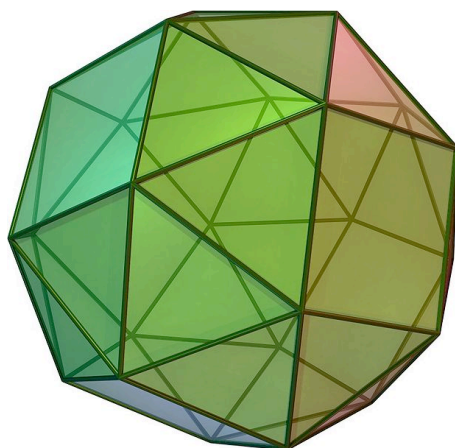
Ο κολοβός κύβος (snub cube) (σχήμα 2.1.5α') και το κολοβό δωδεκάεδρο (snub dodecahedron) (σχήμα 2.1.5β') είναι γνωστά σαν chiral (χειριακά) πολύεδρα.

«Chiral» πολύεδρα είναι τα πολύεδρα που εμφανίζονται σε δύο σχήματα που είναι το ένα το κατοπτρικό είδωλο του άλλου.

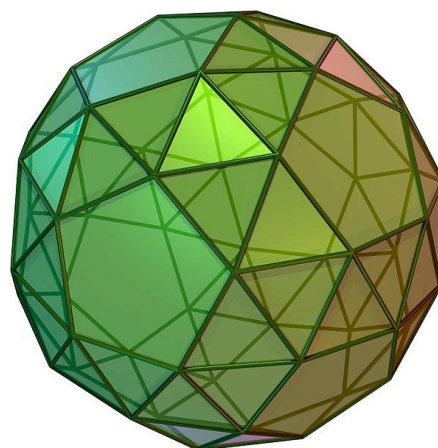
Τα δύο Αρχιμήδεια στερεά κολοβός κύβος και κολοβό δωδεκάεδρο μαζί με τα αντίστοιχα δυϊκά τους δηλαδή το πενταγωνικό εικοσιτετράεδρο και το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο ανήκουν στην κατηγορία των chiral (χειριακών) πολυέδρων.

Τα «εναντιόμορφα» σχήματα με τα οποία εμφανίζονται είναι γνωστά σαν «laevo» (αριστερό) και «dextro» (δεξιό). Τα chiral (χειριακά) πολύεδρα δεν μπορούν να ταυτιστούν με το κατοπτρικό τους είδωλο μετά από περιστροφές και μεταφορές. Η λέξη «chiral» προέρχεται από την ελληνική λέξη «χειρ» που είναι το πιο οικείο chiral αντικείμενο.

Το πενταγωνικό εικοσιτετράεδρο είναι το δυϊκό του snub κύβου. Έχει 24 έδρες που είναι μη



2.1.5α: Κολοβός κύβος (3.3.3.3.4)

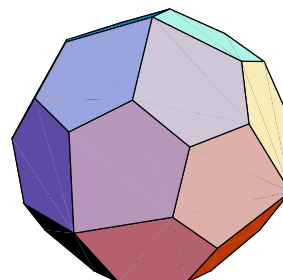
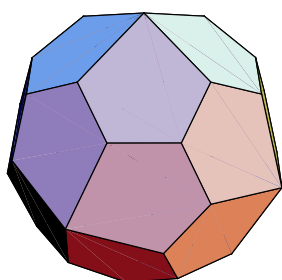


2.1.5β: Κολοβό δωδεκάεδρο (3.3.3.3.5)

Σχήμα 2.1.5: Τα χειριακά (chiral) πολύεδρα.

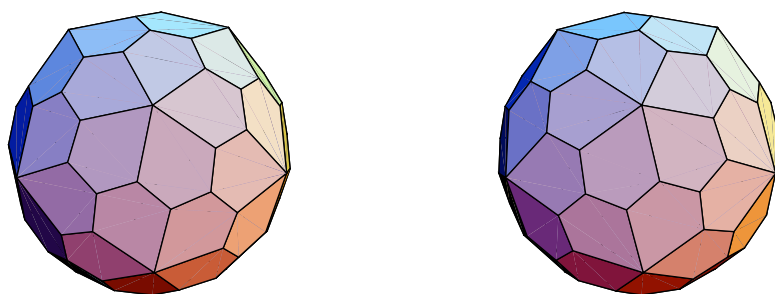
κανονικά πεντάγωνα. Το Cu_2O (οξείδιο του χαλκού) σχηματίζεται σε πενταγωνικά εικοσιτετράεδρα.

Αν ξεκινήσουμε με τον snub κύβο ακμής 1, τότε τα δύο μήκη x_1 και x_2 των ακμών που αποτελούν κάθε πενταγωνική έδρα έχουν υπολογιστεί και είναι περίπου $x_1 \simeq 0.842509$ και $x_2 \simeq 0.593465$. (Ο υπολογισμός έχει γίνει από τη λύση δύο εξισώσεων βου βαθμού των οποίων αντίστοιχα είναι ρίζες).



Σχήμα 2.1.6: Το πενταγωνικό εικοσιτετράεδρο (laevo αριστερά και dextro δεξιά)

Το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο δυϊκό του snub δωδεκάεδρου έχει 60 έδρες. Αν αρχίσουμε με snub δωδεκάεδρο ακμής 1, οι άνισες ακμές x_1 και x_2 των πενταγώνων που αποτελούν τις έδρες του πενταγωνικού εξηκοντάεδρου είναι: $x_1 \simeq 0.582899$ και $x_2 \simeq 1.0199882$.



Σχήμα 2.1.7: Το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο (laevo αριστερά και dextro δεξιά)

Το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο και το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο σαν δυϊκά Αρχιμήδειων στερεών ανήκουν στην οικογένεια των στερεών Catalan, 2.5.

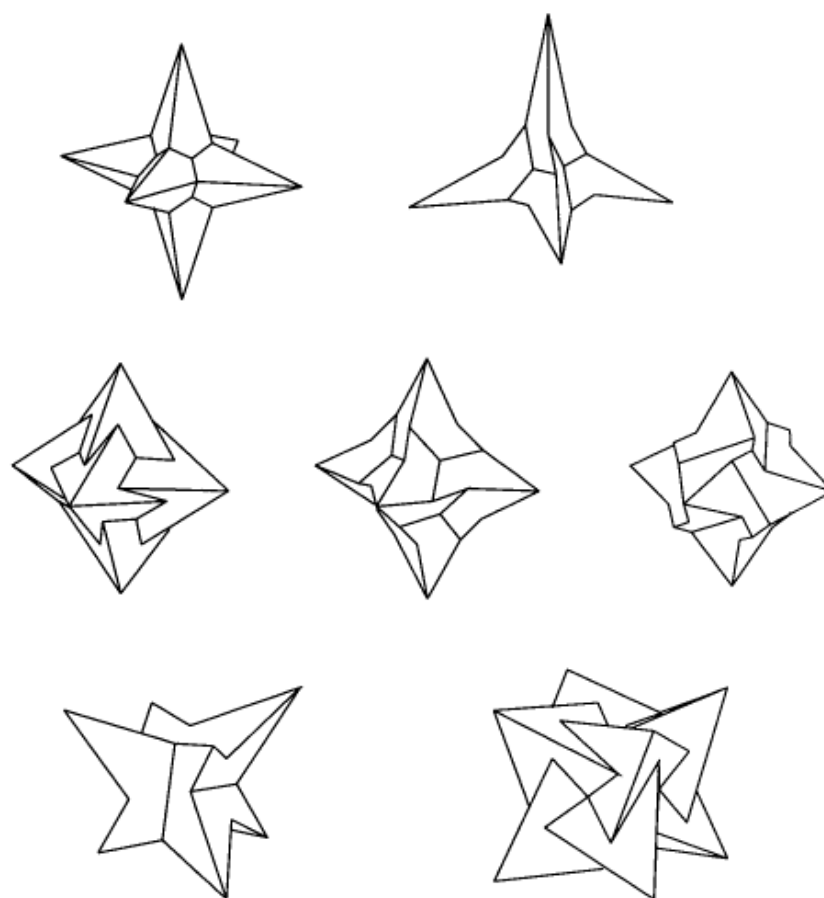
2.2 Μεταβατικότητα

I. Ένα πολυέδρο ονομάζεται face-transitive (isohedral) δηλαδή «ισοεδρικό» όταν για κάθε ζεύγος εδρών του, υπάρχει μια συμμετρία του πολυέδρου που μεταφέρει την μία έδρα επί της άλλης. Κάθε φορά που περιστρέφεται έτσι ώστε να φαίνεται μια έδρα πρώτα, αυτή η περιστροφή αφορά μια συμμετρία του πολυέδρου όπου η αρχική και η τελική θέση του είναι ακριβώς η ίδια.

Εκτός από τα Πλατωνικά στερεά ισοεδρικά είναι οι διπυραμίδες, τα τραπεζόεδρα και τα Catalan στερεά.

Παράδειγμα μη ισοεδρικών πολυέδρων αποτελούν τα Αρχιμήδεια στερεά και τα πρίσματα.

Οι Branko Grünbaum και Geoffrey Shephard έχουν ερευνήσει ιδιότητες των ισοεδρικών πολυέδρων. Έχουν όλα αυτά τα πολυέδρα ένα εσωτερικό σημείο από το οποίο μπορούμε να έχουμε μια άποψη της ολικής επιφάνειας. Οι έδρες τέτοιων πολυέδρων μπορούν να είναι τρίγωνα, τετράπλευρα και πεντάγωνα σε σχήμα αστερία



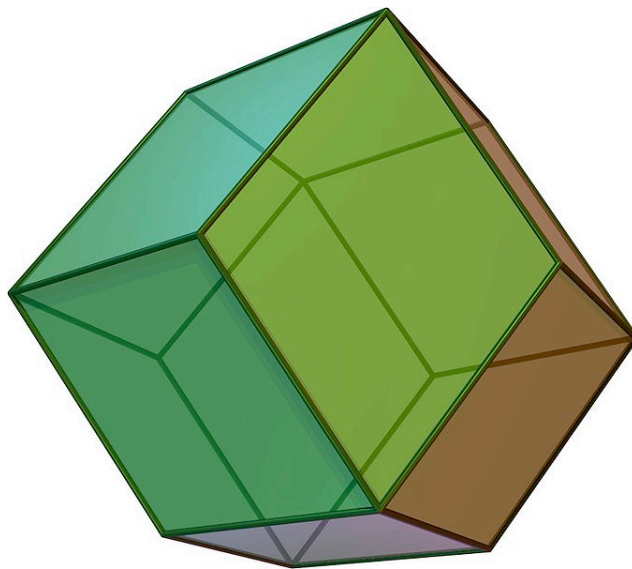
Σχήμα 2.2.8: Ισοεδρικά πολύεδρα

II. Ένα πολύεδρο ονομάζεται «vertex-transitive» ή «isogonal» (ισογώνιο) αν κάθε κορυφή μπορεί να απεικονιστεί ισομετρικά μέσω μιας συμμετρίας σε μια οποιαδήποτε άλλη κορυφή. Τα Αρχιμήδεια στερεά και φυσικά και τα Πλατωνικά στερεά είναι παραδείγματα ισογώνιων πολυέδρων.

III. Ένα πολύεδρο ονομάζεται «edge-transitive» ή «isotoxal» (ισότοξο), αν κάθε ακμή του μπορεί να απεικονιστεί ισομετρικά μέσω μιας συμμετρίας σε μια οποιαδήποτε άλλη ακμή. Η μεταβατικότητα κατά ακμή δεν μπορεί να είναι μοναδική σε ένα πολύεδρο, σε αντίθεση με τα άλλα δύο είδη μεταβατικότητας. Δηλαδή αν ένα πολύεδρο είναι ισότοξο θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ισοεδρικό ή ισογώνιο και φυσικά και τα δύο, όπως τα Πλατωνικά στερεά.

Το ρομβικό δωδεκάεδρο είναι ισοεδρικό και ισότοξο. Τα σφηνοειδή, γνωστά σαν μη κανονικά

τετράεδρα είναι ισοεδρικά και ισογώνια μόνο.



Σχήμα 2.2.9: Το ρομβικό δωδεκάεδρο

Υπάρχει και ένα είδος μεταβατικότητας που συχνά συνδέεται με την κανονικότητα και ονομάζεται «flag-transitive».

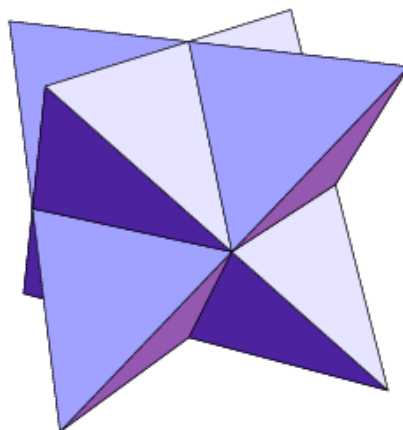
Μια flag (σημαία) είναι μια τριάδα (έδρα-ακμή-κορυφή) στην οποία η ακμή είναι μια πλευρά της έδρας και η κορυφή το ένα άκρο της ακμής. Ένα πολύεδρο είναι flag-transitive τότε και μόνο τότε αν κάθε μία από τις τριάδες-σημαίες του μπορεί να ταυτιστεί με οποιαδήποτε άλλη με μια συμμετρία.

Τα Πλατωνικά στερεά, τα τέσσερα Kepler-Poinsot πολύεδρα αστέρες και το stella-octangula είναι τα δέκα flag-transitive πολύεδρα.

Το Stella Octangula (σχήμα 2.2.10) είναι ένα σύμπλεγμα πολυέδρων που αποτελείται από ένα τετράεδρο και το δυϊκό του, δηλαδή ένα δεύτερο τετράεδρο που έχει περιστραφεί κατά 180° σε σχέση με το πρώτο. Ονομάζεται και stellated-τετράεδρο (αστεροειδές- τετράεδρο).

2.3 Ομοιόμορφα πολύεδρα (Uniform polyhedra)

Ομοιόμορφο πολύεδρο είναι ένα πολύεδρο το οποίο έχει έδρες κανονικά πολύγωνα και υπάρχει μια ισομετρία για κάθε δύο κορυφές του (είναι vertex-transitive). Το ομοιόμορφα



Σχήμα 2.2.10: Stella Octangula

πολύεδρα μπορεί να είναι κανονικά (regular), ψευδοκανονικά (quasiregular) και ημι-κανονικά (semiregular). Οι έδρες δεν είναι απαραίτητα κυρτές, και επομένως πολλά ομοιόμορφα πολύεδρα είναι πολύεδρα αστέρες. Υπάρχουν 75 ομοιόμορφα πολύεδρα.

Από τα κυρτά πολύεδρα, ομοιόμορφα είναι:

1. Τα 5 Πλατωνικά στερεά
2. Τα 13 Αρχιμήδεια στερεά

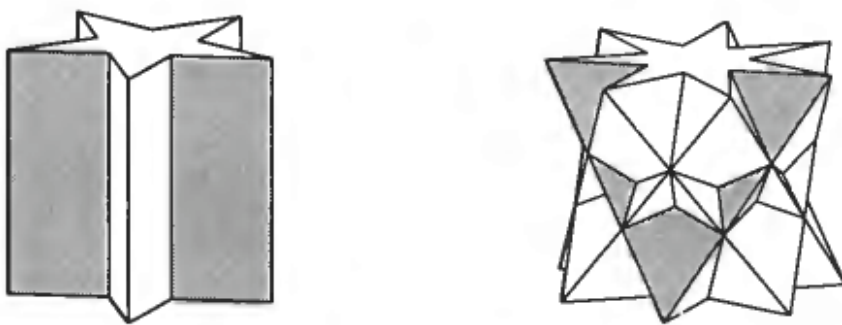
Από τα πολύεδρα αστέρες:

1. Τα 4 Kepler-Poinsot στερεά
2. Τα 53 ομοιόμορφα πολύεδρα-αστέρες

Υπάρχει και ένα πολύεδρο-αστέρας που ανακαλύφθηκε από τον John Skilling και λέγεται σχήμα του Skilling.

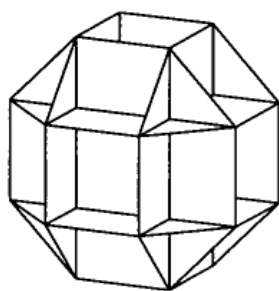
Υπάρχουν ακόμη άπειρα ομοιόμορφα πρίσματα και αντιπρίσματα με βάσεις πολύγωνα αστέρες.

Η βάση (σχήμα 2.3.11) για το πρίσμα είναι ένα πεντάγραμμο. Οι πλευρές του πεντάγραμμου δεν σχεδιάζονται πλήρως, και η πάνω βάση του μοιάζει με μη κυρτό δεκάγωνο. Οι τετραγωνικές έδρες του πρίσματος τέμνουν η μία την άλλη. Τα ορατά μέρη αυτών των τετραγωνικών εδρών έχουν σκιαστεί στο σχήμα. Το αντιπρίσμα έχει βάση ένα επτάγωνο-αστέρα και οι σκιασμένες περιοχές δείχνουν τα ορατά τμήματα ενός ισοπλεύρου τριγώνου.

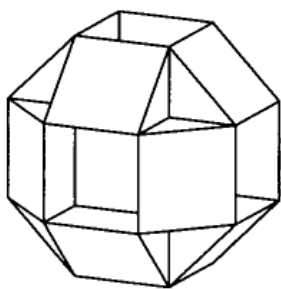


Σχήμα 2.3.11: Πρίσμα και αντιπρίσμα με βάση πολύγωνα-αστέρες.

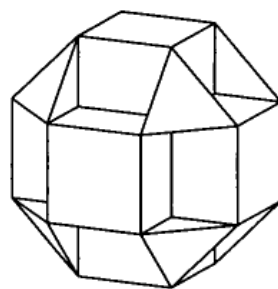
Στο σχήμα 2.3.12 φαίνεται πώς προκύπτουν δύο ομοιόμορφα πολύεδρα, τα (b) και (c) που έχουν τον ίδιο σκελετό ακμής όπως το ρομβοκυβοκτάεδρο (a).



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 2.3.12:

Το 1954 δημοσιεύθηκε ο κατάλογος των 75 ομοιόμορφων πολυέδρων. Ο John Skilling απέδειξε ότι δεν υπάρχουν άλλα ομοιόμορφα πολύεδρα.

2.4 Quasi-regular (ψευδοκανονικά) πολύεδρα

Ένα πολύεδρο ονομάζεται quasi-regular (ψευδοκανονικό), αν αποτελείται από έδρες που είναι δύο ειδών κανονικά πολύγωνα με p και q πλευρές αντίστοιχα, με κάθε έδρα του ενός είδους να περιστοιχίζεται από έδρες του άλλου είδους.

Από τον ορισμό προκύπτουν:

1. Όλες οι ακμές είναι ίσες (έστω $2L$).
2. Σε κάθε κορυφή καταλήγει ίσος αριθμός εδρών από το κάθε είδος (έστω r).
3. Τα σχήματα κορυφής είναι ίσα πολύγωνα, των οποίων δύο διαδοχικές πλευρές έχουν μήκη $2L \cos \frac{\pi}{p}$ και $2L \cos \frac{\pi}{q}$.
4. Οι διέδρες γωνίες είναι ίσες.
5. Οι γωνίες των εδρών που καταλήγουν σε κάθε κορυφή έχουν άθροισμα:

$$r \left(\pi - \frac{2\pi}{p} \right) + r \left(\pi - \frac{2\pi}{q} \right)$$

Το άθροισμα:

$$\begin{aligned} r \left(\pi - \frac{2\pi}{p} \right) + r \left(\pi - \frac{2\pi}{q} \right) &< 2\pi \iff \\ 2\pi r - 2\pi r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) &< 2\pi \iff \\ r - r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) &< 1 \iff \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &> 1 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

με $r > 1$ (αν $r = 1$, τότε θα είχαμε δύο έδρες σε κάθε κορυφή), ενώ $p \geq 3$, $q \geq 3$.

- Έστω $p > q$ και $q = 3$. Τότε από την (2.4.1) έχουμε:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{3} > 1 \implies \frac{1}{r} + \frac{1}{p} > \frac{2}{3} \quad (2.4.2)$$

Αλλά $p > 3 \implies 1/p < 1/3$. Από τη σχέση (2.4.2) έχουμε:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{1}{r} > \frac{2}{3} \implies \frac{1}{r} > \frac{1}{3} \implies r < 3$$

και άρα $r = 2$. Από τη σχέση (2.4.1) έχουμε:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{p} > 1 \implies \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \implies p < 6$$

Άρα οι δυνατές τιμές για το p είναι: 4, 5.

Προκύπτουν επομένως δύο Αρχιμήδεια στερεά με σύμβολα Schläfli $(3, 4, 3, 4)$ και $(3, 5, 3, 5)$ που αντιστοιχούν στο κυβοκτάεδρο και στο εικοσιδωδεκάεδρο αντίστοιχα.

- Αν $q = 4$ και $p > q$ (άρα $p > 4 \implies 1/p < 1/4$), τότε από τη σχέση (2.4.1) έχουμε:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > 1 \implies \frac{1}{r} > \frac{1}{2} \implies r < 2 \quad \text{άτοπο, αφού } r \geq 2$$

Άρα τα κυρτά quasi-regular πολύεδρα είναι το κυβοκτάεδρο και το εικοσιδωδεκάεδρο.

2.5 Στερεά Catalan (δυϊκά των Αρχιμήδειων στερεών)

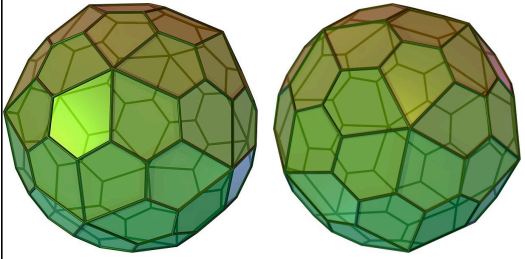
Τα στερεά Catalan, που ονομάστηκαν έτσι από τον Βέλγο μαθηματικό Eugène Catalan που τα περιέγραψε πρώτος το 1865, είναι τα δυϊκά των Αρχιμήδειων στερεών και είναι κυρτά στερεά.

Το ρομβικό δωδεκάεδρο και το ρομβικό τριακοντάεδρο είναι ισότοξα (isotoxal edge-transitive) γιατί οι συμμετρίες τους δρουν μεταβατικά στις ακμές τους. Αυτά τα δύο στερεά είναι και τα δυϊκά των αντίστοιχων Αρχιμήδειων (κυβοκτάεδρο - εικοσιδωδεκάεδρο). Όπως με τα δυϊκά τους Αρχιμήδεια, υπάρχουν δύο χειριακά (chiral) Catalan στερεά: το πενταγωνικό εικοσιτε-

τράεδρο και το πενταγωνικό εξηκοντάεδρο που αναφέρθηκαν στο 2.1.

Είναι προφανές ότι οι έδρες των στερεών Catalan δεν είναι κανονικά πολύγωνα.

Πίνακας 2.2 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

A/A	Όνομα	Σχήμα	Δυϊκό Αρχιμήδειου στερεού	Έδρες	Ακμές	Κορυφές	Είδος έδρας - Σχηματισμός κορυφής	Ομάδες συμμε- τρίας
13.	πενταγωνικό εξηκοντάεδρο pentagonal hexecontahedron		κολοβό δωδεκάεδρο snub dodecahedron	60	150	92	μη κανονικό πεντάγωνο V3.3.3.3.5	I_h

2.6 Στερεά Johnson (Δελτάεδρα)

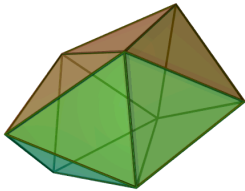
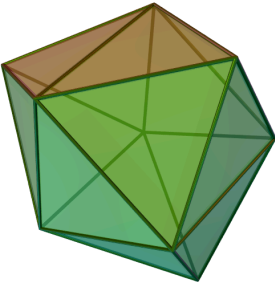
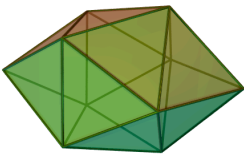
Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα ήταν να ανακαλυφθούν όλα τα κυρτά πολύεδρα, των οποίων οι έδρες τους είναι κανονικά πολύγωνα. Τα πολύεδρα με αυτή την ιδιότητα, που όμως δεν είναι τα Πλατωνικά και τα Αρχιμήδεια ή τα πρίσματα-αντιπρίσματα, αποτελούν την ομάδα στερεών του Johnson. Στη λίστα του Johnson που περιλαμβάνει τέτοια στερεά ανήκουν και τα «δελτάεδρα» (deltahedron). Ονομάστηκαν δελτάεδρα από το ελληνικό γράμμα «Δ» που είναι το σύμβολο του ισοπλεύρου τριγώνου.

Δελτάεδρο ονομάζεται το πολύεδρο του οποίου το σύνορο αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα.

Υπάρχουν άπειρα «δελτάεδρα», αλλά μόνο οκτώ από αυτά είναι κυρτά. Τα τρία είναι το κανονικό τετράεδρο, το κανονικό οκτάεδρο και το κανονικό εικοσάεδρο (αφού αυτά έχουν έδρες ισόπλευρα τρίγωνα). Τα πέντε υπόλοιπα περιγράφονται στον Πίνακα 2.3.

Ο Johnson το 1966 έδωσε τη λίστα των 92 στερεών Johnson, ισχυριζόμενος ότι δεν υπάρχουν άλλα τέτοια στερεά. Ο Zalgaller (1969) έδωσε απόδειξη ότι πράγματι η λίστα είχε ολοκληρωθεί.

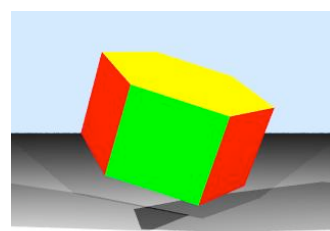
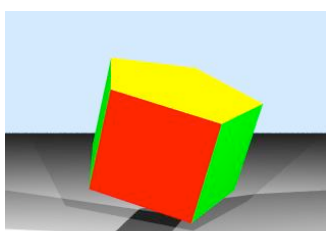
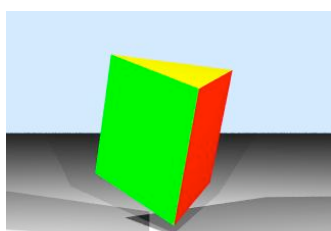
Πίνακας 2.3 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

A/A	Όνομα	Σχήμα	Εδρες	Ακμές	Κορυφές	Κατανομή κορυφών	Ομάδες συμμετρίων
3.	κολοβό δισφηνοειδές snub disphenoid		12	18	8	4×3^4 4×3^5	D_{2d}
4.	τρις-επαυξημένο τριγωνικό πρίσμα triaugmented triangular prism		14	21	9	3×3^4 6×3^5	D_{3h}
5.	γυροεπιμήκης τετραγωνική πυραμίδα gyroelongated square pyramid		14	21	9	2×3^4 8×3^5	D_{4d}

2.7 Πρίσματα - Αντιπρίσματα

Τα κανονικά «πρίσματα» σχηματίζονται από δύο κανονικά πανομοιότυπα παράλληλα πολύγωνα με n πλευρές που συνδέονται με n τετράγωνα.

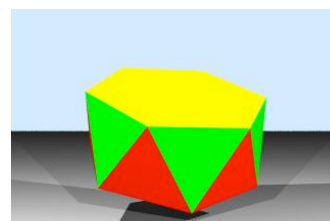
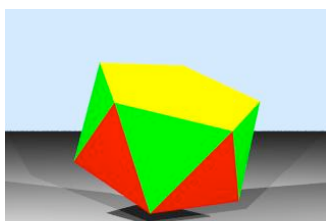
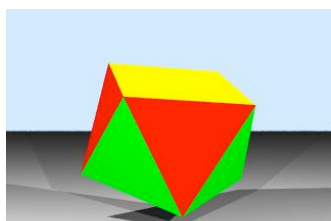
Τα κανονικά «αντιπρίσματα» αποτελούνται από δύο κανονικά και ίσα πολύγωνα, εκ των οποίων το ένα έχει περιστραφεί κατά γωνία $2\pi/2n$ σε σχέση με το άλλο, και ενώνονται με ισόπλευρα τρίγωνα.



Σχήμα 2.7.13: Τριγωνικό Πρίσμα (4,4,3).

Σχήμα 2.7.14: Πενταγωνικό Πρίσμα (4,4,5).

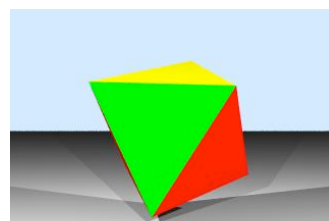
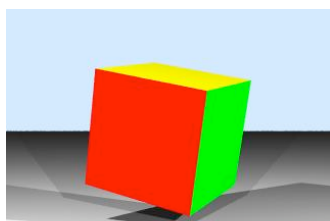
Σχήμα 2.7.15: Εξαγωνικό Πρίσμα (4,4,6).



Σχήμα 2.7.16: Τετραγωνικό Αντιπρίσμα (3,3,3,4).

Σχήμα 2.7.17: Πενταγωνικό Αντιπρίσμα (3,3,3,5).

Σχήμα 2.7.18: Εξαγωνικό Αντιπρίσμα (3,3,3,6).



Σχήμα 2.7.19: Τετραγωνικό Πρίσμα (4,4,4).

Σχήμα 2.7.20: Τριγωνικό Αντιπρίσμα (3,3,3,3).

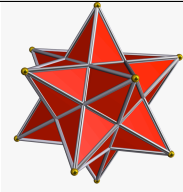
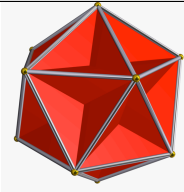
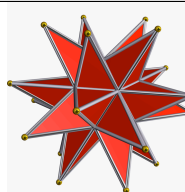
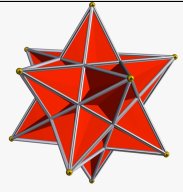
Η διάκριση μεταξύ των Αρχιμήδειων στερεών και της οικογένειας των πρισμάτων-αντιπρισμάτων είναι περισσότερο ιστορική. Μια βασική διαφορά τους είναι ότι τα Πρίσματα-Αντιπρίσματα είναι άπειρα σε πλήθος.

Η ομάδα συμμετρίας ενός ορθού πρίσματος με n -κανονικό πολύγωνο σαν βάση είναι η D_{nh} ² με τάξη $4n$ εκτός της περίπτωσης του κύβου που έχει ομάδα συμμετρίας την O_h με τάξη 48.

Η ομάδα συμμετρίας ενός ορθού αντιπρίσματος με βάση n -κανονικό πολύγωνο και έδρες ισόπλευρα τρίγωνα είναι η D_{nd} τάξης $4n$, εκτός από την περίπτωση του τετραέδρου που ανήκει στην T_d με τάξη 24.

2.8 Kepler-Poinsot στερεά

Πίνακας 2.4: Kepler-Poinsot στερεά.

			
$\{5/2, 5\}$	$\{5/2, 3\}$	$\{3, 5/2\}$	$\{5, 5/2\}$
Μικρό	Μεγάλο	Μεγάλο	Μεγάλο
αστεροειδές	αστεροειδές	εικοσάεδρο	δωδεκάεδρο
δωδεκάεδρο	δωδεκάεδρο		
Έδρα: πεντάγραμμο	Έδρα: πεντάγραμμο	Έδρα: τρίγωνο	Έδρα: πεντάγωνο

Το μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο έχει 12 έδρες πενταγράμμων με το κεντρικό πενταγωνικό τμήμα να είναι κρυμμένο μέσα στο στερεό. Τα ορατά τμήματα κάθε έδρας συγκροτούν 5 ισοσκελή τρίγωνα που ακουμπούν σε 5 σημεία γύρω από το πεντάγωνο. Οι κορυφές του είναι συνολικά 12 και οι ακμές του 30. Το σύμβολο Schläfli είναι $\{5/2, 5\}$ και είναι δυϊκό του μεγάλου δωδεκάεδρου.

²Η διεδρική ομάδα D_n είναι η ομάδα των συμμετριών ενός n -γώνου. Αν στην ομάδα D_n προστεθεί η σ_h (ανάκλαση) έχουμε την ομάδα D_{nh} .

Το μεγάλο δωδεκάεδρο έχει 12 πενταγωνικές έδρες, 30 ακμές, 20 κορυφές και σύμβολο Schläfli $\{5, 5/2\}$ και είναι δυϊκό του μικρού αστεροειδούς δωδεκάεδρου.

Το μεγάλο αστεροειδές δωδεκάεδρο έχει 12 πενταγραμμικές έδρες, 30 ακμές, 20 κορυφές και σύμβολο Schläfli $\{5/2, 3\}$. Το δυϊκό του στερεό, το μεγάλο εικοσάεδρο, έχει 20 έδρες, 30 ακμές, 12 κορυφές και σύμβολο Schläfli $\{3, 5/2\}$.

2.8.1 Σύμβολο Schläfli

Το σύμβολο Schläfli $\{p, q\}$ υποδηλώνει ότι q κανονικά πολύγωνα με πλευρές p το καθένα περικλείουν κάθε κορυφή του πολυέδρου.

Παράδειγμα 2.8.1. Για τον κύβο έχουμε $q = 3$ και $p = 4$, γιατί 3 τετράγωνα περικλείουν κάθε κορυφή. Άρα το σύμβολο Schläfli για τον κύβο είναι $\{4, 3\}$.

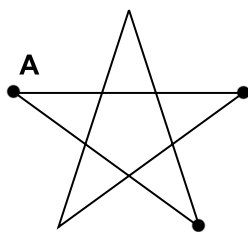
Παράδειγμα 2.8.2. Για το κανονικό δωδεκάεδρο έχουμε $q = 3$ και $p = 5$ γιατί 3 κανονικά πεντάγωνα περικλείουν κάθε κορυφή. Άρα το σύμβολο Schläfli είναι $\{5, 3\}$.

Για το μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο έχουμε σύμβολο Schläfli $\{5/2, 5\}$.

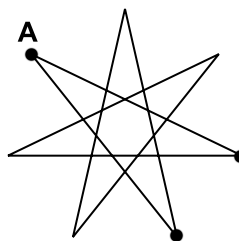
Για ένα πολύγωνο αστέρα το σύμβολο Schläfli είναι $\{p/q\}$ με $(p, q) = 1$. Ο αριθμητής p εκφράζει τις πλευρές του πολυγώνου, ενώ ο παρονομαστής q υποδηλώνει ότι μια οποιαδήποτε κορυφή του πολύγωνου-αστέρα ενώνεται με τις κορυφές που βρίσκονται στην q -θέση δεξιά και αριστερά της κορυφής (βλέπε σχήμα 2.8.21).

Τα πολυέδρα-αστέρες με σύμβολα Schläfli $\{5/2, 5\}$ και $\{5/2, 3\}$, δηλαδή δύο από τα τέσσερα Kepler-Poinsot στερεά, που ανακαλύφθηκαν από τον Kepler³ το 1619.

³Ο Kepler ασχολήθηκε με τα πολύγωνα αστέρες και ειδικά με αυτά που έχουν 7 πλευρές. Ανακάλυψε ότι τα τρία επτάγωνα με σύμβολα Schläfli $\{7\}$, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$ αντίστοιχα που εγγράφονται στο μοναδιαίο κύκλο, είναι ρίζες της εξίσωσης $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$.



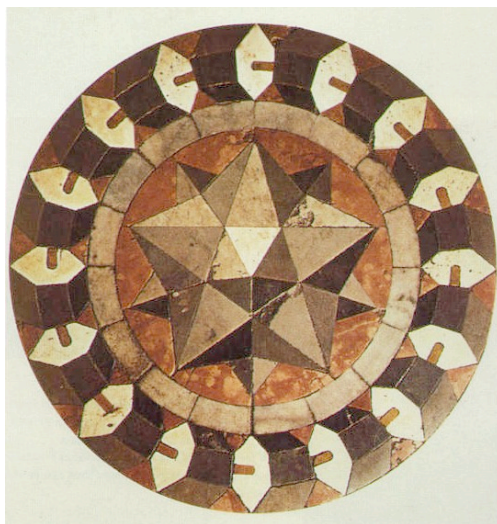
$\{5/2\}$, Στο πεντάγραμμο αυτό η τυχαία κορυφή A ενώνεται με τις κορυφές που βρίσκονται δύο (2) θέσεις δεξιά και αριστερά της A.



$\{7/3\}$, Στο επτάγραμμο αυτό η τυχαία κορυφή A ενώνεται με τις κορυφές που βρίσκονται τρεις (3) θέσεις δεξιά και αριστερά της A.

Σχήμα 2.8.21: Παράδειγμα για το σύμβολο Schläfli

Με κάποια μορφή τα Kepler-Poinsot στερεά, ωστόσο ήταν γνωστά και προ του Kepler. Στη Βασιλική του Αγίου Μάρκου υπάρχει ένα μωσαϊκό πάτωμα που αναπαριστά ένα μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο (σχήμα 2.8.22).



Σχήμα 2.8.22: Το μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο σε μωσαϊκό στη Βασιλική του Αγίου Μάρκου που αποδίδεται στον Paolo Uccello.

Ο Wenzel Jamnitzer απεικονίζει το μεγάλο δωδεκάεδρο και το μεγάλο αστεροειδές δωδεκάεδρο στο έργο του «Perspectiva corporum regularium» (1500).

Το 1809 ο Luis Poinsot επανεφηύρε τα σχήματα του Kepler, μαζί με τα άλλα δυό στερεά $\{3, 5/2\}$, $\{5, 5/2\}$, το μεγάλο εικοσάεδρο και το μεγάλο δωδεκάεδρο αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό τα πολύεδρα αυτά συχνά καλούνται Poinsot's πολύεδρα. Ο Poinsot δεν γνώριζε αν

είχε ανακαλύψει όλα τα κανονικά πολυέδρα-αστέρες. Τρία χρόνια αργότερα ο Augustin Cauchy απέδειξε ότι ο κατάλογος των κανονικών πολυέδρων είχε συμπληρωθεί. Ο Arthurr Galey έδωσε στα στερεά Kepler-Poinsot τα σημερινά τους ονόματα, το 1859 και ο Conway 200 χρόνια αργότερα ανέπτυξε μια συστηματική ορολογία για τις αστεροποιήσεις στις 4 διαστάσεις, και ονόμασε το μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο απλά αστεροειδές δωδεκάεδρο, ενώ το μεγάλο αστεροειδές δωδεκάεδρο σε αστεροειδές-μεγάλο δωδεκάεδρο.

2.9 Ζονόεδρα (Zonohedra)

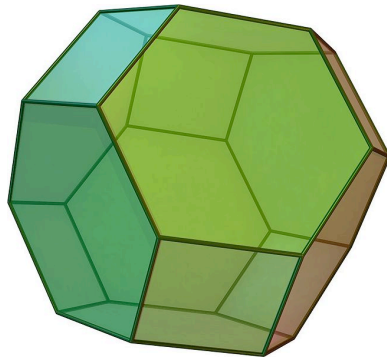
Ζονόεδρο (Zonohedron) είναι ένα σύλλογο σημείων στον 3-διάστατο χώρο που προκύπτει από το άθροισμα Minkowski, δηλ. $\{\sum_i \lambda_i \nu_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ με ν_i διανύσματα του 3-διάστατου χώρου.

Θεωρούμε ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\nu_1, \nu_2, \dots\}$, τα οποία ονομάζονται γεννήτορες του ζονοέδρου. Σχηματίζουμε τα $\{\lambda_i \nu_i\}$ με $0 \leq \lambda_i \leq 1$, και στη συνέχεια το άθροισμα Minkowski $\{\sum_i \lambda_i \nu_i\}$.

Κάθε ακμή του ζονοέδρου είναι παράλληλη προς τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα $\{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ και το μήκος της ισούται με το άθροισμα των μέτρων των γεννητόρων διανυσμάτων προς τα οποία είναι παράλληλη. Συχνά ξεκινάμε με διανύσματα γεννήτορες που παράγουν τον 3-διάστατο χώρο.

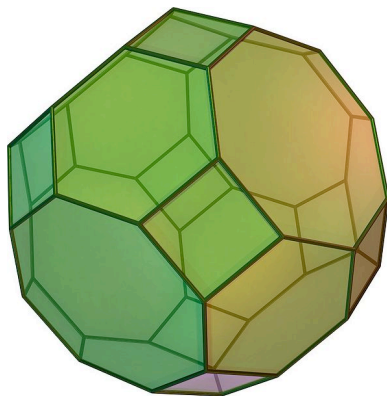
Πολυέδρα - Ζονόεδρα

- Κάθε πρίσμα με βάσεις κανονικά $2n$ -γωνα, που ενώνονται με μια σειρά τετραγώνων. Τέτοια ζονόεδρα είναι: ο κύβος, το εξαγωνικό πρίσμα, το οκταγωνικό, το δεκαγωνικό κ.ο.κ.
- Υπάρχουν 3 Αρχιμήδεια στερεά που είναι ζονόεδρα:
 - (α') Το κόλουρο οκτάεδρο (με 6 τετράγωνα, 8 εξάγωνα)
Οι γεννήτορες είναι παράλληλοι προς τις ακμές του οκταέδρου
 - (β') Το κόλουρο κυβοκτάεδρο (με 12 τετράγωνα, 8 εξάγωνα, 6 οκτάγωνα)



Σχήμα 2.9.23: Κόλουρο οκτάεδρο.

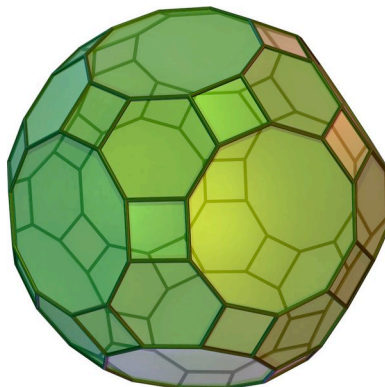
Είναι το άθροισμα Minkowski ενός κύβου και ενός κόλουρου οκταέδρου



Σχήμα 2.9.24: Κόλουρο κυβοκτάεδρο.

(γ') Το κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο που μπορεί να αναπαρασταθεί σαν σφαιρικό ψηφιδωτό (spherical tiling) και να προβληθεί σε επίπεδο με μια στερεογραφική⁴ προβολή.

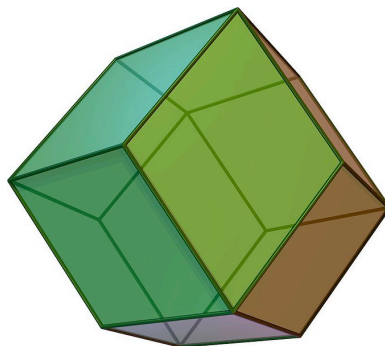
⁴Η στερεογραφική προβολή είναι μια συνάρτηση που προβάλλει μια σφαίρα σε επίπεδο. Η προβολή ορίζεται σε όλη τη σφαίρα εκτός από ένα σημείο (το σημείο προβολής). Είναι μια απεικόνιση η οποία διατηρεί τις γωνίες (conformal mapping) αλλά δεν είναι ισομετρία, ούτε διατηρεί τα εμβαδά των σχημάτων.



Σχήμα 2.9.25: Κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο.

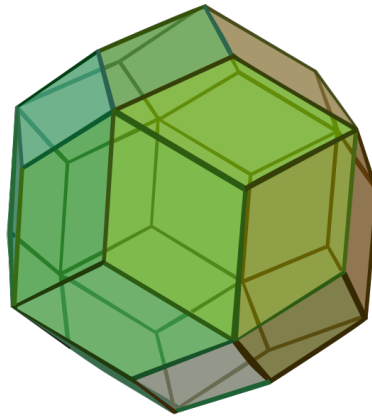
3. Άλλα ζονόεδρα από την οικογένεια των στερεών Catalan.

Το ρομβικό δωδεκάεδρο, δυϊκό του κυβοκτάεδρου, και το ρομβικό τριακοντάεδρο, δυϊκό του εικοσιδωδεκάεδρου με 30 έδρες ρόμβους.



Σχήμα 2.9.26: Ρομβικό δωδεκάεδρο.

Το ρομβικό τριακοντάεδρο έχει έδρες παράλληλες προς τις μεγάλες διαγωνίους ενός κύβου



Σχήμα 2.9.27: Ρομβικό τριακοντάεδρο.

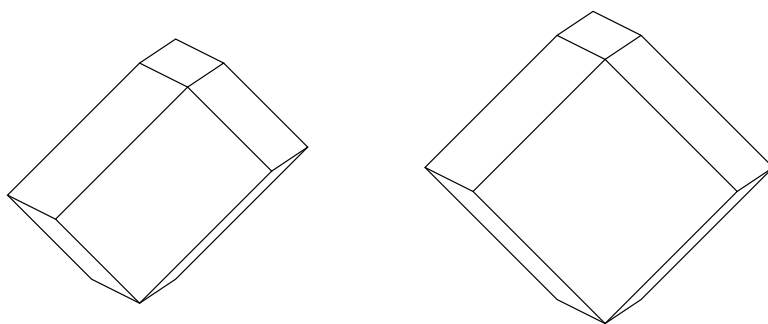
Το ρομβικό κόλουρο δωδεκάεδρο που αποτελεί το άθροισμα Minkowski ενός κύβου και ενός ρομβικού δωδεκάεδρου.

Τα ζονόεδρα τα μελέτησε πρώτος ο Ρώσος κρυσταλλογράφος E.S. Fedorov.

Η H.S.M. Coxeter (1907-2003) έδωσε για τα ζονόεδρα δύο ορισμούς που αφορούν πιο ειδικές περιπτώσεις ζονοέδρων (βλέπε σχήμα 2.9.28):

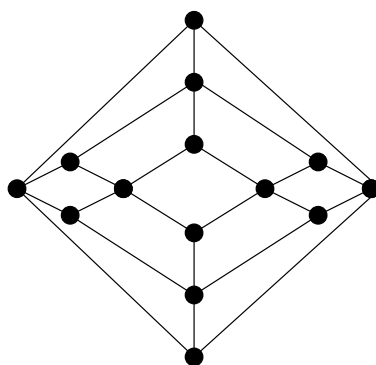
1. Ζονόεδρο είναι το κυρτό πολύεδρο, του οποίου οι έδρες είναι παραλληλόγραμμα.
2. Ισόπλευρο ζονόεδρο είναι το κυρτό πολύεδρο, του οποίου οι έδρες είναι ρόμβοι.

Σύμφωνα με τον Coxeter, ένα ζονόεδρο έχει $n(n-1)$ έδρες, όπου n είναι ο αριθμός των διαφορετικών διευθύνσεων που έχουν οι ακμές. Σε κάθε διεύθυνση ανήκουν $2(n-1)$ ακμές, άρα όλες οι ακμές του ζονοέδρου είναι $2n(n-1)$, και από τον τύπο του Euler, $V - E + F = 2$ (βλέπε παράγραφο 4.2) έχουμε ότι ο αριθμός των κορυφών ισούται με $n(n-1) + 2$



2.9.28α: Ζονόεδρο

2.9.28β: Ισόπλευρο ζονόεδρο



2.9.28γ: Το γράφημα των 2.9.28α και 2.9.28β

Σχήμα 2.9.28: Ζονόεδρα.

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα της «ύπαρξης» μαθηματικών αντικειμένων και η κατασκευασσιμότητα κανονικών πολυγώνων

3.1 Το πρόβλημα της «ύπαρξης» μαθηματικών αντικειμένων

Οι μαθηματικοί που έζησαν κυρίως μετά την εποχή του Σωκράτη, αναζητώντας την επιστημονική αλήθεια εφάρμοσαν την παραγωγική μέθοδο, ενώ παράλληλα προχώρησαν και στην αποσαφήνιση των εννοιών μέσω ακριβών ορισμών.

Ο Πλάτων, επηρεασμένος τόσο από τη διδασκαλία του Σωκράτη, όσο και από τα ταξίδια του στα μεγάλα πνευματικά κέντρα της εποχής του, ίδρυσε την Ακαδημία που φέρει το όνομά του (η ονομασία προήλθε από την τοποθεσία της Ακαδήμειας).

Με επιστολή του προς τον μαθητή του Λεωδάμαντα τον Θάσιο, παρουσίασε την αναλυτική μέθοδο. Ο Πλάτων δεν έπαψε να ενθαρρύνει τους μαθητές του να μελετούν μαθηματικά για να διαπαιδαγωγούν το νου τους, προτρέποντάς τους να εξηγούν τους ισχυρισμούς τους με λογικά επιχειρήματα.

Ήδη η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγορείους είχε οδηγήσει τους Μαθηματικούς σε κάποια δυσπιστία απέναντι στην εμπειρία και τη διαίσθηση. Η αιτιολόγηση κάθε μαθηματικού ισχυρισμού με λογικά επιχειρήματα είχε επακόλουθο τις συνεχώς αυστηρότερες αποδείξεις.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη που συντάχθηκαν γύρω στα 300 π.Χ., αποτέλεσαν για δυο χιλιάδες χρόνια την πυξίδα για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την περιθωριοποίηση πολλών σημαντικών προγενέστερων κειμένων σε τέτοιο βαθμό, ώστε τελικά να μη διασωθούν.

Στα «Στοιχεία» εισάγονται οι έννοιες «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο» και επιτρέπονται κάποιοι ισχυρισμοί που αφορούν τις πρωταρχικές έννοιες χωρίς αποδείξεις, τα λεγόμενα «αξιώματα». Ένα αξιωματικό σύστημα απαιτείται να περιέχει τα αναγκαία αξιώματα. Ο Ευκλείδης με μια σειρά εννοιών και αξιωμάτων, οδηγείται στα αποτελέσματα των δεκατριών βιβλίων του. Η εγκυρότητα του αξιωματικού συστήματος του Ευκλείδη, παρέμεινε μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα αδιαμφισβήτητη. Ο David Hilbert (1862-1943) αναθεώρησε τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προσθέτοντας αξιώματα και αποδεικνύοντας ισχυρισμούς που μέχρι τότε θεωρούνταν ότι δε χρειάζεται να αποδειχθούν.

Ένα βασικό πρόβλημα που αναδείχτηκε ήταν και το πρόβλημα της ύπαρξης ενός μαθηματικού αντικειμένου. (π.χ. ο Leibniz έχει αποδείξει ότι δεν υπάρχει κανονικό δεκάεδρο). Για την απόδειξη της ύπαρξης ενός κανονικού μαθηματικού αντικειμένου χρησιμοποιούσαν δύο μεθόδους προσέγγισης:

1. **την ευθεία προσέγγιση**, σύμφωνα με την οποία κατασκευάζεται το μαθηματικό αντικείμενο και στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι έχει τις ιδιότητες που του αποδίδονται

2. την πλάγια προσέγγιση, με την οποία υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει το μελετούμενο αντικείμενο και οδηγούμαστε με την υπόθεση αυτή σε αντίφαση με κάποιο αξίωμα ή θεώρημα.

Είναι προφανές ότι προτιμητέα είναι η ευθεία προσέγγιση, καθώς μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του αντικειμένου που ερευνούμε ανεξάρτητα από τη γνώση της ύπαρξής του. Οι Έλληνες μαθηματικοί προτιμούσαν την ευθεία μέθοδο προσέγγισης.

Οι προτάσεις των δεκατριών βιβλίων των «Στοιχείων» χωρίζονται σε δύο ομάδες: α) στα θεωρήματα (με ιδιότητες που αποδεικνύονται) και β) σε κατασκευές με τις οποίες αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου. Η κατασκευή συνήθως περιλαμβάνει δύο στάδια: την περιγραφή του αντικειμένου και την απόδειξη ότι αυτό ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες.

3.2 Κατασκευάσιμα πολύγωνα

ΤΟ 1796 ο Karl Friedrich Gauss (1777-1855) ανακάλυψε, μελετώντας την κυκλοτομική εξίσωση $z^n = 1$, ότι οι ρίζες χωρίζουν τον κύκλο σε τόξα ίσου μέτρου και με αυτό τον τρόπο προσδιορίζουν τις κορυφές ενός κανονικού πολύγωνα. Ο τύπος που δίνει τον αριθμό n των πλευρών που πρέπει να έχει ένα κανονικό πολύγωνο για να είναι κατασκευάσιμο με τα «Ευκλείδεια όργανα» (κανόνα-διαβήτη) είναι ο εξής:

$$n = 2^k p_0 p_1 \cdots p_r$$

όπου οι p_i με $0 \leq i \leq r$ είναι πρώτοι, διακεκριμένοι και της μορφής:

$$p_i = 2^{2^{m_i}} + 1 \quad m_i \in \mathbb{N}$$

Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν «πρώτοι αριθμοί του Fermat» από το όνομα του διάσημου Γάλλου Μαθηματικού Pi re Fermat (1601-1665). Οι πέντε πρώτοι τέτοιοι αριθμοί είναι:

$m = 0 \qquad 2^{2^0} + 1 = 3$

$m = 1 \qquad 2^{2^1} + 1 = 5$

$m = 2 \qquad 2^{2^2} + 1 = 17$

$m = 3 \qquad 2^{2^3} + 1 = 257$

$m = 4 \qquad 2^{2^4} + 1 = 65\,537$

Για $5 \leq m \leq 16$ οι αντίστοιχοι αριθμοί δεν είναι πρώτοι. Για $m > 16$ τα αντίστοιχα πολύ-γωνα, λόγω του υπερβολικού πλήθους των πλευρών τους είναι πρακτικά μη κατασκευάσιμα ($2^{2^{16}} \approx 10^{20\,000}$).

Πίνακας 3.1: Κατασκευάσιμα και μη κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα.

Αριθμός πλευρών	Δυνατότητα κατασκευής	Ανάλυση σε πρώτους παράγοντες
3	✓	3
4	✓	2 ²
5	✓	5
6	✓	2 · 3
7		7
8	✓	2 ³
9		3 ²
10	✓	2 · 5
11		11
12	✓	2 ² · 3
13		13
14		2 · 7
15	✓	3 · 5
Συνέχεια στην επόμενη σελίδα		

Πίνακας 3.1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

Αριθμός πλευρών	Δυνατότητα κατασκευής	Ανάλυση σε πρώτους παράγοντες
16	✓	2^4
17	✓	17
18		$2 \cdot 3^2$
19		19
20	✓	$2^2 \cdot 5$
21		$3 \cdot 7$
22		$2 \cdot 11$
23		23
24	✓	$2^3 \cdot 3$
25		5^2

Τα κανονικά πολύγωνα που σημειώνονται με ✓ είναι τα κατασκευάσιμα.

Και το αντίστροφο του αποτελέσματος του Gauss είναι αληθές: Αν η παραγοντοποίηση του αριθμού n σε πρώτους παράγοντες δεν είναι της μορφής:

$$n = 2^k p_0 p_1 \cdots p_r$$

με p_i διακεκριμένους πρώτους Fermat τότε το αντίστοιχο κανονικό πολύγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο. Π.χ. το κανονικό εννιάγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο, $9 = 3^2$ (αναλύεται σε μη διακεκριμένους αριθμούς) ενώ το κανονικό επτάγωνο επίσης δεν είναι κατασκευάσιμο αφού ο αριθμός 7 δεν είναι πρώτος αριθμός Fermat.

3.3 Γιατί τα πέντε Πλατωνικά στερεά είναι τα μοναδικά κανονικά πολύεδρα

Το θεώρημα που παρατίθεται, περιλαμβάνει πέντε ισοδύναμους ισχυρισμούς, και είναι αυτό που δίνει τον πλήρη ορισμό της «κανονικότητας», που χαρακτηρίζει μόνο τα πέντε πλατωνικά στερεά.

Θεώρημα 3.3.1. Έστω P ένα κυρτό πολύεδρο, του οποίου οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα. Τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί για το P είναι ισοδύναμοι:

- i. Οι κορυφές του P ανήκουν σε σφαίρα.
- ii. Όλες οι διέδρες γωνίες του P είναι ίσες.
- iii. Όλα τα σχήματα κορυφής¹ είναι κανονικά πολύγωνα.
- iv. Όλες οι στερεές γωνίες είναι ίσες.
- v. Όλες οι κορυφές περικλείονται από τον ίδιο αριθμό εδρών.

Υπάρχουν μόνο πέντε κυρτά πολύεδρα που είναι κανονικά, παρ' ότι υπάρχουν άπειρα κανονικά πολύγωνα.

- Υπάρχουν δύο αποδείξεις, η πρώτη καθαρά γεωμετρική και η δεύτερη με χρήση του θεωρήματος Descartes (θεώρημα 4.1.1). Εδώ θα αναπτύξουμε τη γεωμετρική απόδειξη, χρησιμοποιώντας την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.1. Σε κάθε κυρτό πολύγωνο, το άθροισμα των γωνιών γύρω από οποιαδήποτε κορυφή του, είναι μικρότερο από 2π .

Μια κορυφή ενός πολυέδρου μπορεί να περικλείεται από τρία, τέσσερα ή και πέντε ισόπλευρα τρίγωνα. Αν σε μια κορυφή καταλήξουν έξι ισόπλευρα τρίγωνα, τότε το

¹Για το σχήμα κορυφής έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί. Ένας ορισμός είναι και ο εξής: σχήμα μιας κορυφής v είναι το πολύγωνο που προκύπτει από τα μέσα των ακμών που περιέχουν την κορυφή v .

άθροισμα των γωνιών θα ήταν $6 \times \pi/3 = 2\pi$.

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις: τετράεδρο-οκτάεδρο-εικοσάεδρο, αντίστοιχα

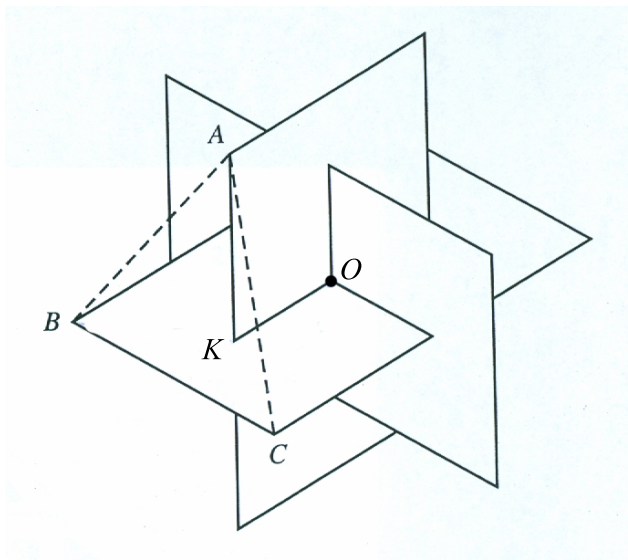
Ένα τετράγωνο έχει εσωτερική γωνία $\pi/2$, άρα μόνο τρία τετράγωνα μπορούν να περικλείουν μια κορυφή και όχι περισσότερα. Στην περίπτωση αυτή το στερεό που προκύπτει είναι ο κύβος.

Το κανονικό πεντάγωνο έχει εσωτερική γωνία 108° , άρα και πάλι μόνο τρία πεντάγωνα μπορούν να περικλείουν μια κορυφή ($3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$). Εδώ έχουμε την περίπτωση του κανονικού δωδεκάεδρου.

Το κανονικό εξάγωνο έχει εσωτερική γωνία 120° , άρα δε θα μπορούσαν ούτε τρία εξάγωνα να καταλήξουν σε μια κορυφή. Γενικά, κανένα κανονικό πολύγωνο με πλευρές $n \geq 6$ δεν θα μπορούσε να αποτελεί έδρα κανονικού πολυέδρου.

- Το ερώτημα που προκύπτει στη συνέχεια είναι αν υπάρχουν πράγματι τα πέντε αυτά πολύεδρα.

Για το τετράεδρο, τον κύβο και το οκτάεδρο, οι κατασκευές είναι πιο απλές, όχι όμως για το εικοσάεδρο.



Σχήμα 3.3.1: Η κατασκευή του κανονικού εικοσάεδρου από τον Pacioli.

Ο Ευκλείδης δυσκολεύτηκε σχετικά με το πρόβλημα της κατασκευής του κανονικού

εικοσαέδρου και για αυτό το τοποθέτησε προς το τέλος του 13ου βιβλίου των «Στοιχείων». Ο Luca Pacioli, στο βιβλίο του «De divina proportione» (1509), έδωσε μια άμεση κατασκευή. Χρησιμοποίησε τρία αντίγραφα ενός «χρυσού» ορθογωνίου με διαστάσεις 1 και $(1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$ (λόγος διαγωνίου προς την πλευρά κανονικού πενταγώνου), έτσι ώστε τα ορθογώνια να κόβουν το ένα το άλλο (βλέπε σχήμα 3.3.1). Οι δώδεκα κορυφές ορίζουν είκοσι τρίγωνα όπως το ABC , και αρκεί ναδειχτεί ότι αυτά είναι ισόπλευρα, δηλαδή ότι $AB = 1$ (η απόδειξη στηρίζεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα).

Κεφάλαιο 4

Η συμβολή των Descartes, Euler, Poincaré στην ανάπτυξη της θεωρίας των πολυέδρων

4.1 Το Θεώρημα του Descartes

Ορισμός 4.1.1. Έλλειμμα δ μιας στερεάς γωνίας είναι ο αριθμός:

$$\delta = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι επίπεδες γωνίες της στερεάς γωνίας.

Θεώρημα 4.1.1 (Descartes). Το άρθθισμα των ελλειμάτων των στερεών γωνιών ενός πολυέδρου ισούται με 4π .

Αν συμβολίσουμε με Δ το ολικό έλλειμμα, ισχύει ότι:

$$\Delta = \sum_j \delta_j = 4\pi$$

όπου δ_j το έλλειμμα της j στερεάς γωνίας του πολυέδρου. Αν συμβολίσουμε με N_0 τον αριθμό των στερεών γωνιών ενός πολυέδρου, τότε το άθροισμα των επίπεδων γωνιών του είναι: $2(N_0 - 2)\pi$.

Έστω $\{p, q\}$ ένα κανονικό πολυέδρο. Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε έδρας είναι: $(p - 2)\pi$ και επομένως κάθε επίπεδη γωνία έχει μέτρο $(p - 2)\pi/p$. Επειδή q επίπεδες γωνίες σχηματίζουν μια στερεά γωνία του κανονικού πολυέδρου, υπάρχουν συνολικά qN_0 επίπεδες γωνίες με άθροισμα:

$$qN_0 \frac{(p - 2)\pi}{p}$$

Καταλήγουμε ότι:

$$qN_0 \frac{(p - 2)\pi}{p} = 2(N_0 - 2)\pi \implies qN_0(p - 2) = 2p(N_0 - 2)$$

και λύνοντας τη σχέση ως προς N_0 έχουμε:

$$N_0 = \frac{4p}{4 - (p - 2)(q - 2)} \quad (4.1.1)$$

Επειδή οι αριθμοί p και q είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 2 και από τον περιορισμό:

$$4 > (p - 2)(q - 2)$$

τα μόνα δυνατά αποτελέσματα για τα p, q είναι:

- $\{3, 3\}$ που αντιστοιχεί στο κανονικό τετράεδρο
- $\{3, 4\}$ που αντιστοιχεί στο κανονικό οκτάεδρο
- $\{3, 5\}$ που αντιστοιχεί στο κανονικό εικοσάεδρο
- $\{4, 3\}$ που αντιστοιχεί στον κύβο
- $\{5, 3\}$ που αντιστοιχεί στο κανονικό δωδεκάεδρο

Εκτός από τη σχέση (4.1.1) ισχύουν και οι σχέσεις:

$$N_1 = \frac{2pq}{4 - (p-2)(q-2)} \quad (4.1.2)$$

με N_1 τον αριθμό των ακμών και

$$N_2 = \frac{2q}{4 - (p-2)(q-2)} \quad (4.1.3)$$

με N_2 τον αριθμό των εδρών του πολυέδρου.

Ο Descartes δεν απέδειξε πλήρως ότι τα πλατωνικά στερεά είναι τα μόνα κανονικά στερεά, αλλά αναφέρει στο έργο του «De Solidorum Elementis» ότι αν ένα κανονικό στερεό έχει F έδρες και S στερεές γωνίες τότε οι αριθμοί: $(2S - 4)/F$ και $(2F - 4)/S$ πρέπει να είναι ακέραιοι. Αυτό συμβαίνει όταν $S = 4, 6, 8, 12, 20$ και αντίστοιχα $F = 4, 8, 6, 20, 12$.

Η σημασία του Θεωρήματος του Descartes έγκειται στο ότι με βάση τα συμπεράσματα του θεωρήματός του οδηγούμαστε σε απλό αλγεβρικό και όχι γεωμετρικό τρόπο της απόδειξης ότι μόνο τα πλατωνικά στερεά είναι κανονικά. Ο Leibniz, 200 χρόνια αργότερα κατέληξε στα αποτελέσματα του Descartes.

4.2 Ο τύπος του Euler και τα αποτελέσματά του

Ο γνωστός τύπος του Euler (1752): $V - E + F = 2$ ισχύει για κυρτό πολυέδρου με V κορυφές, E ακμές και F έδρες. Ένα παράδειγμα μη κυρτού πολυέδρου που δεν υπακούει στον τύπο του Euler είναι το μικρό αστεροειδές δωδεκάγωνο, με σύμβολο Schläfli $\{5/2, 5\}$. Για το πολυέδρου αυτό έχουμε: $V = 12$, $E = 30$, $F = 12$. Άρα:

$$V - E + F = 12 - 30 + 12 = -6 \neq 2$$

Από τη σχέση $V - E + F = 2$ σε συνδιασμό με τις σχέσεις:

$$2E \geq 3F \quad (4.2.1)$$

και

$$2E \geq 3V \quad (4.2.2)$$

ο Euler απέδειξε, όπως προκύπτει από κάποια αλληλογραφία του με τον Goldbach, ότι δεν υπάρχει πολύεδρο κυρτό με αριθμό ακμών 7. Πράγματι, αν $E = 7$ τότε από τις σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2), $F \leq 14/3$ και αφού F ακέραιος, θα πρέπει $F = 4$. Από την (4.2.2) έπεται: $V \leq 14/3$ με V ακέραιο, άρα και $V = 4$. Τότε όμως:

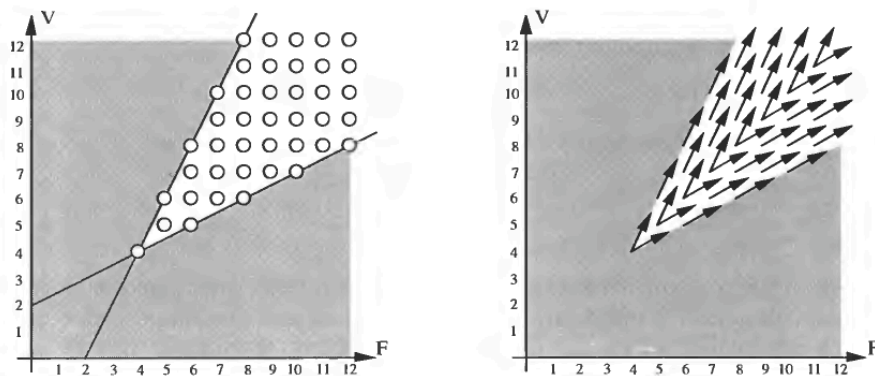
$$V - E + F = 4 - 7 + 4 = 1 \neq 2$$

Με τους περιορισμούς $E \geq 3F/2$ και $E \geq 3V/2$ εγείρεται ένα πρόβλημα «ύπαρξης» πολυέδρων με οποιοδήποτε συνδυασμό κορυφών και εδρών. Από τη σχέση $V - E + F = 2 \implies 2V + 2F = 2E + 4 \geq 3F + 4$. Άρα: $2V - 4 \geq F \implies$

$$V \geq \frac{F}{2} + 2 \quad (4.2.3)$$

Επομένως έχουμε τη διπλή ανισότητα:

$$2F - 4 \geq V \geq \frac{F}{2} + 2 \quad (4.2.4)$$



Σχήμα 4.2.1: Οι σκιασμένες περιοχές δείχνουν συνδυασμούς κορυφών και εδρών που είναι αδύνατοι. Κάθε ανοικτός κύκλος δείχνει ένα σημείο που αντιστοιχεί σε ένα πολύεδρο. Υπάρχει τουλάχιστον ένα πολύεδρο που αντιστοιχεί σε κάθε κύκλο. Κάθε πυραμίδα με ένα κανονικό n -γωνο για βάση έχει $(n+1)$ -έδρες, $(n+1)$ -κορυφές και $2n$ -ακμές. Άρα υπάρχει ένα πολύεδρο που αντιστοιχεί σε κάθε κύκλο της γραμμής $V = F$. Τα πολύεδρα που αντιστοιχούν σε άλλους κύκλους μπορούν να σχηματισθούν από αυτές τις πυραμίδες είτε με αποκοπή, είτε με προσαύξηση.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές της θεωρίας των πολυέδρων στην Άλγεβρα

5.1 Η λύση της εξίσωσης 5ου βαθμού

Η εικοσαεδρική ομάδα διαθέτει πολύπλοκη δομή κατάλληλη για να συνδέεται με άλλους κλάδους των μαθηματικών, όπως με την επίλυση εξισώσεων.

Σύντομο ιστορικό στην επίλυση εξισώσεων

Οι Βαβυλώνιοι και ίσως και οι Αιγύπτιοι είχαν τη δυνατότητα επίλυσης πρακτικών προβλημάτων που απαιτούσαν επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, με μεθόδους που συνοδεύονταν με συμβολικές εκφράσεις.

Οι Έλληνες έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις με γεωμετρικές μεθόδους.

Κατά τον 13ο αιώνα, οι Κινέζοι μαθηματικοί στον τομέα επίλυσης εξισώσεων είχαν προοδεύσει περισσότερο από τους μαθηματικούς της Δύσης.

Το 1494 ο Luca Pacioli στο έργο του «Summa de Arithmetica» επισημαίνει ότι: είναι αδύνατο να λυθούν οι κυβικές εξισώσεις της μορφής: $x^3 + ax = b$ και $x^3 + a = bx$, με τις υπάρχουσες μεθόδους. Το 1545 ο Girolamo Cardano δημοσιεύει το έργο του «Ars Magna», όπου δίνει

πλήρη επίλυση των κυβικών εξισώσεων. Ο Nicolo Fontana γνωστός σαν «Tartaglia» δέκα χρόνια νωρίτερα από τον Cardano, είχε ανακαλύψει τις μεθόδους και είχε εμπιστευτεί τα αποτελέσματά του στον Cardano, ανακαλύπτοντας ακόμη και μέθοδο που ανάγει την επίλυση εξισώσεως 4ου βαθμού σε επίλυση εξισώσεως 3ου βαθμού. Το ενδιαφέρον από τότε στράφηκε στις εξισώσεις 5ου βαθμού που παρουσίαζαν ιδιαίτερη δυσκολία για την επίλυσή τους. Ο Lagrange (1736-1813) παρατήρησε ότι η επίλυση κυβικών εξισώσεων ανάγεται σε επίλυση δευτεροβάθμιων και η επίλυση 4ου βαθμού εξίσωσης σε επίλυση μιας κυβικής εξίσωσης. Ωστόσο οι μέθοδοι αυτές στην περίπτωση της επίλυσης της γενικής εξίσωσης 5ου βαθμού, απέτυχαν και ο Paolo Ruffine (1765-1822) απέδειξε ότι δεν είναι πάντα εφικτό να επιλυθεί μια εξίσωση 5ου βαθμού. Ο Niels Henrik Abel (1802-1829) επιβεβαίωσε το συμπέρασμα του Ruffine, δίνοντας μια πλήρη απόδειξη.

Αποτέλεσμα αυτής της διαπίστωσης ήταν να βρεθεί τότε μια εξίσωση 5ου βαθμού (ποιές δηλαδή είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες), μπορεί να επιλυθεί. Ο Abel όπως και ο Ruffine είχαν ανακαλύψει κάποια συσχέτιση των ριζών μιας εξίσωσης n -βαθμού, με μερικές υποομάδες της ομάδας των αντιμεταθέσεων.

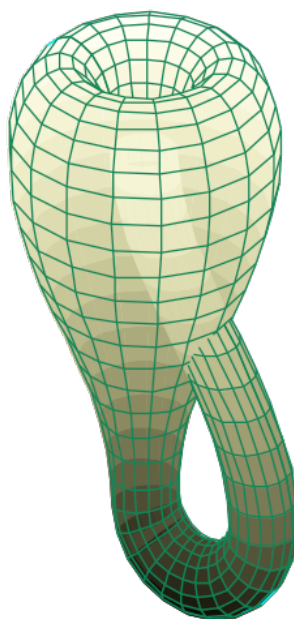
Την απάντηση ανακάλυψε ο Evariste Galois (1811-1832) που απέδειξε ότι αν υπάρχει κάποιος τύπος για την επίλυση μιας 5ου βαθμού εξίσωσης, τότε η ομάδα των «αλγεβρικών συμμετριών» μπορεί να αναλυθεί σε υποομάδες με ένα ειδικό τρόπο. Οι δομές των ομάδων του Galois που αντιστοιχούν στις εξισώσεις βαθμού μικρότερου του 5ου, μπορούν να αναλυθούν με τον ζητούμενο τρόπο.

Η ομάδα που αντιστοιχεί στις περισσότερες 5ου βαθμού εξισώσεις περιέχει την εικοσαεδρική ομάδα, η οποία λόγω της πολυπλοκότητας της δομής της, αναλύεται με τον κατάλληλο τρόπο. Το συμπέρασμα του Galois είναι ότι δεν υπάρχει φόρμουλα για την επίλυση μιας εξίσωσης 5ου βαθμού.

Ο Charles Hermitte, το 1858 ακολουθώντας κάποιον υπαινιγμό του Galois, απέδειξε ότι οι λύσεις μιας 5ου βαθμού εξίσωσης, θα μπορούσαν να βρεθούν με χρήση ελλειπτικών αντί τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι συμμετρίες των πολυέδρων, η θεωρία ομάδων, οι λύσεις των εξισώσεων και οι ελλειπτικές συναρτήσεις συσχετίστηκαν από τον Felix Klein (1849-1925) στο έργο του «Lectures on the Icosahedron and the Solutions of Equations of the Fifth Degree», όπου βλέπουμε την αλληλεπίδραση τόσων μαθηματικών θεωριών, π.χ. η θεωρία

ομάδων προβάλλει στις εξισώσεις και στις γεωμετρικές συμμετρίες. Ο David Hilbert στον πρόλογο της διάλεξής του για τα 23¹ προβλήματά του, σχολιάζει αυτή την αλληλεπίδραση των μαθηματικών κλάδων, έτσι ώστε να εμφανίζονται σαν μια ολότητα, χρησιμοποιώντας το έργο του Klein:

«Συμβαίνει συχνά το ίδιο πρόβλημα να βρίσκει εφαρμογές σε κλάδους των Μαθηματικών, τόσο διαφορετικούς. Πόσο πειστικά ο F. Klein, στην εργασία του για το εικοσάεδρο σκιαγράφησε την σπουδαιότητα η οποία συνδέει το πρόβλημα των κανονικών πολυέδρων της στοιχειώδους γεωμετρίας με την θεωρία ομάδων, με τη θεωρία των εξισώσεων και με τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Όπως οι συνισταμένες ενός μίγματος, οι κλάδοι των μαθηματικών συνδέονται μεταξύ τους με περίεργους τρόπους.»



Σχήμα 5.1.1: Η μπουτίλια του Klein είναι μια μη προσανατολισμένη επιφάνεια χωρίς «εσωτερικές» ή «εξωτερικές» πλευρές, όπως και η λωρίδα του Möbius.

¹Το 3ο πρόβλημα του Hilbert παρουσιάστηκε το 1900 και προβάλλει το ερώτημα: αν δοθούν δύο πολυέδρα με ίσους όγκους, είναι πάντα δυνατόν να τεμαχιστεί το πρώτο σε κάποιο αριθμό τμημάτων τα οποία μπορούν να ξαναενωθούν ώστε να σχηματιστεί το δεύτερο; Ο μαθητής του Hilbert, Max Dehn απέδειξε γενικά ότι η απάντηση είναι αρνητική, όπως υπέθεσε αρχικά και ο ίδιος ο Hilbert.

5.2 Οι πολυεδρικές ομάδες συμμετριών

5.2.1 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού τετραέδρου T_d

²Το κανονικό τετράεδρο έχει συνολικά 24 συμμετρίες και η ομάδα των συμμετριών του T_d είναι ισόμορφη με την ομάδα S_4 (ομάδα των μεταθέσεων των στοιχείων ενός συνόλου με 4 στοιχεία). Η ομάδα των 12 περιστροφικών συμμετριών T είναι ισόμορφη με την υποομάδα A_4 (ομάδα των άρτιων μεταθέσεων της S_4).

Οι συζυγείς κλάσεις της τετραεδρικής ομάδας T_d είναι:

1. μοναδιαία
2. 8 περιστροφές κατά 120° , ισόμορφη με την $8C_3$
3. 3 περιστροφές κατά 180° , ισόμορφη με την $3C_2$
4. 6 ανακλάσεις σε επίπεδο που διέρχεται από δύο άξονες περιστροφής, ισόμορφη με την $6\sigma_d$
5. 6 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 90° , ισόμορφη με την $6S_4$

Στην τετραεδρική ομάδα T_d από τα κυρτά πολύεδρα ανήκουν: το κανονικό τετράεδρο, το κόλουρο τετράεδρο, και το δυϊκό του στερεό Catalan, τριάκισ τετράεδρο.

5.2.2 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού οκταέδρου O_h

Οι 48 συνολικά συμμετρίες του κανονικού οκταέδρου O_h διακρίνονται σε 24 περιστροφικές (chiral ή rotational) που σχηματίζουν την υποομάδα O , και σε 24 που είναι συνδυασμός περιστροφής και ανάκλασης. Οι συζυγείς κλάσεις της O_h είναι:

1. μοναδιαία

²

- C_n - περιστροφή κατά $2\pi/n$ γωνία
- S_n - περιστροφή κατά $2\pi/n$ γωνία και ανάκλαση ως προς επίπεδο κάθετο στον άξονα
- σ_h - οριζόντιο επίπεδο ανάκλασης
- σ_d - διαγώνιο επίπεδο ανάκλασης
- σ_v - κατακόρυφο επίπεδο ανάκλασης

2. 6 περιστροφές κατά 90° , ισόμορφη με την $6C_4$ (C_n η κυκλική ομάδα τάξης n)
3. 8 περιστροφές κατά 120° , ισόμορφη με την $8C_3$
4. 3 περιστροφές κατά 180° γύρω από τους 3 άξονες συμμετρίας, ο καθένας από τους οποίους διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών, ισόμορφη προς την $3C_2$
5. 6 περιστροφές κατά 180° γύρω από τους άξονες, οι οποίοι διέρχονται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών, ισόμορφη με την $6C_2$
6. η αντιστροφή
7. 6 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 90° , ισόμορφη με την $6S_4$
8. 8 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 60° , ισόμορφη με την $8S_6$
9. 3 ανακλάσεις ως προς επίπεδο κάθετο στους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών, ισόμορφη με την $3\sigma_h$
10. 6 ανακλάσεις προς επίπεδο κάθετο στους άξονες που διέρχονται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών, ισόμορφη προς την $6\sigma_d$

Η οκταεδρική ομάδα O_h είναι ισόμορφη προς την ομάδα $S_4 \times C_2$

Στην οκταεδρική ομάδα εκτός του κανονικού οκταέδρου και του κύβου ανήκουν: 1) το κυβοκτάεδρο και το δυϊκό του, ρομβικό δωδεκάεδρο, 2) το ρομβικυβοκτάεδρο και το δυϊκό του, δελτοειδές εικοσιτετράεδρο, 3) ο κόλουρος κύβος και το δυϊκό του, τριάκις οκτάεδρο, 4) το κόλουρο οκτάεδρο και το δυϊκό του, τετράκις εξάεδρο, 5) ο κολοβός κύβος (snub cube) και το δυϊκό του, πενταγωνικό εικοσιτετράεδρο.

5.2.3 Η ομάδα των συμμετριών του κανονικού εικοσαέδρου I_h

Η εικοσαεδρική ομάδα (η ομάδα με την πιο περίπλοκη δομή) I_h είναι η ομάδα συμμετριών του εικοσαέδρου και κανονικού δωδεκαέδρου. Έχει τάξη 120, και είναι ισόμορφη με την ομάδα $A_5 \times C_2$ (A_5 η υποομάδα άρτιων μεταθέσεων της S_5).

Αποτελείται από τις συζυγείς κλάσεις:

1. μοναδιαία
2. 12 περιστροφές κατά 72° , τάξης 5, ισόμορφη με την $12C_5$

3. 12 περιστροφές κατά 144° , τάξης 5, ισόμορφη με την $12C_5^2$
4. 20 περιστροφές κατά 120° , τάξης 3, ισόμορφη με την $20C_3$
5. 15 περιστροφές κατά 180° , τάξης 2, ισόμορφη με την $15C_2$
6. η αντιστροφή
7. 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 180° , τάξης 10, ισόμορφη με την $12S_{10}$
8. 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 36° , τάξης 10, ισόμορφη με την $12S_{10}^3$
9. 20 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 60° , τάξης 6, ισόμορφη με την $20S_6$
10. 15 ανακλάσεις τάξης 2, ισόμορφη προς την 15σ (σ η ανάκλαση τάξης 2)

Πολύεδρα που ανήκουν στην εικοσαεδρική συμμετρία

Εκτός του κανονικού εικοσαέδρου και του κανονικού δωδεκαγώνου στην εικοσαεδρική ομάδα I_h ανήκουν:

1. το κόλουρο δωδεκάεδρο και το δυϊκό του, τριάκις εικοσάεδρο
2. το κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο και το δυϊκό του, δισδιάκις τριακοντάεδρο
3. το κόλουρο εικοσάεδρο και το δυϊκό του, πεντάκις δωδεκάεδρο
4. το ρομβικοσιδωδεκάεδρο και το δυϊκό του, δελτοειδές εξηκοντάεδρο
5. το εικοσιδωδεκάεδρο και το δυϊκό, του ρομβικό τριακοντάεδρο
6. το κολοβό (snub) δωδεκάεδρο και το δυϊκό του, πενταγωνικό εξηκοντάεδρο
7. Από τα Kepler-Poinsot πολύεδρα:
 - (α') το μικρό δωδεκάεδρο αστέρας και το δυϊκό του, μεγάλο δωδεκάεδρο
 - (β') το μεγάλο δωδεκάεδρο αστέρας και το δυϊκό του, μεγάλο εικοσάεδρο

Κεφάλαιο 6

Τα Μαθηματικά από το 300 π.χ. μέχρι την Αναγέννηση

6.1 Τα Μαθηματικά στην Αλεξάνδρεια μετά τον Ευκλείδη

Η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, υπήρξε το μεγαλύτερο πολιτιστικό κέντρο γύρω στα 300 π.Χ., με την περίφημη Σχολή και Βιβλιοθήκη της.

Οι Πτολεμαίοι, θαυμαστές του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, δημιούργησαν ένα κλίμα που συνετέλεσε στη μάθηση. Οι σπουδαστές διδάσκονταν μαθηματικά, αστρονομία, ιατρική και φιλολογία. Η Αριθμητική είχε ιδιαίτερα επηρεαστεί από το επαγωγικό πνεύμα, καθώς και τους τρόπους «προσέγγισης» που χρησιμοποιήθηκαν στην Αρχαία Αίγυπτο και Βαβυλωνία.

Μεγάλοι γεωμέτρες σπούδασαν στη Σχολή της Αλεξάνδρειας. Ο Ύψικλής που έζησε το 2ο μ.Χ. αιώνα στην Αλεξάνδρεια πρόσθεσε το 14ο βιβλίο στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Το έργο περιλαμβάνει επιπλέον ιδιότητες των πολυέδρων, βασιζόμενο σε έργα του Απολλώνιου και Αρίσταρχου. Γνώριζε το Θεώρημα του Απολλώνιου (265-170 π.Χ.):

Θεώρημα (Απολλώνιου). Τα εμβαδά επιφανείας δύο στερεών βρίσκονται σε ίσο λόγο με το λόγο των όγκων τους.

Στο 14ο βιβλίο υπάρχει και ένα θεώρημα του Αρίσταρχου που αποδείχτηκε στη χαμένη εργασία «Η σύγκριση των πέντε Σχημάτων». Εδώ ισχυρίζεται ότι αν ένα εικοσάεδρο και ένα δωδεκάεδρο εγγράφονται στην ίδια σφαίρα, τότε ο κύκλος που περιγράφεται μιας τριγωνικής έδρας του εικοσάεδρου, περιγράφεται και μιας πενταγωνικής του δωδεκάεδρου.

Οι «προσαρτήσεις» βιβλίων στα «Στοιχεία» ήταν φυσικό επακόλουθο της μεγάλης αναγνωρισιμότητας του έργου του Ευκλείδη και συνέβησαν κατά καιρούς μέχρι την Αναγέννηση.

Παράλληλα με τη γεωμετρία αναπτύσσεται η αστρονομία, καθώς υπήρξε έντονη η αναζήτηση της χαρτογράφησης των αλλαγών στην ουράνια σφαίρα. Είχε προηγηθεί η μελέτη των μεγίστων κύκλων από τους Πυθαγόρειους και η αναζήτηση της εξήγησης της φύσης μέσω των μαθηματικών από τον Πλάτωνα. Ακολούθησαν οι αστρονομικές μελέτες του Ευκλείδη, Υψικλή, Απολλώνιου. Η προσπάθεια υπολογισμού των θέσεων των ουράνιων σωμάτων οδήγησε στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας. Ο Ίππαρχος (190-120 π.Χ.) δημιούργησε ένα χάρτη του ουρανού και επινόησε τον αστρολάβο (όργανο μέτρησης του ύψους του ηλίου και των πλανητών).

Ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ.) με κυριότερα έργα του τα «Κωνικά» (8 βιβλία, εκ των οποίων σώθηκαν τα 7) με κορυφαίο το πέμπτο βιβλίο του, ασχολήθηκε ακόμη και με το «Δήλιο» πρόβλημα, το οποίο και έλυσε με τη βοήθεια της τομής ενός κύκλου και μιας υπερβολής. Μερικά από τα διασωθέντα έργα του είναι: «Περί λόγου αποτομής», «Κατασκευή δύο μέσων ανάλογων», «Σύγκριση δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου».

Ο Ερατοσθένης (276-194 π.Χ.) με καταγωγή από την Κυρήνη, έζησε και εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια, όπου και πέθανε. Φίλος του Αρχιμήδη, εφηύρε το σφαιρικό αστρολάβο, υπολόγισε την περιφέρεια της γης με εξαιρετική ακρίβεια, ενώ το γνωστό του «κόσκινο» ήταν

ένας τρόπος εύρεσης των πρώτων αριθμών, που είναι μικρότεροι ενός αριθμού.

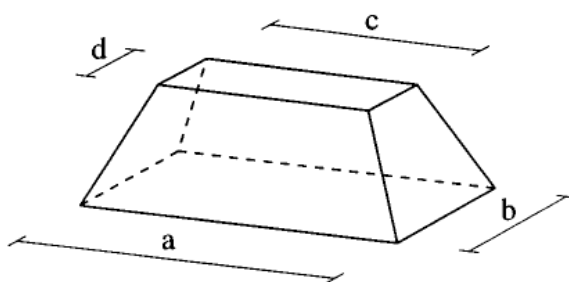
Ο Πτολεμαίος ο Κλαύδιος (85-165 μ.Χ.) είναι γνωστός για τα έργα του: «Μαθηματική Σύνταξη», «Γεωγραφική Υφήγηση», «Αρμονικά», «Οπτική Πραγματεία» με σημαντικότερο την «Αλμαγέστη» όπου παρουσιάζεται η πρώτη συστηματική μελέτη της Αστρονομίας, αποτελούμενη από δεκατρείς τόμους ενώ στη «Γεωγραφία» υπάρχουν μέθοδοι προβολής για τη σχεδίαση χαρτών.

Ο Ήρων (10-70 μ.Χ.), ιδιαίτερα εξοικειωμένος με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, υπήρξε κυρίως μηχανικός και εφευρέτης. Το έργο του διαιρείται στο καθαρά μαθηματικό και στο μηχανικό μέρος. Έργα του: «Πνευματικά», «Μηχανική», «Μετρική», «Διόπτρα», «Αυτόματα». Το μαθηματικό μέρος του έργου του περιλαμβάνεται στη «Μετρική» και αφορά στη μέτρηση μιας επιφάνειας, καθώς και στην πρόοδο για τον υπολογισμό των όγκων, ενώ περιέχει και το γνωστό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού E τριγώνου που έχει πλευρές α , β , γ και ημιπερίμετρο τ :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

Άλλος υπολογιστικός τύπος αφορά τον όγκο μιας κόλουρης πυραμίδας με ορθογώνια βάση και οροφή που βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα (σχήμα 6.1.1). Οι πλευρές συμβολίζονται με a , b , c και d και το ύψος του στερεού με h , ο δε όγκος του V δίνεται από τον τύπο:

$$V = h \left[\frac{1}{4} (a + c)(b + d) + (a - c)(b - d) \right]$$



Σχήμα 6.1.1: Κόλουρη πυραμίδα με ορθογώνια βάση και οροφή που βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα.

Ο Διόφαντος γύρω στα 250 μ.Χ. εκπροσώπησε την αρχαία Ελληνική Άλγεβρα με κύριο έργο του τα «Αριθμητικά» που περιλαμβάνει 189 προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις και συστήματα πρώτου-δευτέρου βαθμού. Άλλο ένα έργο του που έχει διασωθεί είναι: «Περί πολυγώνων αριθμών», ενώ τα «Πορίσματα» και «Μοριαστικά» έχουν χαθεί.

Ο Πάππος (290-350 μ.Χ.) υπήρξε μαθηματικός, γεωμέτρης και μηχανικός. Θεωρείται από τους τελευταίους προ της παρακμής Έλληνες μαθηματικούς. Υπήρξε σχολιαστής των «Στοιχείων» και έγινε γνωστός κυρίως από το έργο του «Συναγωγή», όπου συγκέντρωσε τις περισσότερες έρευνες και αποτελέσματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών για την αριθμητική και τη γεωμετρία, μαζί με τα σχόλιά του.

Η «Συναγωγή» αποτελείται από οκτώ βιβλία, αλλά τα δύο πρώτα έχουν χαθεί. Στο 3ο βιβλίο του λύνει προβλήματα εγγραφής των πέντε κοσμικών σχημάτων σε σφαίρα με μέθοδο διαφορετική από αυτήν του Ευκλείδη. Το έργο του ολοκληρώνεται με μια δική του επίλυση για το «Δήλιο» πρόβλημα (πρόβλημα των δύο μέσων αναλόγων). Σημαντικότερο βιβλίο της «Συναγωγής» θεωρείται το πέμπτο, όπου ασχολείται με ισομετρικά προβλήματα, και αποτελεί τη βάση του λογισμού των μεταβολών. Στο βιβλίο του αποδεικνύει ότι η σφαίρα έχει το μέγιστο όγκο από όλα τα κανονικά στερεά που έχουν ίσο με αυτήν εμβαδόν.

Το χαρακτηριστικό του Πάππου είναι οι εξηγήσεις που δίνει για το πώς γίνονται οι κατασκευές (αντίθετα από τον Ευκλείδη και άλλους κλασσικούς συγγραφείς).

Εισάγει την αναλυτική μέθοδο με την οποία ξεκινώντας από το αποτέλεσμα και εργαζόμενοι πηγαίνοντας πίσω, οδηγούμαστε σε ότι μας είναι ήδη γνωστό.

Προς το τέλος του 3ου μ.Χ. αιώνα διαδίδεται και στην Αλεξάνδρεια, η Πλατωνική φιλοσοφία. Ο Ιάμβλιχος (245-325 μ.Χ.) ευρύτερα γνωστός για το έργο του πάνω στη φιλοσοφία των Πυθαγόρειων, υπήρξε αυθεντία του νεοπλατωνισμού για διακόσια περίπου χρόνια, εισάγοντας μια φυσική ερμηνεία πολλών εννοιών με έμφαση στη θρησκευτική παρατήρηση.

Τον κύκλο των νεοπλατωνικών φιλοσόφων κλείνει ο Πρόκλος (412-485 μ.Χ.). Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια και στην Αθήνα, Ρητορική, Φιλοσοφία και Μαθηματικά. Υπήρξε μέχρι τον θάνατό του διευθυντής της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Έγραψε σχόλια και κριτικές για το

πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» καθώς και για τον «Τίμαιο» και «Δημοκρατικό» του Πλάτωνα.

Γενικά οι πλατωνικές ιδέες είχαν απήχηση σε πολλούς σχολιαστές, μέχρι και τον Μεσαίωνα, επιδρώντας στη μίξη της λογικής εξήγησης με τη Θεολογία. Η Υπατία που γεννήθηκε το 370 μ.Χ. θεωρήθηκε για σχεδόν δεκαπέντε αιώνες η μόνη γυναίκα μαθηματικός και αστρονόμος, είναι ίσως η τραγικότερη προσωπικότητα των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, λόγω του φρικτού θανάτου της, αλλά και γιατί το τέλος της συνέπεσε με την αρχή της παρακμής της επιστήμης. Κόρη του επίσης μαθηματικού Θέωνα από τη Σμύρνη, σπούδασε στη νεοπλατωνική Σχολή του Πλούταρχου του Νεώτερου στην Αθήνα. Στην Αλεξάνδρεια δίδαξε μαθηματικά και φιλοσοφία σε ανθρώπους κάθε θρησκείας. Έγραψε σχόλια για την «Αριθμητική» του Διόφαντου, για τον Αστρονομικό Κανόνα του Πτολεμαίου και για τις κωνικές τομές του Απολλώνιου. Κανένα από τα έργα αυτά δεν έχει διασωθεί ολοκληρωμένο.

Με το μαρτυρικό θάνατό της το 415 μ.Χ. από φανατικούς χριστιανούς, πιθανότατα κατ' εντολή του τότε πατριάρχη της Αλεξάνδρειας, Κύριλλου (ο οποίος αναγορεύτηκε και Πατέρας της Χριστιανικής Πίστης), κλείνει και η Νεοπλατωνική Σχολή της Αλεξάνδρειας. Το 640 μ.Χ. με την εισβολή των Αράβων στην Αλεξάνδρεια, καταστρέφεται οριστικά και το μουσείο της Αλεξάνδρειας.

Η έρευνα πλέον αντικαθίσταται από θρησκευτικές λατρείες, αναζήτηση της αλήθειας μέσα από το μυστικισμό και την αστρολογία. Ακολουθούν οι Σκοτεινοί Χρόνοι (Dark Ages) του Μεσαίωνα στην Ευρώπη, με Βυζαντινούς λόγιους να περιορίζονται στη διάσωση κλασικών έργων, και τη σκυτάλη της προώθησης της επιστήμης να περνά στον Αραβικό κόσμο.

6.2 Η παρακμή της επιστήμης - Τα Μαθηματικά στο Μεσαίωνα

Η παρακμή της επιστήμης ήταν ένα από τα επακόλουθα των ριζικών αλλαγών μετά την πτώση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Επιπλέον η επικράτηση του Χριστιανισμού γύρω στον 4ο μ.Χ. αιώνα δεν ευνόησε την εξέλιξη των θετικών επιστημών.

Ο Άγιος Αυγουστίνος (354-430 μ.Χ.), παρά το γεγονός ότι συνέβαλε στην προώθηση των Πλατωνικών ιδεών στη Δύση, συνιστούσε στους Χριστιανούς «να προφυλάγονται από τους μαθηματικούς που πιθανόν να έχουν συμμαχήσει με το διάβολο, με σκοπό να συσκοτίσουν το πνεύμα και να περιορίσουν τους ανθρώπους στα δεσμά της κολάσεως».

Ο Βοήθιος (480-524 μ.Χ.), Ρωμαίος στην καταγωγή, έγραψε στα Λατινικά μια επιτομή της Γεωμετρίας, της Αριθμητικής, της Μουσικής και της Αστρονομίας. Μετάφρασε έργα του Αριστοτέλη αφιερωμένα στη Λογική και στη Φιλοσοφία καθώς και στο αριθμητικό έργο του Νικομάχου.

Ο Νικόμαχος Γερασηνός (60-120 μ.Χ.) ανήκει στους ύστερους φιλόσοφους του Πυθαγορισμού και υπήρξε σπουδαίος Μαθηματικός. Στο «Εγχειρίδιο Αρμονικής» υποστήριζε ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ αριθμών και μουσικών φθόγγων, με τις ιδιότητες των φθόγγων να αντιστοιχούν σ' αυτές των αριθμών. Στην «Αριθμητική Εισαγωγή» εκθέτει την Πυθαγόρεια Αριθμητική. Η πραγματεία του για τους πολύγωνους και πυραμιδικούς αριθμούς επηρέασε την μεσαιωνική Αριθμητική.

Οι πλατωνικές ιδέες πέρασαν στη Χριστιανοσύνη της δύσης, κυρίως με τη συμβολή του Αυγουστίνου, ενώ στην Ανατολή μέσω των Βυζαντινών. Στη Γεωμετρία δίνεται έμφαση στα τέλεια και ατελή σχήματα που παρουσιάζονται, σαν επίπεδα ηθικής τελειότητας. Με τη στέψη του Καρλομάγνου (768-814 μ.Χ.) ως αυτοκράτορα της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, το 800 μ.Χ., άρχισε και μια στροφή προς την εκπαίδευση, τουλάχιστον όσον αφορούσε τους ευγενείς. Ο Καρλομάγνος έφερε στην αυλή του τον Άγγλο μοναχό Αλκουΐνο και του ανέθεσε την οργάνωση των σχολείων.

Η περίοδος 300-1100 μ.Χ., δηλαδή τα πρώιμα μεσαιωνικά χρόνια, διακρίνεται από το ενδιαφέρον των μαθηματικών για τη μελέτη των προγενέστερων, την αναζήτηση κάποιων νέων αποδείξεων σε ήδη αποδεδειγμένους ισχυρισμούς, και τη συμπλήρωση κενών εκεί όπου τα πρωτότυπα κείμενα είχαν χαθεί.

Στο Βυζάντιο οι μαθηματικοί επικεντρώθηκαν στη διαφύλαξη των αρχαίων μαθηματικών κειμένων και στην εφαρμογή μαθηματικών πρακτικών στην τέχνη και στην αρχιτεκτονική.

Η Ακαδημία του Πλάτωνα λειτούργησε μέχρι το 529 μ.Χ., έτος που ο Ιουστινιανός έκλεισε όλα τα Ελληνικά σχολεία.

Στη Δύση η Καθολική Εκκλησία που απέκτησε απεριόριστη εξουσία, ανέλαβε αποκλειστικά την εκπαίδευση. Μέλημά της η περιορισμένη μόρφωση των πολιτών και η μετάφραση των αρχαίων έργων από τα Αραβικά και Ελληνικά στα Λατινικά. Οι ελεύθερες ιδέες και η αναζήτηση λογικών εξηγήσεων αντικαταστάθηκαν από την απλή μελέτη της Βίβλου. Οι μαθηματικοί της εποχής ασχολούνται κυρίως με τη γεωμετρία που περιορίζεται σε συμπεράσματα από τις ιδιότητες της ευθείας και του κύκλου. Τους απασχολούσαν προβλήματα ύπαρξης αντικειμένων που μπορούν να κατασκευαστούν με πεπερασμένο αριθμό βημάτων, για να επιβεβαιώσουν ότι οι υπάρχοντες ορισμοί των μαθηματικών αντικειμένων δεν είναι κενοί.

Αμφισβητήθηκε ακόμη και η ύπαρξη του $\sqrt{2}$ ως αριθμού, και περιορίστηκαν οι άρρητες ποσότητες σε γεωμετρικές ερμηνείες.

Οι κλάδοι των Μαθηματικών που μονοπωλούσαν το ενδιαφέρον εκείνη την εποχή ήταν η Θεωρία Αριθμών και η Γεωμετρία. Με τις Σταυροφορίες, έρχονται στη Δυτική Ευρώπη πολλά παλαιά κείμενα. Οι μεταφράσεις στα Ελληνικά - αν και κατά πολύ καλύτερες από εκείνες των Αράβων - δεν ήταν αρκετά ακριβείς, αφού η γνώση της Ελληνικής γλώσσας ήταν περιορισμένη στη Δύση.

Εξέχουσα φυσιογνωμία των μαθηματικών ο Leonardo di Pisa (1170-1250 μ.Χ.) γνωστός ως «Fibonacci» διαδίδει μέσω του υπολογιστικού του βιβλίου «Liber Abaci» το Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα στην Ευρώπη.

Το 13ο μ.Χ. αιώνα τα έργα του Αριστοτέλη γίνονται ιδιαίτερα δημοφιλή, και το ενδιαφέρον για τα κλασσικά έργα γίνεται έντονο, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη πολλών βιβλιοθηκών, ειδικά κατά τον 15ο αιώνα.

Μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1453 μ.Χ. πολλοί λόγιοι μετέφεραν στη Δύση πολύτιμα χειρόγραφα που κατείχαν.

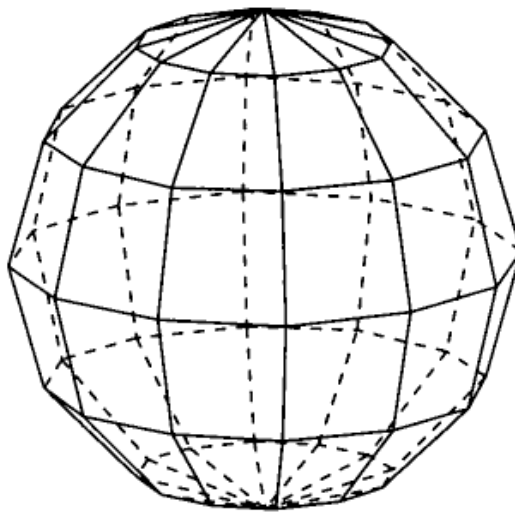
Την εποχή εκείνη κατασκευάζονταν όπλα και λόγω του ενδιαφέροντος των επιστημόνων για τα προβλήματα κίνησης, μελετώνται οι τροχιές των σωμάτων. Η κύρια ενασχόληση ήταν σε προβλήματα Μηχανικής για πρακτικούς λόγους, π.χ. βαλλόμενα βλήματα.

Γύρω στο 1250 μ.Χ., ο Κάμπανος της Ναβάρα εκδίδει τα «Στοιχεία». Νωρίτερα είχαν γίνει μεταφράσεις όπως αυτές του Αδελάρδου του Μπάαθ και του Gerard της Cremona. Η μετάφραση του τελευταίου ήταν μια από τις καλύτερες, αφού είχε χρησιμοποιήσει μια μετάφραση του Chabit.

Η μετάφραση του Κάμπανου ήταν η πιο διαδεδομένη, βασισμένη σε παλαιότερες εκδόσεις. Ο Κάμπανος υπήρξε μαθηματικός που ήταν εξοικειωμένος με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στην πρόταση 17 του XII βιβλίου των «Στοιχείων», ο Ευκλείδης δείχνει πώς κατασκευάζεται ένα πολύεδρο που περικλείεται μεταξύ δύο σφαιρών. Συνεχίζει εφαρμόζοντας τη μέθοδο εξαντλήσεως του Ευδόξου, για να δείξει ότι ο όγκος μιας σφαίρας μεταβάλλεται ανάλογα με τον κύβο της διαμέτρου της. Η κατασκευή παράγει ένα πολύεδρο με n δακτύλιους, ο καθένας από τους οποίους έχει $2n$ έδρες. Με τον τρόπο αυτό η πολυεδρική σφαίρα έχει συνολικά $2n^2$ έδρες. Το σχήμα 6.2.2 αποτελεί μια εφαρμογή για $n = 6$.

Το 1482 τυπώθηκε η έκδοση των «Στοιχείων» του Καμπάνου και ήταν το πρώτο μαθηματικό βιβλίο που τυπώθηκε. Το 1505 τυπώθηκε η πρώτη μετάφραση από Ελληνική πηγή, από τον Bartolomeo Zambetti. Ο Zambetti επισήμανε ανακρίβειες πάνω στην έκδοση του Κάμπανου, θεωρώντας ότι τα βιβλία XIV και XV γράφτηκαν από τον Ύψικλή. Άλλά και ο Zambetti υπέπεσε σε ανακρίβειες, επιβεβαιώνοντας τις αδυναμίες των μεταφράσεων των μαθηματικών κειμένων.

Ακολούθησε η μετάφραση του Ιταλού μαθηματικού Francesco Maurolico (1494-1575) και η μετάφραση του Federico Commando που τυπώθηκε το 1572. Η τελευταία κρίθηκε σαν η εγκυρότερη μέχρι τον 19ο αιώνα.



Σχήμα 6.2.2: Ένα πολύεδρο που προσεγγίζει σφαίρα.

Τον 13ο αιώνα ιδρύθηκαν τα πρώτα Πανεπιστήμια στη Δυτική Ευρώπη, με κεντρική θέση στα προγράμματα σπουδών τη Φιλοσοφία του Αριστοτέλη, διαμορφώνοντας την ιδεολογία του σχολαστικισμού (περιχαράκωση σε σχηματοποιημένη αντιμετώπιση της γνώσης).

Η δυναμική της Γεωμετρίας μετά τον 13ο αιώνα θα αναδείξει την Προοπτική στη Ζωγραφική - Γλυπτική - Αρχιτεκτονική.

Με την στροφή της μαθηματικής παιδείας προς τις κλασσικές γνώσεις των αρχαίων Ελλήνων, σηματοδοτείται η έναρξη της Αναγέννησης και το τέλος της παρακμής των «Σκοτεινών Χρόνων».

Ο νεοπλατωνισμός τοποθετεί τον άνθρωπο στο κέντρο του κόσμου, ενώ συγχρόνως εμφανίζονται νέες τεχνικές στη ζωγραφική και νέες τεχνικές χάραξης (ξυλογραφία). Στην Αρχιτεκτονική εγκαταλείπεται ο γοτθικός ρυθμός με τις αυστηρές κάθετες γραμμές και δίνεται έμφαση στις οριζόντιες γραμμές με την αναζήτηση της αρμονίας στην τελική σύνθεση. Σημαντικοί αρχιτέκτονες - ζωγράφοι - γλύπτες των οποίων τα έργα βασίστηκαν στην Προοπτική ήταν οι: Brunelleschi, Masaccio, Masolino, Donatello, Piero della Francesca, Leon Battista Alberti, Paolo Uccello, Luca Pacioli, Albrecht Dürer, κ.α.

Κεφάλαιο 7

Η προοπτική (perspective) στην τέχνη και η κανονικότητα

«Η προοπτική είναι το χαλινάρι
και το πηδάλιο της ζωγραφικής»

Leonardo da Vinci

7.1 Τι είναι η Προοπτική

Η Προοπτική (Perspective) είναι η τεχνική που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση τρισδιάστατων εικόνων σε δισδιάστατες επιφάνειες, με τρόπο ώστε να γίνεται έντονη στον παρατηρητή η αίσθηση του βάθους. Στο προοπτικό σχέδιο, οι παράλληλες γραμμές, π.χ. ενός δρόμου, δείχνουν να τέμνονται σε κάποιο σημείο που ονομάζεται «σημείο φυγής» ή «εξαφάνισης» (vanishing point). Το σημείο φυγής χρησιμοποιήθηκε για να προσδώσει ρεαλισμό στα έργα κυρίως από το 1400 μ.Χ. και αρχικά στη Φλωρεντία. Ο όρος «Perspective» προέρχεται από την Λατινική λέξη «perspicere» (βλέπω δια μέσου). Τα δύο χαρακτηριστικά της προοπτικής είναι:

1. Τα αντικείμενα σχεδιάζονται έτσι ώστε να φαίνονται μικρότερα καθώς η απόστασή τους αυξάνεται από τον παρατηρητή και

2. Το μέγεθος των διαστάσεων του αντικειμένου κατά μήκος της οπτικής γραμμής δείχνει μικρότερο από ότι είναι στην πραγματικότητα.

Τα προοπτικά έργα τυπικά έχουν μια γραμμή ορίζοντα. Αυτή η γραμμή, ακριβώς απέναντι από το μάτι του παρατηρητή, παριστάνει τα αντικείμενα πολύ μικρότερα (κάτι ανάλογο που συμβαίνει με τη γραμμή του ορίζοντα της Γης). Κάθε αναπαράσταση με προοπτική διαθέτει παράλληλες ευθείες με ένα ή περισσότερα σημεία φυγής (vanishing points). Η προοπτική ενός σημείου σημαίνει ότι το προοπτικό σχέδιο έχει ένα τέτοιο σημείο. Συνήθως αυτό βρίσκεται απέναντι από το μάτι του θεατή, και τις περισσότερες φορές πάνω στη γραμμή του ορίζοντα.

7.2 Η ιστορία της Προοπτικής μέχρι την Αναγέννηση

Συστηματικά απόπειρες προοπτικής τεχνικής σε έργα τέχνης άρχισαν γύρω στον 5ο π.Χ. αιώνα στην Αρχαία Ελλάδα, και έγιναν πάνω στη θεατρική σκηνή. Χρησιμοποιούσαν επίπεδα χωρίσματα πάνω στη σκηνή για να προσδώσουν βάθος.

Ο Ευκλείδης στο έργο του «Οπτικά», εισάγει τους όρους «οπτική ακτίνα», «οπτικός κώνος». Ωστόσο υπάρχει διαφωνία κατά πόσον η προοπτική του Ευκλείδη συμπίπτει με το σύγχρονο μαθηματικό ορισμό της Προοπτικής.

Το 1021 μ.Χ. ο Ιρακινός μαθηματικός Alhazen στο έργο του «Οπτικά» εξηγεί ότι το φως προβάλλεται κωνικά στο μάτι. Προς τα μέσα του 13ου αιώνα η ζωγραφική, η γλυπτική και η αρχιτεκτονική αρχίζουν να εγκαταλείπουν τις αυστηρές μεσαιωνικές τεχνικές. Στη γλυπτική αυτό φαίνεται ευκολότερο, όμως στη ζωγραφική είναι δυσκολότερο. Ο ζωγράφος πρέπει να αποδώσει την ζωντανή εικόνα τρισδιάστατου αντικειμένου πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια.

Τα ζωγραφικά έργα μέχρι το 12ο και 13ο αιώνα είχαν ένα χρυσό υπόβαθρο που επεδίωκε να προσδίνει στην εικόνα κάτι το υπερφυσικό και μεγαλειώδες. Οι ανθρώπινες μορφές έδειχναν χωρίς αισθήματα σαν αιθέριες παρουσίες, ενώ η ελληνική έκφραση-κίνηση απουσίαζαν από

τα έργα της εποχής εκείνης. Με τη στροφή προς την κλασσική εποχή, που είχε επίκεντρο τον άνθρωπο και το σύμπαν, ανακαλύπτεται η έλλειψη του ρεαλισμού από τα έργα. Το χρυσό αντικαθίσταται από άλλα χρώματα όπως το μπλε, ενώ χρησιμοποιείται η σκίαση για να προσδώσει τη χωρική εντύπωση. Τα αντικείμενα ζωγραφίζονταν με τρόπο ώστε ο θεατής να μπορεί να τα παρατηρήσει από οποιαδήποτε θέση κι αν βρίσκεται. Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των νέων πινάκων είναι η σύγκλιση των παραλλήλων γραμμών σε κάποιο σημείο. Είναι αυτό που δίνει την αίσθηση του τρισδιάστατου χώρου.

Ο Giotto di Bondonne (1267-1377) επιχείρησε να χρησιμοποιήσει μεθόδους προοπτικής στο έργο του «Ο Ιησούς ενώπιον του Καϊάφα». Το έργο, παρ' ότι δεν ανταποκρίνεται στη σύγχρονη γεωμετρική μέθοδο της Προοπτικής, δίνει την αίσθηση κάποιου βάθους και σηματοδοτεί ένα μεγάλο βήμα στην εξέλιξη της Ευρωπαϊκής Τέχνης.

7.3 Brunelleschi, ο εφευρέτης της Προοπτικής

Εφευρέτης ωστόσο της τεχνικής της Προοπτικής θα μπορούσε να θεωρηθεί ο Φλωρεντίνος αρχιτέκτονας-μηχανικός-γλύπτης Filippo Brunelleschi (1377-1446), ο οποίος φιλοτέχνησε το περίγραμμα πολλών φλωρεντίνικων κτισμάτων.

Ο Brunelleschi εξέθεσε ένα πίνακα που όχι μόνο ήταν ρεαλιστικός, αλλά παρήγαγε την ίδια εικόνα στο μάτι όπως στην πραγματικότητα. Είχε ζωγραφίσει μια εικόνα της Βάπτισης, που αντανakλόνταν σε καθρέφτη, έτσι ώστε ο πίνακας του να αποτελεί ένα είδωλο κατόπτρου. Έκανε μια μικρή οπή για το μάτι του θεατή και καλούσε τους θεατές να κοιτάζουν διαμέσου της οπής πίσω από τον πίνακα, την αληθινή βάπτιση. Μετά κρατούσε ένα καθρέφτη μπροστά στον πίνακα έτσι ώστε ο παρατηρητής να βλέπει μια αντανάκλαση του πίνακα. Μετακινώντας τον καθρέφτη ο παρατηρητής μπορούσε να συγκρίνει τον πίνακα με την πραγματική σκηνή της Βάπτισης.

Τα αποτελέσματα ήταν τόσο πειστικά που το γεγονός αυτό αποτέλεσε το σημείο απαρχής της θεωρίας της προοπτικής στην τέχνη.

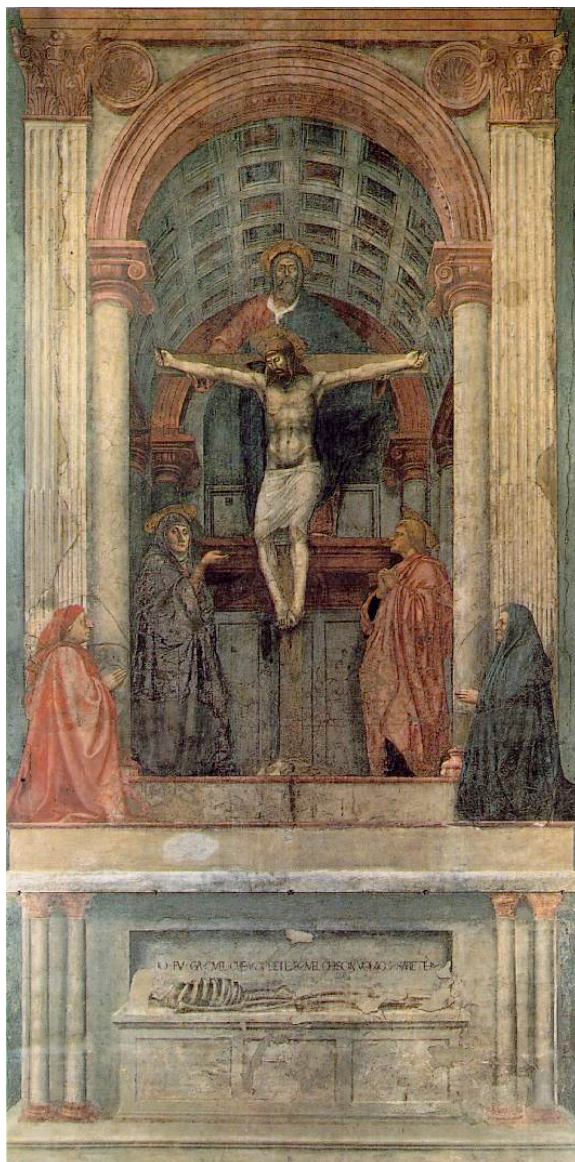


Σχήμα 7.3.1: Ο καθεδρικός ναός της οικογένειας Pazzi

Οι ιδέες του Brunelleschi συνέχισαν να αναπτύσσονται και να χρησιμοποιούνται από πολλούς καλλιτέχνες της Αναγέννησης.

7.4 Η Προοπτική της Αναγέννησης

Ο Masaccio (1401-1428) ήταν ο πρώτος μεγάλος ζωγράφος του Quattrocento και της Ιταλικής Αναγέννησης. Έκανε ενστικτώδεις προσθήκες στη στερεά φόρμουλα της προοπτικής, ώστε να παραχθούν πιο άνετες συνθέσεις, καθώς η αυστηρή εφαρμογή της προοπτικής προκαλεί και μια καταθλιπτική εντύπωση του βάθους. Η χρήση φωτεινών χρωμάτων για αντικείμενα που βρίσκονται σε απόσταση, και η χρήση μουντών χρωμάτων για τα πλησιέστερα υπήρξε αρκετά αποτελεσματική. Η επιλογή του «σημείου φυγής» πίσω από το αντικείμενο στον πίνακα, εμποδίζει τη βύθιση του ματιού του θεατή (βλέπε σχήμα 7.4.2, «Holy Trinity»).



Σχήμα 7.4.2: Holy Trinity.

Ο Leon Battista Alberti (1404-1472) ήταν ο πρώτος που έδωσε πραγματεία για τις μεθόδους ανάδειξης της απόστασης στη ζωγραφική με το έργο του «Della Pittura» (1435-36). Το έργο αυτό υπήρξε οδηγός για τους μεταγενέστερους καλλιτέχνες που χρησιμοποίησαν την προοπτική στα έργα τους.

Παρ' ότι χρησιμοποιούσε οπτική γεωμετρία, ο Alberti εξέφραζε τις ιδέες του με όρους οικείους στον οποιοδήποτε, παρά με αφηρημένους μαθηματικούς όρους. Καθιέρωσε το μέγεθος και

την τοποθέτηση του αντικειμένου στον καμβά, χαράσσοντας ένα ψηφιδωτό για να δράσει σαν σπείρωμα αναφοράς. Το ψηφιδωτό προσδιόριζε τη θέση και την αναλογία των άλλων αντικειμένων στην εικόνα εφαρμόζοντας το βασικό αξίωμα της Προβολικής: ότι το μέγεθος μειώνεται γραμμικά με την απόστασή του από το θεατή.

Ο Leon Battista Alberti θεωρήθηκε σαν το μοντέλο του «Παγκόσμιου Ανθρώπου». Ο όρος «Παγκόσμιος Άνθρωπος» στην Αναγέννηση αναφερόταν στην ικανότητα ανθρώπων να εξηγούν μέσα από τις δικές τους εμπειρίες τον κόσμο, όπως ο Leonadro da Vinci που βασίστηκε στις δικές του παρατηρήσεις για να λύσει μυριάδες προβλημάτων.



Σχήμα 7.4.3: Palácio Rucellai.

Ο Paolo Uccello (1397-1445) χρησιμοποίησε πολυεδρικά αντικείμενα για εξάσκηση στις προβολικές κατασκευές.

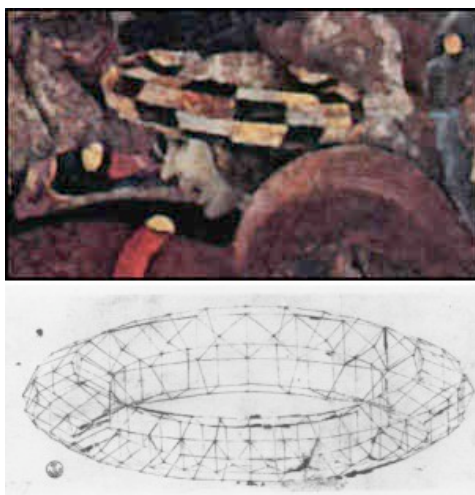
Σχεδίασε τις ανθρώπινες και ζωϊκές φιγούρες του με μαθηματική ακρίβεια, σε δύσκολες στάσεις προοπτικής και με σταματημένη την κίνηση στο χρόνο. Στον πίνακά του «Η μάχη του

San Romano» φαίνεται η μανιώδης αγάπη του να παρουσιάζει επιστημονικά την Προοπτική, ώστε τα πρόσωπα να εμφανίζονται σαν μαριονέττες.



Σχήμα 7.4.4: Niccolò Mauruzi da Tolentino στην Μάχη του San Romano από τον Paolo Uccello.

Ο βιογράφος του Vasari στο έργο του «Lives of the painters», παρατηρεί ότι ο Uccello ξόδεψε πολύ χρόνο στην προοπτική κατασκευή, ενώ θα μπορούσε να βελτιώσει τους πίνακές του, αν αφιέρωνε χρόνο για να αποτυπώσει ζώα όσο και σχήματα.



Σχήμα 7.4.5: Πίνακας ενός mazzocchio στη Μάχη του San Romano και η προοπτική μελέτη του τόρου.

7.5 Τα πολύεδρα στην Τέχνη

«Το πιο όμορφο πράγμα με το οποίο
έχουμε εμπειρία είναι το μυστήριο.
Είναι η πηγή όλης της αλήθειας και
της επιστήμης»

Albert Einstein, What I believe (1930)



Σχήμα 7.5.6: Το σχήμα του τριακοντάεδρου.

Τα πέντε πλατωνικά στερεά, λόγω της κανονικότητάς τους, γοήτευαν τους καλλιτέχνες όλων των εποχών. Αλλά και τα Αρχιμήδεια στερεά, σαν ημικανονικά πολύεδρα, εμφανίζονταν συχνά στα έργα των καλλιτεχνών.

Τα πολύεδρα συνδέθηκαν στενά με την Τέχνη και ειδικά με την Ξυλοτεχνία. Το ξύλο την εποχή της Αναγέννησης υπήρξε μέσο έκφρασης της τέχνης.

Οι αρχικές επενδύσεις σε ξύλο απεικονίζαν γεωμετρικά αντικείμενα ή απόψεις κτιρίων σε προοπτική. Πολλά τέτοια σχέδια έγιναν και είδη εμπορικού σήματος. Τα πιο πολλά πολύεδρα όπως τα Πλατωνικά σχήματα και κάποια από τα Αρχιμήδεια στερεά υπήρξαν θέματα για τέτοιες απεικονίσεις. Η περίπτωση της 72-εδρης σφαίρας που περιγράφηκε από τον Κάμπανο ($2n^2$ με $n = 6$) είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων απεικονίσεων.

Οι κατασκευές επιστημονικών εργαλείων, μουσικών οργάνων (κυρίως λαούτο και αρμόνιο) υπήρξαν οι συνηθέστερες. Για συνθετότερες κατασκευές χρησιμοποιούνταν τα βαθουλώματα των πολυέδρων έτσι ώστε οι έδρες στο πίσω μέρος να είναι ορατές. Οι σκελετοί των ακμών λέγονταν σκελετικά πολύεδρα.

Ο Fra Giovanni της Verona κατασκεύασε επενδύσεις σε πάγκους της χορωδίας και στο σκευοφυλάκιο της Αγίας Μαρίνας στο αρμόνιο της Verona. Δύο από τις σκηνές του σκευοφυλακίου περιέχουν προοπτικές εικόνες πολυέδρων (σφαίρα του Κάμπανου, εικοσάεδρο, κολοβό εικοσάεδρο, επαυξημένο κύβο, επαυξημένο εικοσιδωδεκάεδρο και κύβο-οκτάγωνο).

Ο Piero della Francesca (1415-1492) υπήρξε ένας καλλιτέχνης της πρώιμης Αναγέννησης. Ήταν γνωστός σαν γεωμέτρης και μαθηματικός όσο και σαν καλλιτέχνης. Τα ζωγραφικά έργα του χαρακτηρίζονται για τον ουμανισμό τους αλλά και γιατί είναι εμφανής η τεχνική της προοπτικής.

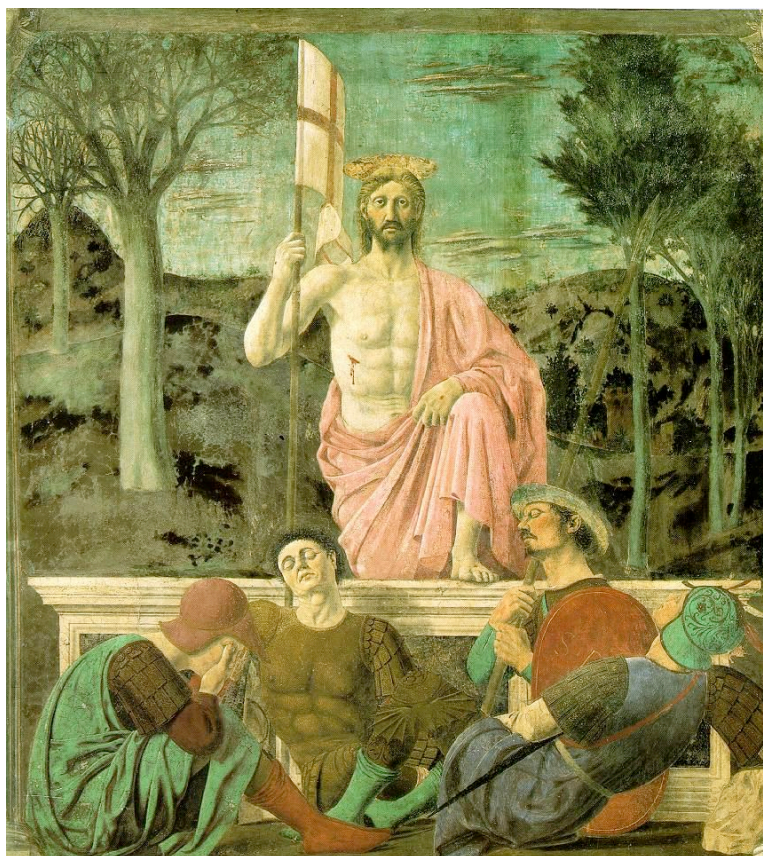
Μέσα από το έργο του συνολικά αναδεικνύεται το έντονο ενδιαφέρον του στη μελέτη της θεωρητικής προοπτικής. Ο Piero έγραψε τρεις πραγματείες γνωστές σήμερα: *Abacus Treatise*, *Short book of the Five Regular Solids*, *On Perspective for Painting* (Η πραγματεία του Άβακα, Σύντομο βιβλίο των πέντε κανονικών στερεών, Πραγματεία πάνω στην Προοπτική για τη Ζωγραφική, αντίστοιχα).

Ο βιογράφος Vasari αναφέρει ότι ο Piero della Francesca υπήρξε μελετητής εξοικειωμένος με το έργο του Ευκλείδη. Παίρνει τις σταθερές αναλογίες μεταξύ των γεωμετρικών στερεών και τις χρησιμοποιεί σε αριθμητικά προβλήματα. Για παράδειγμα: Δίνεται κύβος εγγεγραμμένος σε σφαίρα διαμέτρου 7 μονάδων. Να βρεθεί η επιφάνεια του κύβου.

Τα Αρχιμήδεια στερεά αναφέρονται επίσης σε πολλά προβλήματα του π.χ. αν δοθεί ένα πολύ-

εδρο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και 6 εξάγωνα - ένα κόλouro τετράεδρο - εγγεγραμμένο σε σφαίρα διαμέτρου 12 μονάδων, να βρεθούν οι πλευρές και του εμβαδόν του.

Η πραγματεία του για τους Άβακες είναι επηρεασμένη από δύο εργασίες του Leonardo di Pisa (1170-1250) γνωστού και ως Fibonacci. Ο Fibonacci εισήγαγε τους αραβικούς αριθμούς καθώς και μεθόδους υπολογισμού στην Ευρώπη μέσα από το έργο του «Liber Abbaci» και μετέφρασε Ελληνική και Αραβική γεωμετρία και τριγωνομετρία στα Λατινικά στο έργο του «Practica Geometrica». Αναφέρει τα 3 από τα πέντε Πλατωνικά στερεά δίνοντας αναφορά σε μελετητές του Ευκλείδη για την απόκτηση περισσότερων πληροφοριών. Ο Piero della Francesca μέσα από την πραγματεία του πάνω στον Άβακα δίνει οδηγίες, κανόνες για χρήση εκ μέρους των εμπόρων που έπρεπε γρήγορα να βρίσκουν όγκο π.χ. δοχείων. Τα στερεά τα διαιρεί σε δύο είδη: τα πυραμιδικά και αυτά που διαθέτουν κολόνες. Έτσι πολλά δοχεία π.χ. βαρέλια αντιμετωπίζονται σαν κύλινδροι είτε σαν κόλouroι κώνοι κολλημένοι στις βάσεις τους.



Σχήμα 7.5.7: The Ressurrection (Ανάσταση).

Ο Luca Pacioli (1445-1517) μεγάλωσε στην Τοσκάνη όπου είχε και ο Piero della Francesca το εργαστήριό του. Υπήρξε μαθηματικός, Φραγκισκιανός αδελφός, συνεργάτης και του Leonardo da Vinci. Δημοσίευσε εργασίες πάνω στα μαθηματικά με σημαντικότερο το «Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita». Το έργο αυτό ήταν μια σύνθεση μαθηματικών γνώσεων που περιείχε τυπωμένο έργο πάνω στην άλγεβρα γραμμένο στην καθημερινή γλώσσα.

Το πρώτο από τα βιβλία του έργου του «Compendio de Divina Proportione», περιέχει περίληψη των ιδιοτήτων της θεϊκής αναλογίας δηλαδή της «χρυσής τομής», καθώς και μια μελέτη στα πολύεδρα. Η «καλύτερη των ιδιοτήτων» είναι ότι οι διαγώνιες ενός κανονικού πενταγώνου διαιρούν η μία την άλλη με τον λόγο της χρυσής τομής. Περιέχει ακόμα ένα αποτέλεσμα για το εικοσάεδρο: Τα πέντε τρίγωνα που σχηματίζουν μια στερεή γωνία του, μπορούν να θεωρηθούν σαν μια πυραμίδα με πενταγωνική βάση. Ένα ορθογώνιο μπορεί να εγγραφεί σε ένα εικοσάεδρο, ώστε οι πλευρές του να είναι εναλλάξ πλευρές και διαγώνιες τέτοιων πενταγώνων. Έτσι οι πλευρές του ορθογωνίου βρίσκονται σε λόγο χρυσής τομής. Ένα τέτοιο ορθογώνιο ονομάζεται «χρυσό».

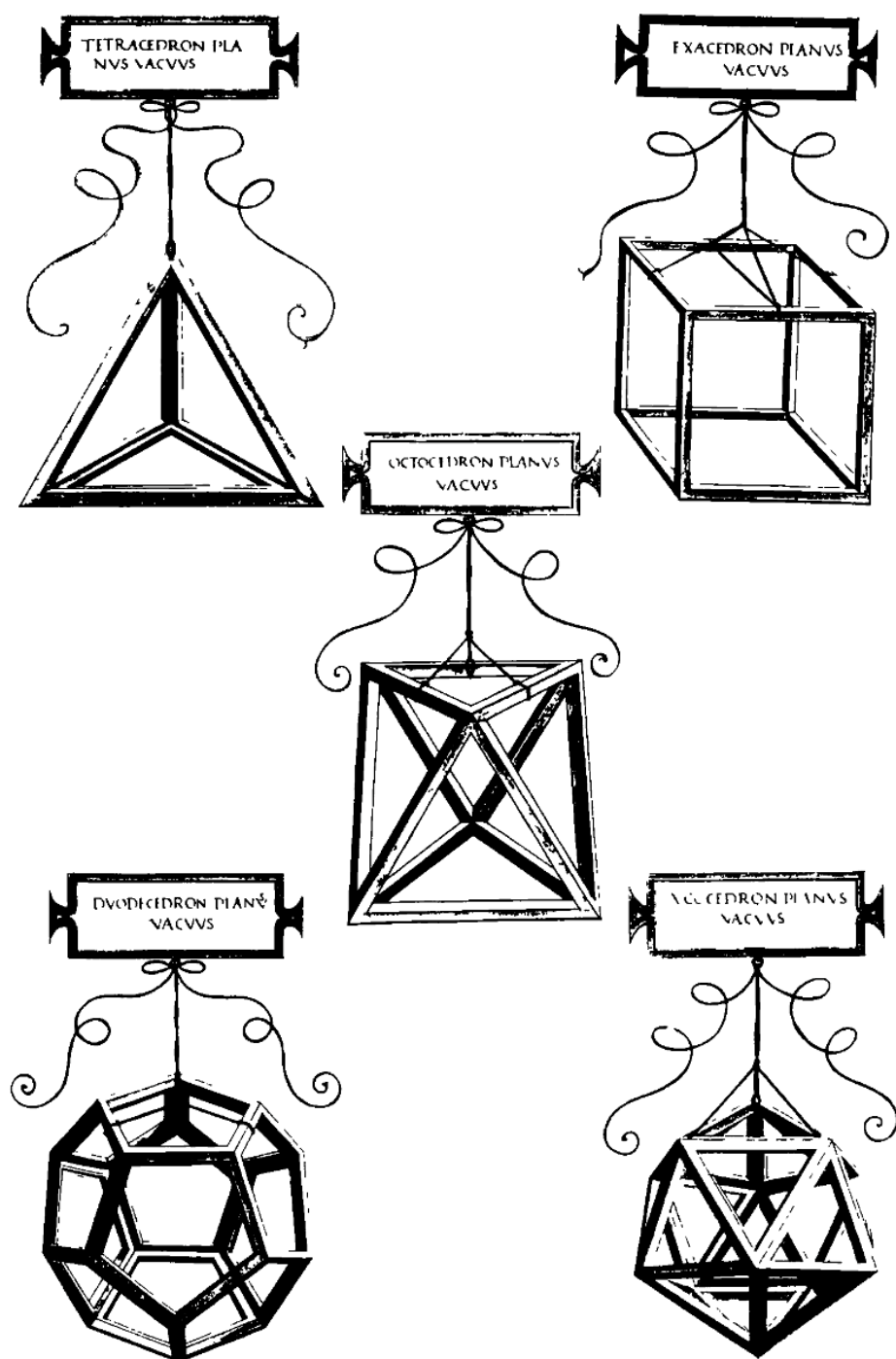
Ο Pacioli θεωρείται δάσκαλος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για τον συνεργάτη του Leonardo da Vinci. Η διδασκαλία του βοήθησε τον Leonardo στις κατασκευές του σαν μηχανικού.



Σχήμα 7.5.8: Εικόνα του Pacioli καθώς διδάσκει. Στο τραπέζι βρίσκονται γεωμετρικά όργανα και αντικείμενα όπως δωδεκάεδρο ενώ ένα ρομβοκυβοκτάεδρο γεμάτο κατά το ήμισυ με νερό κρέμεται από το ταβάνι. Το ρομβοκυβοκτάεδρο συμβολίζει τις καθαρές και παγκόσμιες αλήθειες των μαθηματικών στον Πλατωνικό κόσμο των ιδεών. Οι σελίδες από τις οποίες ο Pacioli αντιγράφει ένα διάγραμμα περιέχουν τις λέξεις LIBER XIII που πρέπει να αναφέρονται στα σχετικά με τα κανονικά πολυέδρα του τελευταίου βιβλίου των «Στοιχείων».

Ο Pacioli επεσήμανε και τη χρησιμότητα της σφαίρας του Κάμπανου και του ρομβοκυβοκτάεδρου στην Αρχιτεκτονική. Για τη δημιουργία νέων πολυέδρων χρησιμοποιούσε δύο διαδικασίες: της αποκοπής και της αυξητικότητας.

Όταν οι πυραμίδες κοπούν από τις γωνίες των στερεών με τριγωνικές έδρες (αποκοπή), τότε προκύπτουν το κόλουρο τετράεδρο, το κόλουρο οκτάεδρο και το κόλουρο εικοσάεδρο. Οι κόλουροι σχηματισμοί από τον κύβο και το δωδεκάεδρο είναι το κυβο-οκτάεδρο και το εικοσι-δωδεκάεδρο. Η διαδικασία της αυξητικότητας εφαρμόζεται στα 5 κανονικά στερεά καθώς και στο κυβοκτάεδρο, στο εικοσιδωδεκάεδρο και στο ρομβοκυβοκτάεδρο.



Σχήμα 7.5.9: Σχέδια του Leonardo, για το «Divina Proportione» του Pacioli.

Το δεύτερο βιβλίο της Divina Proportione αφορά την «Vitruvian» Αρχιτεκτονική.

Ο όρος «Vitruvian» προέρχεται από τον Ρωμαίο μηχανικό, αρχιτέκτονα και συγγραφέα Marco Vitruvius Pollio που έζησε τον 1ο αιώνα π.Χ. Μεταξύ 33-22 π.Χ. έγραψε το έργο «De architectura libri decem» που περιλαμβάνει 10 βιβλία γύρω από την Αρχιτεκτονική. Το έργο αυτό του Βιτρούβιο αποτέλεσε το πιο διδακτικό γύρω από την Αρχιτεκτονική βιβλίο, και επηρέασε βαθύτατα τους δημιουργούς του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης. Πέρα από θέματα πολεοδομίας και αρχιτεκτονικής, περιλαμβάνει θεωρήματα του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα, την υδροστατική αρχή του Αρχιμήδη, τις τυπογραφικές μεθόδους του Ερατοσθένη και του Αρχύτα, μελέτες πάνω στη μέτρηση του χρόνου, σε πολεμικές μηχανές, υδροτροχούς κ.α.

Το τρίτο βιβλίο της Divina Proportione είναι το «Libellus in Tres Partiales Tractatus Divisus Quinque Corporum Regularium» που αποτελεί μια Ιταλική μετάφραση του έργου του Piero de la Francesca «Quinque Corporibus Regularibus» (Πέντε κανονικά στερεά).

7.5.1 Albrecht Dürer

Ο Albrecht Dürer (1471-1528) ήταν Γερμανός ζωγράφος, χαράκτης και μαθηματικός. Από τα είκοσί του χρόνια γνώρισε την τεχνοτροπία της Προοπτικής, όταν ταξίδεψε στη Βενετία, αφού ενέσχυψε στην πατρίδα του τη Νυρεμβέργη επιδημία πανώλης.

Διδάχτηκε νωρίς την τέχνη της χρυσοχοΐας από τον χρυσοχόο στο επάγγελμα πατέρα του. Ακόμη γνώρισε την τέχνη της χαρακτικής πάνω σε ξύλο και χαλκό, την υδατογραφία, ελαιογραφία και μαθήτευσε κοντά στο ζωγράφο Michael Volgemut. Στη Βενετία μελέτησε το έργο του Leonardo da Vinci και του Ραφαήλ, ενώ στη Μπολόνια γνώρισε τον Luca Pacioli.

Το 1507 επιστρέφει στη Νυρεμβέργη. Γνωστοί του πίνακες: «Η στέψη της Παρθένου», «Αδάμ και Εύα», και από τις προσωπογραφίες του πάνω σε ξύλο ή χαλκό σημαντικότερες είναι: «Ο Ιππότης, ο Θάνατος και ο Διάβολος», «Ο Άγιος Ιερώνυμος στο Σπουδαστήριό του» και το υπέροχο έργο του και πιο ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη «Μελαγχολία». Τα τρία αυτά έργα ονομάστηκαν «Meisterstiche» (αριστουργήματα). Το 1525 εκδίδει βιβλίο με θέμα τη γεωμετρία και την προοπτική και το 1526, δύο χρόνια πριν το θάνατό του, το έργο «Οι τέσσερις Απόστολοι». Το 1528 (έτος του θανάτου του) δημοσιεύθηκε ένα έργο προορισμένο

για καλλιτέχνες με σημασία μεγάλη γιατί σκόπευε να καθορίσει αριθμητικά τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος. Με αυτό τον τρόπο ο Dürer εκτός από την ένωση της γεωμετρίας με την τέχνη, προχώρησε και στη σύνδεση της τέχνης με την Αριθμητική.

Το σπουδαιότερο έργο του που επιβεβαιώνει την αξία του Dürer σαν μαθηματικού και που δημοσιεύτηκε το 1525 είναι μια σειρά τεσσάρων βιβλίων με τίτλο «Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt» (Οδηγίες πάνω στην τέχνη της μέτρησης με κανόνα και διαβήτη, των ευθειών επιφανειών και στερεών σωμάτων).

Το έργο σκόπευε να βοηθήσει τους τεχνουργούς της εποχής του μεταδίδοντας τους θεωρητικές γνώσεις της Γεωμετρίας και κυρίως κατασκευές με απλό τρόπο. (Ο ίδιος ο Dürer ήταν πολύ καλός γνώστης της γεωμετρίας του Ευκλείδη και των έργων του Απολλώνιου και του Αρχιμήδη).

Το πρώτο βιβλίο της σειράς περιλαμβάνει βασικές γεωμετρικές έννοιες: π.χ. σημείο, ευθεία και προχωρά σε πιο πολύπλοκες καμπύλες όπως «κογχοειδείς»¹, επίκυκλους και έλικες.

Το δεύτερο βιβλίο αφορά το κανονικό πολύγωνο και δίνει θεωρητικά ακριβείς καθώς και προσεγγιστικές κατασκευές τους. Το βιβλίο ακόμα περιέχει μια κατασκευή που χρησιμοποιήθηκε από τους ξυλουργούς της εποχής του και παρήγαγε ένα κανονικό 9-γωνο κατά προσέγγιση. (Το κανονικό 9-γωνο δεν είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη καθώς ο αριθμός των πλευρών του $9 = 3^2$ είναι γινόμενο μη διακεκριμένων παραγόντων.) Ακόμη έδωσε τον Ινδικό κανόνα της μεθόδου της εγγραφής ενός κατά προσέγγιση κανονικού επταγώνου σε κύκλο.

Ο Ντύρερ ασχολήθηκε με την κατασκευή κανονικού πενταγώνου καθώς ο αριθμός «5» που αντιστοιχούσε στη θεϊκή τελειότητα ήταν ιδιαίτερα ελκυστικός στους καλλιτέχνες. Ο αριθμός «5» το Μεσαίωνα συμβόλιζε τα πέντε είδη των πλασμάτων του Θεού: πουλιά, φυτά, ζώα, ψάρια, άνθρωποι.

Ο σημαντικότερος λόγος της γοητείας που ασκούσε ο αριθμός «5» ήταν το γεγονός ότι ο λόγος της διαγωνίου του κανονικού πενταγώνου προς την πλευρά του είναι ίσος με τον

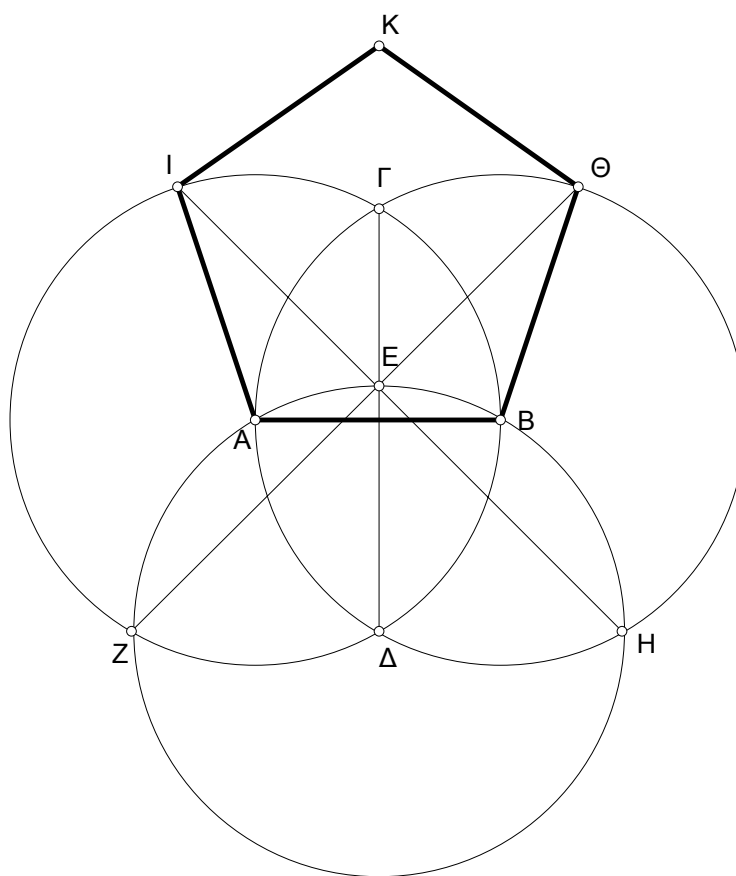
¹η κογχοειδής είναι καμπύλη 4ου βαθμού που εμφανίζεται με τρεις διακεκριμένες μορφές

«χρυσό λόγο», $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ που συμβόλιζε ανέκαθεν την απόλυτη αρμονία.

Ο Ντύρερ κατάφερε μια γρήγορη, πρακτική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου η οποία ήταν προσεγγιστική. Επεδίωκε μια απλή κατασκευή που θα εξυπηρετούσε τους τεχνίτες της εποχής του αφού από το Μεσαίωνα και την Αναγέννηση είχαν δημιουργηθεί ανάγκες για τέτοιες κατασκευές. Σκοπός του ήταν, οι κατασκευές να γίνονται με σταθερό άνοιγμα του διαβήτη, καθώς δεν υπήρχε τεχνική να επανακτά ο διαβήτης το αρχικό του άνοιγμα από τη στιγμή που αυτό θα άλλαζε.

Τα βήματα της κατασκευής είναι τα εξής:

1. Διατηρούμε το άνοιγμα του διαβήτη σταθερό κατά τη διάρκεια της κατασκευής και έστω AB το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από το άκρο του.
2. Με ακτίνα ίση με AB γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα σημεία A και B αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Γ και Δ.
3. Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔΑ, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Β και τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ε, ενώ τους κύκλους με κέντρα Α και Β τους τέμνει στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.
4. Φέρνουμε την ΕΖ που τέμνει τον κύκλο που έχει κέντρο το Β στο σημείο Θ και την ΗΕ η οποία τέμνει τον κύκλο κέντρου Α στο σημείο Ι.
5. Κατασκευάζουμε τους κύκλους με κέντρα τα Θ και Ι και την ίδια αρχική ακτίνα ΑΒ, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Κ. Το ζητούμενο πεντάγωνο είναι το ΑΒΘΚΙ.



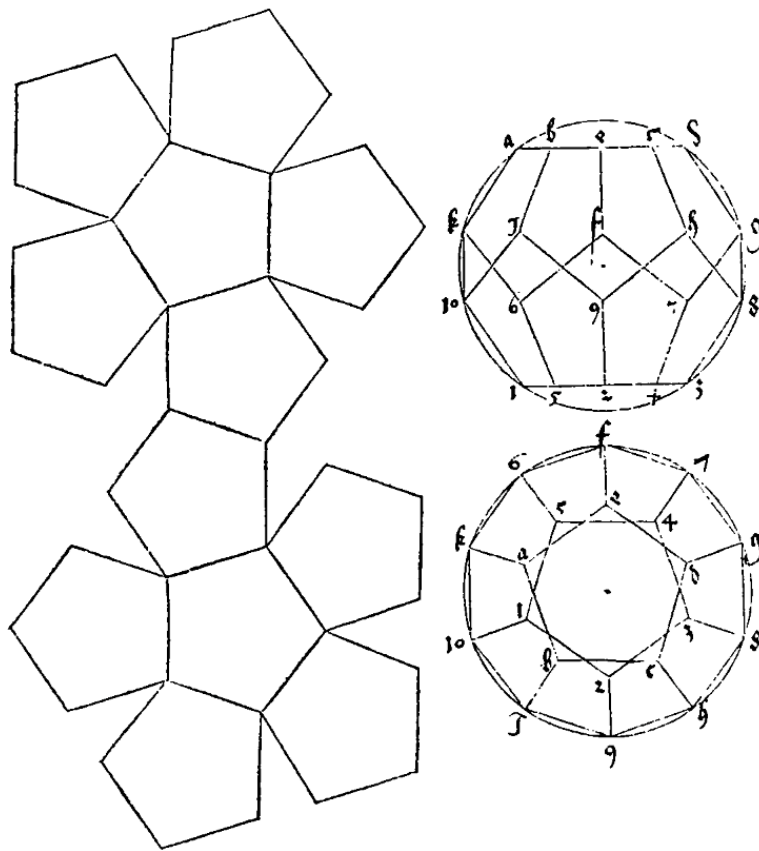
Σχήμα 7.5.10: Προσεγγιστική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου.

Το πεντάγωνο αυτής της κατασκευής έχει όλες τις πλευρές του ίσες σαν ακτίνες κύκλου που γράφονται με σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη. Όμως οι γωνίες του δεν είναι ίσες. Είναι κοντά στις 108° που είναι και η γωνία του κανονικού πεντάγωνα, αλλά άλλες υπολείπονται και άλλες υπερβαίνουν τις 108° .

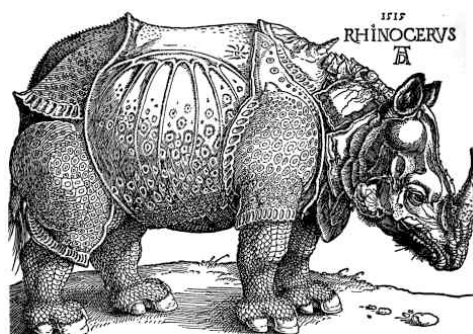
Ο Dürer απέδειξε ότι τα κανονικά πολύγωνα μπορούν να ενσωματωθούν σε πλακοστρώματα, σε κοσμήματα και σε πατώματα παρκέ.

Το τρίτο βιβλίο της πραγματείας του ασχολείται με θέματα αρχιτεκτονικής και μηχανικής, ενώ το τέταρτο αρχίζει με Στερεομετρία. Τα Πλατωνικά στερεά και μερικά από τα Αρχιμήδεια συναντώνται σε έργα του Dürer. Ο Dürer εισήγαγε ακόμα και μια τεχνική μεταφοράς πληροφοριών γύρω από τα τρισδιάστατα αντικείμενα πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια που

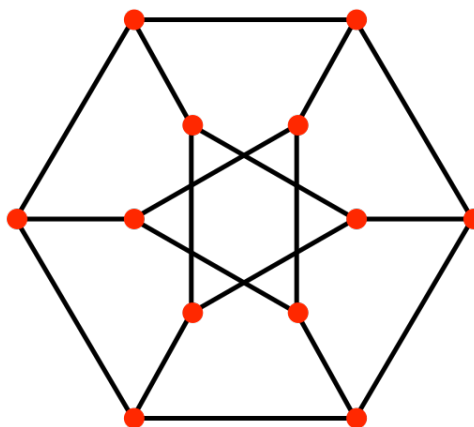
σήμερα λέγεται πλέγμα.



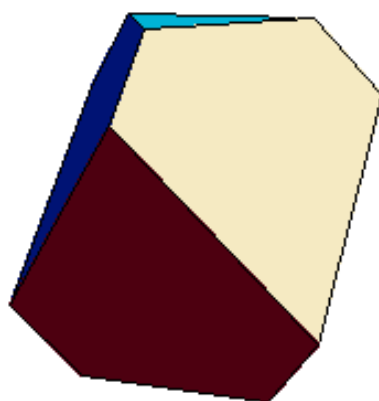
Σχήμα 7.5.11: Το πλέγμα του Dürer για το δωδεκάεδρο.



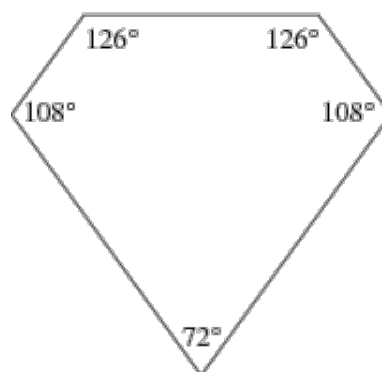
Σχήμα 7.5.12: Ο Ρινόκερος του Dürer, ξυλογραφία του 1515.



7.5.13α': Το γράφημα του Dürer



7.5.13β': Το πολύεδρο του Dürer



7.5.13γ': Η έδρα του πολυέδρου του Dürer

Σχήμα 7.5.13: Τα στερεό του Dürer το οποίο εμφανίζεται στον πίνακα «Μελαγχολία».

Το γράφημα του Dürer : είναι ένα γράφημα μη κατευθυνόμενο με 12 κορυφές και 18 ακμές (βλέπε σχήμα 7.5.13α') και αποτελεί το σκελετό του στερεού του Dürer.

Το στερεό του του Dürer : Πρόκειται για το στερεό που διακρίνεται καθαρά στον πίνακα του Dürer «Μελαγχολία» (7.5.14).



Σχήμα 7.5.14: Η «Μελαγχολία» του Dürer, χαρακτηριστικό όπου διακρίνεται το στερεό του Dürer, η σφαίρα και το μαγικό τετράγωνο. Ο Dürer υπήρξε ο πρώτος γνώστης των μαγικών τετραγώνων. Πιθανόν να έμαθε το μαγικό τετράγωνο στη Βαβυλωνία, όπου εμαθήτευσε.

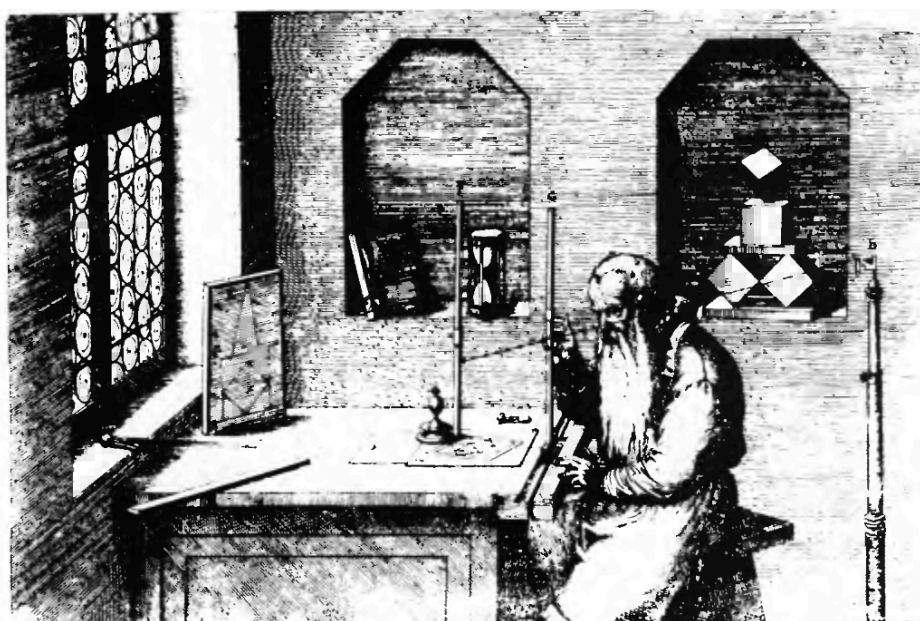
Ο Dürer περιέγραψε το στερεό αυτό σαν ένα κόλουρο ρομβόεδρο.

Είναι άξια επίσης θαυμασμού η χρήση πρώτης και δεύτερης προβολής κωνικών τομών, της κυκλικής στερεάς έλικας και άλλων πολύπλοκων στερεών καμπύλων για την κατασκευή τους.

Η οικειότητα που είχε ο Dürer με τη λεγόμενη σήμερα μέθοδο του Monge επιβεβαιώνεται στο τέταρτο βιβλίο του έργου του, όπου διδάσκεται η κατασκευή και η παράσταση των κανονικών και μη κανονικών πολυέδρων, γίνεται προοπτική των απεικονίσεων και δημιουργούνται τα αναπτύγματά τους πάνω σε επίπεδο.

7.6 Wenzel Jamnitzer - Abraham Sharp

Ο Wenzel Jamnitzer (1508-1585) ασχολήθηκε μαζί με τον αδελφό του με τη χρυσοχοΐα και τα κοσμήματα.



Σχήμα 7.6.15: Ο Jamnitzer ενώ εργάζεται στο εργαστήριό του πάνω σε μια γεωμετρική κατασκευή.

Ο Jamnitzer συνεργάστηκε με τον J. Amman και η συνεργασία αυτή έδωσε το «Perspectiva Corporum Regularium». Στα πέντε πρώτα κεφάλαια του βιβλίου φαίνεται η επιρροή του διαλόγου «Τίμαιος» του Πλάτωνα, με την αντιστοιχία των πλατωνικών στερεών στα τέσσερα φυσικά στοιχεία και στον ουρανό. Το τελευταίο κεφάλαιο ασχολείται με σφαίρες, κώνους και με ότι εκφράζεται γενικά σαν πολυεδρικό μνημείο.

Σε αντίθεση με τον Piero de la Francesca και τον Dürer, ο Jamnitzer εκθέτει τα γεωμετρικά του σχέδια, χωρίς όμως να δίνει εξηγήσεις για την κατασκευή τους, ωστόσο είναι εμφανής η

χρήση της Προοπτικής.

Ο Abraham Sharp (1651-1742) υπήρξε αστρονόμος στο Αγγλικό Βασιλικό Παρατηρητήριο. Το 1718 δημοσιεύθηκε ένα βιβλίο του με τίτλο «Geometry Improved» (Βελτιωμένη Γεωμετρία), με πολλά πολύεδρα που συνήθως περιείχαν τετραγωνικές έδρες. Το βιβλίο εξηγεί πώς κόβονται αυτά τα νέα στερεά από κύβους ξύλου. Το πιο περίπλοκο από αυτά τα στερεά έχει 120 έδρες. Ο Sharp θεωρείται από τον George Hart σαν καλλιτέχνης πολυέδρων, αφού τα στερεά του έχουν ιδιαίτερη μαθηματική αξία και είναι απλά μοντέλα του εαυτού τους, ενώ συγχρόνως παρουσιάζουν υψηλή αισθητική. Κατά τον Hart ο Sharp έγραψε το εν λόγω βιβλίο παρακινούμενος από την αγάπη του για την ομορφιά της γεωμετρίας.

7.7 Σύνδεση της προοπτικής με την αστρονομία

Ο Daniele Barbaro (1514-1570) ασχολήθηκε με τη γεωμετρία των κανονικών και ημικανονικών πολυέδρων και έγραψε το έργο «La Pratica della perpectiva» το 1569, μια πρακτική πάνω στην Προοπτική. Εξηγεί τους κανόνες της σχίασης, καθώς και την τεχνικές χαρτογράφησης της ουράνιας σφαίρας συνδέοντας έτσι την προοπτική με την αστρονομία.

Ο Commandino (1509-1575) στον πρόλογο της έκδοσης του έργου του Πτολεμαίου «Planisphaerium» (Επιπεδόσφαιρο) που τυπώθηκε το 1558 δείχνει τη στενή σχέση της Προβολικής γεωμετρίας με τη στερεογραφική προβολή που χρησιμοποιήθηκε στην αστρονομία. Αυτό το έργο πέρα από την αξία του σαν έργο του Πτολεμαίου, είναι μια πηγή των μαθηματικών της προβολικής γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του αστρολάβου. Εμπλέκει την προβολή των τροπικών του Καρκίνου και του Αιγόκερω και τον κύκλο της ελλειπτικής στο ισημερινό επίπεδο, χρησιμοποιώντας το Νότιο Πόλο σαν το κέντρο της προβολής. Το σταθερό δηλαδή μάτι, ο Νότιος Πόλος, το επίπεδο της εικόνας και το προβαλλόμενο αντικείμενο είναι τα τρία βασικά στοιχεία της προοπτικής. Η τεχνική της ορθογραφικής προβολής παράγει τη βάση για τη γεωμετρία των σκιών και των ηλιακών ρολογιών.

7.8 Ο ρόλος των κατόπτρων στην ανάπτυξη της Προοπτικής

Οι καθρέπτες εμφανίστηκαν κατά το 13ο αιώνα, δηλαδή τον αιώνα κατά τον οποίο εμφανίζεται και η προοπτική στα καλλιτεχνικά έργα. Οι καθρέπτες γοήτευσαν τους καλλιτέχνες αλλά και τους λόγιους της εποχής.

Ο Δάντης αναφερόταν συχνά στους καθρέπτες και ο Giotto έλεγε ότι ζωγράφιζε με τη βοήθειά τους. Ο Alberti συνιστούσε την παρατήρηση ενός πίνακα μέσα από ένα καθρέφτη, έτσι ώστε να γίνονται αντιληπτές οι αδυναμίες του.

Στο έργο του «Della Pittura» έγραψε:

«Ο καθρέφτης είναι ένας καλός κριτής για ένα πίνακα. Είναι άξιο θαυμασμού το πώς κάθε αδυναμία σ' ένα πίνακα παραμορφώνεται σε ένα καθρέφτη.»

Η χρήση των καθρεφτών συνέβαλε στην αύξηση του ενδιαφέροντος για τη γεωμετρική οπτική και παρήγαγε ένα τρόπο για να μπορέσει ο θεατής να δει μια πραγματική σκηνή σε επίπεδο.

Όταν βλέπουμε τη σύγκλιση των παράλληλων γραμμών στο σημείο φυγής απ' ευθείας σε μια πραγματική σκηνή, εύκολα μπορεί να την αγνοήσουμε σαν πολύ οικεία. Αν όμως την παρατηρούμε στη μη οικεία επίπεδη επιφάνεια ενός καθρέφτη, δεν μπορούμε να μην την προσέξουμε.

Κεφάλαιο 8

Τα πολύεδρα στη σύγχρονη τέχνη

8.1 Puzzles, πλακοστρώσεις και origami

8.1.1 Puzzles

Στη σύγχρονη εποχή τα πολύεδρα εξακολουθούν να ενδιαφέρουν καλλιτέχνες και μαθηματικούς. Ο Stewart Coffin αφού κατασκεύασε με τεμάχια από σπάνιο ξύλο - κυρίως μαρόνι - διάφορα πολύεδρα, δημιούργησε τα λεγόμενα puzzle designs, που απαιτούν ιδιαίτερες ικανότητες ώστε να τοποθετηθούν τα κομμάτια κατάλληλα και να δημιουργηθεί το αρχικό πολύεδρο. Αυτά τα puzzles του Coffin γοητεύουν τόσο για την αισθητική τους, όσο και σαν μαθηματικά puzzles. Ο Coffin ενέπνευσε και άλλους μαθηματικούς όπως τον George Hart ειδικευμένο στην επιστήμη των υπολογιστών. Ο Hart χρησιμοποίησε τις δεξιότητές του σαν καλλιτέχνης για τη δημιουργία αυθεντικών έργων που είναι εμπνευσμένα από τα πολύεδρα.



8.1.1α': George Hart



8.1.1β': Magnus Wenninger



8.1.1γ': Magnus Wenninger



8.1.1δ': Magnus Wenninger

Σχήμα 8.1.1: Puzzles.

8.1.2 Πλακοστρώσεις

Η πλακόστρωση (tilling) του επιπέδου είναι ένας τρόπος με τον οποίο «γεμίζουμε» το επίπεδο χωρίς οπές και επικαλύψεις (overlaps), με σχήματα διαφόρων ειδών όπως τρίγωνα, τετράπλευρα (όχι κατ' ανάγκη κυρτά).

Ο Kepler είχε ασχοληθεί με πλακοστρώσεις, αλλά έκτοτε οι πλακοστρώσεις γίνονταν σπάνια και ήταν ατελείς ή και λανθασμένες.

Το σπουδαίο έργο των Branko Grünbaum και Geoffrey Shephard «Tillings and patterns», αναβίωσε το ενδιαφέρον για τις πλακοστρώσεις. Αναφέρονται νέα προβλήματα πλακοστρώσεων που επιλύονται μέσω προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή και δημιουργούνται ακόμη νέα πολύεδρα και παιχνίδια

Ένα θεώρημα των Bolyai-Gerwien-Wallace ώθησε μια νέα πηγή Τέχνης εμπνευσμένη από τα μαθηματικά: τις τομές, δηλαδή ακριβείς αναλύσεις (dissections). Στο θεώρημα αυτό ισχυρίζομαστε ότι δύο απλά πολύγωνα A και B του επιπέδου έχουν το ίδιο εμβαδό (ισοδύναμα), τότε και μόνο τότε, αν είναι δυνατόν να χωρίσουμε το ένα πολύγωνο, π.χ. το A, σε πεπερασμένο αριθμό τμημάτων, και τοποθετώντας αυτά κατάλληλα να σχηματίσουμε το πολύγωνο B. Το θεώρημα μπορεί να επεκταθεί θέτοντας τα εξής ζητούμενα:

1. Να βρεθεί ο μικρότερος αριθμός τμημάτων στα οποία πρέπει να τμηθεί το πολύγωνο A για να δώσει στη συνέχεια το πολύγωνο B.
2. Να βρεθούν ποιές ιδιότητες πρέπει να έχουν τα τμήματα αυτά π.χ. θα μπορούσαν να είναι ίσα ή όμοια ή να έχουν πλευρές που τις συνδέει κάποιος ιδιαίτερος μετασχηματισμός.

Ο Frederickson περιέγραψε μια διαδικασία με την οποία τα δύο τμήματα από το πρώτο πολύγωνο μετακινούμενα σχηματίζουν το δεύτερο πολύγωνο. Οι τομές αυτές ονομάζονται «εξαρτώμενες τομές» (hinged dissections). Με τέτοιες τομές μπορεί να αποδειχτεί και το Πυθαγόρειο θεώρημα γεωμετρικά. Δείχνουμε πώς μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο που αντιστοιχεί στις κάθετες πλευρές και τοποθετώντας κατάλληλα τα δύο τμήματά να πάρουμε το τετράγωνο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Άλλος τύπος ανατομών είναι και οι «εκ περιστροφής» (twist-dissection).



Σχήμα 8.1.2: Μια τομή του Greg Frederickson.

8.1.3 Origami

Η παραδοσιακή ιαπωνική τεχνική περιτυλίγματος χαρτιού origami συνίσταται στο να παίρνουμε ένα κομμάτι από χαρτί και να το περιτυλίγουμε δημιουργώντας πολύπλοκα σχήματα. Μπορούμε π.χ. να ξεκινήσουμε με δύο ίσα τετράγωνα από χαρτί και περιτυλίγοντας το καθένα να καταλήξουμε σε αντικείμενα υψηλής συμμετρίας όπως πολύεδρα, πλακοστρώσεις κλπ. Χρωματίζοντας τα κατάλληλα παίρνουμε εντυπωσιακά μοντέλα από χαρτί με μεγάλη ποικιλία πολυέδρων και πλακοστρώσεων που παρουσιάζουν ιδιότητες συμμετρίας.

Μαζί με τις origami καλλιτεχνικές κατασκευές αναπτύχθηκε μια μαθηματική θεωρία της origami. Γεννήθηκαν ερωτήματα όπως: Ποιά είναι τα σχήματα που κατασκευάζονται με την χρήση αξιωμάτων (κανόνων) που αφορούν την τεχνική της περιτύλιξης. Τα μαθηματικά πλέον εμπλέκονται σε ιδέες και μεθόδους διαφορετικές αυτών του παρελθόντος, ώστε να γίνει κατανοητό πώς ένα κομμάτι ενός επιπέδου θα μπορούσε να μετασχηματιστεί γεωμετρικά αφού στο τέλος το ένα κομμάτι χαρτιού έρχεται σε επαφή με το άλλο, παρά το γεγονός ότι δεν διαπερνούν άλλα μέρη του χαρτιού.



Σχήμα 8.1.3: Μοντέλα της Helena Verrill.

8.2 Καλλιτέχνες και μαθηματικοί

Πολλοί είναι οι μαθηματικοί που δεν εκφράζονται μόνο αποδεικνύοντας θεωρήματα αλλά και παράγοντας τέχνη.

Μαθηματικοί-καλλιτέχνες της σύγχρονης εποχής που ξεχωρίζουν μεταξύ άλλων: Nathaniel Friedman, George Hart, Michael Field, Helman Ferguson, Kaos Verhoeff. Υπάρχει όμως και η κατηγορία των «καθαρών» καλλιτεχνών των οποίων όμως τα έργα ακουμπούν τα μαθημα-

τικά: Breut Collin, Charley Perry, Sol LeWit, ο αρχιτέκτονας Frang Gehry ακόμη και ο γνωστός Santiago Calatrava. Εκείνος όμως που ξεχωρίζει ιδιαίτερα για την υψηλή μαθηματική ποιότητα των έργων του είναι ο M. C. Escher.

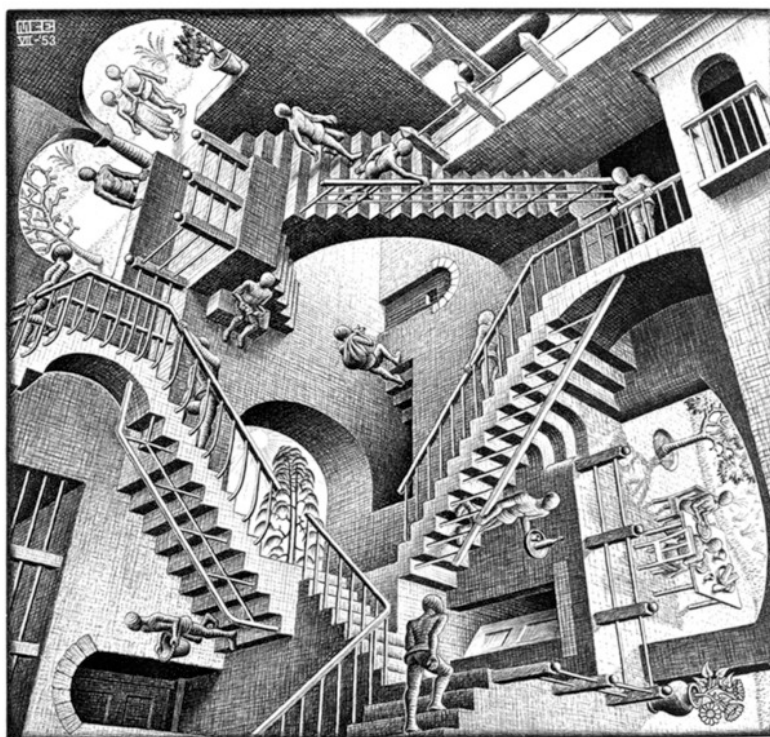
Ο M. C. Escher (Mauritius Cornelis Escher) (1898-1972) υπήρξε Γερμανός «graphic» καλλιτέχνης γνωστός για τις ξυλογραφίες και λιθογραφίες του. Παρά το γεγονός ότι δε σπούδασε Μαθηματικά, το έργο του στηρίζεται ιδιαίτερα στα Μαθηματικά. Το 1936 κατά τη διάρκεια ενός ταξιδιού του στη Μεσόγειο άρχισε έντονα να ενδιαφέρεται για τη συμμετρία. Η πρώτη του μελέτη στα Μαθηματικά ξεκίνησε με τη μελέτη του άρθρου του George Polya πάνω στις ομάδες συμμετριών του επιπέδου. Από τότε τα έργα του παρουσίαζαν μια μαθηματική προσέγγιση συμμετρίας. Μελετώντας και ερευνώντας, έφθασε στο σημείο να αναπτύξει ένα σύστημα κατηγοριοποίησης συνδυασμών σχήματος, χρώματος και ιδιοτήτων συμμετρίας.

Μετά από όλα αυτά τα επιτεύγματα ανακαλύπτει μια νέα περιοχή που αργότερα ονομάστηκε κρυσταλλογραφία. Η συνεργασία του με τον H. S. M. Coxeter του ενέπνευσε το ενδιαφέρον για τις πλακωστρώσεις πάνω στο υπερβολικό επίπεδο.

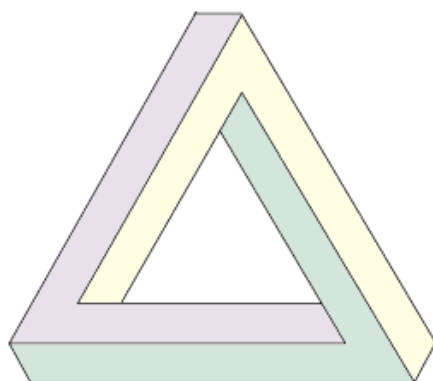
Οι μαθηματικές αρχές στις οποίες στηρίζεται η τέχνη του Escher είναι οι πλακωστρώσεις, η σφαιρική γεωμετρία, η κορδέλα του Möbius¹, ασυνήθιστες προοπτικές, οπτικά παράδοξα, χρήση συμμετριών και σε κατασκευές «αδυνάτων» αντικειμένων. Στο «Alhambra Sketch» έδειξε ότι η τέχνη μπορεί να δημιουργηθεί με πολύγωνα ή κανονικά σχήματα όπως ισόπλευρα τρίγωνο, τετράγωνο, κανονικό εξάγωνο. Ειδικά ενδιαφέρθηκε για τα πολύεδρα που εμφανίζονται σε πολλά έργα του όπου εξέχουσα θέση κατέχουν τα Πλατωνικά στερεά.

Τα «αδύνατα» αντικείμενα είναι μαθηματικά αντικείμενα που αποτελούν οπτικές οφθαλμαπάτες που ασκούν όμως γοητεία στο θεατή (βλέπε 8.2.5).

¹Η κορδέλα του Möbius είναι μια επιφάνεια με μια μόνο πλευρά και με ένα μόνο συνεχτικό σύνορο. Όπως και η μποτίλια του Klein είναι μια μη προσανατολισμένη επιφάνεια. Από κάθε σημείο της διέρχεται μια ευθεία γραμμή που ανήκει στην επιφάνεια.



Σχήμα 8.2.4: Relativity του M.C. Escher, 1953.



Σχήμα 8.2.5: Το τρίγωνο του Penrose.

Ακόμη ασχολήθηκε και με μη κανονικές πλακοστρώσεις που τις ονόμασε «μεταμορφώσεις».



Σχήμα 8.2.6: Τάξη και Χάος του M.C. Escher, 1950.

Παραθέτονται κάποια αποσπάσματα από άρθρα που δείχνουν τη στενή σχέση τέχνης και μαθηματικών.

1. Από το ART-MATH 09 (πρώτη εθνική διάσκεψη τέχνης και μαθηματικών):

Ο Poincaré σημείωσε ότι «ένας επιστήμονας με φημισμένο όνομα, πάνω απ' όλα ένας μαθηματικός, δοκιμάζει στο έργο του τις ίδιες εντυπώσεις όπως ένας καλλιτέχνης. Η ευχαρίστηση του είναι μεγάλη και της ίδιας φύσης». Το ART-MATH 09 (πρώτη εθνική διάσκεψη Τέχνης και Μαθηματικών), αφιερώνεται στη βοήθεια των καλλιτεχνών, των μαθηματικών και των εκπαιδευτικών να κατανοήσουν και να απολαύσουν την πηγή αυτής της χαράς...

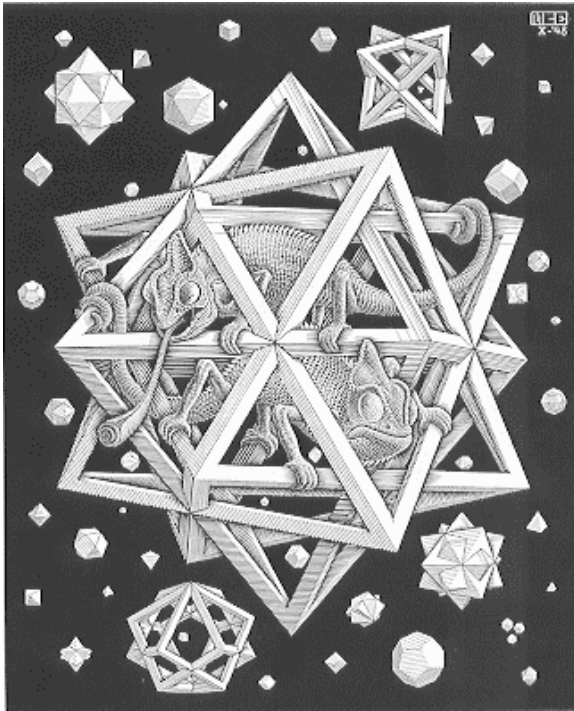
2. Raymond F. Tennant

Zayed University

PO Box 4783, Abu Dhabi, United Arab Emirates

(σε ελεύθερη μετάφραση)

Στο υπέροχο βιβλίο του «A Mathematician's Apology» ο G. H. Hardy συγκρίνει τα μαθηματικά με τη ζωγραφική και την ποίηση. Γράφει, «Τα μαθηματικά

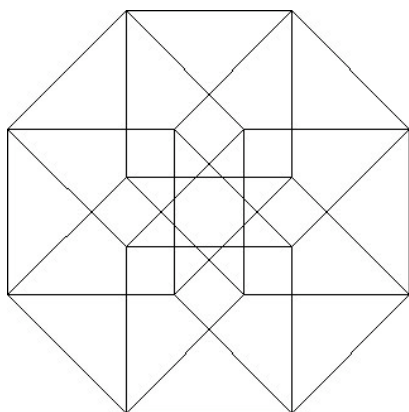


Σχήμα 8.2.7: Stars του M.C. Escher, 1948. Το έργο δείχνει στερεά που δημιουργούνται από την τομή οκταέδρων, τετραέδρων, κύβων ανάμεσα σε άλλα.

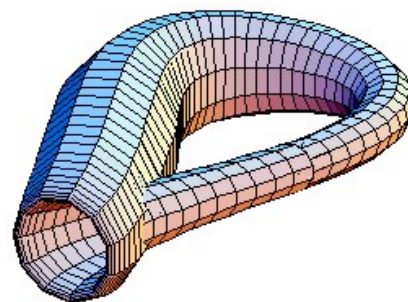


Σχήμα 8.2.8: High and Low του M.C. Escher, 1947. Το έργο αυτό έχει πέντε σημεία φυγής: Από ένα πάνω αριστερά, πάνω δεξιά, κάτω αριστερά, κάτω δεξιά και ένα στο κέντρο.

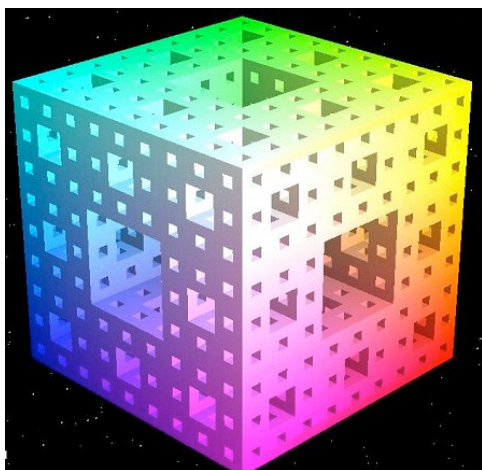
πρότυπα, όπως εκείνα του ζωγράφου ή του ποιητή πρέπει να είναι όμορφα, οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να ταιριάζουν μαζί σε ένα αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο τεστ».



Σχήμα 8.2.9: Ο υπερκύβος.



Σχήμα 8.2.10: Η μπουτίλια του Klein.



Σχήμα 8.2.11: Ο σπόγγος του Menger.

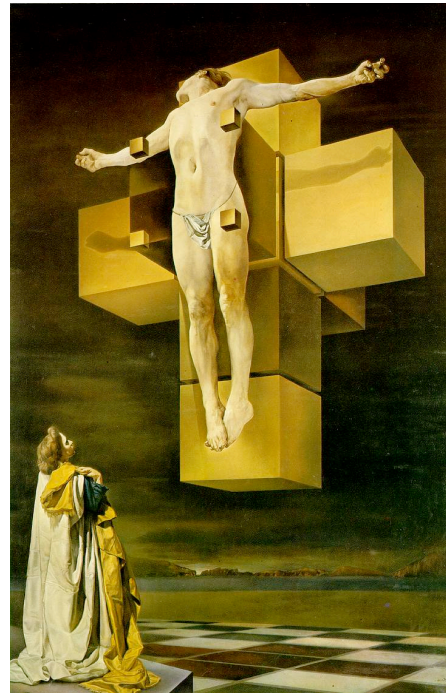


Σχήμα 8.2.12: Dali - Τοπολογία.

Salvador Dali (1904-1989). Το 1954 ο Dali ζωγράφισε την «Σταύρωση» που παριστάνει τον Εσταυρωμένο πάνω στο ανάπτυγμα ενός υπερκύβου. «Η θυσία του Μυστικού Δείπνου» (1955) παριστάνει τον Ιησού με τους μαθητές του μέσα από ένα μεγάλο δωδεκάεδρο.



Σχήμα 8.2.13: Dali - The Sacrament of the Last Supper (Μυστικός δείπνος).



Σχήμα 8.2.14: Dali - Crucifixion.

Pablo Palazuelo (1969-2007). Ισπανός ζωγράφος και γλύπτης. Εκφραζόταν στα έργα μέσω γεωμετρικών μετασχηματισμών και μεταφορών. Επηρεάστηκε από τον κυβισμό και το έργο του Paul Klee.

John Robinson (1935-2007), ήταν γλύπτης που ενδιαφέρθηκε για την αστρονομία και τις μαθηματικές σχέσεις.



Σχήμα 8.2.15: Balcony.



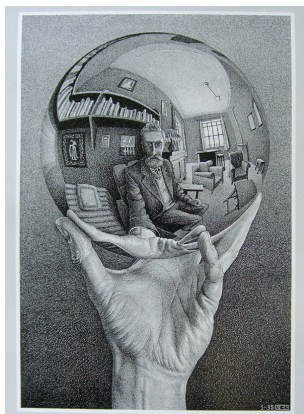
Σχήμα 8.2.16: Circle Limit IV. Convex.



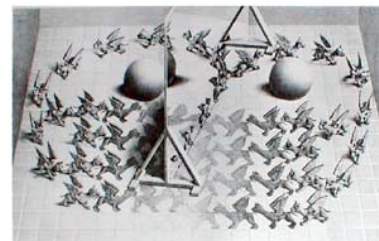
Σχήμα 8.2.17: Concave & Convex.



Σχήμα 8.2.18: Gravitation.



Σχήμα 8.2.19: Hand with Reflecting Sphere.



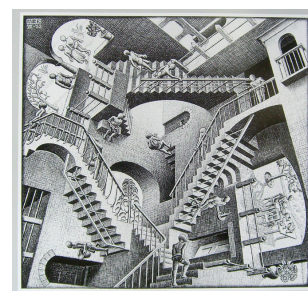
Σχήμα 8.2.20: Magic Mirror.



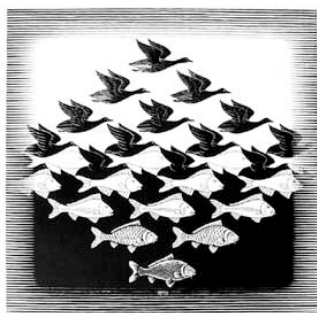
Σχήμα 8.2.21: Metamorphose.



Σχήμα 8.2.22: Möbius Strip II.



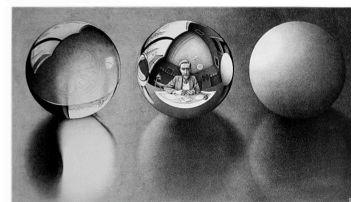
Σχήμα 8.2.23: Relativity.



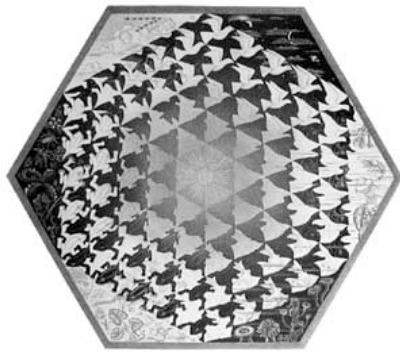
Σχήμα 8.2.24: Sky and Water I.



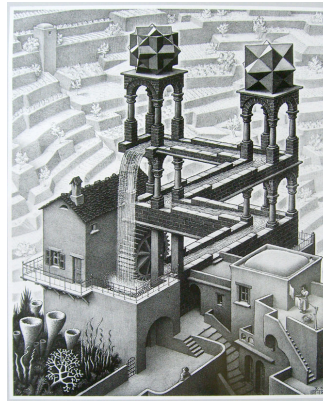
Σχήμα 8.2.25: Still Life and Street.



Σχήμα 8.2.26: Three Spheres II.



Σχήμα 8.2.27: Verbum.



Σχήμα 8.2.28: Waterfall.

Κεφάλαιο 9

Πολύτοπα

Ορισμός 9.0.1. Ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, ονομάζεται *συσχετισμένος* (affine), αν είναι μια μεταφορά ενός γραμμικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^d$.

- Η διάσταση του συσχετισμένου υπόχωρου είναι η διάσταση του αντίστοιχου γραμμικού υπόχωρου. Συσχετισμένος υπόχωρος 0-διάστασης: σημείο, 1-διάστασης: ευθείες, 2-διάστασης: επίπεδα, $(d-1)$ -διάστασης: υπερεπίπεδα.
- Η συσχετισμένη θήκη ενός συνόλου V , είναι η τομή όλων των συσχετισμένων υπόχωρων που περιέχουν το σύνολο V , και συμβολίζονται με $\text{aff}(V)$.
- Ένα σύνολο $n \geq 0$ σημείων είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο αν η συσχετισμένη θήκη του έχει διάσταση $n-1$.

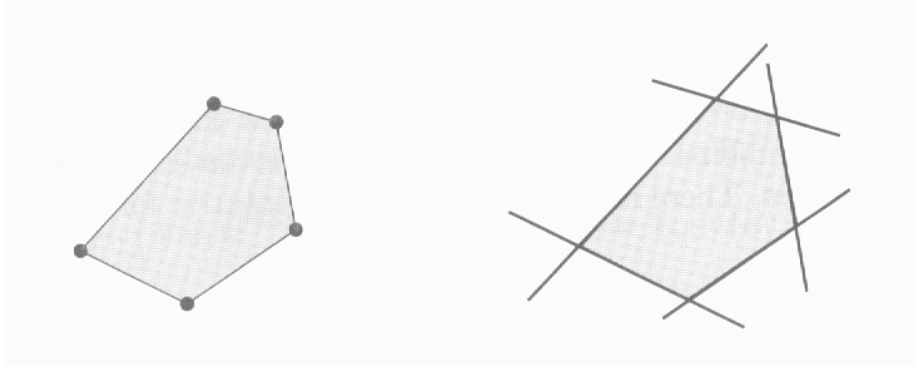
Ορισμός 9.0.2. Ένα σύνολο σημείων $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ονομάζεται *κυρτό*, αν για κάθε σημεία $x, y \in K$, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ τους, δηλαδή το σύνολο $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ανήκει στο K .

- Καθώς η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο, ορίζεται η *κυρτή θήκη* ενός συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^d$, ως το «μικρότερο» κυρτό σύνολο που περιέχει το K , δηλαδή:

$$\text{conv}(K) = \bigcap \{K' \subseteq \mathbb{R}^d, K \subseteq K', \quad K' \text{ κυρτό}\}$$

Ορισμός 9.0.3. Ένα V -πολύτοπο είναι η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων του $\mathbb{R}^d$. Ένα H -πολύεδρο είναι η πεπερασμένη τομή κλειστών ημιχώρων του $\mathbb{R}^d$.

- Ένα H -πολύτοπο είναι ένα H -πολύεδρο που είναι φραγμένο.
- Ένα πολύτοπο είναι ένα σύνολο σημείων $P \in \mathbb{R}^d$ που μπορεί να αναπαρασταθεί ή σαν V -πολύτοπο ή σαν H -πολύτοπο.
- Κάθε V -πολύτοπο είναι ένα H -πολύτοπο και αντίστροφα. (Θεμελιώδες θεώρημα)
- Ένα d -πολύτοπο P είναι πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$ με d -διάστατη $\text{aff}(P)$.



Σχήμα 9.0.1: V -πολύτοπο (αριστερά) και H πολύτοπο (δεξιά).

Ορισμός 9.0.4. Εάν $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \alpha\}$ είναι υπερεπίπεδο ($\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) με $\mathbf{k} \cdot \mathbf{y} \leq \alpha$ για κάθε $\mathbf{y} \in P$ και $H \cap P \neq \emptyset$ τότε το H καλείται φέρον υπερεπίπεδο του P .

- Έδρα (face) του P , ορίζεται ένα σύνολο της μορφής:

$$F = P \cap H$$

όπου H είναι φέρον υπερεπίπεδο του P . Εάν ισχύει ότι: $\dim(F) = \dim(\text{aff}(F)) = d - 1$ η F καλείται όψη (facet), Εάν $\dim(F) = k \leq d - 2$ η F καλείται k -έδρα.

- Συμβολίζουμε με f_k τον αριθμό των k -εδρών, ($k = 0, 1, \dots, d$) ενός d -πολύτόπου.

Θεωρούμε ότι $\emptyset$ αποτελεί την κενή έδρα και το P είναι έδρα του P .

9.1 Πολύτοπα ειδικής μορφής

Ορισμός 9.1.1 (Simplex d -πολύτοπο). Ένα d -πολύτοπο είναι *simplex* του $\mathbb{R}^d$ αν είναι η κυρτή θήκη $d+1$ ανεξάρτητα συσχετισμένων σημείων του $\mathbb{R}^d$. Άρα ένα d -simplex είναι ένα πολύτοπο d -διάστασης με $d+1$ κορυφές. Ο συμβολισμός για ένα d -simplex είναι Δ^d .

Ορισμός 9.1.2 (Cross πολύτοπο). *Cross* πολύτοπο ορίζεται το πολύτοπο της μορφής:

$$C_d^\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_i |x_i| \leq 1 \right\} = \text{conv} \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d\}$$

Ορισμός 9.1.3. Ένα πολύτοπο της μορφής:

$$C_d = [-1, +1]^d$$

ονομάζεται *υπερκύβος* d -διάστασης.

Ορισμός 9.1.4 (Simplicial d -πολύτοπο). Ένα d -πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα *simplicial* d -πολύτοπο, όταν κάθε όψη του P είναι ένα simplex πολύτοπο διάστασης $d-1$.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα d -πολύτοπο P :

- i. Κάθε όψη του πολύτοπου P είναι ένα simplex.
- ii. Κάθε γνήσια έδρα του P είναι ένα simplex.
- iii. Κάθε όψη έχει d κορυφές.
- iv. Κάθε k -διάστασης έδρα του P έχει $k+1$ κορυφές για $k \leq d-1$.

Ορισμός 9.1.5. Δύο d -πολύτοπα P, Q θα λέγονται *δυσικά* αν υπάρχει μία «1-1» και επί απεικόνιση φ μεταξύ των k εδρών του P και των $(d-1-k)$ εδρών του Q , με την ιδιότητα:

αν F_1, F_2 είναι έδρες του P με $F_1 \subseteq F_2$ τότε $\varphi(F_2) \subseteq \varphi(F_1)$. Ειδικότερα οι κορυφές του Q αντιστοιχούν στις όψεις του P και αντίστροφα.

Στην παράγραφο 6.2 (Οι πολυεδρικές ομάδες συμμετριών), θα δοθούν παραδείγματα δυϊκών πολυτόπων.

Ορισμός 9.1.6 (Simple d -πολύτοπο). Ένα d -πολύτοπο θα είναι ένα *simple* (απλό) d -πολύτοπο αν είναι το δυϊκό ενός simplicial d -πολυτόπου.

Παράδειγμα 9.1.1. Οι C_d -κύβοι είναι απλά πολύτοπα.

Ορισμός 9.1.7 (Κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$). Στον $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε την καμπύλη ροπής (moment curve), M_d που ορίζεται παραμετρικά:

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^2, \dots, t^d), \quad t \in \mathbb{R}$$

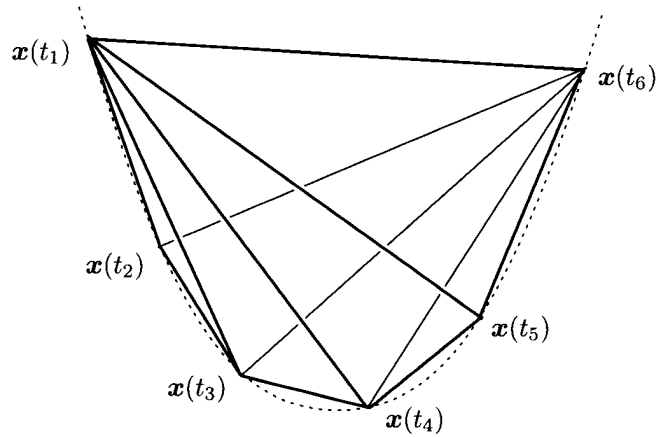
Ένα d -πολύτοπο με n κορυφές ($n \geq d+1$), ονομάζεται *κυκλικό d -πολύτοπο με n κορυφές* και συμβολίζεται με $C_d(n)$, αν είναι η κυρτή θήκη των n σημείων $\mathbf{x}(t_i)$ που ανήκουν στην M_d , με $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, δηλαδή,

$$C_d(n) = \text{conv} \left\{ \mathbf{x}(t_i) \mid \mathbf{x}(t_i) \in M_d : t_1 < t_2 < \dots < t_n \right\}$$

Τα κυκλικά πολύτοπα έχουν ιδιαίτερη σημασία για προβλήματα συνδυαστικής θεωρίας των πολυτόπων και θα μελετηθούν εκτενέστερα στο κεφάλαιο 10.

Παρατηρήσεις

1. Γενικότερα μια καμπύλη $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ καλείται *d -κυκλική* τότε και μόνο τότε αν για τυχαία, διάφορα μεταξύ τους σημεία $a(t_1), \dots, a(t_n)$ με $n \geq d+1$ η κυρτή θήκη αυτών είναι d -πολύτοπο ίδιας μορφής με το $C_d(n)$. Ισοδύναμα (Grünbaum, 1967): δεν υπάρχει υπερεπίπεδο H του $\mathbb{R}^d$ που να τέμνει την καμπύλη σε περισσότερο από d σημεία.

Σχήμα 9.1.2: Το κυκλικό πολύτοπο $C_3(6)$.

Άρα, η μορφή των κυκλικών d -πολυτόπων δεν εξαρτάται από την d -κυκλική καμπύλη στην οποία επιλέγουμε τα n σημεία. Οπότε, μπορούμε να γράφουμε $C_d(n)$ χωρίς να υπάρχει σύγχυση.

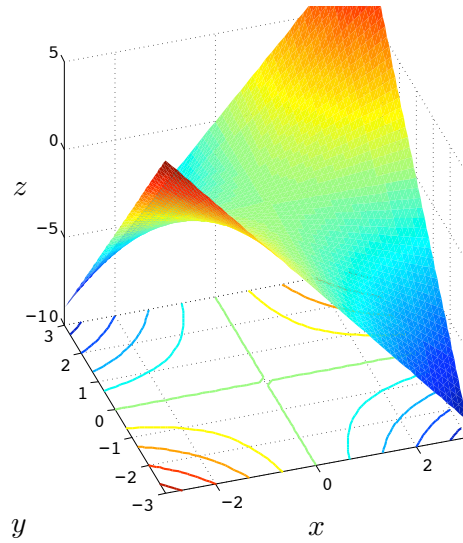
2. Τα κυκλικά πολύτοπα στον $\mathbb{R}^{2d}$ με $n \geq 2d + 1$ αποτελούν μια γενίκευση των κανονικών n -πολυγώνων του επιπέδου, αν κατασκευαστούν ως εξής: Έστω $\theta = 2\pi/n$ και:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

η περιστροφή του επιπέδου κατά γωνία θ . Τότε οι κορυφές του κανονικού n -πολυγώνου P_n είναι οι $e, Re, R^2e, \dots, R^{n-1}e$, όπου $e = (1, 0)^T$, δηλαδή το P_n ταυτίζεται με τον εαυτό του από την κυκλική ομάδα που παράγεται από την περιστροφή R .

Εάν ορίσουμε την περιστροφή:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & & \\ -\sin \theta & \cos \theta & & & \\ & & \cos 2\theta & \sin 2\theta & \\ & & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \cos d\theta & \sin d\theta \\ & & & & & -\sin d\theta & \cos d\theta \end{pmatrix}$$



Σχήμα 9.1.3: Η επιφάνεια $z = xy$ όπου βρίσκεται η M_3 .

τότε οι κορυφές του (κανονικού) κυκλικού $2d$ -πολυτόπου P_n ορίζονται να είναι οι $e, Re, R^2e, \dots, R^{n-1}e$, όπου $e = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^{2d}$. Σημειωτέον ότι το P_n αναφέρεται και ως πολύτοπο Perlie.

9.2 Ο αριθμός f_k των k -διάστασης εδρών ενός πολύτοπου

Στην περίπτωση d -πολυτόπου το $\mathbf{f}$ -διάνυσμα ορίζεται συνήθως ως $\mathbf{f} = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ (επειδή $f_d = 1$ πάντοτε).

- Ένα d -simplex πολύτοπο έχει $\binom{d+1}{2}$ ακμές, $\binom{d+1}{3}$ τρίγωνα, $\binom{d+1}{4}$ τετράεδρα και τελικά $(d+1)$ -όψεις.

Ένα 2-simplex έχει $\binom{3}{2} = 3$ πλευρές, δηλαδή είναι ένα τρίγωνο.

Ένα 3-simplex έχει $\binom{4}{2} = 6$ ακμές, $\binom{4}{3} = 4$ τριγωνικές έδρες, δηλαδή είναι ένα τετράεδρο.

Γενικά ένα d -simplex έχει:

$$f_k = \binom{d+1}{k+1}$$

- Το d -cross πολύτοπο έχει 2^d όψεις, που είναι Δ^{d-1} και αποδεικνύεται επαγωγικά ότι:

$$f_k = 2^{k+1} \binom{d}{k+1}$$

Παράδειγμα 9.2.2. Το C_4^Δ cross-πολύτοπο έχει:

$$f_0 = 2 \binom{4}{1} = 2 \times 4 = 8 \quad \text{κορυφές}$$

$$f_1 = 2^2 \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24 \quad \text{ακμές}$$

$$f_2 = 2^3 \binom{4}{3} = 8 \times 4 = 32 \quad \text{έδρες}$$

$$f_3 = 2^4 \binom{4}{4} = 16 \times 1 = 16 \quad \text{όψεις}$$

- Ο υπερκύβος C_d έχει αριθμό f_k αριθμό k -διάστασης εδρών που όπως αποδεικνύεται επαγωγικά είναι ίσος με:

$$f_k = 2^{d-k} \binom{d}{k}$$

Παράδειγμα 9.2.3. Ο υπερκύβος C_4 έχει:

$$f_0 = 2^{4-0} \binom{4}{0} = 16 \times 1 = 16 \quad \text{κορυφές}$$

$$f_1 = 2^{4-1} \binom{4}{1} = 8 \times 4 = 32 \quad \text{ακμές}$$

$$f_2 = 2^{4-2} \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24 \quad \text{έδρες}$$

$$f_3 = 2^{4-3} \binom{4}{3} = 2 \times 4 = 8 \quad \text{όψεις}$$

9.3 Κανονικά πολύτοπα

Υπάρχουν διαφορετικοί ορισμοί για την κανονικότητα. Έχει καθιερωθεί ο ακόλουθος ορισμός (Coxeter, Fejer Toth):

Ορισμός 9.3.1. Ένα πολύτοπο P_d , $d \geq 3$ είναι κανονικό, αν οι όψεις του και τα σχήματα κορυφής του είναι κανονικά.

Σχήμα μιας κορυφής $v \in P$: Η τομή του υπερεπιπέδου που διέρχεται από τα μέσα των ακμών του P που περιέχουν την v , με το P .

Ένα P_4 κανονικό 4-διάστασης πολύτοπο με όψεις $\{p, q\}$ και σχήματα κορυφής $\{q, r\}$, με r τον αριθμό των όψεων που περικλείουν κάθε κορυφή θα είναι:

$$P_4 = \{p, q, r\}$$

π.χ. $\Delta_4 = \{3, 3, 3\}$, $C_4^\Delta = \{3, 3, 4\}$, $C_4 = \{4, 3, 3\}$.

Γενικά οι συμβολισμοί για τις d -διαστάσεις:

$$C_d^\Delta = \{ \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{d-2}, 4 \} = \{3^{d-2}, 4\}$$

$$C_d = \{4, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{d-2}\} = \{4, 3^{d-2}\}$$

9.3.1 Κανονικά πολύτοπα στις 4 διαστάσεις

Στις 4-διαστάσεις υπάρχουν έξι (6) κανονικά πολύτοπα.

1. Το simplex πολύτοπο, γνωστό σαν πεντάτοπο, πεντάχωρο ή και υπερπυραμίδα (βλέπε σχήμα 9.3.4)

Είναι ένα αυτοπαραγόμενο πολύτοπο, αντίστοιχο του κανονικού τετράεδρου στις

3-διαστάσεις με:

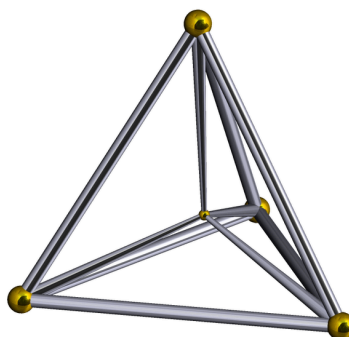
$$\text{Αριθμό κορυφών } f_0 = 5$$

$$\text{Αριθμό ακμών } f_1 = 10$$

$$\text{Αριθμό εδρών } f_2 = 10 \text{ τρίγωνα}$$

$$\text{Αριθμό όψεων } f_3 = 5 \text{ τετράεδρα}$$

Το σύμβολο Schläfli $\{3, 3, 3\}$ ή $\{3^3\}$. Σε κάθε κορυφή συναντώνται 3 τετράεδρα.



Σχήμα 9.3.4: Το πεντάτοπο.

2. Υπερκύβος ή τετρακτύς (tesseract) (βλέπε σχήμα 9.3.5)

Είναι το 4-διάστατο πολύτοπο που αντιστοιχεί στον κύβο των 3 διαστάσεων με:

$$\text{Αριθμό κορυφών } f_0 = 16$$

$$\text{Αριθμό ακμών } f_1 = 32$$

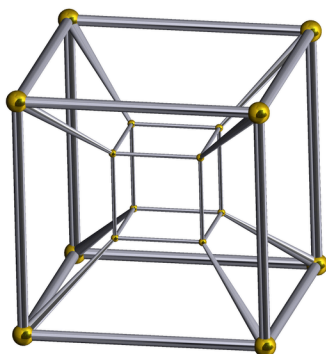
$$\text{Αριθμό εδρών } f_2 = 24 \text{ τετράγωνα}$$

$$\text{Αριθμό όψεων } f_3 = 8 \text{ κύβοι}$$

Το σύμβολο Schläfli $\{4, 3, 3\}$ και το σχήμα κορυφής κανονικό τετράεδρο. Διϊκό του πολύτοπο είναι το 16-cell πολύτοπο ή εξαδεκάχωρο, δηλαδή το 4-cross πολύτοπο.

Σε κάθε κορυφή του συναντώνται 4 κύβοι, 6 τετράγωνα και 4 ακμές. Σε κάθε

ακμή τέμνονται 3 κύβοι και 3 τετράγωνα.



Σχήμα 9.3.5: Ο υπερκύβος.

3. 16-cell πολύτοπο ή εξαδεκάχωρο (βλέπε σχήμα 9.3.6)

Είναι το 4-διάστατο cross-πολύτοπο, αντίστοιχο του κανονικού οκταέδρου στις 3 διαστάσεις με:

$$\text{Αριθμό κορυφών } f_0 = 8$$

$$\text{Αριθμό ακμών } f_1 = 24$$

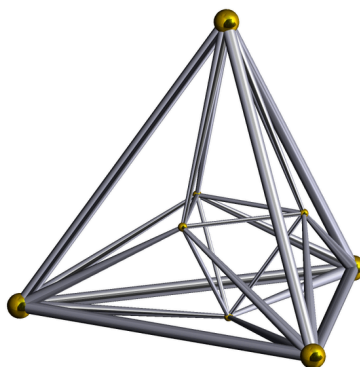
$$\text{Αριθμό εδρών } f_2 = 32 \text{ τρίγωνα}$$

$$\text{Αριθμό όψεων } f_3 = 16 \text{ οκτάεδρα}$$

Σε κάθε κορυφή του συναντώνται: 8 τετράεδρα, 12 τρίγωνα, 6 ακμές. Σε κάθε ακμή συναντώνται: 4 τετράεδρα, 4 τρίγωνα.

4. 24-cell ή εικοσιτετράχωρο, οκταεδρικό σύμπλεγμα ή οκτακύβος (βλέπε σχήμα 9.3.7)

Είναι αυτοπαραγόμενο πολύτοπο, με σύμβολο Schläfli $\{3, 4, 3\}$. Μπορεί να κατασκευαστεί αν τμηθεί ο υπερκύβος σε 8 κυβικές πυραμίδες, οι οποίες ενώνονται



Σχήμα 9.3.6: Το 16-cell πολύτοπο.

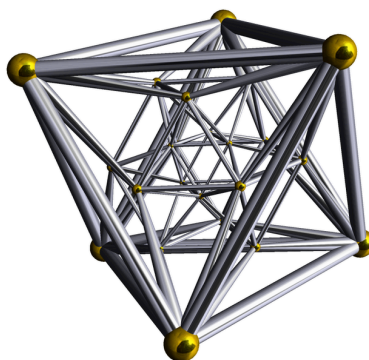
στις 8 όψεις ενός άλλου υπερκύβου. Το σχήμα κορυφής είναι ένας κύβος.

Αριθμός κορυφών $f_0 = 24$

Αριθμός ακμών $f_1 = 96$

Αριθμός εδρών $f_2 = 96$ τρίγωνα

Αριθμός όψεων $f_3 = 24$ οκτάεδρα



Σχήμα 9.3.7: Το 24-cell πολύτοπο.

5. 120-cell ή εκατονεικοσάχωρο, που αντιστοιχεί στο κανονικό δωδεκάεδρο για τις 3 διαστάσεις (βλέπε σχήμα 9.3.8)

Αριθμός κορυφών $f_0 = 600$

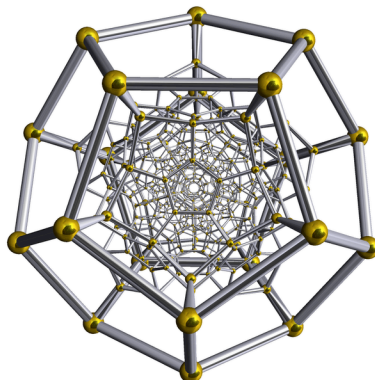
Αριθμός ακμών $f_1 = 1200$

Αριθμός εδρών $f_2 = 720$ πεντάγωνα

Αριθμός όψεων $f_3 = 120$ δωδεκάεδρα

Σχήμα κορυφής είναι το τετράεδρο και σύμβολο Schläfli $\{5, 3, 3\}$. Δυϊκό του πολύτοπο είναι το 600-cell.

Σε κάθε κορυφή συναντώνται: 4 δωδεκάεδρα, ενώ γύρω από κάθε ακμή έχουμε 3 δωδεκάεδρα όπως το κανονικό δωδεκάεδρο έχει 3 πεντάγωνα γύρω από κάθε κορυφή.



Σχήμα 9.3.8: Το 120-cell πολύτοπο.

6. 600-cell ή εξακοσάχωρο, που αντιστοιχεί στο κανονικό εικοσάεδρο για τις 3 διαστάσεις (βλέπε σχήμα 9.3.9)

Αριθμός κορυφών $f_0 = 120$

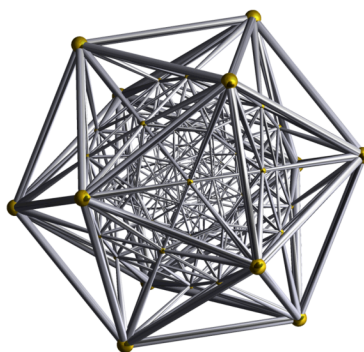
Αριθμός ακμών $f_1 = 720$

Αριθμός εδρών $f_2 = 1200$ τρίγωνα

Αριθμός όψεων $f_3 = 600$ τετράεδρα

Σχήμα κορυφής είναι το κανονικό εικοσάεδρο και σύμβολο Schläfli $\{3, 3, 5\}$. Δυϊκό του πολύτοπο είναι το 120-cell.

Σε κάθε κορυφή συναντώνται: 20 τετραεδρικές όψεις και σε κάθε ακμή 5 τετράεδρα όπως το εικοσάεδρο έχει 5 τρίγωνα σε κάθε κορυφή.



Σχήμα 9.3.9: Το 600-cell πολύτοπο.

9.3.2 Κανονικά πολύτοπα για διαστάσεις $d \geq 5$

Υπάρχουν 3 είδη κανονικών πολυτόπων για διαστάσεις $d \geq 5$.

Πίνακας 9.1: Κανονικά πολύτοπα στις 5-διαστάσεις.

Όνομα	Σύμβολο Schläfli $\{p, q, r, s\}$	Όψεις (facets) $\{p, q, r\}$	Κελιά (cells) $\{p, q\}$	Έδρες (faces) $\{p\}$	Άκρες (edges)	Κορυφές (vertices)	Σχήμα έδρας $\{r\}$	Σχήμα ακμής $\{r, s\}$	Σχήμα κορυφής $\{q, r, s\}$
5-simplex	$\{3, 3, 3, 3\}$	$\{3, 3, 3\}$ 6	$\{3, 3\}$ 15	$\{3\}$ 20	15	6	$\{3\}$	$\{3, 3\}$	$\{3, 3, 3\}$
5-κύβος	$\{4, 3, 3, 3\}$	$\{4, 3, 3\}$ 10	$\{4, 3\}$ 40	$\{4\}$ 80	80	32	$\{3\}$	$\{3, 3\}$	$\{3, 3, 3\}$
5-orthoplex (cross πολύτοπο)	$\{3, 3, 3, 4\}$	$\{3, 3, 4\}$ 32	$\{3, 3\}$ 80	$\{3\}$ 80	40	10	$\{4\}$	$\{3, 4\}$	$\{3, 3, 4\}$

Γενικά στις d -διαστάσεις ισχύει ο πίνακας:

Πίνακας 9.2: Κανονικά πολύτοπα σε διαστάσεις $d > 5$.

Όνομα	Σύμβολο Schläfli $\{p_1, p_2, \dots, p_{d-1}\}$	Τύπος όψης	Σχήμα κορυφής	Δυϊκό πολύτοπο
d -simplex	$\{3, 3, \dots, 3, 3\}$	$\{3, 3, \dots, 3\}$	$\{3, 3, \dots, 3, 3\}$	αυτοπαραγόμενο
d -κύβος	$\{4, 3, \dots, 3, 3\}$	$\{4, 3, \dots, 3\}$	$\{3, 3, \dots, 3, 3\}$	d -orthoplex cross πολύτοπο
d -orthoplex cross πολύτοπο	$\{3, 3, \dots, 3, 4\}$	$\{3, 3, \dots, 3\}$	$\{3, 3, \dots, 3, 4\}$	d -κύβος

Κεφάλαιο 10

Το θεώρημα του άνω φράγματος για πολύτοπα κάθε διάστασης (The upper bound theorem for polytopes)

10.1 Εισαγωγή

Ένα ερώτημα που απασχόλησε τις τελευταίες δεκαετίες τους ασχολούμενους με την Συνδυαστική Θεωρία των κυρτών πολυέδρων¹ μαθηματικούς είναι:

«Ποιό d -πολύτοπο με $n \geq d + 1$ κορυφές έχει το μεγαλύτερο αριθμό k -εδρών για κάθε k με $1 \leq k \leq d - 1$;»

Το 1957 ο Motzkin διατύπωσε την ακόλουθη *εικασία του άνω φράγματος*:

«Για κάθε k , με $1 \leq k \leq d - 1$, τα κυκλικά d -πολύτοπα με n κορυφές $C_d(n)$, με $n \geq d + 1$, έχουν το μέγιστο αριθμό των k -εδρών ανάμεσα απ' όλα τα d -πολύτοπα

¹Η συνδυαστική θεωρία των κυρτών πολυέδρων, μπορεί να περιγραφεί ως η μελέτη των πλεγμάτων των εδρών ενός πολυτόπου (face-lattice).

με n κορυφές.»

Ο Gale το 1963 απέδειξε ότι:

Για ένα κυκλικό d -πολύτοπο με n -κορυφές, ο συνολικός αριθμός των όψεων ($k = d - 1$) είναι:

$$\mu(n, d) = \binom{n - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil}{n - d} + \binom{n - \lceil \frac{d+2}{2} \rceil}{n - d} \quad \text{βλέπε θεώρημα 10.2.6}$$

Έγιναν πολλές προσπάθειες για να αποδειχτεί η εικασία του άνω φράγματος, με αξιολογότερες αυτές των Gale και Grünbaum.

Ο Gale απέδειξε τον ισχυρισμό για πολύτοπα που έχουν «λίγες κορυφές», πχ. $n \leq d + 3$ όπου d η διάσταση του πολυτόπου P και n ο αριθμός των κορυφών του.

Στο βιβλίο του Branko Grünbaum (1929-) «Convex polytopes», υπάρχει απόδειξη για πολύτοπα διάστασης $d \leq 8$.

Οι P. McMullen, G.C. Shephard, J.E. Reeve και A.A. Ball έδιναν σειρά διαλέξεων σε σεμινάριο του Πανεπιστημίου East Anglia, Norwich (1968-1970), βασισμένες στο βιβλίο «Convex Polytopes» του Branko Grünbaum. Κατά τη διάρκεια των σεμιναρίων έδωσαν διαφορετικές και απλούστερες αποδείξεις σε θεωρήματα του βιβλίου που ακολουθούσαν. Αποφάσισαν να τυπώσουν τις σημειώσεις τους και ενώ αυτές βρίσκονταν στο τυπογραφείο ο Peter McMullen, τον Ιούλιο του 1970, απέδειξε πλήρως το θεώρημα του Άνω Φράγματος, αφού είχαν προηγηθεί αποδείξεις για ειδικές περιπτώσεις κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου. Για την απόδειξη χρησιμοποίησε την ιδιότητα της «shellability» (αποφλοιωσιμότητας ή κυψελοποιησιμότητας) ενός d -πολυτόπου καθώς και τις εξισώσεις Dehn-Sommerville.

Οι Bruggesser και Mani επίσης το 1970 είχαν αποδείξει ότι κάθε d -πολύτοπο είναι «shellable», δηλαδή μπορεί να «αποφλοιωθεί» ή «κυψελοποιηθεί».

Για να προσεγγίσουμε το Θεώρημα του Άνω Φράγματος στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου θα αναφερθούν ορισμοί, θεωρήματα, προτάσεις, λήμματα σχετικά με:

1. Τα Simplicial, Simple (απλά) d -πολύτοπα, το κυκλικό d -πολύτοπο με n κορυφές ($n \geq d+1$), $C_d(n)$, την έννοια των γειτονικών (neighborly) πολυτόπων.
2. Το face lattice (πλέγμα εδρών) ενός πολυτόπου.
3. Τα πολυεδρικά συμπλέγματα (polyhedral complexes)
4. Την κυφελοποίηση των d -πολυτοπικών συμπλεγμάτων και ειδικότερα των d -πολυτόπων, το f -διάνυσμα πολυτόπου, το h -διάνυσμά και τις εξισώσεις Dehn-Sommerville.

10.2 Κυκλικά πολύτοπα - Γειτονικά (neighborly) πολύτοπα

Το (κανονικό) d -κυκλικό πολύτοπο (ορισμός 9.1.7) με n κορυφές ($n \geq d+1$) ανακαλύφθηκε από τον Καραθεοδωρή (1907, 1911) σε εργασίες της Αρμονικής Ανάλυσης. Τα αποτελέσματά του στα κυκλικά πολύτοπα (ιδιαιτέρως η ύπαρξη αυτών) λησμονήθηκαν για πολλά χρόνια. Επανανακαλύφθηκε αργότερα πολλές φορές (από τον Gale και άλλους).

Η ιστορία των γειτονικών πολυτόπων αρχίζει ακόμη νωρίτερα από τα αποτελέσματα του Καραθεοδωρή. Σε εργασία του, που δημοσιεύτηκε το 1909, ο Brückner δείχνει ότι γνώριζε τα δυϊκά των 2-γειτονικών 4-πολυτόπων. Ακόμη νωρίτερα, είχαν ανακαλυφθεί τα 2-γειτονικά 4-πολύτοπα με n κορυφές, $n \leq 7$. Τα παραδείγματα του Brückner αναπαράχθηκαν από τους P. H. Schoute (1846-1923) και D. Sommerville (1879-1934). Ο E. Steinitz (1871-1928) αναφέρει την ύπαρξη των δυϊκών των γειτονικών 4-πολυτόπων, στηριζόμενος στον Brückner, χωρίς να γνωρίζει την εργασία του Καραθεοδωρή πάνω στα γειτονικά πολύτοπα. Ο D. Gale (1921-2008) και ο T. S. Motzkin (1908-1970) επανεφεύραν τα γειτονικά πολύτοπα. Ο Gale επηρεασμένος από την τυχαία ανακάλυψη ενός 2-γειτονικού 11-πολυτόπου με 24 κορυφές από το H. W. Kuhn (1925-), ισχυρίστηκε την ύπαρξη k -γειτονικών, $(2k)$ -πολυτόπων, για κάθε k .

Τα γειτονικά d -πολύτοπα² διαδραματίζουν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία των πολυτόπων αφού εμφανίζονται στο θεώρημα Άνω Φράγματος.

²τα οποία θα οριστούν πιο κάτω, βλέπε ορισμό 10.2.1.

Μερικές ιδιότητες των κυκλικών πολυτόπων μπορεί να εκπλήξουν τον αναγνώστη. Θα δούμε για παράδειγμα, ότι όλα τα 4-διάστατα κυκλικά πολύτοπα είναι τέτοια έτσι ώστε κάθε δύο από τις κορυφές του προσδιορίζει μια ακμή, σε αντίθεση με την τρισδιάστατη περίπτωση όπου μόνο τα 3-simplex πολύτοπα έχουν αυτή την ιδιότητα.

Θεώρημα 10.2.1 (Gale, 1963). *Κάθε σύνολο το πολύ $d + 1$ σημείων πάνω στην καμπύλη ροής M_d στον $\mathbb{R}^d$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Για $i = 0, 1, \dots, d$, έστω $\mathbf{x}(t_i) = (t_i, t_i^2, \dots, t_i^d)$, όπου $t_0 < t_1 < \dots < t_d$. Για να αποδείξουμε το πιο πάνω ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_d)\}$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα, το οποίο είναι ισοδύναμο με το μη μηδενισμό της πιο κάτω $(d + 1) \times (d + 1)$ ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^d \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \dots & t_d^d \end{vmatrix}$$

Είναι γνωστό αποτέλεσμα στοιχειώδους άλγεβρας ότι η πιο πάνω ορίζουσα, επονομαζόμενη ορίζουσα του Vandermode είναι ίση με:

$$\prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i)$$

και άρα είναι διάφορη του μηδενός. □

Θεώρημα 10.2.2 (Gale, 1963). *Τα κυκλικά πολύτοπα είναι simplicial*

Απόδειξη. Έστω $F = H \cap C_d(n)$ είναι όψη του $C_d(n)$ για κάποιο υπερεπίπεδο H . Το H έχει διάσταση $d - 1$, άρα δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από d σημεία της M_d (αν περιείχε $d + 1$ σημεία της M_d αυτά από το θεώρημα 10.2.1 θα ήταν συσχετισμένα ανεξάρτητα, οπότε $\dim(H) = d$, άτοπο). Άρα η F είναι simplex. □

Θεώρημα 10.2.3. Έστω $C_d(n)$ η κυρτή θήκη των διακεκριμένων σημείων $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ($n \geq d+1 \geq 3$) στην καμπύλη ροπής M_d στον $\mathbb{R}^d$. Έστω k ένας ακέραιος που ικανοποιεί $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$. Τότε κάθε σύνολο k σημείων εκ των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ προσδιορίζει μια $(k-1)$ -έδρα του $C_d(n)$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι οι κορυφές του.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ προσδιορίζει μια $(k-1)$ -έδρα του $C_d(n)$. Για κάθε $i = 1, \dots, k$, έστω $\mathbf{x}_i = (t_i, t_i^2, \dots, t_i^d)$. Ορίζουμε ένα πολυώνυμο p πραγματικής μεταβλητής t ως:

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 \cdots (t - t_k)^2 \\ &= t^{2k} + a_{2k-1} t^{2k-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \end{aligned}$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1} \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το υπερεπίπεδο:

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_d) : a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_{2k-1} \cdot x_{2k-1} + a_{2k} \cdot x_{2k} + 0 \cdot x_{2k+1} + \cdots + 0 \cdot x_d = -a_0 \right\}$$

Επειδή $p(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και επίσης $p(t) = 0$ τότε και μόνο τότε εάν το $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$, το H είναι φέρον υπερεπίπεδο του $C_d(n)$ και η $\text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = C_d(n) \cap H$ είναι $(k-1)$ -έδρα του $C_d(n)$. Από το θεώρημα 10.2.1 το $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο και άρα $\text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ είναι $(k-1)$ -simplex. Το ότι τα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ αποτελούν τις κορυφές του $C_d(n)$ προκύπτει από το αποτέλεσμα που μόλις αποδείχτηκε στην περίπτωση $k = 1$. $\square$

Πόρισμα 10.2.4. Αν f_{k-1} είναι ο αριθμός των $(k-1)$ -εδρών ενός $C_d(n)$ ισχύει ότι:

$$f_{k-1}(C_d(n)) = \binom{n}{k} \quad \mu\epsilon \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

Θεώρημα 10.2.5 (Gale evenness condition, 1963). Έστω W ένα σύνολο d σημείων του συνόλου V των κορυφών ενός κυκλικού πολυτόπου $C_d(n)$ στον $\mathbb{R}^d$ ($n \geq d+1$). Το $\text{conv}(W)$ είναι όψη του $C_d(n)$ τότε και μόνο τότε εάν κάθε δύο σημεία του $V \setminus W$ χωρίζονται από την καμπύλη ροπής M_d από άρτιο αριθμό σημείων του W .

Απόδειξη. Έστω το W αποτελείται από τα d σημεία $(t_i, t_i^2, \dots, t_i^d)$ για $i = 1, \dots, d$ και έστω το πολυώνυμο p πραγματικής μεταβλητής t :

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_d) \\ &= t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_1t + a_0 \end{aligned}$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Τότε, το υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο περιέχει το W έχει εξίσωση:

$$a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{d-1}x_{d-1} + x_d = 0$$

Η $\text{conv}(W)$ θα είναι όψη του $C_d(n)$ τότε και μόνο τότε αν το H είναι φέρον υπερεπίπεδο του $C_d(n)$. Αυτό θα ίσχυε τότε και μόνο τότε εάν όλοι οι αριθμοί $p(t)$, όπου t τέτοιο ώστε $(t, t^2, \dots, t^d) \in V \setminus W$ είχαν το ίδιο πρόσημο. Όπως το t παίρνει διάφορες τιμές, το πολυώνυμο p αλλάζει πρόσημο, συγκεκριμένα όταν το t περνά από τις τιμές $t_1, \dots, t_d$. Άρα οι τιμές $p(r)$ και $p(s)$, όπου $r, s \in \mathbb{R}$ με $r \neq s$ και επιπλέον δεν ισούνται με κανένα από τους $t_1, \dots, t_d$, θα έχουν το ίδιο πρόσημο τότε και μόνο τότε εάν άρτιος αριθμός εκ των $t_1, \dots, t_n$ βρίσκεται μεταξύ των r και s . Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα άμεση. $\square$

Παράδειγμα 10.2.1. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 10.2.5 για να υπολογίσουμε τον αριθμό των όψεων του κυκλικού πολύτοπου $C_4(7)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε πόσα υποσύνολα W με τέσσερα στοιχεία ενός πλήρως διατεταγμένου συνόλου V επτά στοιχείων υπάρχουν, και από αυτά ποιά είναι τέτοια έτσι ώστε μεταξύ δύο στοιχείων του $V \setminus W$ να υπάρχει άρτιος αριθμός στοιχείων του W . Η εικόνα τέτοιων υποσυνόλων W του V φαίνεται στο σχήμα 10.2.1, όπου το V αντιπροσωπεύεται με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7 στην πραγματική ευθεία στη συνήθη τους διάταξη, και τα σημεία του W φαίνονται με αστερίσκους. Βρίσκεται ότι υπάρχουν 14 τέτοια υποσύνολα και άρα το $C_4(7)$ έχει 14 όψεις. Αφού κάθε 2-έδρα του $C_4(7)$ είναι μια τομή των όψεών του, βρίσκουμε ότι το $C_4(7)$ έχει 28 2-έδρες που αντιστοιχούν στα παρακάτω υποσύνολα του V : $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{4, 6, 7\}$, $\{5, 6, 7\}$. Δεν μας εκπλήσσει ο μεγάλος αριθμός 2-εδρών αφού είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να έχει ένα 4-πολύτοπο με 7 κορυφές (όπως αποδείχτηκε από το θεώρημα του

Άνω Φράγματος).

1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
*	*	*	*					*				*	*	*
*	*	*				*			*	*	*	*		
*	*		*	*					*	*		*	*	
*	*			*	*				*	*			*	*
*	*				*	*				*	*	*	*	
*		*	*			*				*	*		*	*
*			*	*		*					*	*	*	*

Σχήμα 10.2.1: Η εικόνα υποσυνόλων W του ενός πλήρως διατεταγμένου συνόλου V επτά στοιχείων, όπου το V αντιπροσωπεύεται με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7 στην πραγματική ευθεία στη συνήθη τους διάταξη, και τα σημεία του W φαίνονται με αστερίσκους.

Θεώρημα 10.2.6. Το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ στον $\mathbb{R}^d$ ($n \geq d+1$) έχει:

$$\binom{n - \lceil \frac{d+1}{2} \rceil}{n-d} + \binom{n - \lceil \frac{d+2}{2} \rceil}{n-d}$$

όψεις.

(Η απόδειξη του άνω θεωρήματος γίνεται με τη βοήθεια του Gale evenness condition, θεώρημα 10.2.5.)

Επειδή στο πρόβλημα του Άνω Φράγματος το μέγιστο θα πρέπει να αναζητηθεί σε πολύτοπα στα οποία κάθε σύνολο κορυφών παράγει έδρες, ο επόμενος ορισμός είναι αναγκαίος και προκύπτει φυσιολογικά.

Ορισμός 10.2.1 (Γειτονικά d -πολύτοπα). Έστω $k > 0$, ακέραιος και P ένα d -πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$. Το P θα λέγεται k -γειτονικό, αν κάθε υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του, έστω V , που αποτελείται από k σημεία, προσδιορίζει μια (γνήσια) έδρα $F = \text{conv}(V)$ του P , τέτοια

ώστε, $V = \text{vert}(F)$.

Το P θα λέγεται *γειτονικό* αν είναι $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ -γειτονικό.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού 10.2.1 είναι οι ακόλουθες:

1. Κάθε d -πολύτοπο είναι 1-γειτονικό, αν $d \geq 1$.
2. Κάθε d -simplex είναι k -γειτονικό για κάθε k με $1 \leq k \leq d$. Προφανώς, δεν υπάρχει d -πολύτοπο που να είναι k -γειτονικό αν $k > d$.
3. Κάθε d -γειτονικό είναι προφανώς simplex.

Υπάρχουν γειτονικά πολύτοπα; Η κατασκευή του Καραθεοδωρή (1907, 1911) έδωσε στον Gale (1963) πλήθος γειτονικών πολυτόπων με τυχαίο αριθμό κορυφών.

Θεώρημα 10.2.7. Το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ με $n \geq d + 1 \geq 3$ είναι γειτονικό.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 10.2.3 έχουμε ότι το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ με $n \geq d + 1 \geq 3$ είναι $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ -γειτονικό. □

Θεώρημα 10.2.8. Έστω P ένα k -γειτονικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$, $k < d$. Τότε κάθε σύνολο k κορυφών του P είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο και κάθε $(k - 1)$ -έδρα του P είναι ένα $(k - 1)$ -simplex.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ να είναι k κορυφές του P οι οποίες είναι συσχετισμένα εξαρτημένες, έστω $\mathbf{v}_k \in \text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$. Αφού το P έχει περισσότερες από k κορυφές, τότε υπάρχει μια κορυφή $\mathbf{v}_0$ του P διαφορετική από τις $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Όμως το P είναι k -γειτονικό και άρα η $F = \text{conv}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ είναι μια έδρα του P με $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} = \text{vert}(F)$. Όμως, $\mathbf{v}_k \in \text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} \subseteq \text{aff}(F)$ και $\mathbf{v}_k \in \text{vert}(P)$. Άρα $\mathbf{v}_k \in \text{vert}(F) = \{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα κάθε σύνολο k κορυφών του P είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο. □

Πόρισμα 10.2.9. Έστω P ένα k -γειτονικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ με n κορυφές και έστω $j \in \{1, \dots, k\}$. Τότε το P είναι j -γειτονικό και για τον αριθμό των $(j-1)$ -εδρών του P ισχύει ότι:

$$f_{j-1}(P) = \binom{n}{j} \quad \mu\epsilon \quad 1 \leq j \leq k$$

Απόδειξη. Έστω X να είναι ένα σύνολο από j κορυφές του P . Τότε $X \subseteq W$ για κάποιο σύνολο W των k κορυφών του P . Έχουμε ότι το $\text{conv}(W)$ είναι simplex και επίσης έδρα του P (θεώρημα 10.2.8), οπότε το $\text{conv}(X)$ είναι έδρα του $\text{conv}(W)$ και άρα και του P . Αυτό δείχνει ότι το P είναι j -γειτονικό.

Από το γεγονός ότι το P είναι j -γειτονικό και το θεώρημα 10.2.8 συμπεραίνουμε ότι το P έχει τόσες $(j-1)$ -έδρες όσοι είναι οι τρόποι να επιλέξουμε ένα σύνολο j σημείων από n σημεία, δηλαδή $\binom{n}{j}$. □

Θεώρημα 10.2.10. Έστω P ένα d -πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο είναι k -γειτονικό για κάποιο k με $k > \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Τότε το P είναι d -simplex.

Απόδειξη. Έστω ότι το P δεν είναι d -simplex. Τότε το σύνολο των κορυφών V του P πρέπει να περιέχει κάποιο υποσύνολο W $d+2$ σημείων. Από το θεώρημα του Radon το W μπορεί να χωριστεί σε δύο μη κενά υποσύνολα X και Y τέτοια ώστε:

$$W = X \cup Y, \quad X \cap Y = \emptyset$$

και

$$(\text{conv}(X)) \cap (\text{conv}(Y)) \neq \emptyset \tag{10.2.1}$$

Ένα εκ των X και Y , έστω το X δεν έχει περισσότερα από $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ σημεία. Επειδή $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq k$, από το πόρισμα 10.2.9, καταλήγουμε ότι $\text{conv}(X)$ είναι μια έδρα του P και άρα $\text{aff}(X) \cap (\text{conv}(V \setminus X)) = \emptyset$. Όμως,

$$(\text{conv}(X)) \cap (\text{conv}(Y)) \subseteq (\text{aff}(X)) \cap (\text{conv}(V \setminus X)) = \emptyset,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση 10.2.1. Άρα το P είναι d -simplex. $\square$

Πόρισμα 10.2.11. Έστω P ένα γειτονικό $2d$ -πολύτοπο στον $\mathbb{R}^{2d}$. Τότε το P είναι simplicial.

Απόδειξη. Έστω F μια όψη του P . Τότε η F είναι d -γειτονικό $(2d-1)$ -πολύτοπο και αφού $d > \lfloor \frac{2d-1}{2} \rfloor$, από το θεώρημα 10.2.10 έχουμε ότι η F είναι simplex. Άρα το P είναι simplicial. $\square$

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής:

Ποιά η σχέση μεταξύ κυκλικών και γειτονικών πολυτόπων;

Όπως είδαμε: Κάθε $C_d(n)$ κυκλικό πολύτοπο με $n \geq d+1 \geq 3$ είναι γειτονικό.

Τα $C_d(n)$ είναι πάντοτε simplicial πολύτοπα, αλλά το γειτονικό δεν είναι κατ' ανάγκην simplicial αν $d = 2\nu + 1$. Πχ. θεωρούμε ένα κυκλικό 2ν -πολύτοπο K στον $\mathbb{R}^{2\nu}$ που δεν είναι simplex (δηλαδή με κορυφές $n > 2\nu + 1$) και το τοποθετούμε στον $\mathbb{R}^{2\nu+1}$ στο επίπεδο $x_{2\nu+1} = 0$. Το πολύτοπο (πυραμίδα) P με βάση το K και κορυφή το $e_{2\nu+1}$ είναι $\lfloor \frac{2\nu+1}{2} \rfloor = \nu$ -γειτονικό (το K είναι ν -γειτονικό και οι υπόλοιπες έδρες του P είναι simplices), αλλά δεν είναι simplicial (η όψη K δεν είναι simplex). Οπότε η σχέση (αν υπάρχει) θα είναι μεταξύ των κυκλικών πολυτόπων και των simplicial γειτονικών πολυτόπων.

Στην περίπτωση όπου έχουμε περιττή διάσταση υπάρχει το εξής:

Θεώρημα 10.2.12. Έστω P simplicial $(2d+1)$ -πολύτοπο με n κορυφές. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- i. P είναι κυκλικό
- ii. P είναι γειτονικό

Βάσει του ανωτέρω θεωρήματος, το ενδιαφέρον εστιάζεται στα γειτονικά $2d$ -πολύτοπα τα οποία (πόρισμα 10.2.11) είναι simplicial.

Κατ' αρχάς: Εάν $n \leq 2d + 3$ τότε κάθε γειτονικό $2d$ -πολύτοπο με n κορυφές είναι κυκλικό. Όμως υπάρχει παράδειγμα γειτονικού (simplicial) 4-πολυτόπου με $n = 8$ που δεν είναι κυκλικό!

Έτσι, για τα γειτονικά $2d$ -πολύτοπα χρειαζόμαστε επί πλέον ιδιότητες για να είναι κυκλικά με ίσο αριθμό κορυφών.

Ορισμός 10.2.2. Έστω P πολύτοπο και x, y δύο κορυφές του. Το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ καλείται *universal ακμή* αν και μόνο αν $H \cap [x, y] = \emptyset$ για κάθε επίπεδο H που παράγεται από κορυφές του P εξαιρουμένων των x και y .

Με τη βοήθεια της παραπάνω έννοιας αποδείχτηκε (Shemer, 1982) το εξής θεώρημα:

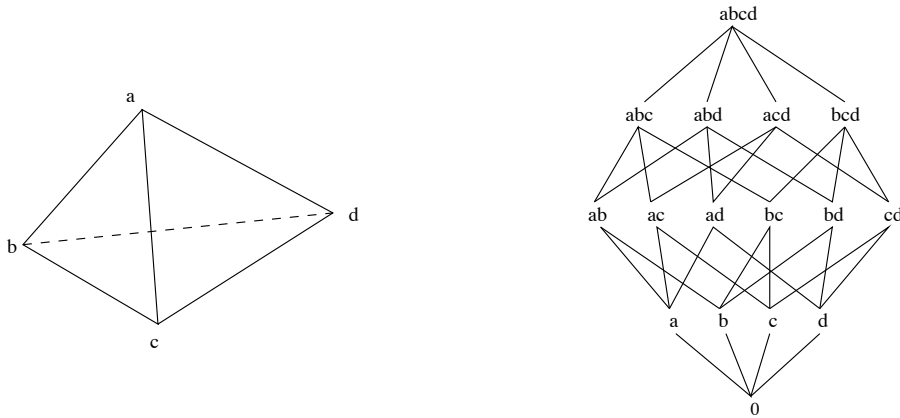
Θεώρημα 10.2.13. Έστω P simplicial $2d$ -πολύτοπο με n κορυφές. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- i. Το P είναι κυκλικό,
- ii. Το P είναι γειτονικό και έχει n το πλήθος *universal* ακμές.

10.3 Το πλέγμα εδρών του πολυτόπου P (face-lattice)

Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των εδρών ενός πολυτόπου P . Το σύνολο $\mathcal{F}$ εφοδιασμένο με τη σχέση έγκλεισης ($\subseteq$) είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και συμβολίζεται με $\mathcal{F}(P)$.

Στο σχήμα 10.3.2 έχουμε δεξιά ένα simplex Δ^3 και αριστερά το $\mathcal{F}(\Delta^3)$, που δίνεται από το Hasse διάγραμμα του.



Σχήμα 10.3.2: Το simplex Δ^3 και το Hasse διάγραμμα του $\mathcal{F}(\Delta^3)$.

Μια ακμή ανάμεσα σε δύο στοιχεία x και y του $\mathcal{F}(\Delta^3)$ στο διάγραμμα, δείχνει ότι το «πάνω» στοιχείο, έστω x καλύπτει το «κάτω» στοιχείο y . Δηλαδή $y \leq x$, και δεν υπάρχει στοιχείο z : $z \neq x$, $z \neq y$ και $y \leq z \leq x$.

Ορισμός 10.3.1. Μια αλυσίδα στο $\mathcal{F}(P)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{F}(P)$. Σαν μήκος της αλυσίδας ορίζεται ο αριθμός των στοιχείων της μειωμένος κατά 1. Αν κάθε μεγιστική αλυσίδα σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο S έχει το ίδιο μήκος με κάθε άλλη μεγιστική αλυσίδα, τότε το σύνολο S ονομάζεται *διαβαθμισμένο* (graded).

Πρόταση 10.3.1. Έστω P ένα d -πολύτοπο.

- i. Αν F είναι μια $(d-2)$ -έδρα «ridge»-(πτυχή) τότε η F είναι η τομή δύο όψεων, δηλαδή δύο όψεων του P .
- ii. Αν F είναι μια $(d-k)$ -έδρα του P , τότε η F είναι η τομή k όψεων του P .
- iii. Η τομή δύο όψεων του P είναι μια έδρα του P .
- iv. Αν η F είναι μια γνήσια έδρα του P , θα είναι έδρα κάποιας όψης του P .

Από την πρόταση 10.3.1 προκύπτει ότι το $\mathcal{F}(P)$ είναι διαβαθμισμένο σύνολο.

Ορισμός 10.3.2. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο S ονομάζεται *φραγμένο*, αν έχει ένα μοναδικό ελαχιστικό στοιχείο, που συμβολίζεται με $\hat{0}$, και ένα μοναδικό μεγιστικό στοιχείο που συμβολίζεται με $\hat{1}$.

Ορισμός 10.3.3. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο S , ονομάζεται *πλέγμα* (lattice), αν είναι i) *φραγμένο* και για κάθε δύο στοιχεία $x, y \in S$ υπάρχει ii) η τομή $(x \wedge y)$ τους, που είναι το μοναδικό μεγιστικό κάτω φράγμα, καθώς και iii) η ένωσή τους $(x \vee y)$ που είναι το μοναδικό ελαχιστικό άνω φράγμα. Αν ισχύουν οι δύο από τις τρεις παραπάνω συνθήκες θα ισχύει και η τρίτη.

Από εδώ και στο εξής το $\mathcal{F}(P)$ όπου είναι φανερό ότι είναι ένα πλέγμα (lattice) θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(P)$ (πλέγμα εδρών - face lattice).

10.4 Πολυεδρικά και πολυτοπικά συμπλέγματα

Ορισμός 10.4.1. Μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{C}$ πολυέδρων του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται *πολυεδρικό σύμπλεγμα* όταν:

- i. Το κενό πολύεδρο ανήκει στη συλλογή $\mathcal{C}$.
- ii. Αν $P \in \mathcal{C}$, τότε όλες οι έδρες του P , ανήκουν στη συλλογή $\mathcal{C}$.
- iii. Αν $P, Q \in \mathcal{C}$, τότε η τομή $P \cap Q$ είναι έδρα του P και του Q .

Η διάσταση της $\mathcal{C}$, $(\dim \mathcal{C})$, είναι η μεγαλύτερη διάσταση ενός πολυέδρου της συλλογής. Το $\mathbf{f}$ -διάγραμμα ενός d -πολυεδρικού συμπλέγματος $\mathcal{C}$ είναι το διάγραμμα:

$$\mathbf{f}(\mathcal{C}) = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_d) \in \mathbb{N}^{d+2}$$

όπου $f_k = f_k(\mathcal{C})$, $k = 0, 1, \dots, d$, είναι ο αριθμός των k -εδρών του $\mathcal{C}$ και $f_{-1} = 1$

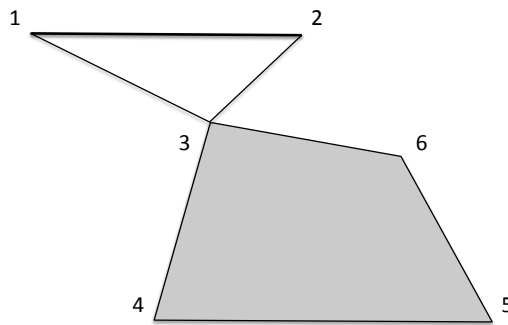
Το βασικό (underlying) σύνολο για τη συλλογή $\mathcal{C}$ (σύμπλεγμα $\mathcal{C}$), είναι το σύνολο:

$$|\mathcal{C}| = \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P$$

Αν η συλλογή $\mathcal{C}$ είναι συλλογή πολυτόπων, τότε ονομάζεται *πολυτοπικό σύμπλεγμα*.

Το πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ του σχήματος 10.4.3 περιέχει:

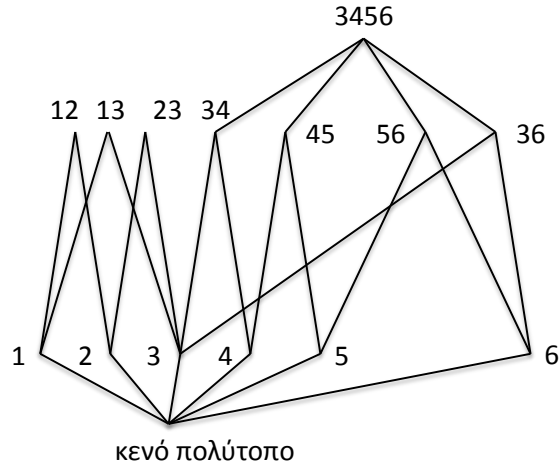
1. το κενό πολύτοπο,
2. τις 0-έδρες 1,2,3,4,5,6 (κορυφές),
3. τις 1-έδρες 12, 23, 34, 45, 56, 36 (ακμές),
4. η 2-έδρα (3456) (δηλαδή το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τις κορυφές 3,4,5,6)



Σχήμα 10.4.3: Πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ 2-διαστάσεων.

Παράδειγμα 10.4.2. Κάθε πολύτοπο P μαζί με όλες τις έδρες του σχηματίζει το πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}(P)$. Εδώ η μόνη μεγιστική έδρα είναι το ίδιο το P .

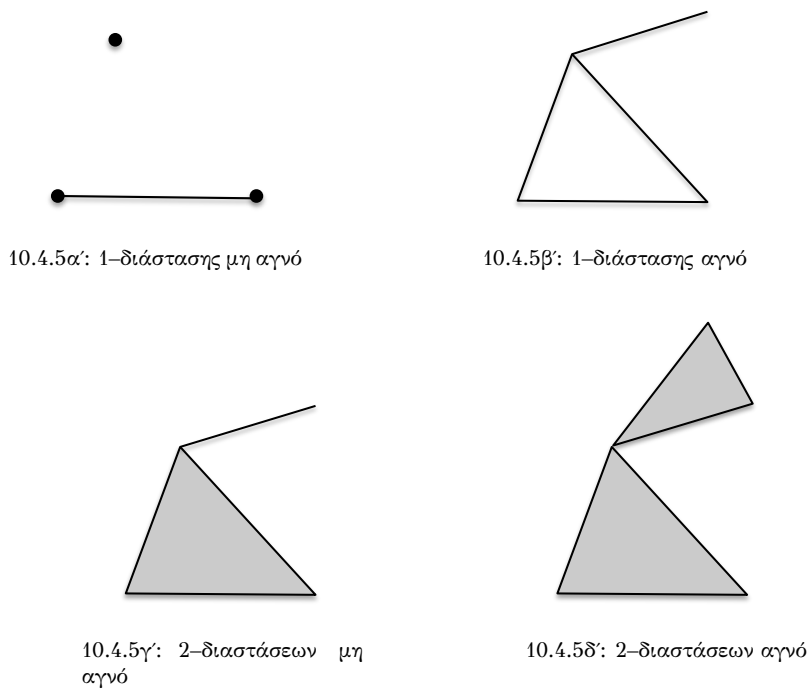
Παράδειγμα 10.4.3. Όλες οι γνήσιες έδρες του P σχηματίζουν το «συνοριακό σύμπλεγμα» $\mathcal{C}(\partial P)$ του οποίου οι όψεις είναι ακριβώς οι όψεις του P και $\dim(\mathcal{C}(\partial P)) = \dim(P) - 1$

Σχήμα 10.4.4: Το πλέγμα εδρών $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Ορισμός 10.4.2. Ένα πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ ονομάζεται *αγνό*, αν κάθε μια από τις έδρες περιέχεται σε μια έδρα διάστασης $\dim \mathcal{C}$, δηλαδή, αν όλες οι μεγιστικές έδρες του $\mathcal{C}$ δηλαδή οι όψεις του, έχουν την ίδια διάσταση. Το βασικό σύνολο του $\mathcal{C}$ είναι η ένωση όλων των εδρών του,

$$|\mathcal{C}| = \bigcup_{F \in \mathcal{C}} F$$

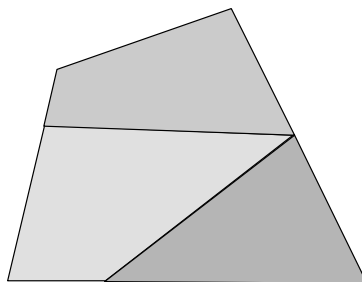
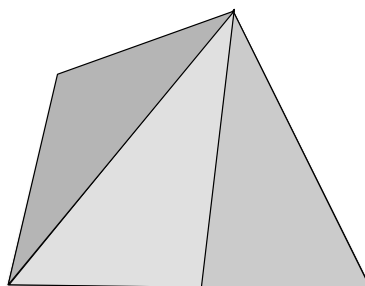
Το πολυτοπικό σύμπλεγμα του σχήματος 10.4.5α' είναι ένα μη αγνό 1-διάστασης σύμπλεγμα, το 10.4.5β' είναι αγνό 1-διάστασης, το 10.4.5γ' μη αγνό 2-διαστάσεων και το 10.4.5δ' αγνό 2-διαστάσεων σύμπλεγμα.



Σχήμα 10.4.5: Καθαρά και μη αγνά συμπλέγματα

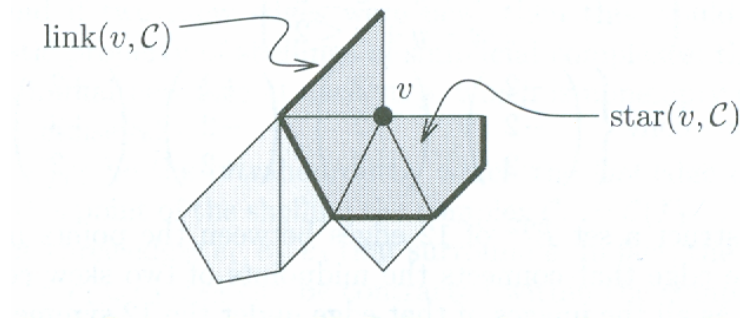
Ορισμός 10.4.3. Μια πολυτοπική υποδιαίρεση ενός πολυτόπου P είναι ένα πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ με το βασικό του σύνολο $|\mathcal{C}| = P$.

Αν όλα τα πολύτοπα της υποδιαίρεσης είναι simplices, τότε η υποδιαίρεση είναι μια τριγωνοποίηση του P .

Σχήμα 10.4.6: Υποδιαίρεση του πολυτόπου P .Σχήμα 10.4.7: Τριγωνοποίηση του πολυτόπου P .

Ορισμός 10.4.4. Για ένα πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$, ορίζεται το star , που συμβολίζεται με $\text{star}(v, \mathcal{C})$ της κορυφής $v \in \mathcal{C}$, σαν το πολυτοπικό υποσύμπλεγμα όλων των εδρών του $\mathcal{C}$ που περιέχουν την κορυφή v μαζί με τις έδρες τους.

Έστω $v \in \mathcal{C}$ και το $\text{star}(v, \mathcal{C})$. Το υποσύμπλεγμα link με συμβολισμό $\text{link}(v, \mathcal{C})$ του $\text{star}(v, \mathcal{C})$ είναι το σύμπλεγμα που αποτελείται από όλες τις έδρες G του $\text{star}(v, \mathcal{C})$ που δεν περιέχουν το v σαν κορυφή.



Σχήμα 10.4.8: Το $\text{star}(v, C)$ και το $\text{link}(v, C)$.

10.5 Κυψελοποιησιμότητα (shellability) - Τρόπος κυψελοποίησης (shelling) - Κυψελοποιήσιμα (shellable) συμπλέγματα

Η έννοια της «κυψελοποιησιμότητας» (shellability), ενός πολυτόπου P , προήλθε από την προσπάθεια να βρεθεί μια επαγωγική απόδειξη για την τύπο του Euler-Poincaré, σε κάθε διάσταση.

Ο τύπος του Euler γενικεύτηκε για οποιαδήποτε διάσταση από τον Schläfli το 1852, αλλά η πρώτη σωστή απόδειξη έγινε το 1893 από τον Poincaré με χρήση Αλγεβρικής Τοπολογίας. Χρησιμοποιώντας το f -διάγραμμα (βλέπε ορισμό 10.4.1) και το γεγονός ότι $f_{-1} = 1$, $f_d = 1$, ο τύπος του Euler παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j f_j = 1 - (-1)^d \iff \sum_{j=0}^d (-1)^j f_j = 1 \iff \sum_{j=-1}^d (-1)^j f_j = 0$$

Παρατηρήθηκε ότι όλες οι γνωστές αποδείξεις, υπέθεταν ότι το σύνολο κάθε πολυέδρου μπορεί να δομηθεί επαγωγικά με ένα «όμορφο» τρόπο, που ονομάστηκε «shellability». Ουσιαστικά η «shellability» είναι η ιδιότητα που έχουν κάποια πολυτοπικά συμπλέγματα και όλα τα πολύτοπα (όπως απέδειξαν το 1970 οι Mani και Bruggesser), ώστε να υπάρχει κάποιος τρόπος διάταξης των όψεων του (shelling) που ικανοποιεί κάποιες συνθήκες.

Ο ορισμός της κυψελοποίησης είναι επαγωγικός στη διάσταση. Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι κάθε 0-διάστασης αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα είναι κυψελοποιήσιμο.

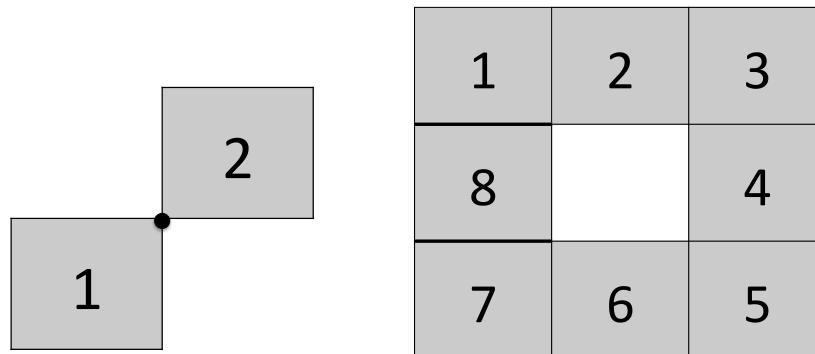
Ορισμός 10.5.1. Έστω ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ d -διάστασης ($d \geq 1$). Ένα *shelling* (αποφλοιώση ή κυψελοποίηση), του $\mathcal{C}$, είναι μια ακολουθία, $F_1, \dots, F_s$ των όψεων του, έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- i. Το συνοριακό πλέγμα $\mathcal{C}(\partial F_1)$, της πρώτης όψης F_1 είναι κυψελοποιήσιμο.
- ii. Για κάθε j , με $1 < j \leq s$, η τομή της όψης F_j με τις προηγούμενες όψεις είναι μη κενή έδρα και αποτελεί το αρχικό τμήμα μιας κυψελοποίησης, για το $(d-1)$ -διάστασης συνοριακό σύμπλεγμα της F_j , δηλαδή,

$$F_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i \right) = G_1 \cup \dots \cup G_\tau$$

για κάποια κυψελοποίηση $G_1, \dots, G_\tau, \dots, G_t$ του $\mathcal{C}(\partial F_j)$ με $1 \leq \tau \leq t$. Καθώς η τομή πρέπει να αποτελεί το αρχικό τμήμα μιας κυψελοποίησης για το $(d-1)$ -διάστασης σύμπλεγμα, το ∂F_j θα πρέπει να είναι αγνό $(d-1)$ -διάστασης και συνεκτικό για $d > 1$.

Ένα πολυεδρικό σύμπλεγμα είναι «shellable» (κυψελοποιήσιμο), αν είναι αγνό και έχει μια κυψελοποίηση, καθώς η κυψελοποιησιμότητα ορίζεται μόνο για αγνά συμπλέγματα.



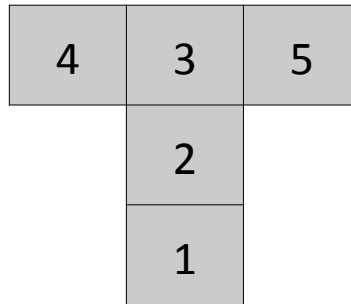
10.5.9α: Σύμπλεγμα στο οποίο η τομή των όψεων είναι μια κορυφή

10.5.9β: Σύμπλεγμα στο οποίο η τομή μιας όψης με την ένωση των προηγούμενων είναι μη συνεκτικό σύμπλεγμα

Σχήμα 10.5.9: Μη κυψελοποιήσιμα συμπλέγματα

Παραδείγματα κυψελοποιήσιμων συμπλεγμάτων

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε 0-διάστασης σύμπλεγμα είναι κυψελοποιήσιμο.
2. Ένα 1-διάστασης σύμπλεγμα είναι κυψελοποιήσιμο, μόνο αν είναι συνεκτικό, δηλαδή χωρίς μεμονωμένες κορυφές.
3. Κάθε simplex είναι κυψελοποιήσιμο, καθώς κάθε διάταξη των όψεων του δημιουργεί μια κυψελοποίηση. Αυτό μπορεί ναδειχθεί επαγωγικά, με επαγωγή στη διάσταση, αφού η τομή δύο όψεων F_i και F_j είναι επίσης μια όψη της F_i και της F_j .



Σχήμα 10.5.10: Ένα κυψελοποιήσιμο σύμπλεγμα δύο διαστάσεων.

Παραδείγματα μη κυψελοποιήσιμων συμπλεγμάτων

1. Στο σχήμα 10.5.9α' η τομή των όψεων είναι μια κορυφή, δηλαδή 0-διάστασης σύμπλεγμα, ενώ θα έπρεπε αφού το σύμπλεγμα είναι 2-διάστασης, να είναι 1-διάστασης.
2. Στο σχήμα 10.5.9α' η τομή της όψης 8 με την ένωση των προηγούμενων είναι μη συνεκτικό σύμπλεγμα.

Πρόταση 10.5.1. Έστω $\mathcal{C}$ ένα simplicial-κυψελοποιήσιμο d -σύμπλεγμα και $F_1, \dots, F_s$ μια κυψελοποίησή του. Τότε για κάθε κορυφή $v \in \mathcal{C}$, ο περιορισμός της ακολουθίας των $F_1, \dots, F_s$, θα δημιουργεί στο $\text{star}(v, \mathcal{C})$ και στο $\text{link}(v, \mathcal{C})$ αντίστοιχες κυψελοποιήσεις.

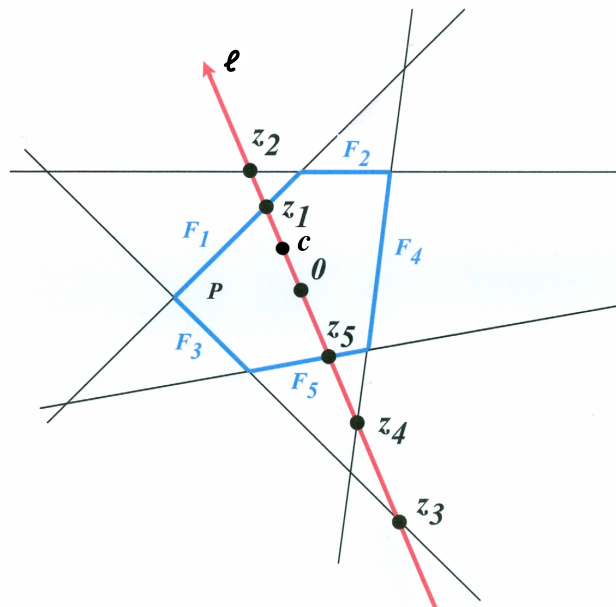
Πρόταση 10.5.2. Αν P είναι ένα d -πολύτοπο και $F_1, \dots, F_s$ είναι μια κυψελοποίησή του, τότε η αντίστροφη ακολουθία $F_s, \dots, F_1$ είναι επίσης μια κυψελοποίηση για το P .

Η πιο πάνω πρόταση δεν ισχύει για οποιαδήποτε πολυτοπικά συμπλέγματα, όπως για παράδειγμα για το πολυτοπικό σύμπλεγμα του σχήματος 10.5.10. Η ακολουθία των όψεων 1,2,3,4,5, είναι μια κυψελοποίηση για το πολυτοπικό σύμπλεγμα, αλλά η αντίστροφη, 5,4,3,2,1 δεν αποτελεί κυψελοποίηση καθώς η τομή της όψης 4 με την προηγούμενή της όψη 5 είναι το κενό πολύτοπο.

Πρόταση 10.5.3. Για ένα πολύτοπο P ισχύουν:

- i. Αν F, F' δύο όψεις του P , θα υπάρχει μια κυψελοποίηση του P , τέτοια ώστε η F να έρχεται πρώτη στη σειρά και η F' τελευταία.
- ii. Για κάθε κορυφή v του P , υπάρχει κυψελοποίηση του P , στην οποία οι όψεις που περιέχουν την κορυφή v να σχηματίζουν το αρχικό τμήμα της κυψελοποίησης.

Το ακόλουθο θεώρημα των Bruggesser και Mani (1970) απέδειξε και τη βασική ιδιότητα της κυψελοποίησης για τυχαίο d -πολύτοπο. Η απόδειξη έχει απλουστευθεί από πολλούς (πχ. Jean Gallier).

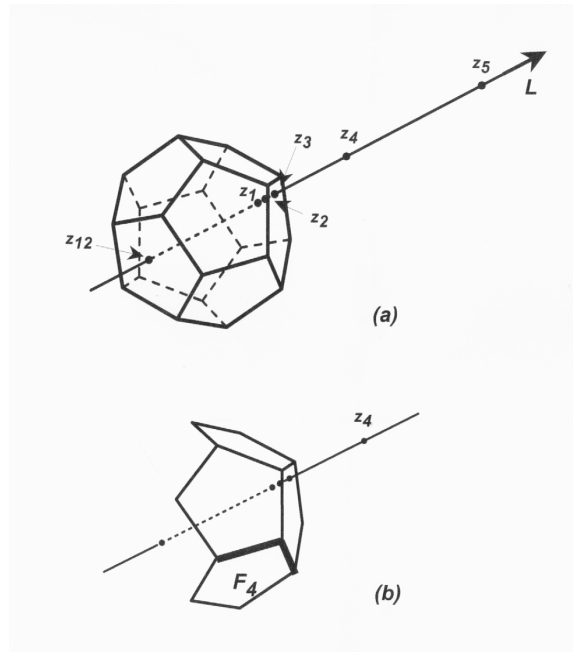


Σχήμα 10.5.11: Επεξήγηση στην απόδειξη του θεωρήματος 10.5.1.

Θεώρημα 10.5.1. Κάθε d -πολύτοπο P είναι κυψελοποιήσιμο.

Απόδειξη. Κάθε πολύτοπο έχει ένα «line shelling» (γραμμική κυψελοποίηση) η οποία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Έστω c ένα σημείο που ανήκει στο εσωτερικό του P . Επιλέγουμε μια ευθεία ℓ που να διέρχεται από το c , με τις παρακάτω ιδιότητες:

- i. η ευθεία ℓ να τέμνει κάθε υπερεπίπεδο που περιέχει τις όψεις του P ,
- ii. η ευθεία ℓ να μη τέμνει την τομή κάθε δύο υπερεπιπέδων που περιέχουν δύο όψεις του P . (σχήματα 10.5.11 και 10.5.12)



Σχήμα 10.5.12: Επεξήγηση στην απόδειξη του θεωρήματος 10.5.1.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\ell = \{\lambda c, \lambda \in \mathbb{R}\}$ όπου το $c \neq 0$ είναι εσωτερικό σημείο του P και:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \right\}$$

με

$$F_i = \left\{ \mathbf{x} \in P : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 1 \right\} \quad i = 1, \dots, m$$

να είναι οι όψεις του P .

Η ευθεία ℓ τέμνει κάθε υπερεπίπεδο $\text{aff}(F_i)$ σε σημείο $\mathbf{z}_i = \lambda_i \mathbf{c}$, $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z}_i = 1)$ για κάποιο $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$. Διατάσσουμε τα $1/\lambda_i$, $i = 1, \dots, m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} > \dots > \frac{1}{\lambda_m}$$

Από την επιλογή των $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ώστε

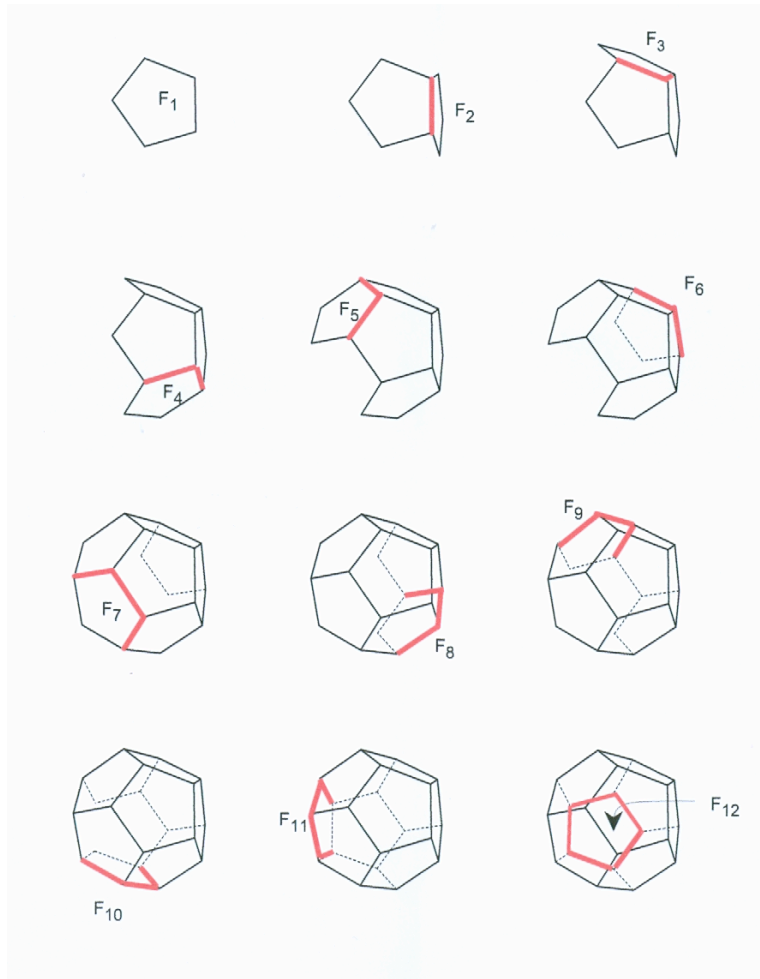
$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} > \dots > \frac{1}{\lambda_m}$$

θα έχουμε το εξής:

Έστω ότι βρισκόμαστε σε ένα πύραυλο που βρίσκεται στην επιφάνεια ενός πλανήτη P , στο σημείο όπου η προσανατολισμένη ευθεία ℓ εγκαταλείπει τον πλανήτη, και θα κινηθεί πάνω στην ευθεία ℓ . Αυτό το σημείο $\mathbf{z}_1$ ανήκει μόνο στην όψη F_1 και στην αρχή της πτήσης η F_1 είναι η μόνη ορατή όψη από τον πύραυλο. Μετά από λίγο μια νέα όψη θα εμφανιστεί στον ορίζοντα, η F_2 , καθώς ο πύραυλος διέρχεται από το $\mathbf{z}_2$ του υπερεπίπεδου $\text{aff}(F_2)$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, με $\lambda \rightarrow +\infty$, θα εμφανίζονται οι όψεις $F_3, F_4, \dots, F_s$ με τη σειρά που η ευθεία ℓ θα διέρχεται από τα υπερεπίπεδα $\text{aff}(F_3), \text{aff}(F_4), \dots, \text{aff}(F_s)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s > 0)$. Τώρα περνάμε από το σημείο $+\infty$ και φανταζόμαστε ότι ο πύραυλος επιστρέφει στον πλανήτη από το $-\infty$. Συνεχίζουμε το shelling παίρνοντας τις όψεις με τη σειρά με την οποία διέρχεται ο πύραυλος από τα υπερεπίπεδα $\text{aff}(F_i)$, $i = s+1, \dots, m$, $(\lambda_{s+1}, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_m < 0)$ (βλέπε σχήματα 10.5.11 και 10.5.12). Για να δούμε ότι η σειρά των όψεων είναι πράγματι μια κυψελοποίηση, θεωρούμε την τομή $\partial F_j \cap (F_1 \cup \dots \cup F_{j-1})$ (βλέπε σχήμα 10.5.13).

Αν η F_j προστίθεται πριν περάσουμε από το $+\infty$, τότε η τομή αυτής είναι ακριβώς το σύνολο εκείνων των όψεων που είναι ορατές από το σημείο $\ell \cap \text{aff}(F_j) = \mathbf{z}_j$, στο οποίο η F_j εμφανίζεται στον ορίζοντα. Από επαγωγή στη διάσταση γνωρίζουμε ότι αυτή η συλλογή των όψεων F_j είναι κυψελοποιήσιμη, και μπορούμε να συνεχίσουμε την κυψελοποίηση όλου του ∂F_j . Ανάλογα με τις F_j , με $\lambda_j < 0$

□



Σχήμα 10.5.13: Επεξήγηση στην απόδειξη του θεωρήματος 10.5.1.

10.6 Το h -διάνυσμα ενός d -πολυτόπου και οι εξισώσεις Dehn-Sommerville

Ο ορισμός του h -διανύσματος δόθηκε από τον Peter McMullen (1970) στην προσπάθειά του να αποδείξει το θεώρημα του Άνω Φράγματος. Το h -διάνυσμα ορίζεται σε simplicial πολύτοπα. Για τυχαία πολύτοπα υπάρχει το toric h -διάνυσμα του Stanley.

Καθώς το P είναι ένα d -simplicial πολύτοπο, το σύνορό του $C(\partial P)$ θα έχει διάσταση $d - 1$. Έστω $V = \text{vert}(P)$ και $f_0(P) = n$ ο αριθμός των κορυφών του P . Ταυτίζουμε μια έδρα F του P με τις κορυφές $\text{vert}(F)$, δηλαδή ταυτίζουμε το «γεωμετρικό simplicial σύμπλεγμα C » με το αφηρημένο simplicial σύμπλεγμα στο πεπερασμένο σύνολο V . Αφού οι όψεις του P

είναι $(d-1)$ -simplices (καθώς το P είναι simplicial), θα αντιστοιχούν σε υποσύνολο του V με d στοιχεία. Το σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ είναι αγνό $(d-1)$ -διάστασης και έτσι προσδιορίζεται από την οικογένεια των όψεων που τη συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$. Όλες οι υπόλοιπες έδρες στο $\mathcal{C}$ αντιστοιχούν σε υποσύνολα των όψεων της $\mathcal{F}$.

Έστω τώρα μια κυψελοποίηση $F_1, F_2, \dots$ των όψεων της $\mathcal{F}$. Για κάθε όψη F_j ορίζουμε το σύνολο

$$R_j = \left\{ v \in F_j / F_j \setminus v \subseteq F_i, \quad \text{για κάποιο } i, \quad 1 \leq i < j \right\}$$

Οι νέες έδρες G , που προστίθενται στο j βήμα (όταν η όψη F_j προστίθεται στην κυψελοποίηση), είναι ακριβώς οι έδρες που ανήκουν στο σύνολο:

$$I_j = \left\{ G \subseteq V / R_j \subseteq G \subseteq F_j \right\}$$

Άρα δημιουργείται η διαμέριση $\{I_1, \dots, I_s\}$ του συνόλου των εδρών του simplicial συμπλέγματος στα παραπάνω τμήματα.

Έστω τώρα $h_i = \left| \left\{ j / |R_j| = i, \quad 1 \leq j \leq s \right\} \right|$, για $i = 0, 1, \dots, d$, δηλαδή το $h_i = h_i(\mathcal{C})$ συμβολίζει τον αριθμό των τμημάτων της διαμέρισης, των οποίων οι αντίστοιχοι περιορισμοί R_j έχουν μήκος i . Τότε ορίζεται το $\mathbf{h}$ -διάνυσμα του $\mathcal{C}$:

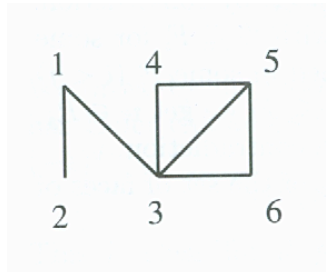
$$\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_0, h_1, \dots, h_i, \dots, h_d)$$

Το $\mathbf{h}$ -διάνυσμα ορίζεται ανάλογα για κυψελοποιήσιμα πολυτοπικά συμπλέγματα.

Παράδειγμα 10.6.4. Έστω το παρακάτω 1-διάστασης σύμπλεγμα $\mathcal{C}$.

Προφανώς $\mathbf{f}(\mathcal{C}) = (1, 6, 7)$ ($f_{-1} = 1, f_0 = 6, f_1 = 7$). Είναι συνεκτικό, κυψελοποιήσιμο, και μια κυψελοποίησή του είναι η εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & 13 & 34 & 35 & 45 & 36 & 56 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 \end{array}$$

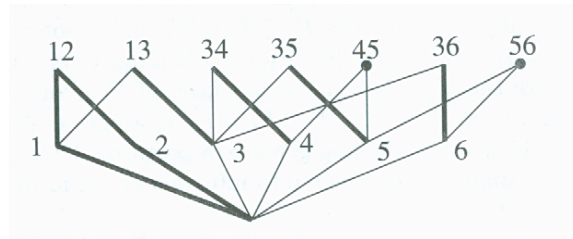


Σχήμα 10.6.14: Σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ 1-διάστασης.

Οι ελαχιστικές νέες έδρες, R_j , που εμφανίζονται σε κάθε βήμα είναι: $\emptyset$, 3, 4, 5, 45, 6, 56.

Άρα $|R_1| = 0$, $|R_2| = |R_3| = |R_4| = |R_5| = 1$ και $|R_6| = |R_7| = 2$.

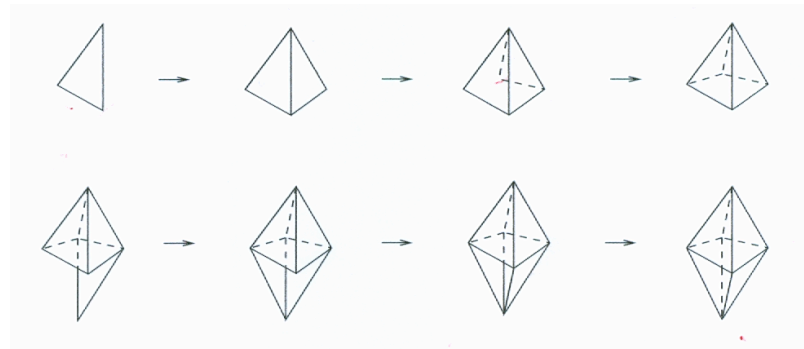
Η αντίστοιχη διαμέριση $\{I_1, I_2, \dots, I_7\}$ δείχνεται από το διάγραμμα του σχήματος 10.6.15.



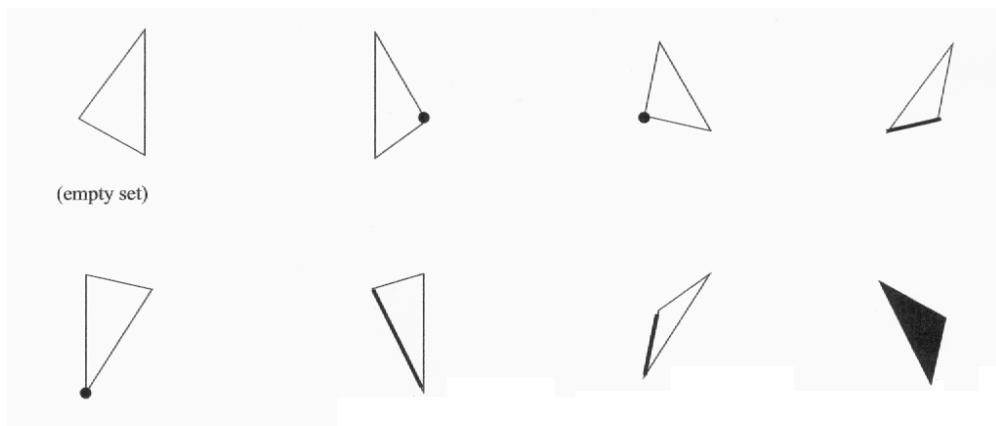
Σχήμα 10.6.15: Η διαμέριση της κυψελοποίησης του συμπλέγματος $\mathcal{C}$ του σχήματος 10.6.14. Οι έντονες γραμμές δείχνουν τη διαμέριση $\{I_1, I_2, \dots, I_7\}$.

Οι έντονες γραμμές δείχνουν τη διαμέριση $\{I_1, I_2, \dots, I_7\}$. Από τη διαμέριση βρίσκουμε ότι $h_0 = 1$, $h_1 = 4$ (4 νέες έδρες μήκους 1) και $h_2 = 2$ (2 νέες έδρες μήκους 2).

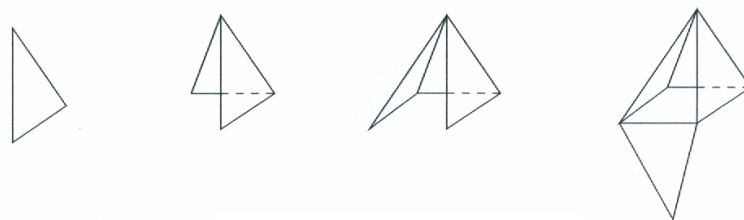
Παράδειγμα 10.6.5. Κυψελοποίηση του συνόρου του οκταέδρου C_3^Δ . Βλέπουμε ότι $h_0 = 1$, $h_1 = 3$, $h_2 = 3$ και $h_3 = 1$.



Σχήμα 10.6.16: Η κυψελοποίηση του συνόρου του οκταέδρου.



Σχήμα 10.6.17: Οι ελαχιστικές νέες έδρες της κυψελοποίησης του συνόρου του οκταέδρου του σχήματος 10.6.16.



Σχήμα 10.6.18: Η αρχή μιας μη κυψελοποίησης του συνόρου του οκταέδρου.

Γενικά, παρατηρούμε ότι αν $|R_j| = i$, τότε υπάρχουν ακριβώς $\binom{d-i}{k-i} (k-1)$ -έδρες που περιέχονται στα τμήματα I_j . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση καταλήγουμε ότι:

Το $\mathbf{f}$ -διάγραμμα ενός κυψελοποιήσιμου simplicial συμπλέγματος $\mathcal{C}$ μπορεί να υπολογιστεί από το $\mathbf{h}$ -διάγραμμα.

Άρα:

$$\begin{aligned} f_{k-1} &= \sum_{j=1}^s \binom{d - |R_j|}{k - |R_j|} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i \\ &= h_k + \binom{d-k+1}{1} h_{k-1} + \cdots + \binom{d-1}{k-1} h_1 + \binom{d}{k} h_0 \end{aligned}$$

με $1 \leq k \leq d$. Ας σχηματίσουμε το πολυώνυμο $f(x) = \sum_{i=0}^d f_{i-1} x^{d-i}$ με $f_{-1} = 1$ και το $h(x) = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}$, τότε

$$f(x) = \sum_{i=0}^d h_i (x+1)^{d-i} = h(x+1)$$

και άρα $h(x) = f(x-1)$. Συγκρίνοντας τους συντελεστές στα δύο μέλη της εξίσωσης, $h(x) = f(x-1)$ έχουμε,

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}$$

$h_0 = 1$, $h_1 = f_0 - d$ και $h_d = f_{d-1} - f_{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1} f_0 + (-1)^d$. Αποδεικνύεται ότι $h_k \geq 0$ για $1 \leq k \leq d$ και το $\mathbf{h}$ -διάγραμμα είναι ανεξάρτητο της κυψελοποίησης.

Ο τύπος του Euler γράφεται και $h_d = h_0$.

Μια απλή μέθοδος υπολογισμού του $\mathbf{h}$ -διαγράμματος από το $\mathbf{f}$ -διάγραμμα χρησιμοποιεί το τρίγωνο του Pascal και είναι γνωστή σαν «τρικ του Stanley»:

Γράφουμε τους αριθμούς f_i στις τελευταίες εισόδους των γραμμών του τριγώνου, και υπολογίζουμε τις άλλες εισόδους, βρίσκοντας κάθε φορά τη διαφορά: δεξιός αριθμός - αριστερός αριθμός (για γειτονικούς αριθμούς της γραμμής), και αυτή η διαφορά τοποθετείται στην παρακάτω γραμμή:

- Έστω για κάποιο $\mathcal{C}$ ότι $\mathbf{f} = (1, 6, 7)$.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 6 \\
 & 1 & 5 & 7 \\
 \hline
 \mathbf{h} & = & (& 1 & 4 & 2 &)
 \end{array}$$

• Για το C_3^Δ με $\mathbf{f}(C_3^\Delta) = (1, 6, 12, 8)$ έχουμε:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 6 \\
 & 1 & 5 & 12 \\
 & 1 & 4 & 7 & 8 \\
 \hline
 \mathbf{h} & = & (& 1 & 3 & 3 & 1 &)
 \end{array}$$

Θεώρημα 10.6.1 (Οι εξισώσεις Dehn-Sommerville, Sommerville, 1927). Έστω P ένα simplicial d -πολύτοπο, με $\mathbf{h}$ -διάνυσμα:

$$\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \dots, h_k, \dots, h_d)$$

Τότε $h_k = h_{d-k}$ για $k = 0, 1, \dots, d$.

Απόδειξη. (McMullen, 1970) Έστω $F_1, \dots, F_s$ μια κυψελοποίηση του P . Αφού το P είναι πολύτοπο, η $F_s, \dots, F_1$ θα είναι μια κυψελοποίηση του P . Ακόμα, αν η όψη F_i έρχεται πριν την F_j στην αρχική κυψελοποίηση, ($i < j$), τότε στην αντίστροφη, η F_i θα έρχεται μετά την F_j . Άρα ο περιορισμός R_j , στην αντίστροφη κυψελοποίηση θα είναι το $F_j \setminus R_j$, δηλαδή το συμπλήρωμα του R_j ως προς την F_j . Έτσι, αν η F_j συνεισφέρει το «1» στο h_k για την αρχική κυψελοποίηση, όπου $|R_j| = k$, θα συνεισφέρει το «1» στο h_{d-k} στην αντίστροφη, όπου $|F_j \setminus R_j| = d - k$. Άρα η τιμή του h_k με την αρχική κυψελοποίηση είναι ίδια με την τιμή του h_{d-k} υπολογισμένης με την αντίστροφη, και έχουμε ότι $h_k = h_{d-k}$. $\square$

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις Dehn-Sommerville αποδείχτηκαν με μεθόδους της εποχής (1927) και ήταν στη μορφή:

$$(-1)^k \binom{k+1}{k+1} f_k + (-1)^{k+1} \binom{k+2}{k+1} f_{k+1} + \dots + (-1)^{d-1} \binom{(d-1)+1}{k+1} f_{d-1} = (-1)^{d-1} f_k$$

με $k = -1, 0, 1, \dots, d-2$. Για $k = -1$ προφανώς έχουμε τον τύπο του Euler. Το ανωτέρω σύστημα d εξισώσεων δεν είναι ανεξάρτητο. Το σύστημα για $0 \leq k \leq d/2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

10.7 Το Θεώρημα του Άνω Φράγματος (The Upper Bound Theorem)

Η απάντηση στο πρόβλημα του Άνω Φράγματος διατυπώνεται ως εξής:

Από όλα τα d -πολύτοπα με $f_0 = n$ κορυφές το αντίστοιχο κυκλικό πολύτοπο έχει το μέγιστο αριθμό k -εδρών ($1 \leq k \leq d-1$).

Αναλυτικότερα αν P είναι ένα d -πολύτοπο με $f_0 = n$ κορυφές τότε $f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(C_d(n))$. Εάν ισχύει η ισότητα για κάποιο $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \leq k \leq d$ τότε το P είναι γειτονικό. Τα βήματα για την απόδειξη είναι σε συντομία τα εξής:

1. Ο μέγιστος αριθμός k -εδρών αναζητάται μεταξύ των simplicial d -πολυτόπων με $f_0 = n$ κορυφές (Klee, McMullen).
2. Επειδή κάθε πολύτοπο είναι κυψελοποιήσιμο, ορίζεται το $\mathbf{h}$ -διάνυσμά του, με $h_i \geq 0$.
3. Αποδεικνύεται (McMullen) επαγωγικά και με τη χρήση των εξισώσεων Dehn-Sommerville το κρίσιμο λήμμα:

Για P simplicial d -πολύτοπο με $f_0 = n$ κορυφές έχουμε $h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k}$, $0 \leq k \leq d$. Η ισότητα ισχύει για κάθε k με $0 \leq k \leq l$ αν και μόνο αν το $l \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ και το P είναι l -γειτονικό.

4. Το $f_{k-1}(P)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει των $h_0, \dots, h_k$ ως:

$$f_{k-1}(P) = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i(P).$$

οπότε προκύπτει άνω φράγμα του $f_{k-1}(P)$ και οι περιπτώσεις ισότητας.

Λήμμα 10.7.1 (Klee, McMullen). Έστω P ένα d -πολύτοπο. Οι κορυφές του P μπορούν να αναδιαταχτούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο d -πολύτοπο P' που έχει τις ίδιες κορυφές με το P και είναι simplicial, ενώ ισχύει:

$$f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(P') \quad \text{για κάθε } k \quad 0 \leq k \leq d$$

Η ισότητα μπορεί να ισχύει για κάποιο $k > \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, μόνο αν το P είναι simplicial.

Θεώρημα 10.7.2 (Άνω Φράγματος). Έστω P ένα d -πολύτοπο με $f_0 = n$ κορυφές. Για κάθε k , ο αριθμός των k -εδρών του είναι το πολύ ίσος με τον αντίστοιχο αριθμό των k -εδρών του κυκλικού d -πολυτόπου που έχει n κορυφές, $C_d(n)$. Δηλαδή:

$$f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(C_d(n))$$

Αν ισχύει η ισότητα για κάποιο k : $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \leq k \leq d$, τότε το P είναι γειτονικό πολύτοπο.

Είναι φανερό ότι για κάθε k ισχύει: $f_{k-1} \leq \binom{n}{k}$ για κάθε πολύτοπο (simplicial ή όχι) με n κορυφές. Αν το P είναι γειτονικό πολύτοπο, όπως το $C_d(n)$, τότε $f_{k-1} = \binom{n}{k}$, για $k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Αν το P είναι simplex, τότε ισχύει πάντοτε η ισότητα για κάθε k .

Παρατηρήσεις

1. Για ένα simplicial d -πολύτοπο, οι εξισώσεις Dehn-Sommerville, $h_k = h_{d-k}$, μαζί με τις εξισώσεις που εκφράζουν τα f_k με τους όρους h_i , δείχνουν ότι $f_0, f_1, \dots, f_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ είναι αρκετοί για να εκφράσουν όλο το f -διάνυσμα.
2. Το f_{k-1} εκφράζεται με τους όρους $h_0, h_1, \dots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ για $k \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Πράγματι έχουμε ότι:

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \left[\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right] h_i$$

όπου ο αστερίσκος $*$ άνω δεξιά του συμβόλου του αθροίσματος υποδηλώνει ότι: με $d = 2\nu$, παίρνουμε μόνο το $1/2$ του τελευταίου όρου για $i = d/2$, και αν $d = 2\nu + 1$

παίρνουμε ολόκληρο τον τελευταίο όρο για $i = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor = \frac{d-1}{2}$.

3. Για $k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} h_k(C_d(n)) &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}(C_d(n)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{i} \\ &= \binom{n-d-1+k}{k} \end{aligned}$$

Η απόδειξη της τελευταίας ταυτότητας είναι συνδυαστική (X. Αθανασιάδης).

Από τα ανωτέρω συμπεράσματα και παρατηρήσεις, είναι αρκετό, το θεώρημα 10.7.2 να αποδειχτεί για h_{k-1} , με $k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$.

Ο Peter McMullen απέδειξε το παρακάτω θεώρημα που είναι υπεραρκετό για την απόδειξη του 10.7.2.

Θεώρημα 10.7.3 (McMullen, 1970). Για κάθε simplicial d -πολύτοπο P , με $f_0 = n$ κορυφές έχουμε:

$$h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k} \quad \mu\epsilon \quad 0 \leq k \leq d$$

Η ισότητα ισχύει για όλα τα k , με $0 \leq k \leq l$, τότε και μόνο τότε αν, $l \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ και το P είναι l -γειτονικό.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο k . Για $k = 0$ ισχύει ως ισότητα, αφού $h_0 = 1$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο k με $0 < k < d$ δηλαδή:

$$h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k} \quad (10.7.1)$$

Θα δειχθεί ότι ισχύει για $k+1$, δηλαδή:

$$h_{k+1}(P) \leq \binom{n-d+k}{k+1} \quad (10.7.2)$$

Εφόσον ισχύει η (10.7.1) για ναδειχθεί η (10.7.2) είναι αρκετό ναδειχθεί ότι:

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} \leq \frac{\binom{n-d+k}{k+1}}{\binom{n-d-1+k}{k}} \iff (k+1)h_k + (d-k)h_k \leq nh_k \quad (10.7.3)$$

Για ναδειχθεί η (10.7.3) θαδειχθεί ότι

1.

$$\sum_{v \in \text{vert}(\mathcal{C})} h_k(\mathcal{C}/v) = (k+1)h_{k+1}(\mathcal{C}) + (d-k)h_k(\mathcal{C}) \quad (10.7.4)$$

με το σύμβολο $\mathcal{C}/v$ εννοούμε το $\text{link}(v, \mathcal{C})$ στο simplicial $\mathcal{C}$, δηλαδή $\mathcal{C}/v := \text{link}(v, \mathcal{C})$

2.

$$\sum_{v \in \text{vert}(\mathcal{C})} h_k(\mathcal{C}/v) \leq nh_k(\mathcal{C}) \quad (10.7.5)$$

• Απόδειξη της (10.7.4)

Αν $F_1, \dots, F_s$ μια κυψελοποίηση του $\mathcal{C}$, αυτή εισάγει μια κυψελοποίηση στο $\text{link}(v, \mathcal{C})$ για κάθε $v \in \text{vert}(\mathcal{C})$ (Πρόταση 10.5.1), ενώ η σχέση (10.7.4) ισχύει κατά τη διαδικασία της κυψελοποίησης αν το $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\partial P)$ αντικατασταθεί με $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}(F_1 \cup \dots \cup F_j)$. Η (10.7.4) ισχύει για το κενό σύμπλεγμα $\mathcal{C}_0$, αφού δεν υπάρχει έδρα και όλοι οι όροι εξαφανίζονται. Έστω ότι στην κυψελοποίηση προστίθεται η όψη F_j και εξετάζουμε την επίδρασή της στο $\sum_{v \in \text{vert}(\mathcal{C})} h_k(\mathcal{C}/v)$.

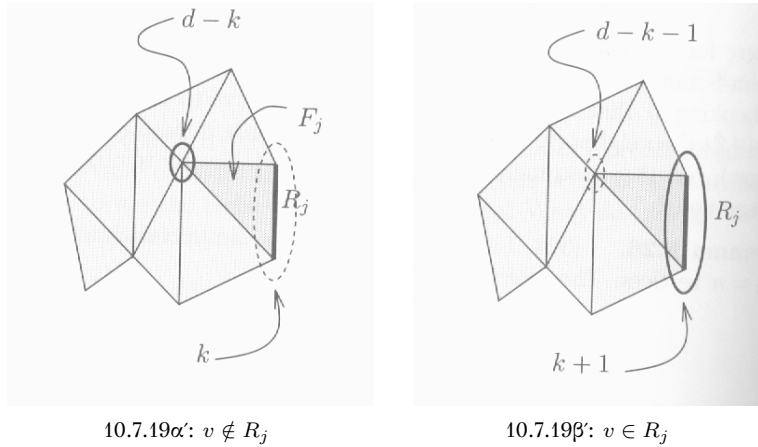
Η προσθήκη της F_j θα επηρεάσει εκείνους τους όρους για τους οποίους $v \in F_j$.

Αν $v \in F_j$, τότε ή $v \notin R_j$ ή $v \in R_j$.

– Έστω $v \notin R_j$

Τότε υπάρχει μια νέα έδρα με μέγεθος $|R_j|$ στο $\mathcal{C}/v$. Αυτό επηρεάζει το $h_k(\mathcal{C}/v)$, μόνο αν $|R_j| = k$, οπότε θα έχουμε τη συνεισφορά του «1» σε $|F_j \setminus R_j| = d - k$ διαφορετικούς προσθετέους. Στην περίπτωση αυτή το $h_k(\mathcal{C})$ αυξάνει κατά 1, και άρα το δεξιό μέλος αυξάνει κατά $d - k$, όπως θα έπρεπε.

(Στο σχήμα 10.7.19α' για $k = 1, d = 3$ σκιαγραφείται η περίπτωση αυτή.)



Σχήμα 10.7.19: Επεξήγηση στην απόδειξη της (10.7.4).

– Έστω $v \in R_j$

Τότε θα πάρουμε μια ελαχιστική νέα έδρα με μέγεθος $|R_j| - 1$ στο $\text{link}(v, C)$. Έτσι θα έχουμε μια συνεισφορά στο $h_k(C \setminus v)$ μόνο αν $|R_j| - 1 = k$, και στην περίπτωση αυτή θα έχουμε μια συνεισφορά του «1» σε $k+1$ διαφορετικούς όρους στο αριστερό μέλος της (10.7.4). Συγχρόνως έχουμε ότι $h_{k+1}(C)$ αυξάνει κατά 1, και άρα το δεξιό μέλος της (10.7.4) κατά $k+1$.

(Η περίπτωση αυτή σκιαγραφείται στο σχήμα 10.7.19β.)

• Απόδειξη της (10.7.5)

Αρκεί ναδειχθεί ότι για κάθε κορυφή $v \in \text{vert}(C)$ ισχύει:

$$h_k(C/v) \leq h_k(C) \quad (10.7.6)$$

Μπορούμε, σύμφωνα με την πρόταση 10.5.3, να βρούμε μια κυψελοποίηση για το C , τέτοια ώστε να αρχίζει με τις έδρες που περιέχουν την κορυφή v , δηλαδή να ξεκινά από το $\text{star}(v, C)$. Αυτό σημαίνει ότι η ελαχιστική νέα έδρα, τόσο στο C , όσο και στο $\text{link}(v, C)$, θα συμπίπτουν σε κάθε βήμα της κυψελοποίησης του $\text{star}(v, C)$. Αφού τελειώσει η κυψελοποίηση του $\text{star}(v, C)$, θα έχουμε νέες συνεισφορές για το $h_k(C)$ αλλά καμία για το $h_k(C/v)$. Άρα θα ισχύει η (10.7.6), και μάλιστα σε κάθε κορυφή $v \in \text{vert}(C)$. Άρα προκύπτει η (10.7.5).

Για να έχουμε $h_k(C/v) = h_k(C)$, θα πρέπει σε μια κυψελοποίηση που ξεκινά από το $\text{star}(v, C)$, να μην υπάρχουν νέες έδρες με μέγεθος το πολύ ίσο με k , έξω από το $\text{star}(v, C)$. Άρα για $l \geq 1$, η ισότητα $h_k(C/v) = h_k(C)$ ισχύει για όλα τα $k \leq l$, τότε και μόνο τότε αν σε μια κυψελοποίηση που ξεκινά με το $\text{star}(v, C)$, δεν υπάρχει ελάχιστη έδρα μεγέθους το πολύ l έξω από το $\text{star}(v, C)$. Ισοδύναμα: Κάθε έδρα F με μέγεθος το πολύ l , δηλαδή $|F| \leq l$, που έχει δηλαδή το πολύ l κορυφές, θα περιέχεται στο $\text{star}(v, C)$, άρα το σύνολο $F \cup \{v\}$ θα είναι και αυτό μια έδρα. Η ισότητα:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(C/v) = nh_k(C)$$

θα ισχύει μόνο αν έχουμε $h_k(C/v) = h_k(C)$ για κάθε κορυφή $v \in \text{vert}(C)$. Η ισότητα ισχύει για κάθε $k \leq l$ τότε και μόνο τότε αν το C είναι $(l+1)$ -γειτονικό. Άρα έχουμε την εξίσωση (10.7.2):

$$h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k}$$

με $0 \leq k \leq d$ και την ισότητα να ισχύει για όλα τα k , με $0 \leq k \leq l$, τότε και μόνο τότε αν $l \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ και το P είναι l -γειτονικό.

Το $C_n(d)$ κυκλικό d -πολύτοπο με $n \geq d+1$ κορυφές είναι γειτονικό d -πολύτοπο και είναι:

$$h_k(C_n(d)) = \binom{n-d+k-1}{k}, \quad \text{για κάθε } k, \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

οπότε μαζί με τις Dehn-Sommerville εξισώσεις, συνεπάγεται ότι:

$$h_k(P) \leq h_k(C_n(d)), \quad \text{για κάθε } k, \quad 0 \leq k \leq d$$

□

Υπάρχει απόδειξη της εικασίας του Άνω Φράγματος για κυρτά πολύτοπα, η οποία δεν στηρίζεται στην κυψελοποιησιμότητα των πολύτόπων, αλλά είναι σαφώς πολυπλοκότερη και μακροσκελέστερη από την απόδειξη του P. McMullen. Η διατύπωση αυτή αναφέρεται στο απλό (simple) πολύτοπο που είναι δυϊκό ενός simplicial. Για το λόγο αυτό ονομάζεται «δυϊκή» απόδειξη του θεωρήματος του Άνω Φράγματος.

Διατύπωση:

Υπάρχουν αριθμοί $f_k(C_d(n))$, τέτοιοι ώστε:

$$f_k(Q) \leq f_{d-k-1}(C_d(n)), \quad k = 0, \dots, d-2$$

για κάθε απλό d -πολύτοπο Q με n όψεις, και

$$f_k(Q) = f_{d-k-1}(C_d(n)), \quad k = 0, \dots, d-2$$

για κάθε d -πολύτοπο Q με n όψεις που είναι το δυϊκό ενός γειτονικού d -πολυτόπου.

Σημείωση: Υπάρχει και το θεώρημα Κάτω Φράγματος. Η εικασία ότι $f_1 \geq df_0 - \binom{d+1}{2}$ για simplicial d -πολύτοπα διατυπώθηκε από τον Grünbaum και αποδείχθηκε από τον D. Barnette λίγους μήνες πριν αποδειχθεί το θεώρημα του Άνω Φράγματος (1970).

10.8 Πέντε ανοικτά προβλήματα σχετικά με τα κυρτά πολύτοπα

Ο Gil Kalai το Μάιο του 2008 συνόψισε πέντε προβλήματα που απασχολούν τους ερευνητές της περιοχής:

1. Η εικασία του 3^d

Κάθε συμμετρικό d -πολύτοπο έχει τουλάχιστον 3^d μη κενές έδρες.

(Ένα πολύτοπο είναι *συμμετρικό* αν το $\mathbf{x} \in P$ τότε και μόνο τότε όταν το $-\mathbf{x} \in P$.)

2. Η εικασία του κύβου-simplex

Για κάθε k υπάρχει ένα $N(k)$ τέτοιο ώστε κάθε d -πολύτοπο με $d \geq N(k)$ έχει μια k -έδρα η οποία είναι ή ένα simplex, ή είναι συνδιαστικά ισόμορφη με έναν k -κύβος.

3. Η ερώτηση του Bárány

Για κάθε d -πολύτοπο P και κάθε k , $0 \leq k \leq d-1$ ισχύει ότι $f_k(P) \geq \min\{f_0(P), f_{d-1}(P)\}$;

4. Ευτραφή 4-πολύτοπα

Για 4-πολύτοπα P είναι το:

$$\frac{f_1(P) + f_2(P)}{f_0(P) + f_3(P)}$$

φραγμένο από πάνω από μια απόλυτο σταθερά;

5. Simplicial, simple 10-πολύτοπα

Υπάρχει 10-πολύτοπο P του οποίου οι k -έδρες του P και του δυϊκού του να είναι simplex, για $k \leq 5$;

Βιβλιογραφία

Άρθρα / Βιβλία

- [1] M. A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer, 1988.
- [2] M. M. Bayer and C. W. Lee, *Combinatorial aspects of convex polytopes*, Handbook of Convex Geometry, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics 7 (1991), pp. 225–232.
- [3] T. Biszticzky, *Characterization of cyclic polytope*, J. Geom., **84** (2005), 30–36.
- [4] A. Bondesen and A. Brøndsted, *A dual proof of the upper bound conjecture for convex polytopes*, Math. Scand., **46** (1980), 95–102.
- [5] C. Carathéodory, *Über der Variabilitätsbereich der Koeffizienteu von Poteuzreihem die gegebene Werte nicht annehmen*, Math. Anu., **64** (1907), 95–115.
- [6] C. Carathéodory, *Über der Variabilitätsbereich der Fourier's den Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rend. Circolo Mat. Palermo, **32** (1911), 193–217.
- [7] R. Cordovil and P. Duchet *Cubic polytopes and oriented matroids*, Europ. J. Combinatorics, **21** (2000), 49–64.
- [8] H. S. M. Coxeter *Regular polytopes*, Dover, New York, 1973.
- [9] P. Cromwell *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1995.
- [10] D. Eppstein *Zonohedra and zonotopes*, Tech. Rep. 95-153, ICS, UCI, 1995.
- [11] G. N. Frederickson *Hinged dissections: Swinging and twisting*, Cambridge University Press, 2002.

- [12] D. Gale *Neighborly and cyclic polytopes*, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, American Mathematical Symposium on Convexity 7 (1963), pp. 225–232.
- [13] J. Galier *Geometric methods and applications*, Springer-Verlag, 2006.
- [14] G. H. Hardy *A mathematician's apology*, First Electronic Edition, University of Alberta Mathematical Sciences Society, 2005 (first published 1940)
- [15] M. Henk, J. Richter-Gebert and G. M. Ziegler *Basic properties of convex polytopes*, in Handbook on Discrete Computational Geometry (eds J. E. Goodman and J. O'Rourke), CRC Press, (1997), pp. 243–270.
- [16] P. McMullen *The maximum number of faces of a convex polytopes*, Mathematika, **17** (1970), 179–184.
- [17] P. McMullen *On the upper-bound conjecture for convex polytopes*, J. Combinatorial Theory, **277** (1971), 187–200.
- [18] P. McMullen *The numbers of faces of simplicial polytopes*, Israel J. Math, **9** (1971), 559–570.
- [19] P. McMullen and G. C. Shephard *Convex polytopes and the upper-bound conjecture*, Cambridge University Press, 1971.
- [20] P. McMullen *Abstract regular polytopes*, Cambridge University Press, 2002.
- [21] H. Rafat *On tiling for some types of manifolds and their folding*, Applied Mathematics Science, **3** (2009), 1275–1284.
- [22] I. Shemer *Neighborly polytopes*, Israel J. Math, **43** (1982), 291–314
- [23] I. Shemer *How many cyclic subpolytopes can a non-cyclic polytope have?*, Israel J. Math, **49** (1984), 331–342.
- [24] R. Webster *Convexity*, Oxford Science Publications, 1994.
- [25] M. J. Wenninger *Polyhedron models for classroom*, The National Council Of Teachers And Mathematics, Second Edition, 1975
- [26] H. Weyl *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.
- [27] G. M. Ziegler *Lectures on polytopes*, Springer-Verlag, 1995.

Διαλέξεις

- [28] J. Galier *Geometric methods in Computer Science*, Lecture notes for CIS 610, Computer and Information Science, UCI, Summer Semester 2009.
- [29] V. Klee and P. Kleinschmidt *Polytopal compexes and their relatives*, IMA Preprint Series #384, January 1988.
- [30] Y. Lim *Symmetry groups of platonic solids*, Lecture notes for Applied Group Theory, Stanford University, Winter Semester 2008.
- [31] E. Swartz *From polytopes to enumeration*, Lecture notes from Park City Undergraduate Summer Session course, Summer 2004.
- [32] X. Αθανασιάδης *Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική, Τόμος Α, Σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Άνοιξη 2009, (<http://users.uoa.gr/~caath/>).

Ιστοσελίδες

- [33] Wikipedia, The Free Encyclopedia, <http://www.wikipedia.org/>
- [34] Wolfram MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/>
- [35] <http://gilkalai.wordpress.com/2008/05/07/>
- [36] <http://php.indiana.edu/~matart/viewpoints/lessons/Lesson3-Princeton.pdf>
- [37] <http://nicomedia.math.upatras.gr/~oxy/symmetry-chap4.pdf>
- [38] <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/>
- [39] <http://ams.org/featurecolumn/archive/art5.html>
- [40] <http://www.mathacademy.com/pz/minitext/Escher/>
- [41] <http://www.johnrausch.com/puzzlingworld/chap17e.htm>
- [42] <http://home.comcart.net/~tpgettys/prisms.html>
- [43] <http://users.ach.sch.gr/toumasis/pentdyrer.pdf>

[44] http://www.cut_the_knot.org/do-you-know/Bolyai.html

[45] <http://www.kizjasto.sci.fi/alberti.htm>

[46] <http://www.dartmouths.edu/~matc/mathsg.geometry/unit11/unit11.html>

[47] <http://www.scribd.com/doc/7196942/MC>

[48] <http://johnrausch.com/PuzzlingWorld/default.html>

[49] <http://unrulednotebook.wordpress.com/>

[50] <http://www.enchantedlearning.com/mi>