



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ »



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« τα fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων
μέσω της έννοιας του εμβαδού σε περιβάλλον βασισμένο στο
δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων »

Σταυρούλα Πατσιομίτου

Επιβλέπων Καθηγητής
Χρόνης Κυνηγός

Εξώφυλλο: αυτοομοιότητα στον πίνακα του
Wassily Kandinsky (circle possessed for him "the clearest indication of
the fourth dimension ")

Musée National d'Art Moderne
Centre d'Art et de Culture Georges Pompidou ,Paris
Gift of Nina Kandinsky

«πρεσβύτατον τῶν ὄντων θεός ἀγέννητον γάρ.
κάλλιστον κόσμος ποίημα γάρ θεοῦ
μέγιστον τόπος ἅπαντα γάρ χωρεῖ
τάχιστον νοῦς διὰ παντός γάρ τρέχει
ἰσχυρότατον ἀνάγκη κρατεῖ γάρ πάντων
σοφώτατον χρόνος ἀνευρίσκει γάρ πάντα. »

Thales Testimonia Fragment 1 line 128

«**Το αρχαιότερο** από όλα τα όντα είναι ο Θεός,
γιατί είναι αγέννητος
Το ωραιότερο είναι ο κόσμος ,
γιατί είναι έργο του Θεού
Το μεγαλύτερο είναι ο τόπος ,
γιατί όλα τα χωράει
Το ταχύτερο είναι ο νους ,
γιατί τρέχει διασχίζοντας τα πάντα
Το ισχυρότερο είναι η ανάγκη,
γιατί όλα τα εξουσιάζει
Το σοφότερο είναι ο χρόνος ,
γιατί ανακαλύπτει τα πάντα ...»

Θαλής (Μίλητος 650π.Χ – 540 π.Χ)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ »

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« τα fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων
μέσω της έννοιας του εμβαδού σε περιβάλλον βασισμένο στο
δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων »

Σταυρούλα Πατσιομίτου

Επιβλέπων Καθηγητής

Χρόνης Κυνηγός

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών
στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 11 / 10 /2005 από την Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
ΚΥΝΗΓΟΣ ΧΡΟΝΗΣ (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	
ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ	Αναπλ. Καθηγητής	
ΧΡΙΣΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	Αναπλ. Καθηγητής	

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	σελ. 1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο	TA FRACTALS
1.1 Εισαγωγή στα fractals	σελ. 8
1.2 Τι είναι τα fractals	σελ. 9
1.3 Προέλευση της λέξης Fractal	σελ. 9
1.4 Ποιος είναι ο Benoît Mandelbrot	σελ.10
1.5 Συμβολή της κλασσικής ανάλυσης	σελ.10
1.6 Ιδιότητες των fractal	σελ.11
1.6.1 Η αυτοομοιότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στα Fractal	σελ.12
1.6.2 Η αυτοομοιότητα στη φύση	σελ.12
1.6.3 Η έννοια της διάστασης στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στα φράκταλ- Η έννοια της Ευκλείδειας Διάστασης	σελ.14
1.6.4 Η έννοια της Fractal Διάστασης	σελ.15
1.7 Πως προσδιορίζεται η Fractal διάσταση αυτοομοίων συνόλων	σελ.16
1.8 Τα μαθηματικά fractals	σελ.17
1.8.1 Τρίγωνο του Sierpinski	σελ.17
1.8.2 Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet)	σελ.17
1.8.3 Το Σφουγγάρι του Menger	σελ.18
1.8.4 Χιονονιφάδα του Koch (Koch Snowflake)	σελ.18
1.8.5 Koch Antisnowflake	σελ.20
1.8.6 Του Cantor το τετράγωνο Fractal	σελ.21
1.8.7 Box Fractal(anticross-stitch curve)	σελ.21
1.8.8 Dragon Καμπύλη	σελ.22
1.8.9 Καμπύλες του Sierpinski	σελ.22
1.8.10 Coastline Paradox(παράδοξο της ακτής)	σελ.22
1.9 Σύντομη αναφορά στα σύνολα Julia ,Mandelbrot	σελ.23
1.9.1 Mandelbrot set	σελ.23
1.9.2 Ιστορία του Mandelbrot set	σελ.23
1.9.3 Σχέση με τα σύνολα Julia	σελ.24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο	ΟΡΙΑ ΚΑΙ FRACTALS
2.1 Ένας δρόμος προς το άπειρο από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη μέχρι τα fractal	σελ.27
2.2 Το άπειρο κατά τον Αριστοτέλη .Η έννοια του ορίου	σελ.31
2.3 Η έννοια της διαίσθησης- Αρχικές διαισθήσεις για το άπειρο και τα όρια	σελ.32
2.4 Δυσκολίες συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου	σελ.34
2.5 Η έννοια του εμποδίου	σελ.35
2.5.1 Επιστημολογικά εμπόδια	σελ.35
2.5.2 Διδακτικά εμπόδια	σελ.36
2.6 Δυσκολίες από την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών	σελ.36
2.7 Δυσκολίες προερχόμενες από τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουμε τη έννοια του ορίου	σελ.37
2.8 Συγκλίνουσα αριθμητική ακολουθία	σελ.38
2.8.1 Ο όρος «προσεγγίζει»- Υπέρβαση εμποδίου	σελ.40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο	ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ
3.1 Θεωρητικά μοντέλα κατασκευής των μαθηματικών δομών Η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών ως αντικείμενα ή διεργασίες	σελ.43
3.2 Η έννοια της αναπαράστασης	σελ.47
3.3 Εσωτερικές -Εξωτερικές Αναπαραστάσεις Πολλαπλές αναπαραστάσεις και η επίδραση τους στην οπτικοποίηση (Visualization) των εννοιών	σελ.49
3.4 Ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών - διατύπωση θεωριών κατασκευής γεωμετρικών εννοιών	σελ.51

3.5 Ο ρόλος των υπολογιστών στην οπτικοποίηση των εννοιών	σελ.53
3.5.1 Η κονστρουβιστική προσέγγιση των εννοιών μέσα στο περιβάλλον ενός υπολογιστή	σελ.55
3.5.2 Η κονστρουβιστική προσέγγιση μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις .Η διάκριση artefact-instrument	σελ.56
3.6 Η συμβολική αλληλεπίδραση ως προέκταση της λεκτικής	σελ.57
3.7 Ο ρόλος της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη μάθηση. Οι θέσεις του Vygotsky -Piaget ως προς την φύση και προέλευση της ανθρώπινης γνώσης	σελ.58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο	Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ
4.1 Μεθοδολογία της έρευνας	σελ.62
4.2 Στόχοι της έρευνας	σελ.63
4.3 Το περιβάλλον του Geometer's Sketchpad 4.03	σελ.66
4.4 Περιγραφή των δραστηριοτήτων	σελ.67
4.4.1 Περιγραφή της 1 ^{ης} δραστηριότητας	σελ.69
4.4.2 Περιγραφή της 2ης δραστηριότητας - Η σπείρα του Baravelle	σελ.77
4.4.3 Περιγραφή της 3ης δραστηριότητας -Το πυθαγόρειο δένδρο	σελ.79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο	Η ΕΡΕΥΝΑ
5.1 Περιγραφή και ανάλυση της έρευνας στην Β' Λυκείου	σελ.85
5.2 Περιγραφή και ανάλυση της έρευνας στην Α' Λυκείου	σελ.95
5.3 Περιγραφή και ανάλυση της έρευνας στην Α' Γυμνασίου	σελ.100
5.4 Περιγραφή και ανάλυση της έρευνας στην ΣΤ' Δημοτικού	σελ.111
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
6.1 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της ΣΤ' Δημοτικού	σελ.129
6.2 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Α' Γυμνασίου	σελ.130
6.3 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Α' Λυκείου	σελ.133
6.4 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Β' Λυκείου	σελ.134
6.5 Συνολικές παρατηρήσεις	σελ.135
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο	ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ FRACTALS
7.1 Λόγοι που στηρίζουν την ένταξη των fractals στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Εκπαίδευσης	σελ.142
7.2 Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε fractals -Ποιοι διδακτικοί στόχοι περιέχονται στην κατασκευή ενός fractal	σελ.143
7.3 Ποια κεφάλαια μαθηματικών εμπλέκονται στην διαδικασία κατασκευής και υπολογισμού ενός Fractal αντικειμένου	σελ.147
7.4 Τι αναμένεται από την κατασκευή των fractal αντικειμένων στον υπολογιστή και τη χρησιμοποίηση σχετικών ανοικτών προβλημάτων	σελ.148
7.5 Η βιβλιοθήκη των fractal στο Geometer's Sketchpad	
Η παιδαγωγική σημασία της εξερεύνησης της	σελ.150
ΕΠΙΛΟΓΟΣ	σελ.155
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	σελ.157
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	σελ.169

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρόνη Κυνηγό , για την εποικοδομητική συνεργασία και την βοήθεια τους στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας .

Ευχαριστώ τους καθηγητές μου στο Μεταπτυχιακό της Διδακτικής των Μαθηματικών, γιατί με οδήγησαν μέσα από τις διαλέξεις τους σε ένα άλλο επίπεδο και τρόπο σκέψης και μου ενέπνευσαν την ανάγκη να ασχοληθώ με τα νέα πεδία της επιστήμης των Μαθηματικών και να τα συνδέσω με τα παλαιά , να εξετάσω τον τρόπο κατανόησης των εννοιών στα μαθηματικά από τους μαθητές μας παρατηρώντας και διερευνώντας την κατάσταση κάτω από ένα νέο πρίσμα .

Επίσης ευχαριστώ τα σχολεία των Αθηνών που με δέχθηκαν για την διεξαγωγή των ερευνών και τους μαθητές που με τη διάθεση και τον ενθουσιασμό τους, μου δημιουργούσαν όλο και περισσότερα κίνητρα και ενδιαφέρον για αυτό που έκανα.

Η εργασία είναι αφιερωμένη στα παιδιά μου Αλέξανδρο , Λουκία -Ιόλη και Θεανώ –Μαγδαληνή που με την υποστήριξη και υπομονή τους , συνέβαλλαν σημαντικά ώστε να πραγματοποιηθεί η φοίτησή μου στο πρόγραμμα και ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία .

Οκτώβριος 2005 ,

Σταυρούλα Πατσιομίτου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι γνωστό από έρευνες αλλά και από την εμπειρία μας στην τάξη ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση εννοιών του απειροστικού λογισμού . Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε τον τρόπο που οι μαθητές κατασκευάζουν την έννοια του ορίου και της ακολουθίας με κατάλληλες δραστηριότητες σε fractals στο περιβάλλον του Geometer's Sketchpad (GSP4.03) . Η ανάπτυξη της έννοιας του ορίου προϋποθέτει μια θεωρία για το άπειρο αφού αυτό υπεισέχεται ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας ή στην διαδικασία εύρεσης του ορίου ως άπειρο πλήθος βημάτων. Η διαδικασία επομένως της εύρεσης ενός ορίου συσχετίζεται άμεσα με την πολυπλοκότητα και το άπειρο των fractal – αντικειμένων Σκοπός είναι να γίνει προσεγγίσιμη και κατανοητή η σχετική θεωρία σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης στα μαθηματικά ,από το Δημοτικό ως το Λύκειο . Και αυτό μπορεί να συμβεί όταν το θέμα αντιμετωπιστεί με κατάλληλες διδακτικές ακολουθίες διαφορετικές και εξελισσόμενες σε κάθε βαθμίδα ,που θα δίνουν στο μαθητή την δυνατότητα του ανασχηματισμού και επέκτασης της νοητικής εικόνας της έννοιας, με στόχο την εύρεση αποδεικτικών διαδικασιών και στην περίπτωση του ορίου του ε-δ ορισμού . Δεν είναι λίγες οι φορές που τα αποτελέσματα ερευνών οδηγούν σε εκπλήξεις σχετικά με το επίπεδο κατανόησης των μαθητών Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε ποιες δεξιότητες των μαθητών αναπτύσσονται και βελτιώνονται από την εφαρμογή της πειραματικής μεθόδου στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης και αν η συγκεκριμένη μέθοδος έχει μεγαλύτερη απόδοση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κύριο ερώτημα που τίθεται και το οποίο αδιαμφισβήτητα απασχολεί κάθε έναν που εμπλέκεται στην μαθησιακή και διδακτική διαδικασία είναι κατά πόσο οι μαθητές ανταποκρίνονται στην εισαγωγή μαθηματικών εννοιών μέσω του φορμαλισμού και αν η διαπίστωση της ύπαρξης διδακτικών εμποδίων στη χρήση μοντέλων παραδοσιακής διδασκαλίας μας οδηγεί στην ανεύρεση μεθόδων με σκοπό την αναίρεση τους.

Από τα συμπεράσματα σχετικών ερευνών και από προσωπική εμπειρία δεν αμφισβητείται η ύπαρξη του προβλήματος και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα μεν υπάρχει αλλά υπάρχουν και τρόποι βελτιστοποίησης της μαθησιακής διαδικασίας. Το όλο θέμα σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις έννοιες και τις διαδικασίες που θα συμβάλλουν στην βαθύτερη και ταυτόχρονα ευκολότερη κατανόηση των εννοιών

- ❖ Ποιες λοιπόν είναι αυτές οι διαδικασίες ;
- ❖ Πως είναι δυνατόν να εισάγουμε κάποια νέα έννοια ;
- ❖ Γιατί ενώ γνωρίζουμε μαθηματικά είναι δύσκολο να τα "μεταφέρουμε" στους μαθητές μας ;
- ❖ Πως είναι δυνατόν ο μαθητής να εσωτερικεύσει μια έννοια και να τη συνδέσει με τις ήδη γνωστές έννοιες ;

Στο μοντέλο δάσκαλος, μεταφορά γνώσης, μαθητής δεν μεταφέρεται η γνώση αλλά πληροφορίες στον μαθητή. Το ερώτημα είναι κατά πόσο αυτές οι πληροφορίες που λαμβάνει ο μαθητής είναι ίδιες με αυτές που εκπέμπονται από τον δάσκαλο. Η μόνη περίπτωση που επεμβαίνει αποφασιστικά στην κατασκευή της γνώσης είναι εκείνη που μέσα από τον λόγο που λειτουργεί ως αναντικατάστατο εργαλείο επικοινωνίας μεταφέρει πληροφορίες τέτοιες που συνδέουν γνώσεις οι οποίες παρέμεναν ασύνδετες στο νου του μαθητή. Η γλώσσα σε όλες τις μορφές της, προφορική και γραπτή, έχει μια κεντρική θέση μεταξύ των artefacts και ο τρόπος χρησιμοποίησής της που ενσωματώνεται στη διάνοιά μας, ενισχύει τις ικανότητες της σκέψης. *Η κατασκευή και η χρήση των artefacts φαίνεται να είναι χαρακτηριστική των ανθρώπινων δραστηριοτήτων, αλλά ακόμη περισσότερο χαρακτηριστικό των ανθρώπινων όντων φαίνεται να είναι η συμβολή τους στο γνωστικό επίπεδο* (Norman, 1993). Ο von Glasersfeld (1988) σημειώνει ότι η ερμηνεία που δίνουμε στις λέξεις και προτάσεις των ανθρώπων είναι συμβατές με το πρότυπο της σκέψης και λειτουργίας τους, όπως το σχημάτισαμε στην πορεία των αλληλεπιδράσεων μαζί τους.

Δεν επιδέχεται αμφιβολία ότι κάθε γνώση μας αρχίζει με την εμπειρία. Με τι άλλο θα μπορούσε να αφυπνιστεί η γνωστική μας δύναμη για να ασκήσει το έργο της αν όχι με αντικείμενα που ερεθίζουν τις αισθήσεις μας και που προκαλούν από μόνα τους την γέννηση παραστάσεων και βγάζουν την νοητική μας ενέργεια σε κίνηση ώστε να τις συγκρίνει, να τις συνδέσει, να κατεργαστεί το άμορφο υλικό των εντυπώσεων για τον σχηματισμό της γνώσεως των αντικειμένων που ονομάζεται εμπειρία (Kant στην «Κριτική του καθαρού λόγου»)

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει συγκεκριμένες δραστηριότητες που πιστεύουμε θα βοηθήσουν τους μαθητές να πειραματιστούν, να δημιουργήσουν

,να συνδέσουν έννοιες που ήταν ασύνδετες , να εσωτερικεύσουν τις έννοιες που κατασκευάζουν , να ελαχιστοποιήσουν τυχόν δυσκολίες που προκύπτουν από την εφαρμογή του φορμαλισμού .Να χρησιμοποιήσουν τις αναπαραστάσεις που προκύπτουν από την οθόνη ενός Η/Υ προκειμένου να συμμετέχουν στην διαδικασία κατασκευής της γνώσης συνδέοντας την εμπειρία με τις νοητικές αναπαραστάσεις. Αυτό όπως γνωρίζουμε μπορεί να επιτευχθεί μέσα από το διαδραστικό περιβάλλον ενός υπολογιστή αφού επιτρέπει στον μαθητή να αναστοχαστεί , να εκτελέσει διάφορες ενέργειες προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα και του προσφέρουν ανατροφοδότηση στις ενέργειές του . Δεδομένου ότι οι υπολογιστές προβλέπεται να συμπεριληφθούν στη σχολική πρακτική γίνεται όλο και περισσότερο αναγκαίο να προσδιορίσουμε πως μπορεί να επιτευχθεί η χρήση των υπολογιστών και πώς και γιατί οι νέες τεχνολογίες επηρεάζουν, και πρόκειται να επηρεάσουν στο μέλλον την εκπαίδευση και ειδικότερα την εκπαίδευση των μαθηματικών. Ομοίως, φαίνεται σημαντικό να διερευνήσουμε ποιες αλλαγές μπορούν να εμφανιστούν λόγω του γεγονότος ότι οι υπολογιστές, και όλες οι πρόσφατες τεχνολογίες διευκολύνουν τον τρόπο σκέψης και τον ενισχύουν. Η τεχνολογία η σχετική με τον υπολογιστή τον καθιστά ένα ιδιαίτερο artefact τόσο σημαντικό όπως η γραφή .Όσον αφορά την εκπαίδευση, τα βασισμένα σε υπολογιστή αποτελεσματικά μαθησιακά περιβάλλοντα, σε σύγκριση με άλλους τρόπους εκμάθησης, παρουσιάζουν ένα μοναδικό χαρακτηριστικό γνώρισμα που είναι ο πραγματικά γνωστικός τους χαρακτήρας, και ειδικότερα όπως οι Balacheff & Karut επισήμαναν, "*Η αλληλεπίδραση μεταξύ ενός μαθητή και ενός υπολογιστή είναι βασισμένη σε μια συμβολική ερμηνεία και οι υπολογισμοί που εισάγονται από ένα μαθητή και η ανατροφοδότηση μέσω του περιβάλλοντος παρέχουν τον κατάλληλο τρόπο που επιτρέπει την ανάγνωσή του ως μαθηματικό φαινόμενο*" (Balacheff & Karut, 1996, p. 470). Κατά τους Noss - Hoyles (1996) :

Για τον Piaget τα μαθηματικά αναπτύσσονται από την αλληλεπίδραση δεν είναι δεδομένα στην πραγματικότητα ούτε εγγεγραμμένα στον νου , αλλά αποτελούν μια σύνθεση της ανακάλυψης και της δημιουργίας . Προσαρμόζοντας αυτή την διπλή άποψη στη κατάσταση της διδασκαλίας -μάθησης των μαθηματικών , οι δάσκαλοι πρέπει να λειτουργήσουν σαν τα μαθηματικά αντικείμενα να υπάρχουν και πρέπει να ανακαλυφθούν , ενώ οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν αυτά τα αντικείμενα για τον εαυτό τους

Η εξέλιξη των τεχνολογιών έχει υποκινήσει ευρείες ερευνητικές μελέτες (Karut,1991, 1992;Balacheff & Karut, 1996; Artigue, 1998), που προσπάθησαν να δώσουν απαντήσεις στις ερωτήσεις:

- 🌀 Πώς οι χρήστες αλληλεπιδρούν με τον υπολογιστή
- 🌀 Τι επιπτώσεις έχει η αλληλεπίδραση αυτή και πως διαμορφώνει τη γνωστική ανάπτυξη την σχετική με την μαθηματική εκπαίδευση
- 🌀 Πώς λειτουργούν γνωστικά τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του περιβάλλοντος των υπολογιστών και πώς συσχετίζονται με την σχολική πρακτική

Είναι απαραίτητο να απαντηθούν τέτοιες ερωτήσεις προκειμένου να διαμορφώσουμε τα μαθησιακά περιβάλλοντα και τις καταστάσεις που εκμεταλλεύονται εκείνα τα περιβάλλοντα (Karut, 1991, p. 55)

Σύμφωνα με τον Goldenberg, P. (1999), στο *Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry*) **κάθε δραστηριότητα θα πρέπει να βασίζεται στη γεωμετρία.... Έχοντας επιλέξει το θέμα της γεωμετρίας ως βατήρα για το πρόγραμμα σπουδών μας, και το στόχο της σύνδεσής της με τα υπόλοιπα μαθηματικά, φαίνεται αρχικά φυσικό να επιλέξουμε «συντάκτες ιδεών» που να υποστηρίζουν τις συνδέσεις.**

Εργαλεία όπως το Geometer's Sketchpad ή το Cabri παρουσιάζουν γεωμετρικές δομές σε ένα περιβάλλον που δίνει έμφαση στη συνεχή φύση του Ευκλείδειου χώρου. Και έτσι αποτελούν μια εξαιρετική γέφυρα μεταξύ της γεωμετρίας και της ανάλυσης. Οι γεωμετρικές δομές που κάποιος ερευνά είναι απαραίτητα συναρτήσεις ορισμένες με γεωμετρικούς παρά αλγεβρικούς κανόνες, μεταβάλλοντας τη θέση του αντικειμένου (ανεξάρτητη μεταβλητή) και παρατηρώντας την επίδραση πάνω σ' αυτή. Η μεταβολή και ο ρυθμός μεταβολής είναι οι άμεσες εμπειρίες κάποιου παρά τα αποτελέσματα παρουσιάσεων σε στατικές εικόνες ή συμβολικές εκφράσεις

Ο βασικός λόγος αποτυχίας των παραδοσιακών αναλυτικών προγραμμάτων κατά τους Van Hiele έγκειται στο γεγονός ότι αυτά διαπραγματεύονται την γεωμετρία σε επίπεδο ανώτερο από αυτό των μαθητών. Η θεωρία των Van Hiele έχει αναβαθμίσει τον διάλογο και τον προβληματισμό γύρω από την διδασκαλία της γεωμετρίας και έχει βοηθήσει γενικότερα στην κατανόηση προβλημάτων που σχετίζονται με τις ακαδημαϊκές επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά .

Η εργασία αυτή έχει ως αντικείμενο μια διδακτική προσέγγιση θεμάτων που αναφέρονται στον λογισμό κάνοντας χρήση της γεωμετρίας των fractals . Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το πόσο αλληλένδετοι είναι οι δυο κλάδοι των μαθηματικών και ότι θα είχαμε καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών που αναφέρονται στην άλγεβρα και στον απειροστικό λογισμό αν κάναμε χρήση των ελκυστικών γεωμετρικών αναπαραστάσεων των fractal αντικειμένων που λειτουργούν βοηθητικά στην εξερεύνηση θεμάτων με σκοπό την ανακάλυψη νέων μαθηματικών εννοιών . Το γενικότερο πνεύμα της εργασίας αυτής είναι να εξεταστεί ένας άλλος τρόπος παρουσίασης εννοιών που είτε είναι δύσκολες είτε δυσκολεύουν τους μαθητές μας, με κύριο στόχο την χρησιμοποίηση τους για ανανέωση και εμπλουτισμό των αναλυτικών προγραμμάτων, με σύνθετα και προκλητικά θέματα των μαθηματικών σε επίπεδο τάξεων του Δημοτικού , Γυμνασίου και Λυκείου.

Σε ένα τέτοιο πρόγραμμα σπουδών σύμφωνα με τον Goldenberg ο αρχικός ρόλος των προβλημάτων δεν είναι να προετοιμάσει ιδέες ή τεχνικές λύσης που έχουν ήδη εξηγηθεί αλλά να κατασκευάσει τις προκλήσεις μέσω των οποίων οι μαθητές αναπτύσσουν αυτές τις ιδέες και τεχνικές .Γίνεται λοιπόν κατά μεγάλο μέρος εργασία του μαθητή, να βρει και να εξηγήσει τρόπους να λυθούν προβλήματα . Οι ορισμοί , τα θεωρήματα και οι αποδείξεις προκύπτουν από τις απαντήσεις των μαθητών και όλα αυτά απαιτείται να μην γίνονται στα όρια της υπερβολής . Στην πραγματικότητα , η « μάθηση » της δημιουργικότητας είναι προφανώς δύσκολη, και πιθανώς απαιτεί πολύ περισσότερη εξάσκηση από τη συσσωρευτική μάθηση συγκεκριμένων γεγονότων ή πληροφοριών.

Σύμφωνα με τα εισαγωγικά σχόλια της Dina Tirosh (που αναφέρεται στο άρθρο του T.J. Cooney (1999) "Conceptualizing Teachers' Ways of Knowing") στην ειδική έκδοση του τεύχους_Tirosh, D. (1999), Forms of Mathematical Knowledge:

Learning and Teaching for Understanding, Educational Studies in Mathematics ο Cooney υποστηρίζει ότι ο προσανατολισμός προς τη σαφήνεια της εξήγησης και η έντονη παρόρμηση του να είναι κανείς «στοργικός» καθηγητής θέτει σε κίνδυνο ιδέες οι οποίες ενδεχομένως να αντιτίθενται προς τα χαρακτηριστικά αυτά, όπως για παράδειγμα η ιδέα του να ωθούνται οι μαθητές σε μία κατάσταση άγχους και γνωστικής σύγκρουσης, κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.

Στόχος μας είναι μέσω των αναλυτικών προγραμμάτων η εισαγωγή μίας νοοτροπίας που ενθαρρύνει τους μαθητές να εστιάσουν στο διακείμενο και τον αναστοχασμό, δημιουργώντας κατ' αυτό τον τρόπο μια μαθητοκεντρική τάξη, και αναδιαμορφώνοντας το στερεότυπο πρόγραμμα σπουδών. Σύμφωνα με τον Cooney οι ενδιαφέρουσες και διανοητικά «προκλητικές» μαθηματικές καταστάσεις, οι ενσωματωμένες σε παιδαγωγικά περιβάλλοντα, αποδεικνύονται αποτελεσματικές στο να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν μία πιο σχετικιστική οπτική για τα μαθηματικά. Έτσι θα βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν πως τα μαθηματικά αποτελούν ανοικτό πεδίο γνωστικής διερεύνησης και κριτικού αναστοχασμού. Συγκεκριμένα, αν οι μαθητές πρέπει να μάθουν πώς οι άνθρωποι ανακαλύπτουν γεγονότα και μεθόδους, πρέπει να θεωρήσουν τα μαθηματικά ως ένα ζωντανό αντικείμενο, και όχι ως οριστικοποιημένο και αμετάβλητο προϊόν. Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας αν και δεν είναι «γλωσσικά», επίσης βοηθούν την κατασκευή, το παιχνίδι, τη δόμηση συλλογισμών και την περιγραφή μαθηματικών αντικειμένων που προκύπτουν μέσα από μία ακολουθία βημάτων. Ακόμα μειώνουν αισθητά την προσπάθεια που χρειάζεται η εκμάθηση μια δεξιότητας ή η εκμάθηση μιας ιδέας και δεν αποτελούν δικαιολογία για περικοπή της ύλης (είναι αναγκαία η εξοικείωση με τα εργαλεία αυτά ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να σχηματίσουν μαθηματικές ιδέες και να μην αποτελέσουν ένα επιπλέον γνωστικό εμπόδιο). *Ακόμα κι αν η τεχνολογία είναι προσεκτικά επιλεγμένη ώστε να υποστηρίξει τους στόχους μίας σειράς μαθημάτων, δεν μπορεί έτσι απλά να «προσγειωθεί» σε μία δομή που έχει σχεδιαστεί χωρίς πρόβλεψη για τη χρήση της. Η διδακτική, η ύλη και η τεχνολογία πρέπει να έχουν νόημα μαζί, ως σύνθεση.* (Goldenberg, P. (1999), σ. 214).

Δομή της εργασίας

Κεφάλαιο 1^ο : Περιλαμβάνονται πληροφορίες σχετικές με τα Fractals. Κύριος στόχος μας είναι να συλλέξουμε τις πληροφορίες εκείνες από την μάζα που υπάρχει στο διαδίκτυο που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην εισαγωγή του σχετικού μαθήματος στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης. Πληροφοριακά και ιστορικά στοιχεία, ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τις μικρότερες τάξεις και όπως θα διαπιστώσουμε μπορούν έννοιες όπως ακόμα και αυτή της fractal διάστασης να περιγραφούν με απλοϊκό τρόπο και κατανοητό για τα παιδιά. Στις μεγαλύτερες το ενδιαφέρον τους έχει στραφεί στην αναζήτηση φορμαλιστικών μεθόδων και αποδεικτικών διαδικασιών μέσω των εμπειρικών εφαρμογών για βαθύτερη κατανόηση των εννοιών. Οι πηγές από τις οποίες συλλέχθηκαν οι πληροφορίες του

1^{ου} κεφαλαίου περιέχονται στις ιστοσελίδες και τα σχετικά βιβλία που αναφέρονται στην βιβλιογραφία .

Κεφάλαιο 2^ο : Μια θεωρητική προσέγγιση των εννοιών των ορίων , ακολουθίας ,fractals αντικειμένων ,από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα . Κύριος προβληματισμός του 2^{ου} κεφαλαίου είναι συσχέτιση των παραδόξων του Ζήνωνα με τα fractals , και η σχέση του χρυσού ορθογωνίου , των αριθμών Fibonacci , των συνεχών κλασμάτων , της σπείρας Fibonacci με την fractal γεωμετρία τη φύσης . Στη συνέχεια εκτενής αναφορά στην έννοια της διαίσθησης και στις αρχικές διαισθήσεις των μαθητών για τις έννοιες του απείρου και του 0. Ακόμα στην έννοια του εμποδίου και την αντιμετώπισή του ,τις δυσκολίες από τις λεκτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του ορίου . Η υπέρβαση των επιστημολογικών εμποδίων λειτουργεί ως συμπληρωματική έννοια της κατανόησης .Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας ακολουθήσαμε τις προτεινόμενες ενέργειες κατά την Sierpinski σε διαδοχικά βήματα του άτυπου ορισμού της συγκλίνουσας ακολουθίας ,με κύριο στόχο την κατάληξη μέσα από το λογισμικό στον τυπικό ορισμό .

Κεφάλαιο 3^ο : Μια προσπάθεια συγκέντρωσης και οργάνωσης των θεωριών για την κατασκευή των μαθηματικών δομών και των μαθηματικών εννοιών ως αντικείμενα ή διεργασίες και διαφοροποίησης ως προς την διερεύνηση του θέματος που αφορά τις γεωμετρικές έννοιες. Στα πλαίσια της κάθε θεωρίας χρησιμοποιείται και μια ιδιαίτερη ορολογία, γεγονός που καθιστά δύσκολο το σχηματισμό μιας σφαιρικής αντίληψης της όλης διαδικασίας. Σημαντικός παράγοντας στην επίλυση προβλήματος είναι και ο τρόπος αναπαράστασής του . Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εκτενής αναφορά στην έννοια της αναπαράστασης όπως αντιμετωπίζεται από τις διάφορες θεωρίες . Ακόμα η συσχέτιση της οπτικοποίησης των εννοιών στο περιβάλλον ενός H /Y με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις που προκύπτουν μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και η δημιουργία εργαλείου" instrumental genesis "όπως προκύπτει από την αλληλεπίδραση του χρήστη με το instrument .

Κεφάλαιο 4^ο : Περιέχεται η μεθοδολογία της έρευνας και οι κυριότεροι στόχοι παιδαγωγικής και διδακτικής φύσεως που διερευνώνται . Στη συνέχεια η περιγραφή των δραστηριοτήτων που πραγματοποιούνται στο περιβάλλον της τελευταίας έκδοσης του λογισμικού Geometer's Sketchpad GSP4.03 ,στο οποίο έχει προβλεφθεί ο τρόπος για κατασκευή fractals δεδομένου ότι μαθήματα fractal γεωμετρίας περιέχονται ήδη στα αναλυτικά προγράμματα διαφόρων χωρών .Η σπείρα του Baravelle είναι γνωστή εφαρμογή και θα θεωρούσαμε παράλειψη την μη αναφορά της .Οι δραστηριότητες που προτείνονται με την κατάλληλη μέθοδο δεν περιέχονται σε καμία άλλη ιστοσελίδα ή άρθρο ή βιβλίο.

Κεφάλαιο 5^ο : Περιέχεται όλη η έρευνα με τις παρατηρήσεις στα κατάλληλα σημεία .

Κεφάλαιο 6^ο : Αναλυτικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα που προέκυψαν από κάθε τάξη καθώς και συνολικές και συγκριτικές παρατηρήσεις ανάμεσα στις διαφορετικές βαθμίδες εκπαίδευσης .

Κεφάλαιο 7^ο : Περιέχονται οι λόγοι που πιστεύουμε ότι στηρίζουν την ένταξη των fractals στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών όλων των σχολικών επιπέδων . Η παιδαγωγική σημασία των Fractals και οι νοητικές ικανότητες που αναπτύσσονται κατά την κατασκευή ή επεξεργασία ενός αντικειμένου fractal .Ακόμα ποια κεφάλαια

των Μαθηματικών εμπλέκονται και τι αναμένεται από την χρησιμοποίηση των σχετικών ανοικτών προβλημάτων σε κατάλληλες δραστηριότητες στον Η/Υ .Τέλος μια περιγραφή παιδαγωγικής σημασίας ορισμένων κατασκευών fractal όπως αυτές αναφέρονται και προτείνονται στην βιβλιοθήκη Fractal gallery του λογισμικού

Παράρτημα: Στην προσπάθεια συνεχούς αναζήτησης -εξέλιξης των κατασκευών που είχαν ανακαλυφθεί -επινοηθεί από τους Πυθαγόρα, Πλάτωνα ,Ευκλείδη ,Αρχιμήδη αλλά και από ψυχική-πνευματική ανάγκη αναζήτησης νέων εργαλείων που θα βοηθήσουν τους μαθητές μας να εμπλουτίσουν τις εικόνες των εννοιών που έχουν σχηματίσει ,παρουσιάζονται κάποιες κατασκευές. Αρχικά ένα πεντάγωνο με fractal διαδικασία στο εσωτερικό του ,και επαναλήψεις μετρήσεων και λόγων. Εδώ θα μπορούσαμε να δούμε την εμφάνιση του αριθμού Φ και των ιδιοτήτων του χρυσού αριθμού .Στη συνέχεια η κατασκευή της **σπείρας του Αρχιμήδη**, όχι μόνο με σημεία αλλά και με γεωμετρικά αντικείμενα .Η κατάλληλη τοποθέτηση δυο παραμέτρων t_1, t_2 που έχουν σχέση με το dilation ,rotation του αντικειμένου και η χρήση της ιδιότητας του animation για αυτές , παράγουν μια εξελιγμένη κατασκευή Logo -style

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση της δομής της εργασίας και την εισαγωγή θα προσθέσω ότι ο *σχεδιασμός* της εκπαιδευτικής εμπειρίας , οι πηγές και δραστηριότητες που θα επιτρέψουν την αύξηση των δεξιοτήτων και της διαίσθησης και κατανόησης των μαθητών μας ,είναι μια επινοητική τέχνη. *«Ο λόγος για τον οποίο είμαστε σε ένα πιο υψηλό επινοητικό επίπεδο δεν είναι επειδή διαθέτουμε λεπτότερη φαντασία αλλά επειδή έχουμε τα καλύτερα όργανα»* (A.N. Whitehead ,1963,p.107) .Το περιβάλλον του λογισμικού βοηθά τους μαθητές να αλληλεπιδράσουν με τις ελκυστικές δυναμικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων που μετασχηματίζονται , αλλάζουν θέσεις και χρώματα, να αναπτύξουν την φαντασία τους και ικανότητες τεχνικές , οπτικοχωρικές , κιναισθητικές.

«Το πιο σημαντικό είναι ότι κάθε επιτυχής επέκταση απαιτεί ταυτόχρονη καινοτομία στο λογισμικό , στα προγράμματα σπουδών , στην παιδαγωγική , στην κατάρτιση εκπαιδευτικών και την αξιολόγηση. » (Fisher ,Dwyer &Yocam , 1996) »

The background of the slide is a deep blue with a subtle, repeating pattern of lighter blue, swirling, fractal-like shapes. Overlaid on this is a prominent, bright yellow and orange fractal structure that resembles a complex, branching curve or a stylized, glowing 'C' shape. The structure has a textured, almost crystalline appearance with many small, dark, irregular shapes interspersed within the yellow areas.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ FRACTALS

1.1 Εισαγωγή στα fractals

“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line”

Benoît Mandelbrot

“ Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτές δεν είναι κύκλοι, και ο φλοιός του δέντρου δεν είναι ομαλός, ούτε η αστραπή ταξιδεύει σε μια ευθεία γραμμή.. ”

(από την εισαγωγή του βιβλίου του “The Fractal Geometry of Nature ”)

«Θα ξεκινήσουμε με την παρατήρηση ότι τα πειραματικά μαθηματικά δεν συνεπάγονται μια απόπειρα κατάργησης των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά έχουν ήδη διαχωριστεί από τις φυσικές επιστήμες και ως εκ τούτου από το πείραμα. Αυτό το χαρακτηριστικό τα μέγιστα συνεισφέρει στο να είναι μη δημοφιλή. Αλλά τα πειραματικά μαθηματικά σημαίνουν κάτι διαφορετικό : σημαίνει ότι εμβάλλουν το πείραμα στον πυρήνα των μαθηματικών που δεν χρειάζεται να έχει κάποια επαφή με τις φυσικές επιστήμες . Ο πιο εντυπωσιακός αντίκτυπός του μπορεί να είναι ότι υπογραμμίζουν την πραγματικότητα από μια ουσιαστική διάκριση που θα αντιμετωπίσουμε επανειλημμένα μεταξύ του μαθηματικού γεγονότος και της μαθηματικής απόδειξης .. Πολλοί υπέροχοι μαθηματικοί επιμένουν ορίζοντας το πεδίο τους ξεκινώντας με την απόδειξη. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουν αναπτύξει τη συνήθεια να βλέπουν ένα μαθηματικό γεγονός σχεδόν αποκλειστικά εισηγούμενο από τα παλαιά μαθηματικά γεγονότα . Κάτι που απεύχομαι είναι η αντικατάσταση της απόδειξης με απλές εικόνες. Όλα αυτά που συμβαίνουν τώρα είναι νέες μέθοδοι διερεύνησης των νέων γεγονότων που προβάλλουν τα μαθηματικά με έναν δυναμικό “front end” . Αυτές οι εικόνες έχουν ήδη καταδείξει εκπληκτική δύναμη να βοηθήσουν τα πρωταρχικά στάδια αμφότερα και της μαθηματικής απόδειξης και της φυσικής θεωρίας. Αλλά αυτή πρωταρχικά βασίζεται πάνω στον ενεργό πειραματισμό. Οι πειραματικοί και θεωρητικοί φυσικοί σπανίως ζουν σε τέλεια αρμονία αλλά γνωρίζουν ότι συνυπάρχουν μόνον όταν ο ένας ακούει τον άλλον ή διαφορετικά αλληλεπιδρούν . Στα μαθηματικά η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική : Έχει υπάρξει μια μακροχρόνια ιστορία σύγκρουσης , όπως όμορφα εκφράζεται στις ακόλουθες γραμμές από τον ποιητή:

“Grau , teuer Freund , ist alle Theorie

“Γκρι , ακριβέ μου φίλε είναι κάθε θεωρία

Und grün des Lebens goldner Baum ,,

Και πράσινο της ζωής το χρυσό δέντρο ”

(Με αυτά τα λόγια στο έργο Faust του Goethe (1749-1832) , ο Μεφιστοφελής φορώντας την τήβεννο του καθηγητή Φάουστ περιγράφει τα διάφορα ακαδημαϊκά προγράμματα σε διερχόμενο φοιτητή). (B. Mandelbrot: στην εισαγωγή του βιβλίου *Fractals for the classroom* με τίτλο *Fractals and the Rebirth of Experimental Mathematics*)

Η θεωρία του Χάους και η Γεωμετρία των Fractals συνδέονται με τα πειραματικά μαθηματικά και τις συνεισφορές τους στα μαθηματικά .

Ο Poincare γράφει : *Ο επιστήμονας δεν μελετάει τη φύση επειδή είναι χρήσιμη αλλά γιατί τον ενθουσιάζει*

Η θεωρία του Χάους και η Γεωμετρία των Fractals κατευθύνουν αυτά τα ζητήματα . Όταν εμείς εξετάζουμε την ανάπτυξη μιας διαδικασίας σε μια περίοδο χρονική , μιλάμε με όρους που χρησιμοποιούνται στην θεωρία του χάους. Όταν ενδιαφερόμαστε για κατασκευαστικούς τύπους που προχωρούν με μια χαοτική διαδικασία τότε χρησιμοποιούμε την ορολογία της Fractal Γεωμετρίας , της γεωμετρίας της οποίας οι κατασκευές δίνουν τάξη στο χάος. Η Fractal γεωμετρία είναι λοιπόν μια νέα ορολογία χρησιμοποιημένη να περιγράψει τους πολύπλοκους τύπους που υπάρχουν στην φύση. Αλλά καθώς τα στοιχεία της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπως η ευθεία , ο κύκλος , η σφαίρα είναι κατευθείαν ορατά και επεξεργάσιμα, τα στοιχεία της νέας ορολογίας δεν οδηγούν τον εαυτό τους σε απευθείας παρατήρηση. Είναι αλγόριθμοι που μπορούν να μετασχηματιστούν μέσα σε σχήματα μόνο με την βοήθεια των υπολογιστών . Η ανακάλυψη των fractals φανέρωσε τα μυστικά της γεωμετρικής πολυπλοκότητας της φύσης και πρόσφερε μια νέα ορολογία μέσω της οποίας μπορούμε να περιγράψουμε τα σύννεφα , δέντρα και σφουγγάρια με τον ίδιο τρόπο που θα

περιγράψαμε τις διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων και τους πνεύμονες. Και γιατί ένας κλάδος των μαθηματικών έχει αποκτήσει τόσους οπαδούς ανά τον κόσμο ;

Μας γοητεύει η ιδέα του απείρου και του μυστηρίου που κρύβεται μέσα του .Που με τον μεγεθυντικό φακό μας κάνουμε εξερευνήσεις σε αντικείμενα που βρίσκονται δίπλα μας και όχι στο διάστημα ,από την φτέρη και το μπρόκολο μέχρι τα εγκεφαλογραφήματα και το χρηματιστήριο. Αλλά κύριος λόγος είναι ότι απηχεί στην γεωμετρική διαίσθηση που όλοι διαθέτουμε και μας προσελκύει λόγω της αισθητικής των ελκυστικών εικόνων που βρίσκουμε ή μπορούμε να κατασκευάσουμε .

Αντικείμενα που σήμερα ονομάζουμε fractals ήταν γνωστά από μαθηματικούς και καλλιτέχνες πολύ νωρίτερα. Δυστυχώς τα μέσα που χρησιμοποιούνταν για να τα παρατηρήσουν ή να μελετήσουν δεν ήταν κατάλληλα .Σήμερα οι εξελίξεις στον τομέα της τεχνολογίας των Η/Υ μας προσφέρουν αυτή την δυνατότητα .

Η παρατήρηση ότι όλα αυτά τα αντικείμενα έχουν την αυτοομοιότητα, άργησε τόσο πολύ και είναι σχεδόν βέβαιο ότι χωρίς την ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών που κατέστησε δυνατή την αναπαράσταση τέτοιων συνόλων δε θα υπήρχε ακόμη η γεωμετρία των fractals.Και ενώ οι εικόνες είναι πολύπλοκες, το πρόγραμμα (software) που απαιτείται δεν είναι, αφού η σχεδίαση των εικόνων βασίζεται στην επανάληψη ενός μοτίβου, που σχεδιάζεται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης.

1.2 Τι είναι τα fractals

Ο K.Falconer στο βιβλίο του Fractal Geometry γράφει : *Η λέξη φράκταλ είναι σαν τη λέξη ζωή . Μπορείς να περιγράψεις τις βασικές της ιδιότητες και τα θεμελιώδη στοιχεία που την αποτελούν αλλά δεν μπορείς να την κλείσεις σε έναν ορισμό*

Επιχειρώντας να ορίσουμε κάπως την έννοια θα λέγαμε ότι

" είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μέρη, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα αντίγραφο μειωμένου μεγέθους του συνόλου. Τα Fractals είναι γενικά αυτοόμοια σχήματα ανεξάρτητα από την κλίμακα."

Ο Mandelbrot όρισε τα fractal ως "σύνολο για το οποίο η Hausdorff-Besicovitch διάσταση υπερβαίνει αυστηρά την τοπολογική διάσταση ". Για εξ ολοκλήρου αυτοόμοιο fractal, η διάσταση Hausdorff είναι ίση με την Minkowski-Bouligand διάσταση .

Εμφανίζουν λοιπόν τις ακόλουθες ιδιότητες :

-  δομή μέσα στην δομή (δηλαδή νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθυνσης)
-  επιμέρους τμήματα που είναι παρόμοια με άλλα τμήματα του συνόλου σε διαφορετική κλίμακα .(αυτό-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας)
-  κατασκευάζονται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας που σε κάθε βήμα επαναλαμβάνει τους ίδιους μαθηματικούς μετασχηματισμούς (αλλαγή κλίμακας , μετάθεση και στροφή)
-  Η αυτοομοιότητα ενός Fractal δεν είναι απαραίτητα ακριβής και μπορεί να περιγράφεται από μια άπειρη ακολουθία κλιμάκων η δε αυτοομοιότητα του μπορεί να είναι και στατιστική ιδιότητα του συνόλου .(Μπούντης σελ.65 στο βιβλίο του *Ο θαυμαστός κόσμος των Fractal*)

1.3 Προέλευση της λέξης Fractal

Η λέξη Fractal προέρχεται από την λατινική λέξη frangere ή από το λατινικό fractus (σπάζω θρυμματίζω ,δημιουργώ ακανόνιστα κομμάτια) και την εισήγαγε ο B. Mandelbrot . Η πορεία της γεωμετρίας των fractals ξεκινάει με τον Benoit Mandelbrot. Στα Ελληνικά αποδόθηκε με τον όρο Μορφοκλασματική Καμπύλη από τους Καθηγητές Στ. Πνευματικό και Ι. Νικόλη. Ο Ακαδημαϊκός Νικόλαος Αρτεμιάδης, προτείνει μέσα από μια αξιοσημείωτη επιχειρηματολογία τον όρο "Θρύμμα" για την απόδοση του "Fractal" στην Ελληνική.

Η ορολογία fractals μας βοήθησε να αναφερθούμε στα σύννεφα, στα δέντρα, στους πνεύμονες ή τις διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων σαν πολύπλοκα γεωμετρικά αντικείμενα της φύσης. Και όταν αναφερόμαστε στην πολυπλοκότητα των γεωμετρικών αντικειμένων της φύσης θα αναφέρουμε εδώ τον ορισμό της πολυπλοκότητας του T. Μπούντη (στο βιβλίο του Ο θαυμαστός κόσμος των fractals -σελ. 10) Όλα αυτά που χαρακτηρίζουν ένα σύστημα το οποίο αν και συχνά περιγράφεται από απλούς κανόνες, έχει χωρική δομή που δεν εξαντλείται από συνεχείς μεγεθύνσεις και χρονική εξέλιξη που μπορεί να διαλέξει ανάμεσα σε πολλές διαδρομές, πρακτικά απρόβλεπτη!

Με τα fractals ασχολείται ο σύγχρονος κλάδος των Μαθηματικών που γνωρίζει μεγάλη ανάπτυξη τα τελευταία 20 χρόνια, υποσχόμενος σημαντική εξέλιξη στις επιστήμες του 21ου αιώνα.

Ο Alan Beck γράφει: "Basically, a fractal is any pattern that reveals greater complexity as it is enlarged. Thus, fractals graphically portray the notion of 'worlds within worlds'" Βασικά, τα fractal είναι οποιοδήποτε σχέδιο που αποκαλύπτει όλο και μεγαλύτερη πολυπλοκότητα καθώς διευρύνεται. Κατά συνέπεια τα fractals απεικονίζουν γραφικά την έννοια "των κόσμων μέσα στους κόσμους"

Ο Beck εξηγεί περαιτέρω ότι όταν εξετάζουμε πολύ προσεκτικά τα Ευκλείδεια σχήματα, φαίνονται όλο και περισσότερο ευθείες οι γραμμές, αλλά όταν εξετάζεις ένα fractal βλέπεις όλο και περισσότερες λεπτομέρειες.

Ο Beck συνεχίζει, "Είτε παραγόμενο με τους υπολογιστές είτε με τη φυσική διαδικασία όλα τα fractals περιστρέφονται γύρω από αυτά που οι επιστήμονες καλούν "θετική αναδρομική ανατροφοδότηση" ("positive feedback loop"). Τα Fractals παράγονται όταν ανατροφοδοτείται στο σύστημα η παραγωγή ως εισαγωγή επανειλημμένες φορές.

1.4 Ποιος είναι ο Benoît Mandelbrot

Ο Benoît Mandelbrot ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε έναν υπολογιστή για να σχεδιάσει το σύνολο Mandelbrot.



Πολωνός γεννημένος στη Γαλλία μαθηματικός και κύριος υπερασπιστής της fractal γεωμετρίας. Από το 1955 και μετά ο Mandelbrot δημοσίευσε έγγραφα σε τομείς διαφορετικούς όπως θεωρία πληροφοριών, οικονομικά και υδρο-δυναμική (Fluid-Dynamics). Είχε πειστεί ότι οι αυτοόμοιες δομές είχαν κάτι κοινό. Το 1975 ο Mandelbrot έπλασε τον όρο fractal για να περιγράψει αυτές τις δομές, και δημοσίευσε τις ιδέες του στο Les objets fractals, forme, hasard et dimension (μεταφρασμένο στα

Αγγλικά Fractals: form, chance and dimension (1977).

Το 1979, στη μετάθεση του ως επισκέπτη καθηγητή των Μαθηματικών του πανεπιστημίου του Χάρβαρντ, ο Mandelbrot άρχισε να μελετά τα fractals αποκαλούμενα σύνολα Julia. Στηριζόμενος σε προηγούμενη εργασία του G. Julia και του Pierre Fatou ο Mandelbrot χρησιμοποίησε έναν υπολογιστή να σχεδιάσει εικόνες από τα σύνολα Julia με χρήση της εξίσωσης $z^2 - c$. Ερευνώντας πώς η τοπολογία των συνόλων Julia ήταν εξαρτώμενη από τη μιγαδική παράμετρο c , ανακάλυψε τα σύνολα Mandelbrot. Το 1982 ο Mandelbrot δημοσίευσε την ενημερωμένη έκδοση των ιδεών του στο *The Fractal Geometry of Nature*.

1.5 Συμβολή της κλασσικής ανάλυσης

Τα αντικείμενα που καλούνται σήμερα fractals ανακαλύφθηκαν και εξερευνήθηκαν πολύ πριν δημιουργηθεί η λέξη. Το 1872 ο Karl Weierstrass βρήκε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης με τη ιδιότητα να είναι παντού συνεχής αλλά πουθενά διαφορίσιμη. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης θα καλούνταν τώρα fractal. Το 1904 ο Helge von Koch,

δυσανεστημένος με τον πολύ αφηρημένο και αναλυτικό ορισμό του Weierstrass, έδωσε έναν πιο γεωμετρικό ορισμό μιας παρόμοιας συνάρτησης, η οποία καλείται τώρα Koch Snowflake. Η ιδέα των αυτό-όμοιων καμπυλών συνελήφθη από τον Paul Pierre Lévy ο οποίος το 1938, στο έγγραφό του *Plane or Space Curves and Surfaces Consisting of Parts Similar to the Whole*, περιέγραψε μια νέα fractal καμπύλη, την Lévy curve.

Ο Georg Cantor έδωσε παραδείγματα των υποσυνόλων της πραγματικής γραμμής με ασυνήθιστες ιδιότητες – τα σύνολα του Cantor (sets) που σήμερα αναγνωρίζονται σαν fractals. Επαναληφθείσες συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο έχουν ερευνηθεί προς το τέλος του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα από τους Henri Poincaré, Felix Klein, Pierre Fatou, και Gaston Julia. Πάντως, χωρίς την ενίσχυση της σύγχρονης ηλεκτρονικής γραφιστικής, στερήθηκαν τα τεχνικά μέσα να απεικονίσουν την ομορφιά των αντικειμένων που είχαν ανακαλύψει.

Σε μία προσπάθεια να γίνουν κατανοητά τα αντικείμενα όπως τα σύνολα του Cantor μαθηματικοί όπως ο Constantin Carathéodory και ο Felix Hausdorff γενίκευσαν τη διαισθητική έννοια της διάστασης για να περιλάβουν τις τιμές μη-ακέραιων αριθμών. Αυτό ήταν μέρος της γενικής μετακίνησης στο πρώτο μέρος του εικοστού αιώνα για να δημιουργήσει μια περιγραφική θεωρία συνόλων, δηλαδή μια συνέχεια της κατεύθυνσης της έρευνας του Cantor που ήταν σε θέση με κάποιο τρόπο να ταξινομήσει σύνολα σημείων στο Ευκλείδειο διάστημα. Ο ορισμός της διάστασης του Hausdorff είναι γεωμετρικής φύσης, αν και είναι βασισμένος τεχνικά στα εργαλεία της μαθηματικής ανάλυσης. Αυτή την κατεύθυνση, μεταξύ άλλων ακολούθησε και ο Besicovitch και είναι διαφορετική στο χαρακτήρα από τις λογικές έρευνες που αποτέλεσαν ένα μεγάλο μέρος της περιγραφικής θεωρίας συνόλων της δεκαετίας του '20 και της δεκαετίας του '30.

Το 1960 ο Benoît Mandelbrot άρχισε να εξερευνά την αυτοομοιότητα σε έγγραφό του όπως το *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Για αυτό στηρίχτηκε στην προηγούμενη εργασία του Lewis Fry Richardson. Το 1975 ο Mandelbrot έπλασε τη λέξη fractal για να περιγράψει τα αυτοόμοια αντικείμενα που δεν είχαν καμία σαφή διάσταση. Παρήγαγε τη λέξη fractal από το Λατινικό fractus, που σήμαινε σπασμένος ή ανώμαλος (που έχει αναφερθεί), και όχι από τη λέξη κλασματική (fractional), όπως θεωρείται συνήθως.

Μόλις εφαρμόστηκε στη γεωμετρία των fractals, η απεικόνιση μέσω υπολογιστών, παρουσιάστηκε ένα ισχυρό οπτικό επιχείρημα ώστε να συνδεθούν οι μακρινές περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής που είχαν εξεταστεί προηγουμένως, ιδιαίτερα της μη γραμμικής δυναμικής, και της θεωρίας του χάους. Ένα παράδειγμα απεικονίζει την μέθοδο του Newton σαν fractal, επιδεικνύοντας πώς τα όρια μεταξύ των διαφορετικών λύσεων είναι fractal. Η Fractal γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε επίσης για συμπίεση στοιχείων και για τη διαμόρφωση των σύνθετων οργανικών και γεωλογικών συστημάτων, παραδείγματος χάριν την αύξηση των δέντρων ή την εξέλιξη των λεκανών των ποταμών.

1.6 Ιδιότητες των fractal

Δύο είναι οι πιο βασικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα της Fractal γεωμετρίας: η **αυτό-ομοιότητα** και η **κλασματική διάστασή** τους. Αναφερόμενοι στην "αυτοομοιότητα" ως έννοια που διευρύνει την γνωστή γεωμετρική έννοια της ομοιότητας εστιάζουμε την προσοχή μας στην αυτοομοιότητα που παρουσιάζουν τόσο τα Fractal του φυσικού κόσμου (όπως η φτέρη και μια ακτογραμμή) όσο και τα μαθηματικά Fractal (όπως το τρίγωνο του Sierpinski, η χιονονιφάδα του Koch, τα Fractal δέντρα και η φτέρη).

1.6.1 Η αυτοομοιότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στα Fractal



Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει καθιερωθεί η έννοια "ομοιότητα". Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι όμοια αν έχουν την ίδια μορφή ανεξάρτητα από το μέγεθός τους. Δηλαδή να έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Στα σχήματα αριστερά διαπιστώνουμε ότι "καθένα από τα μικρά σχήματα που περιέχονται στο μεγάλο είναι αντίγραφο του μεγαλύτερου σχήματος". **Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι το καθένα από τα μέρη που συνιστούν το όλο είναι και αντίγραφο του.** Μπορούμε να λέμε ότι τα παραπάνω σχήματα χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας. Όλα τα μέρη του είναι όμοια μεταξύ τους καθώς και με το αρχικό. Η έννοια επομένως της αυτό-ομοιότητας εμφανίζεται και σε γεωμετρικά σχήματα τα οποία δεν είναι Fractal. Τα Fractal διαφέρουν από τα απλά σχήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας σε δύο παράγοντες:

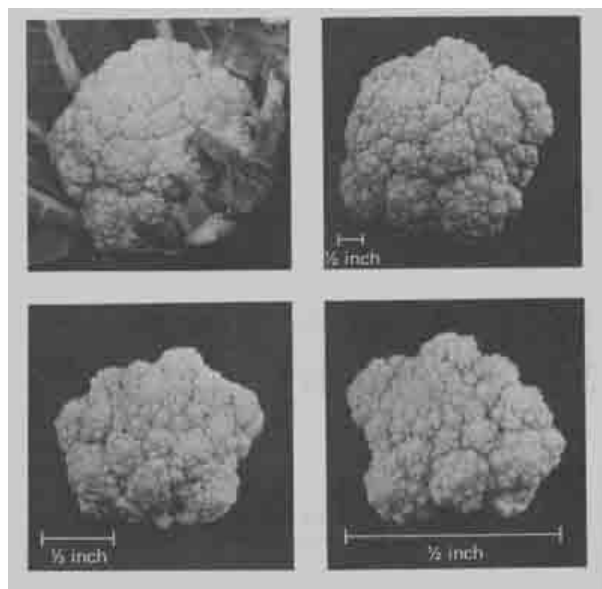
1. Οι αναπαραστάσεις είναι αυτοόμοιες. Έτσι αν κοιτάξουμε ένα μικρό τμήμα ενός fractal θα δούμε πως είναι όμοιο με ένα μεγαλύτερο τμήμα. Αν μεγεθύνουμε το μικρό, θα δούμε πως αυτό περιέχει και πάλι όμοια μέρη κ.ο.κ.
2. Οι fractal εικόνες είναι ανεξάρτητες από αλλαγές της κλίμακας. Αντίθετα με τα ευκλείδεια σχήματα, δεν έχουν ένα χαρακτηριστικό μέγεθος μέτρησης.

Επομένως : **Αυτοόμοιο** είναι ένα αντικείμενο του οποίου τα μέρη από τα οποία αποτελείται μοιάζουν με το σύνολο. Αυτή η επανάληψη των ακανόνιστων

λεπτομερειών ή σχηματισμών συμβαίνει προοδευτικά σε μικρότερες κλίμακες και, είναι δυνατόν να συνεχίσουν απεριόριστα έτσι ώστε κάθε τμήμα ενός τμήματος, όταν μεγεθυνθεί, να μοιάζει βασικά με το συνολικό αντικείμενο.

Ουσιαστικά ένα αυτοόμοιο αντικείμενο παραμένει αναλλοίωτο σε αλλαγές κλίμακας. Αυτό το φαινόμενο μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί, στις νιφάδες τού χιονιού ή στον φλοιό των δένδρων ή στις ακτές.

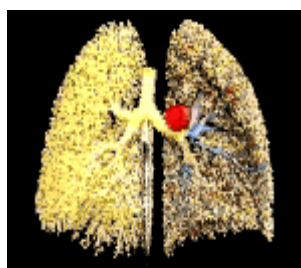
1.6.2 Η αυτοομοιότητα στη φύση



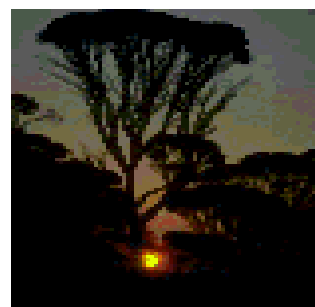
Χαρακτηριστικά παραδείγματα φυσικών αντικειμένων που εκδηλώνεται η αυτοομοιότητα είναι το μπρόκολο, η φτέρη, οι ακτογραμμές κ.α

Αν από ένα κουνουπίδι αποσπάσουμε ένα κομμάτι θα διαπιστώσουμε ότι αυτό θα μοιάζει με το αρχικό, δηλαδή είναι ένα μικρότερο αντίγραφο.

Το κουνουπίδι είναι ένα φυσικό fractal.



← Η fractal δομή των πνευμόνων μας
(Dr. Ewald R. Weibel),
fractal σκιαγραφίες δέντρων





Το τράβηγμα δύο ακρυλικών φύλλων καλυμμένων με κόλλα, για να χωρίσουν διαμορφώνουν ένα φυσικό fractal.

Lichtenberg
_figure



Μπρόκολο Romanesco που παρουσιάζει πολύ λεπτά φυσικά fractals



Η φτέρη ανήκει στην κατηγορία των φυτών που εκδηλώνουν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας. Μια φτέρη αποτελείται από φύλλα καθένα από τα οποία αποτελείται από πολλά μικρότερα. Και αυτά ακόμα τα μικρά φύλλα αποτελούνται από ακόμα μικρότερα που διατηρούν την ίδια δομή με τη φτέρη. Όσο από πιο κοντά παρατηρούμε μια φτέρη τόσο περισσότερες λεπτομέρειες βλέπουμε.



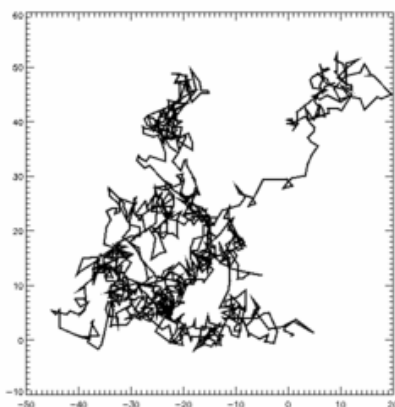
Αν παρατηρήσουμε χάρτες που περιγράφουν ακτογραμμές σε διαφορετικές κλίμακες (οι εικόνες είναι από το βιβλίο *Fractals for the classroom* των Heinz –Jürgens –Saupe) τότε αυτό που μας αποκαλύπτεται είναι μια όμοια κατανομή κόλπων και ακρωτηρίων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια ακτογραμμή παρουσιάζει fractal δομή με την έννοια ότι αν μεγεθύνεται εμφανίζονται νέοι κόλποι και ακρωτήρια και παρόλα αυτά εξακολουθεί να μοιάζει με ακτογραμμή. Φανταστείτε ότι η εικόνα αυτή αυτής της σελίδας είναι μια εικόνα της ακτής της Αφρικής. Τη μετράμε με κανόνες μήκους δέκα μέτρων και παίρνουμε μια ορισμένη μέτρηση. Αν το μετρήσουμε με κανόνες του ενός μέτρου δεδομένου ότι η ακτή είναι

οδοντωτή, θα μπορούσαμε να πάρουμε τις γωνίες και τις σχισμές καλύτερα, έτσι θα μας παρείχαν μια μεγαλύτερη μέτρηση. Τώρα εάν το μετρήσουμε με κανόνες που μετρούν εκατοστά θα μπορούσαμε πραγματικά να φθάσουμε σε όλο και πιο μικροσκοπικές σχισμές. Έτσι η μέτρηση θα ήταν ακόμα μεγαλύτερη. Όπως καταλαβαίνουμε μεγαλύτερη λεπτομέρεια στον κανόνα οδηγεί σε μέτρηση που αυξάνεται συνεχώς και περισσότερο. Έτσι ένας υποθετικός κανόνας με απειροελάχιστα θα μας έδινε μια μέτρηση της ακτής που θα έτεινε στο άπειρο. Αυτό είναι ένα fractal

1.6.3 Η έννοια της διάστασης στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στα φράκταλ

Η έννοια της Ευκλείδειας Διάστασης

Σημεία ή γραμμές ή επιφάνειες ή στερεά κατά τον Ευκλείδη είναι γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφουν τον χώρο που μας περιβάλλει. Η έννοια τού όρου 'Διάσταση' στην Γεωμετρία προκύπτει σαν άμεση συνέπεια των αξιωμάτων και ορισμών, όπως τα διατύπωσε ο Ευκλείδης. Κατά τον Ευκλείδη: «Σημείον ἐστὶ οὐ μέρος οὐδέν» δηλαδή ένα σημείο δεν διαμερίζεται επομένως τα σημεία έχουν διάσταση μηδέν. Οι γραμμές κατά τον Ευκλείδη έχουν μήκος αλλά όχι πλάτος. Και όταν αναφερόμαστε σε γραμμές εννοούμε τις ευθείες γραμμές, τους κύκλους, τις παραβολές, αλλά και τις γραμμές όπως είναι η κυλινδρική έλικά που ορίζονται μόνο στον τρισδιάστατο χώρο. Μία γραμμή ορίζεται σύμφωνα με την απλή Κινηματική από την τροχιά που διαγράφει ένα κινούμενο σημείο. Επομένως η διάσταση της γραμμής είναι 1 δηλαδή μία γραμμή είναι ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο. Μια επιφάνεια κατασκευάζεται με την μετακίνηση μιας γραμμής. Και η μετακίνηση μιας επιφάνειας δημιουργεί ένα κομμάτι χώρου δηλαδή έναν όγκο. Επομένως η διάσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μπορεί να είναι μόνο ένας από τους ακεραίους 0,1,2 ή 3. Αν όμως σχηματίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και συνδέσουμε τα μέσα των πλευρών του, τότε σχηματίζονται τέσσερα μικρότερα τρίγωνα μέσα στο ΑΒΓ. Αφαιρούμε το εσωτερικό του μεσαίου τριγώνου, κρατώντας μόνο τα σημεία των πλευρών του. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για καθένα από τα υπόλοιπα τρία τρίγωνα, Στο σχήμα μας θα εμφανιστούν εννέα ακόμα μικρότερα τρίγωνα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία άπειρες φορές, τελικά παίρνουμε ένα σύνολο στο επίπεδο, το οποίο περιέχει τις πλευρές όλων των τριγώνων που έχουμε αφαιρέσει. Το σχήμα -σύνολο γνωστό με το όνομα Sierpinski gasket που προκύπτει δεν είναι μια επιφάνεια αφού δεν έχει εμβαδόν. Δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε μετακινώντας ένα σημείο, επομένως δεν είναι γραμμή και φυσικά δεν έχει όγκο. Το τελικό σχήμα αποτελείται από πλευρές τριγώνων που προέκυψαν από ένα συνδυασμό άπειρων τριγώνων μέσα σε τρίγωνα που κι αυτά είναι μέσα σε άλλα τρίγωνα. Ακριβώς αυτή η απειρία των τριγώνων και των πλευρών τους μας εμποδίζει να εφαρμόσουμε ότι γνωρίζουμε μέχρι τώρα περί διαστάσεων. Το σύνολό μας δεν μπορεί να έχει διάσταση δύο και δεν έχει



Brownian motion: παράδειγμα 1000 (simulated) βημάτων από την κίνηση Brown σε δύο διαστάσεις.

διάσταση ένα, σαν να ήταν απλά μια μονοδιάστατη γραμμή. Επομένως πρέπει να υπάρχει μια άλλη μορφή διάστασης διαφορετικής από αυτή που έχει περιγράψει ο Ευκλείδης. Βέβαια κάποιες σκιαγραφήσεις αποδείξεων και περιγραφών δεν είναι δυνατόν να μας κάνουν να ελπίσουμε ότι θα καλύψουμε πλήρως ένα τόσο πολύπλοκο θέμα. Από τα απλά παραδείγματα, όπως αυτό της fractal μορφής της ακτογραμμής της Βρετανίας, για το οποίο υπάρχει εκτενής και λεπτομερειακή αναφορά στο βιβλίο του Mandelbrot, ή για συνθετότερα όπως η κίνηση Brown, ή οι παράξενοι ελκυστές (attractors) στην μη Γραμμική Μηχανική και στο Χάος, που περιλαμβάνουν περιπτώσεις αξιοσημείωτης

πολυπλοκότητας, έως την οικονομία, την χαρτογραφία και τα καθαρά μαθηματικά, η ποικιλία των fractal συνόλων και των εφαρμογών τους, που καλύπτει πρακτικά όλα τα τεχνολογικά και επιστημονικά πεδία, δεν είναι κάτι που μπορεί να αντιμετωπιστεί απλά και με προχειρότητες. Θα προσπαθήσουμε μέσα από μια απλοϊκή μέθοδο να κατανοήσουμε τι εννοούμε όταν λέμε “Fractal Διάσταση”

1.6.4 Η έννοια της Fractal Διάστασης

Έχουμε ασχοληθεί ήδη με την ομοιότητα, επομένως μπορούμε σύμφωνα με τον ορισμό να πούμε ότι όλα τα σημεία είναι όμοια και ίσα μεταξύ τους και ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα είναι όμοια αλλά όχι πάντα ίσα. Επομένως ακόμα και αν δεν το γνωρίζαμε θα συμπεραίναμε ότι όσο αυξάνει η διάσταση του αντικειμένου, ισότητα και ομοιότητα δεν είναι έννοιες ταυτόσημες, ή απλά τα όμοια σχήματα δεν είναι πάντα και ίσα. Ο λόγος των μηκών των αντιστοιχών γραμμικών στοιχείων των σχημάτων, σύμφωνα με τη σχέση ομοιότητας που τα συνδέει λέγεται ‘λόγος ομοιότητας’. Αν ο λόγος είναι μονάδα, τότε τα σχήματα είναι ίσα. Καθώς η διάσταση ανεβαίνει και η πολυπλοκότητα του σχήματος αυξάνεται, έχουμε και πιο αυστηρές συνθήκες για την ομοιότητα δυο σχημάτων. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε σύνολα διαφόρων διαστάσεων και θα σκεφτούμε ποια η σχέση της διάστασης με την ομοιότητα. Όταν η διάσταση είναι 2(επίπεδα σχήματα) δηλαδή έχουμε εμβαδά τότε ο λόγος των Εμβαδών είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας και όταν η διάσταση είναι 3 (στερεά σχήματα) τότε ο λόγος των όγκων είναι ίσος με τον κύβο του λόγου ομοιότητας. Ας κάνουμε μια προσπάθεια να γενικεύσουμε αναφερόμενοι στο σύνολο του Cantor σαν παράδειγμα.

Το σύνολο του Cantor

Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την έννοια της διάστασης των fractal με μια απλοϊκή περιγραφή και ανάλυση χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα το σύνολο Cantor. Το σύνολο του Cantor παράγεται από το διάστημα $[0,1]$ (σύνολο T_0) με την ακόλουθη διαδικασία



Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη και αφαιρούμε το μεσαίο τμήμα (T_1). Στο επόμενο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα δύο τμήματα που έχουν μείνει, δεξιά και αριστερά αφαιρώντας το μεσαίο και πάλι τμήμα (T_2). Και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται επ’ άπειρο. (αυστηρά το σύνολο του Cantor ορίζεται¹ ως

$$\Delta^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \text{ όπου } \Delta_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_k^n \text{ για } n=0,1, \dots \quad I_k^n = \frac{1}{3^n} \text{ για } k=0, \dots, 2^n-1 \text{ και } n=0,1, \dots$$

$$\max I_k^n < \max I_l^n \text{ για } 0 \leq k < l \leq 2^n-1 \text{ και } I_{2k}^{n+1} \cup I_{2k+1}^{n+1} \subset I_k^n \text{ για } k=0, \dots, 2^n-1 \text{ και } n=0,1)$$

Το καθένα από τα δύο μέρη που σχηματίζουμε είναι όμοιο με ολόκληρο το σύνολο. Η διαδικασία συνεχίζεται επ’ άπειρο, και το σύνολο Cantor περιέχει έναν άπειρο αριθμό από υποσύνολα, όλο και πιο μικρά, αλλά όμοια προς το αρχικό σύνολο. Αυτή η επαναλαμβανόμενη πολυπλοκότητα, που συνεχίζεται σε κάθε τμήμα ενός γεωμετρικού

¹ Ο αυστηρός ορισμός περιέχεται στο σύγγραμμα «Απειροστικός Λογισμός II» των Σ.Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, σελ.168)

αντικειμένου, οσοδήποτε μικρό, έως και το πιο απειροστά μικρό του μέρος, χαρακτηρίζει ένα σύνολο σαν Fractal. Κάθε τμήμα του είναι όμοιο με το όλο σχήμα. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο Cantor δεν έχει 'μήκος' με την συνηθισμένη έννοια. Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος του αρχικού τμήματος είναι ίσο με την 1 τότε το μήκος του τμήματος που απαλείφουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι $1/3$ και το μήκος ολόκληρου του συνόλου είναι $2/3$. Και ο λόγος του όλου προς το αφαιρούμενο μέρος είναι 2 δηλαδή ο λόγος ομοιότητας είναι 2. Και στο επόμενο βήμα, που αφαιρούμε δυο ακόμα μεσαία τμήματα, ένα από το αριστερό και ένα από το δεξί κομμάτι ολόκληρο το σύνολο έχει μήκος $4/9$ και το αφαιρούμενο τμήμα έχει μήκος $2/9$. Επομένως πάλι ο λόγος ομοιότητας είναι 2. Στο τρίτο βήμα, το μήκος του όλου συνόλου είναι $8/27$ και το μήκος του αφαιρουμένου τμήματος είναι $4/27$. Επαγωγικά σκεπτόμενοι στο n -στό βήμα το μήκος του όλου είναι: $(2^n/3^n)$ και το μήκος του αφαιρουμένου τμήματος είναι $(2^{n-1}/3^{n-1})$. Τελικά το μήκος που απαλείφθηκε είναι

$$S = (1/3) + (2/9) + (4/27) + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

Άρα το μέρος που αφαιρέθηκε είναι ίσο προς το συνολικό μήκος του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος !! Αν μειώσουμε με $1/r$ σε κάθε κατεύθυνση το μέγεθος ενός αντικειμένου το μήκος ή το εμβαδόν ή τον όγκο και ονομάσουμε r τον λόγο των μέτρων, τον λόγο ομοιότητας N και D την διάσταση των δυο αντικειμένων, η πιο πάνω σχέση γίνεται $N = r^D$ θεωρώντας ως δεδομένο ότι για να είναι δυο αντικείμενα όμοια, πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση. Επομένως ο υπολογισμός του D με απλοϊκό τρόπο προκύπτει: $2 = 3^D$ ή $D = [(\ln 2)/(\ln 3)]$ που είναι η διάσταση ομοιότητας του συνόλου Cantor όπως θα διαπιστώσουμε αμέσως παρακάτω και με τον αυστηρό ορισμό. Η τοπολογική διάσταση, όπως κι αν οριστεί, είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ο ορισμός με αυστηρό μαθηματικό τρόπο του μέτρου του συνόλου Cantor περιέχεται στο βιβλίο του B.B. Mandelbrot (1983) εν συντομία και στο βιβλίο των (Hurewicz, Wallman; 1942) αναλυτικά. Το μήκος, εμβαδόν, ή ο όγκος ενός συνόλου, υπολογίζεται όπως γνωρίζουμε με το μέτρο Lebesgue. Για να υπολογίσουμε το μέτρο του συνόλου Cantor, χρειαζόμαστε την έννοια του μέτρου Hausdorff ενός συνόλου. Η έννοια του μέτρου Hausdorff, στη συνέχεια μας οδηγεί στην έννοια της διάστασης Hausdorff – Besicowitch, που είναι και η διάσταση ομοιότητας.

1.7 Πως προσδιορίζεται η Fractal διάσταση αυτοομοίων συνόλων.

Ένας αυστηρός ορισμός της διάστασης είναι αυτός που δόθηκε το 1919 από τον Felix Hausdorff που είχε εμπνευστεί από μια μέθοδο που πρώτος ανέπτυξε ο Έλληνας μαθηματικός **Κ.Καραθεοδωρής**. Αυτό που πιστεύουμε ότι έχει γίνει κατανοητό είναι οι υπάρχουν στην φύση αντικείμενα πολύπλοκα που η διάστασή τους δεν είναι ακέραια και δεν ανήκει σε καμία από τις γνωστές ακέραιες διαστάσεις 0 για σημείο, 1 για καμπύλη, 2 για επιφάνεια, 3 για στερεό.

Αν πάρουμε το παράδειγμα του Cantor έχουμε ότι στο n -οστό βήμα της κατασκευής ο ελάχιστος αριθμός ευθυγράμμων τμημάτων μήκους $\varepsilon_n = (1/3)^n$ είναι $N(\varepsilon) = 2^n$

$$\text{και } D = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.630929 \quad \text{σύμφωνα με τον ορισμό της } D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/\varepsilon)}$$

διάστασης χωρητικότητας (Μπούντης σελ.68)

Η Fractal διάσταση είναι ένας αριθμός ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στην τοπολογική διάσταση ενός Fractal συνόλου και την διάσταση του περιβάλλοντος χώρου του. Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο Cantor. Η fractal διάστασή του, όπως είδαμε, είναι: $D \sim 0.6309$ ($0 < 0.6309 < 1$). Ξέρουμε ότι η τοπολογική διάσταση του συνόλου Cantor είναι μηδέν, γιατί αποτελείται από διακριτά σημεία. Για να είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο επομένως Fractal, πρέπει να είναι αυτοόμοιο και η διάσταση ομοιότητάς του να είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση.

1.8 Τα μαθηματικά fractals

1.8.1 Τρίγωνο του Sierpinski (ή Sierpinski Sieve)²



Ένα fractal που ονομάστηκε έτσι από τον Sierpinski το 1915, πρώτο-εμφανίστηκε μέσω της Ιταλικής τέχνης στον καθεδρικό ναό Ravello, και σχεδιάστηκε από τον Nicola di Bartolomeo της Foggia τον 12ο αιώνα (Wolfram 2002, σελ. 43). Καλείται επίσης **Sierpinski gasket** ή **Sierpinski triangle**.

Αν N_n είναι ο αριθμός μαύρων τριγώνων μετά από την n -οστή επανάληψη, L_n το μήκος μιας πλευράς ενός τριγώνου, και A_n το κλασματικό εμβαδόν που είναι μαύρο μετά από την n -οστή επανάληψη. Τότε

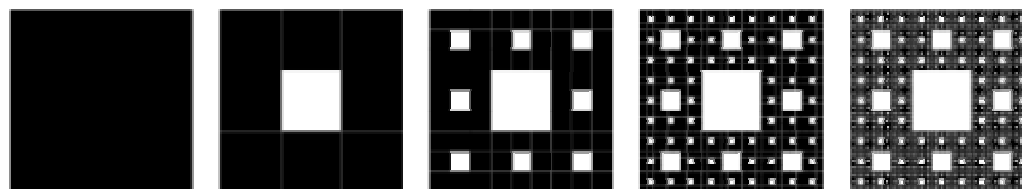
N_n	=	3^n
L_n	=	$(\frac{1}{2})^n = 2^{-n}$
A_n	=	$L_n^2 N_n = (\frac{3}{4})^n$.

Η διάσταση χωρητικότητας είναι

d_{cap}	=	$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n}$
	=	$\lg 3$
	=	$1.584962500 \dots$

(Wolfram 1984; Borwein and Bailey 2003, p. 46).

1.8.2 Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet)



Ένα fractal το οποίο κατασκευάζεται ανάλογα, αλλά χρησιμοποιώντας τετράγωνα αντί των τριγώνων.

Έστω N_n ότι είναι ο αριθμός των μαύρων τετραγώνων, L_n το μήκος μιας πλευράς ενός άσπρου τετραγώνου, και A_n το κλασματικό εμβαδόν των μαύρων τετραγώνων μετά από την n -οστή επανάληψη.

Τότε

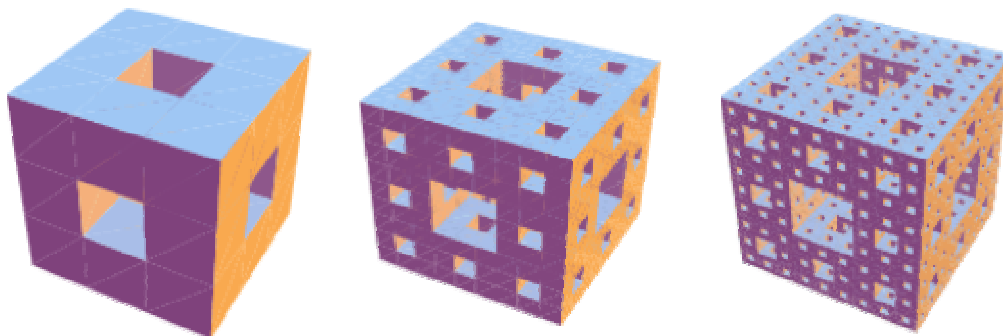
N_n	=	8^n
L_n	=	$(\frac{1}{3})^n = 3^{-n}$
A_n	=	$L_n^2 N_n = (\frac{8}{9})^n$.

Η διάσταση χωρητικότητας είναι επομένως

d_{cap}	=	$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n}$
	=	$\frac{3 \ln 2}{\ln 3}$
	=	$1.892789260 \dots$

² Οι πληροφορίες και τα σχήματα που περιέχονται στα επιλεγμένα μαθηματικά fractals προέρχονται από κατάλληλη αναζήτηση σε ιστοσελίδες της <http://mathworld.wolfram.com> και <http://en.wikipedia.org>

1.8.3 Το Σφουγγάρι του Menger



Ένα fractal το οποίο είναι το τρισδιάστατο και ανάλογο του τάπητα του Sierpinski. Έστω N_n ο αριθμός των γεμάτων πεδίων, L_n το μήκος μιας πλευράς ενός άδειου πεδίου, και V_n ο κλασματικός όγκος μετά από την n -οστή επανάληψη.

N_n	=	20^n
L_n	=	$(\frac{1}{3})^n = 3^{-n}$
V_n	=	$L_n^3 N_n = (\frac{20}{27})^n$

d_{cap}	=	$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n}$
	=	$\frac{\ln 20}{\ln 3}$
	=	2.726833028....

Η διάσταση χωρητικότητας είναι επομένως

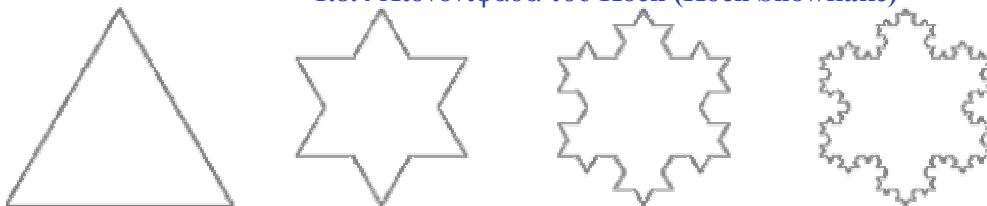
Το σφουγγάρι του Menger, εκτός από την ύπαρξη σαν fractal, είναι επίσης ένα ξεχωριστό αντικείμενο. Για όλα τα συμπαγή μονοδιάστατα αντικείμενα το τοπολογικό ισοδύναμο τους μπορεί να βρεθεί σε ένα σφουγγάρι του Menger (Peitgen et al. 1992). Η τοπολογική του διάσταση είναι ίση με ένα. Πρόκειται δηλαδή για μια γραμμή. Η Fractal διάστασή του είναι όπως είδαμε

$D \sim 2.7268$. Είναι, δηλαδή εμφυτευμένο στο χώρο, άρα: $1 < 2.7268 < 3$.



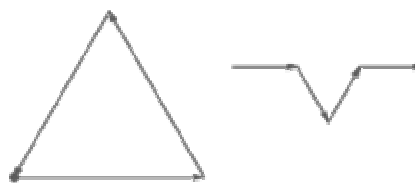
Η εικόνα παρουσιάζει μια μεταλλική εκτύπωση του σφουγγαριού του Menger του ψηφιακού γλύπτη Bathsheba Grossman (<http://www.bathsheba.com/>)

1.8.4 Χιονονιφάδα του Koch (Koch Snowflake)



Ένα fractal, γνωστό ως Νησί του Koch, που περιγράφηκε αρχικά από τον Helge von Koch το 1904. Κατασκευάζεται αρχίζοντας από ένα ισόπλευρο τρίγωνο, στο οποίο αφαιρούμε το εσωτερικό $1/3$ κάθε πλευράς, και κατασκευάζουμε εκ νέου ένα ισόπλευρο τρίγωνο στη θέση όπου η πλευρά αφαιρέθηκε, και επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία κατά τρόπο αόριστο.

Έστω N_n ο αριθμός πλευρών, L_n το μήκος μιας ενιαίας πλευράς, l_n το μήκος της



περιμέτρου και A_n το εμβαδόν της χιονονιφάδας μετά από την n -οστή επανάληψη.

Αν για $n = 0$ συμβολίσουμε με Δ το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου, και το μήκος μιας αρχικής πλευράς για $n = 0$ είναι ίσο με 1.

Τότε

N_n	$=$	$3 \cdot 4^n$
L_n	$=$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$
ℓ_n	$\equiv$	$N_n L_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$
A_n	$=$	$A_{n-1} + \frac{1}{4} N_n L_n^2 \Delta = A_{n-1} + \frac{3 \cdot 4^n}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \Delta$
	$=$	$A_{n-1} + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \Delta = A_{n-1} + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9 \cdot 9^{n-1}} \Delta$
	$=$	$A_{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta.$

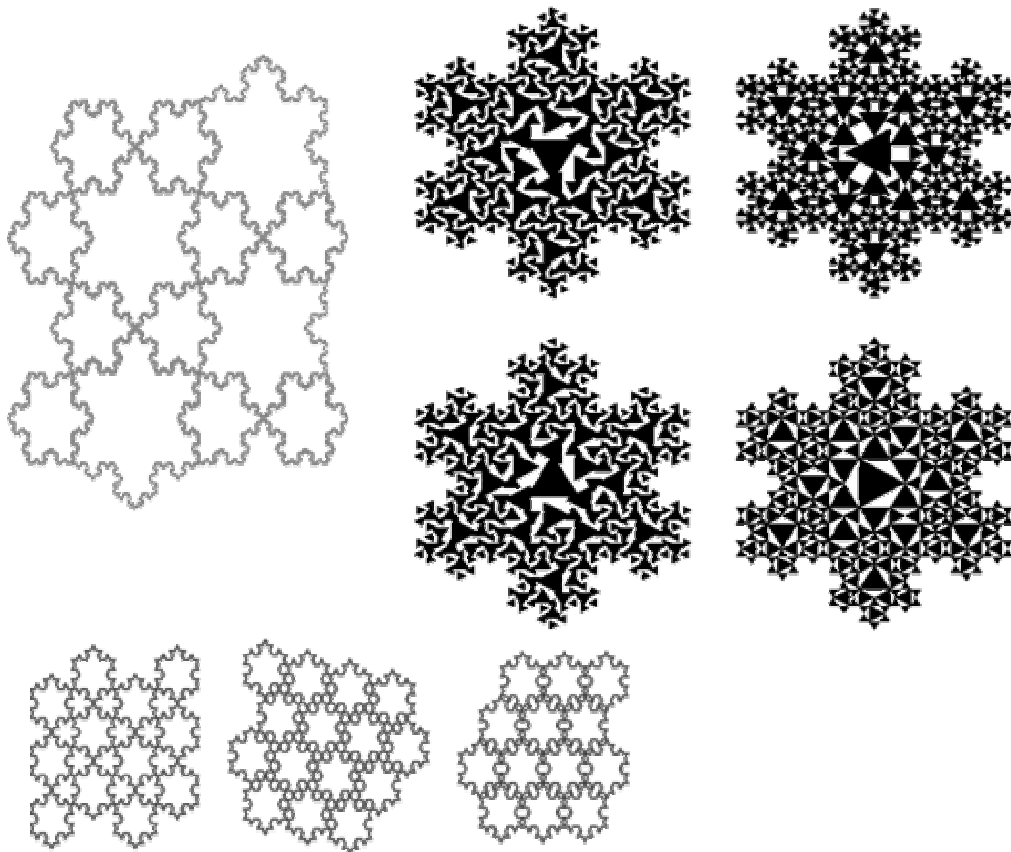
και η διάσταση χωρητικότητας είναι

d_{cap}	$=$	$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln(3^{-n})}$
	$=$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3 + n \ln 4}{n \ln 3}$
	$=$	$\frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{2 \ln 2}{\ln 3} = 1.261859507 \dots$

Αν υπολογίσουμε το εμβαδόν της χιονονιφάδας μετά την n -οστή επανάληψη έχουμε,

A_0	$=$	Δ
A_1	$=$	$A_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \Delta = \Delta \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \right\}$
A_2	$=$	$A_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^1 \Delta = \Delta \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 \right] \right\}$
A_n	$=$	$\left[1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] \Delta,$
έτσι αν $n \rightarrow \infty$,		
A	$\equiv$	$A_\infty = \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] \Delta = \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) \Delta$
	$=$	$\frac{8}{5} \Delta.$

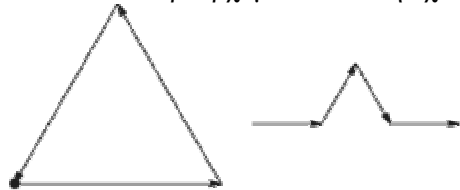
Μερικά παραδείγματα tilings που μπορούν να γίνουν με συνεχείς επαναλήψεις



1.8.5 Koch Antisnowflake



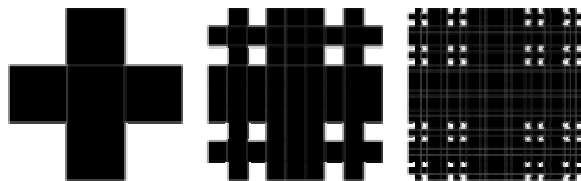
Ένα fractal προερχόμενο από την χιονονιφάδα του Koch .



Το εμβαδόν μετά την ν-οστή επανάληψη είναι

$$A_n = A_{n-1} - \frac{1}{3} \frac{\ell_{n-1}}{a} \frac{\Delta}{3^n}$$

1.8.6 Του Cantor το τετράγωνο Fractal



Το μέγεθος από το στοιχείο μονάδων μετά από την n -οστή επανάληψη είναι

$$L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

και ο αριθμός στοιχείων δίνεται από σχέση επανάληψης

$$N_n = 4N_{n-1} + 5(9^n)$$

όπου

$$N_1 \equiv 5$$

και τα πρώτα νούμερα των στοιχείων είναι 5, 65, 665, 6305, Όταν επεκτείνεται δίνει

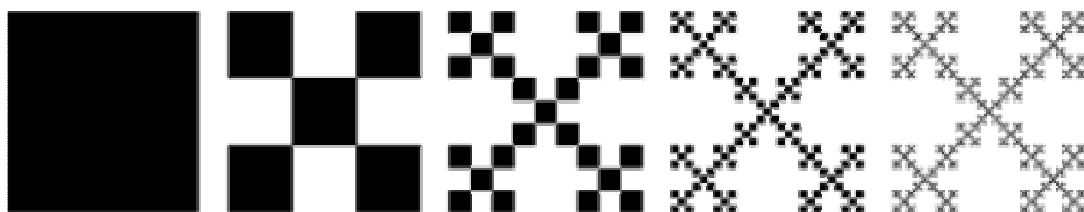
$$N_n = 5 \sum_{k=0}^n 4^{n-k} 9^{k-1} = 9^n - 4^n.$$

Η διάσταση χωρητικότητας είναι επομένως

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9^n - 4^n)}{\ln(3^{-n})} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9^n)}{\ln(3^{-n})} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{2 \ln 3}{\ln 3} = 2.$$

Το τετραγωνικό fractal του Cantor δεν είναι ένα αληθινό fractal

1.8.7 Box Fractal(anticross-stitch curve)



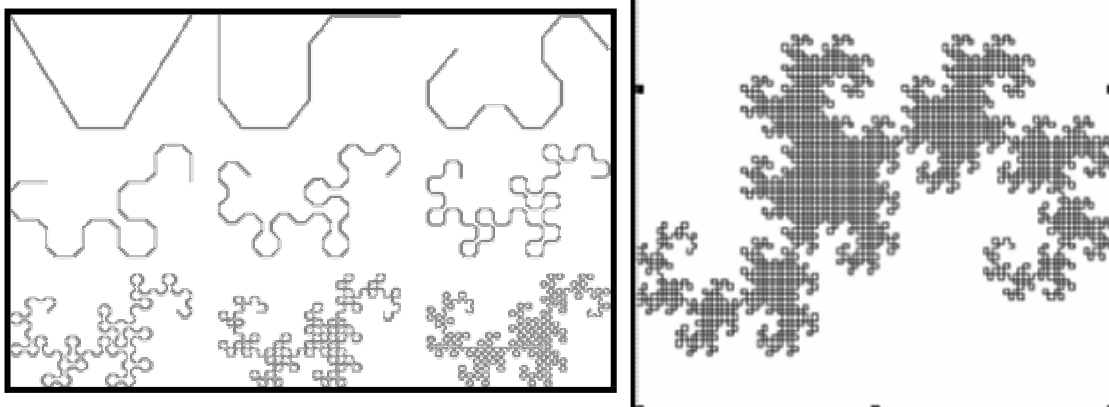
Έστω N_n ο αριθμός των μαύρων κουτιών (τετραγώνων) , L_n το μήκος μιας πλευράς ενός λευκού κουτιού (τετραγώνου)

N_n	=	5^n
L_n	=	$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$
A_n	=	$L_n^2 N_n = \left(\frac{5}{9}\right)^n.$

Η διάσταση χωρητικότητας είναι επομένως

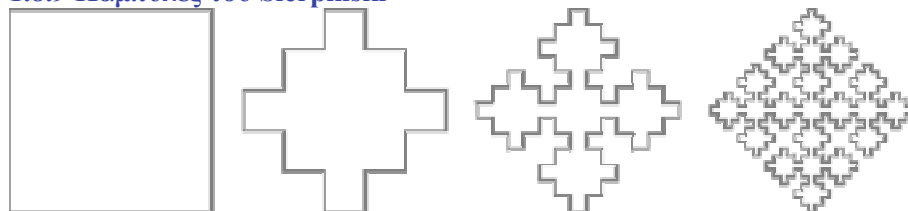
d_{cap}	=	$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^n)}{\ln(3^{-n})}$
	=	$\frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.464973521 \dots$

1.8.8 Dragon Καμπύλη

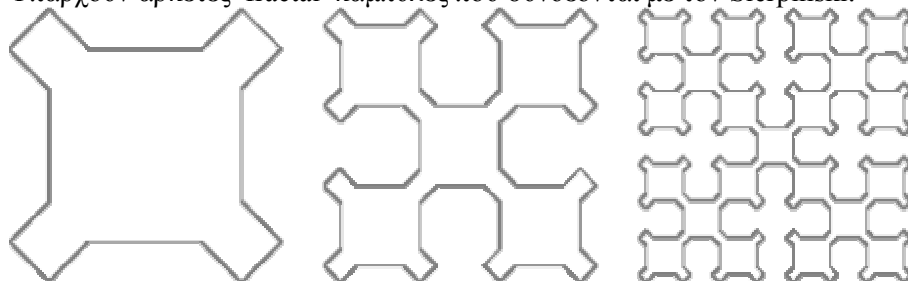


Μη τεμνόμενες καμπύλες που μπορούν να επαναληφθούν για να παραγάγουν όλο και περισσότερες στροφές Αυτή η διαδικασία είναι ισοδύναμη με το σχεδιασμό μιας ορθής γωνίας και στη συνέχεια αντικατάσταση κάθε μιας ορθής γωνίας με άλλη μικρότερη ορθή γωνία (Gardner 1978). Στην πραγματικότητα, η καμπύλη δράκων μπορεί να θεωρηθεί ως Σύστημα Lindenmayer

1.8.9 Καμπύλες του Sierpinski



Υπάρχουν αρκετές fractal καμπύλες που συνδέονται με τον Sierpinski.



Το εμβαδόν για μια σχετική καμπύλη που οφείλεται στον Sierpinski (1912) είναι

$$A = \frac{1}{3}(7 - 4\sqrt{2}).$$

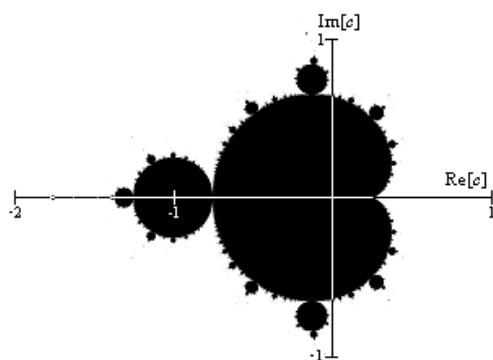
(Steinhaus 1999, pp. 102-103; Cundy and Rollett 1989; Wells 1991, p. 229).

1.8.10 Coastline Paradox(παράδοξο της ακτής)

Ο καθορισμός του μήκους της ακτής μιας χώρας δεν είναι όσο απλός όσο εμφανίζεται αρχικά, , όπως πρώτα εξετάστηκε από τον L. F. Richardson (1881-1953). Στην πραγματικότητα, η απάντηση εξαρτάται από το μήκος του κανόνα που χρησιμοποιείται για τις μετρήσεις. Ένας κοντύτερος κανόνας μετρά με μεγαλύτερη ακρίβεια τις στροφές των κόλπων και των κολπίσκων από έναν μεγαλύτερο, έτσι το κατ' εκτίμηση μήκος συνεχίζει να αυξάνεται όσο μειώνουμε το μήκος από τους κανόνες. Στην πραγματικότητα, μια ακτή είναι ένα παράδειγμα fractal δομής

1.9 Σύντομη αναφορά στα σύνολα Julia ,Mandelbrot

1.9.1 Mandelbrot set



στο σχήμα μια μαθηματική απόδοση του συνόλου Mandelbrot

<http://en.wikipedia.org>

το σύνολο Mandelbrot είναι ένα fractal που ορίζεται σαν σύνολο των σημείων c στο μιγαδικό επίπεδο (complex plane) (η ακολουθία δεν τείνει στο άπειρο $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$)

Το σύνολο Mandelbrot μπορεί να διαιρεθεί σε άπειρο σύνολο μαύρων συνόλων : το μεγαλύτερο σχήμα στο κέντρο είναι μια

καρδιοειδής καμπύλη. Υπάρχει ένα άπειρο μετρήσιμο σύνολο κοντινών κύκλων που είναι εφαιπόμενα στην καρδιοειδή, οι οποίοι ποικίλουν στο μέγεθος ασυμπτωτικά τείνοντας σε μηδενική διάμετρο. Κατόπιν κάθε ένας από αυτούς τους κύκλους έχει στη συνέχεια το δικό του (μετρήσιμο) άπειρο σύνολο μικρότερων κύκλων που διακλαδίζονται προς τα έξω. Η διαδικασία της διακλάδωσης μπορεί να επαναληφθεί κατά τρόπο αόριστο, παράγοντας ένα fractal



1.9.2 Ιστορία του συνόλου Mandelbrot

Το σύνολο του Mandelbrot ορίστηκε αρχικά το 1905 από τον Pierre Fatou. Ο Fatou μελέτησε τις επαναλαμβανόμενες διαδικασίες όπως

$$z \rightarrow z^2 + c$$

Αρχίζοντας από κάποιο σημείο z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, τα διαδοχικά σημεία μπορούν να παραχθούν με επανάληψη αν εφαρμόσουμε αυτόν τον τύπο. Ο Fatou συνειδητοποίησε ότι η τροχιά του $z_0 = 0$ κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό θα παρείχε κάποια ένδειξη για τη συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός τέτοιων συναρτήσεων μία για κάθε τιμή του c . Ο Fatou δεν είχε πρόσβαση σε έναν υπολογιστή ικανό να σχηματίσει τις τροχιές όλων αυτών των συναρτήσεων, αλλά προσπάθησε να τα αναπαραστήσει με το χέρι. Ο Fatou δεν είδε ποτέ την απεικόνιση αυτού που καλούμε τώρα Mandelbrot set όπως εμείς το βλέπουμε επειδή ο αριθμός των υπολογισμών απαιτείται για να το παραγάγει πολύ περισσότερο από ότι θα μπορούσε να υπολογιστεί με το χέρι. Ο Benoît Mandelbrot ήταν το πρώτο πρόσωπο που χρησιμοποίησε έναν υπολογιστή για να σχεδιάσει το σύνολο. Τα Fractals διαδόθηκαν από τον Mandelbrot το 1975 στο βιβλίο του Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Ο Mandelbrot χρησιμοποίησε τον όρο fractal για να περιγράψει διάφορα μαθηματικά φαινόμενα που φάνηκαν να εκθέτουν χαοτική ή συμπεριφορά που προκαλεί εκπλήξεις. Όλα αυτά τα φαινόμενα τα περιέλαβαν στον ορισμό κάποιας καμπύλης ή συνόλων μέσω της χρήσης μερικών επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων ή αλγορίθμων Το σύνολο Mandelbrot είναι ένα τέτοιο φαινόμενο.

1.9.3 Σχέση με τα σύνολα Julia

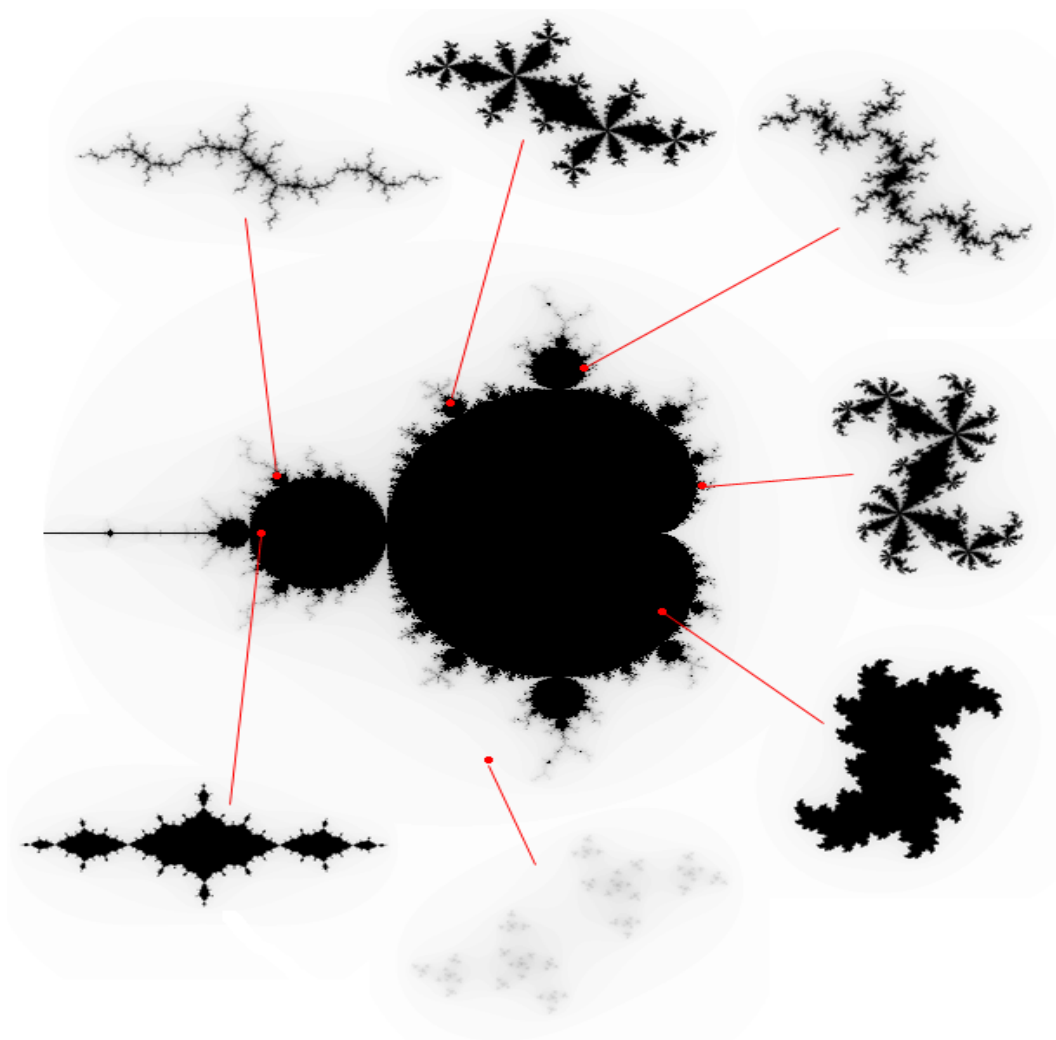


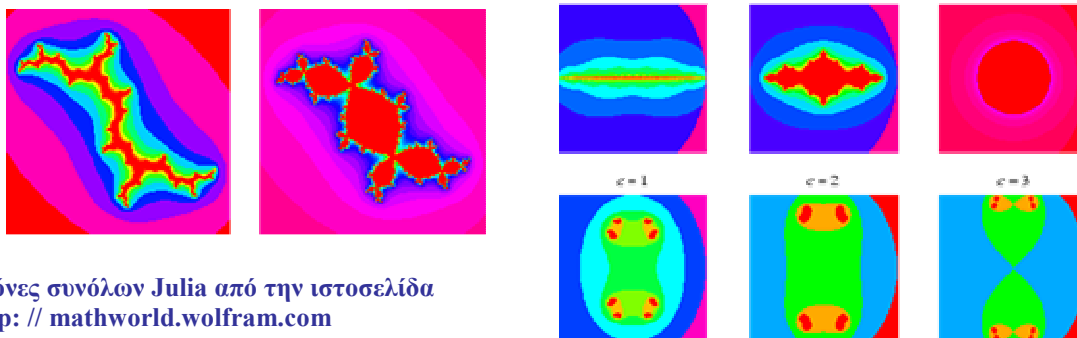
Τα σύνολα Julia πήραν το όνομά τους από τον Γάλλο Μαθηματικό Julia ο οποίος τα μελέτησε το 1918.

Το σύνολο Mandelbrot δημιουργήθηκε από τον Benoît Mandelbrot σαν δείκτης των συνόλων Julia. Κάθε σημείο στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοιχεί σε έναν διαφορετικό σύνολο Julia. Τα σημεία μέσα στο σύνολο Mandelbrot αντιστοιχούν ακριβώς στα συνδεδεμένα σύνολα Julia, και το εξωτερικό των σημείων αντιστοιχεί στα αποσυνδεδεμένα. Στο εσωτερικό τείνουν να μοιάζουν με απλές γεωμετρικές

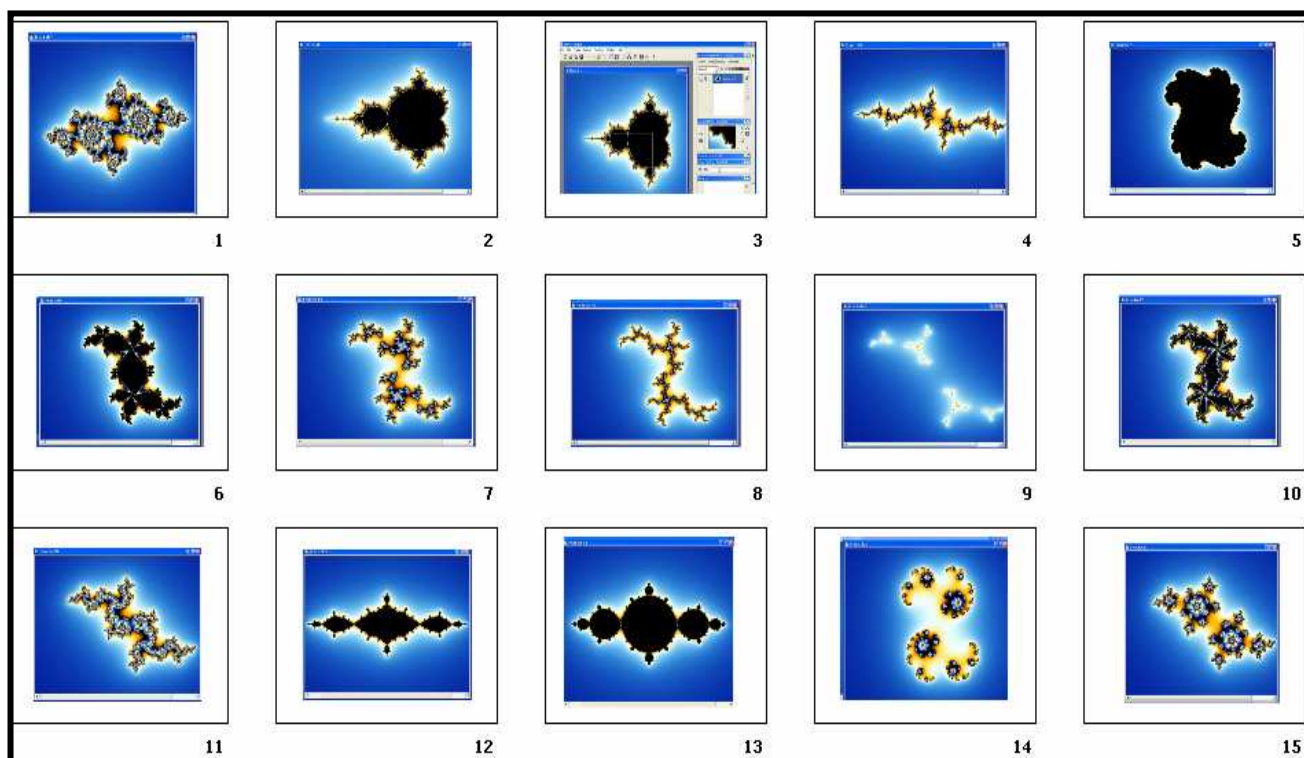
μορφές, ενώ στο εξωτερικό μοιάζουν με σκόνη που περιβάλλεται από σταγόνες χρώματος. Το σύνολο Mandelbrot επίσης περιέχει δομές που έντονα μοιάζουν με τα σύνολα Julia. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του c , η περιοχή του συνόλου Mandelbrot κοντά στο c μοιάζει με το κέντρο του συνόλου Julia με παράμετρο c .

Julia Set : η εικόνα κατασκευάστηκε από τον P.Bourke (1991)





εικόνες συνόλων Julia από την ιστοσελίδα
[http:// mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com)



επιλογή εικόνων fractals (Julia ,Mandelbrot sets) που έχουν κατασκευαστεί από την γράφουσα με το ultra fractal³

εικόνα 8 : το σύνολο Julia μπορεί για κάποια c να είναι το μόνο σύνολο σημείων που δεν τείνουν στο άπειρο. Στις περιπτώσεις αυτές το σύνολο Julia είναι μια πολύπλοκη συμπαγής καμπύλη δενδριτικής μορφής (μπορεί να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα)

εικόνες 12,13 : το σύνολο Julia είναι το σύνορο μιας ακολουθίας διαφορετικών περιοχών που μικραίνουν συνεχώς σε μια αυτοόμοια άπειρη ακολουθία νησίδων

εικόνες 14,15 : το σύνολο Julia που αποτελεί το σύνολο των μελανών περιοχών για τις οποίες οι επαναλήψεις της εξίσωσης δεν τείνουν στο άπειρο μπορεί να είναι και πλήρως διαχωρισμένο δηλαδή μη συνεκτικό (οι επεξηγήσεις αναφέρονται στο βιβλίο του T. Μπούντη)

³ υπάρχει demo έκδοση στο internet

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΟΡΙΑ ΚΑΙ FRACTALS

2.1 Ένας δρόμος προς το άπειρο από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη μέχρι τα fractal

‘εί πολλά ἐστίν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττωνα. εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστὶ, πεπερασμένα ἂν εἴη. εἰ πολλά ἐστίν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· αἰεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστὶ, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξὺ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστὶ’. καὶ οὕτως μὲν τὸ κατὰ τὸ πλῆθος ἄπειρον ἐκ τῆς διχοτομίας ἔδειξε. Δηλαδή "Αν υπάρχουν πολλά, τότε αναγκαία είναι όσα είναι, οὔτε περισσότερα οὔτε λιγότερα. Αν όμως είναι όσα είναι, τότε είναι πεπερασμένα. Αν υπάρχουν πολλά, τότε τα πράγματα που υπάρχουν είναι άπειρα, γιατί πάντα υπάρχουν και ὅλα πράγματα ανάμεσα στα όσα υπάρχουν, και ανάμεσα σ’ εκείνα πάλι ὅλα. Επομένως, τα πράγματα που υπάρχουν είναι άπειρα." οὐ μὴν ἄλλὰ καὶ Ξενοφάνης καὶ Ζ. ὁ Ἐλεάτης καὶ Δημόκριτος κατ' αὐτοὺς σκεπτικοὶ τυγχάνουσιν ... Ζ. δὲ τὴν κίνησιν ἀναιρεῖ λέγων τὸ κινούμενον οὐτ' ἐν αὐτῷ ἐστὶ τόπω κινεῖται οὐτ' ἐν αὐτῷ μὴ ἐστὶ'. ΖΗΝΩΝΟΣ ΠΕΡΙ ΦΥΣΕΩΣ SIMPL. Phys. 140, 34 p, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρά μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι'. ἐν αὐτῷ δεικνυσὶν ὅτι 'εἰ πολλά ἐστὶ, καὶ μεγάλα ἐστὶ καὶ μικρά· μεγάλα μὲν ὥστε ἄπειρα τὸ μέγεθος εἶναι, μικρά δὲ οὕτως ὥστε μὴθὲν ἔχειν μέγεθος' [B 1]. ἐν δὲ τούτῳ δεικνυσὶν, ὅτι οὐ μήτε μέγεθος μήτε πάχος μήτε ὄγκος μῆθεις ἐστίν, οὐδ' ἂν εἴη τοῦτο. TLG (ZENO fragmenta)

2500 χρόνια περίπου πριν ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας διατύπωσε τον ισχυρισμό που έμεινε γνωστός στην ιστορία σαν Παράδοξο του Ζήνωνα . Όπως γράφει ο Δ. Αναπολιτάνος στο βιβλίο του «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» (σελίδα 59)ο Ζήνωνας έχοντας σαν πρόθεση του την υπεράσπιση του Παρμενίδειου μονιστικού φιλοσοφικού συστήματος από τις επιθέσεις των πλουραλιστών της εποχής παρήγαγε μια σειρά από παράδοξα που συνδέονται με την οντολογική υφή του συνεχούς και την αδυναμία του ανθρώπινου όντος να περατώσει μια οποιαδήποτε άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς. ἔστι δ' οὗτος ὅτι τὸ βραδύτερον οὐδέποτε καταληφθήσεται θεὸν ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀνογκάζον ἐλθεῖν τὸ διώκον, ὅθεν ὥρμησε τὸ φεύγον, ὥστ' αἰεὶ τι πρόχειν ἀνογκάζον τὸ βραδύτερον. ἔστι δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαπρεῖν μὴ δίχα τὸ προσλαμβάνομενον

Περιγράφουμε ένα από τα παράδοξα :Ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας πρόκειται να διανύσει την απόσταση AB . Για να τη διανύσει θα πρέπει να διανύσει την απόσταση $AA_1=AB/2$ στην συνέχεια την $A_1A_2=AB/4$, την $A_2A_3=AB/8$ και ούτω καθεξής Σύμφωνα με τον Ζήνωνα μια τέτοια διαδικασία είναι αδύνατη , γιατί για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση AB θα πρέπει να περάσει από ένα άπειρο πλήθος σημείων , δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία μεταβάσεων . Οι μαθηματικοί φιλόσοφοι της εποχής είχαν αναπτύξει την ιδέα άπειρων αλλά συνεχώς ελαττουμένων διαστημάτων.

Μια περίπτωση της έννοιας του ορίου βρίσκεται στην περίπτωση των **πλευρικών** και **διαμετρικών** αριθμών .Για να σχηματίσουμε την πλευρά και την διάμετρο του μεγαλύτερου τετραγώνου αν α είναι πλευρά και δ η διάμετρος του πρώτου τετραγώνου εργαζόμαστε ως εξής :

Αριθμοί πλευρικοί	Αριθμοί διαμετρικοί
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
.....	

Οι περιττής τάξεως λόγοι (διαμέτρου προς πλευρά) αυξάνονται συνεχώς και οι άρτιοι συνεχώς μειώνονται .Έχουμε δηλαδή δύο ακολουθίες αριθμών που όταν το ν τείνει στο άπειρο αυτές συμπίπτουν με το $\sqrt{2}$.Βέβαια ο Θεών δεν αναφέρεται ούτε σε φράγματα ακολουθίας , ούτε περί εγκιβωτισμού της $\sqrt{2}$.Οι σύγχρονοι ερμηνευτές αναπτύσσουν τους λόγους των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών δια των συνεχών κλασμάτων :

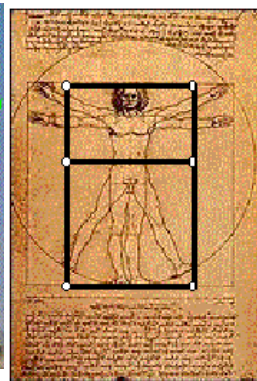
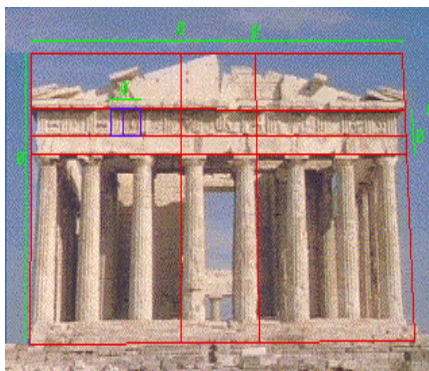
$$\frac{1}{1}=1, \quad \frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{15}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad \frac{17}{12}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \quad \frac{41}{29}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} \dots\dots$$

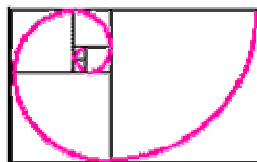
«Ενταύθα βλέπομεν ὅτι χρησιμοποιούνται δύο θεμελιώδεις έννοιαι των μαθηματικών, η έννοια της συνεχείας και η έννοια του δυνάμει απείρου, ως αὐται διευτύθησαν μαθηματικῶς υπό του Εὐδόξου μεν ἢ πρώτη και υπό του Αριστοτέλους ἢ δευτέρα και ως αὐται χρησιμοποιούνται και σήμερον και αποτελοῦσι το θεμέλιον των ανωτέρων μαθηματικών. Δια την δεύτερον έννοιαν του δυνάμει απείρου υπενθυμίζομεν την διατύπωσιν του Αριστοτέλους: « ου διέξεισι το πεπερασμένον » (Φυσικῆς ακροάσεως Γ 206 1).» Ε. Σταμάτης (1953 σελ.10) Όπως γράφει ο Ε. Σταμάτης (1953 σ.12) σαν σχολιασμό στη ρήση του Θέωνα : « ὥσπερ οὖν πάντων των σχημάτων κατά τον ανωτάτω και σπερματικόν λόγον ἢ μονάς ἀρχει, οὕτω και της διαμέτρου και της πλευράς λόγος εν τη μονάδι εὐρίσκεται» "Ενταύθα ὁμως πρόκειται, περί μιας καθαρῶς γεωμετρικῆς προτάσεως, χρησιμοποιούσης την έννοιαν των ορίων, του απείρου και της συνεχείας την οποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει, κατά τους Πυθαγορείους πιθανόν, υπό βιολογικήν ἔκφρασιν.»

Μέσα από διαδικασίες προσέγγισης μέτρησης ἢ που αφορούσαν την πυκνότητα του συνόλου των ρητῶν οι Εὐδόξος, Δημόκριτος, Ιπποκράτης ο Χίος, και κυρίως ο Αρχιμήδης τόλμησαν να αγγίξουν την έννοια του ορίου . Ερχόμενοι ὁμως σε επαφή με την έννοια του απείρου, επινοοῦσαν μεθόδους για να την παρακάμψουν (ὅπως η μέθοδος διπλῆς αντίφασης). Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου με την εγγραφή των κανονικῶν πολυγώνων με συνεχῶς αυξανόμενο αριθμό πλευρῶν από τον Ιπποκράτη τον Χίο (430 π.Χ) υπήρξε μια μέθοδος υπολογισμού του ορίου στην οποία επιτρέπεται η απόδειξη των αποτελεσμάτων χωρίς να είναι απαραίτητη η αντιμετώπιση της έννοιας του απείρου .

Ο Εὐδόξος (408-355π.Χ) διατυπώνει την περίφημη «αρχή της εξάντλησης». Η μέθοδος (στοιχεία Ευκλείδη, βιβλίο 10, πρόταση 1) λέει: «δοθέντων δύο άνισων μεγεθῶν, εάν από του μεγαλύτερου αφαιρεθεῖ μεγαλύτερον του ημίσεως και από του υπολοίπου μεγαλύτερον του ημίσεως και τούτο γίνηται πάντοτε, θα υποληφθεῖ μέγεθος τι, το οποίον θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.». Δηλαδή με τη διαδοχική διχοτομική αφαίρεση μπορούμε να επιτύχουμε ένα μέγεθος τόσο μικρό ὅσο επιθυμούμε . Ο Αρχιμήδης και οι ἄλλοι Έλληνες μαθηματικοί ὅπως ἔχουμε ἤδη αναφέρει δεν θεωροῦσαν ὅτι η μέθοδος συνεχιζόταν για ἄπειρο αριθμό βημάτων (μέχρι να συντελεστεῖ η «εξάντληση »του αρχικοῦ μεγέθους) .

Θα ἦταν παράλειψη να μην αναφερθεῖ ἔστω και εν συντομία η χρυσή τομή (και το χρυσό ορθογώνιο). Το πρόβλημα της διαιρέσεως ενός τμήματος σε δύο μέρη ἔτσι ὥστε το μεγαλύτερο τμήμα να είναι μέση ἀνάλογος ἀνάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα γνωστό ως πρόβλημα της **χρυσῆς τομῆς** ἀνάγεται στην σχολή των Πυθαγορείων ως ρίζα της εξίσωσης $x^2 + ax = a^2$ ἢ στον Θεαίτητο το 386 π.Χ (με την κατασκευή του πενταγώνου)





.....ἀμετέρῳι ὑπὸ πειραδόντι τετρακτὸν, πινὸν ἀνάσσει φύσεως..... γνώσι δ', ἡ θέμις ἐστὶ, φύσιν περὶ παντὸς αἰσίν, ὥστε σε μήτε ἀέλπ' ἐλπίζει μήτε τι λήθειν.....(line 52-Carmen Aureum Pythagoras, TLG) Ὅπως αποδεικνύεται ἀπὸ τὰ κείμενα ὁ Πυθαγόρας εἶχε ασχοληθεῖ,εξετάσει καὶ προσπαθῇ νὰ ἐρμηνεύσει τὴν αὐτομοιότητα τῆς φύσης.

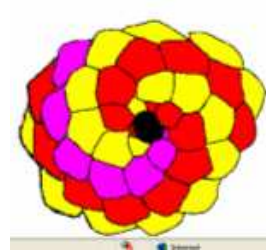
Ἡ μορφή του κοχλίου που βλέπουμε στο σχήμα, με την αντίστοιχη γεωμετρική αναπαράστασή της που παράγεται με την κατασκευή χρυσών ορθογωνίων στο εσωτερικό του αρχικού, αποτελούν μια διασύνδεση των φυσικών fractals με την έννοια του ορίου.

οι εικόνες είναι ἀπὸ τὴν ἱστοσελίδα <http://teacherlink.org/home.html>
(Center for Technology and Teacher Education)

Το ὄριο τῶν λόγων τοῦ ἐπόμενου πρὸς τὸν προηγούμενο στους ἀριθμούς 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, γνωστὴς ὡς **ακολουθία Fibonacci**... ἰσούται με τὴν τιμὴ τῆς ρίζας τῆς εξίσωσης $x^2 + ax = a^2$ δηλαδὴ εἶναι ἡ Χρυσὴ Τομή ἢ Χρυσὴ ἀναλογία, ἀριθμὸς γνωστὸς διεθνῶς με τὸ γράμμα $\phi = 1.618033989$...Ἡ ἀναπαράσταση τῆς ἀκολουθίας με τὴν μορφή συνεχῶν κλασμάτων :

$$f_1 = 1, f_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2, f_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, f_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \dots\dots\dots$$

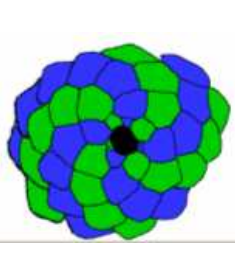
Ὁ συμβολισμὸς προέρχεται ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ τοῦ ονόματος τοῦ γλύπτη Φειδία που κατασκεύασε τὸν Παρθενῶνα . Οἱ ἀριθμοὶ Fibonacci εἶναι τὸ ἀριθμητικὸ



σύστημα τῆς φύσης. Ἡ φύση δὲν χρησιμοποιεῖ τὴν ἀκολουθία Fibonacci ἀλλὰ αὐτὴ ἐμφανίζεται ὡς ἀποτέλεσμα μιᾶς φυσικῆς διαδικασίας .Ὁ ἀντίστροφος τῆς Χρυσῆς Τομῆς εἶναι ὁ $1/\phi = 0.618033989$, με ἀποτέλεσμα νὰ ἰσχύει: $1/\phi = \phi - 1$. Χρυσὸ Ὀρθογώνιο ὀνομάζεται ἓνα ὀρθογώνιο τετράπλευρο τοῦ οὗοιου ὁ λόγος τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσος με $1/\phi$.Ἡ ἀκολουθία Fibonacci παράγεται ἀπὸ τὴ σχέση $f(1) = f(2) = 1, f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

The Fibonacci numbers are Nature's numbering system. They appear everywhere in Nature, from the leaf arrangement in plants, to the pattern of the florets of a flower, the bracts of a pinecone, or the scales of a pineapple. The Fibonacci numbers are therefore applicable to the growth of every living thing, including a single cell, a grain of wheat, a hive of bees, and even all of mankind
Stan Grist

<http://www.stangrist.com/fibonacci.htm>



(Οι αριθμοί Fibonacci είναι το αριθμητικό σύστημα της φύσης. Εμφανίζονται παντού στη φύση, από τη διάταξη των φύλλων στα φυτά μέχρι το μοτίβο των πετάλων των ανθών, τις πευκοβελόνες, ή τα στρώματα του φλοιού ενός ανανά. Φαίνεται πώς οι αριθμοί Fibonacci σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού, ενός κυττάρου, ενός σπυριού σταριού, μιας κυψέλης μελισσών, ακόμα της ίδιας της ανθρωπότητας.)

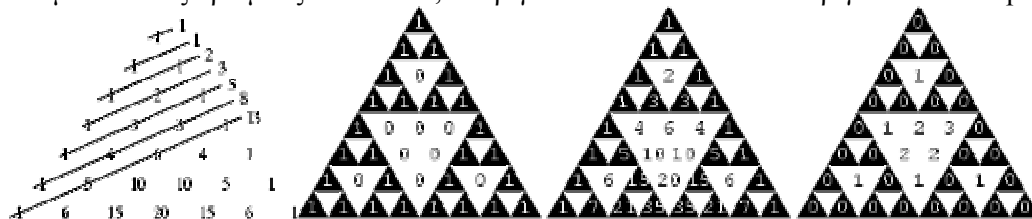
εικόνες ενός κουνουπιδιού, μπρόκολου, κουκουναριού. Η κάτοψή τους μοιάζει με πολύγωνο στο οποίο μπορούμε να δούμε ένα κεντρικό σημείο, τις επαναλήψεις και ακόμα ότι οργανώνονται σε σπείρες γύρω από αυτό το κέντρο και στις δύο κατευθύνσεις.



(*Fibonacci spirals*) οι εικόνες είναι από την ιστοσελίδα

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.K.nott/Fibonacci/fibnat.html#golden>

Και εδώ θα κάνουμε μια παρατήρηση ανάμεσα στους αριθμούς Fibonacci, το τρίγωνο του Pascal και το τρίγωνο του Sierpinski.



εικόνα : Το διαγώνιο άθροισμα των αριθμών του τριγώνου του Pascal μας δίνει τους αριθμούς Fibonacci. Αν στην θέση των ζυγών αριθμών του τριγώνου του Pascal θέσουμε το 0 και στην θέση των μονών τη 1 τότε προκύπτει η δομή του τριγώνου του Sierpinski.

Η τάση των αρχαίων Ελλήνων να ασχολούνται με γεωμετρικές οντότητες και με την επίλυση προβλημάτων προσαρμοσμένων σε αυστηρά γεωμετρικό πλαίσιο ήταν ένας λόγος που τους απέτρεψε να ασχοληθούν με την έννοια του αριθμητικού ορίου και μια αιτία καθυστέρησης της ανάπτυξης των συναρτήσεων. Η επιμονή της σχολής του Πλάτωνα για την σταθερότητα των μαθηματικών αντικειμένων ως ιδεών και η βάσει της αρχής του Ευδόξου μη αποδοχή των απειροελάχιστων μεγεθών από την γεωμετρία είναι ένας επιπλέον πολιτισμικός λόγος για την μη ανάπτυξη του ορίου αριθμών. Οι προσεγγιστικές μέθοδοι των αρχαίων ελλήνων για την έννοια του ορίου, ουσιαστικά επικράτησαν και εφαρμόζονταν μέχρι τον 16^ο αιώνα. Μια πραγματική αλλαγή στις ιδέες ξεκίνησε τον 17^ο αιώνα προερχόμενη από ανάγκες αντιμετώπισης προβλημάτων Φυσικών επιστημών. Ο Ευδόξος, ο Αρχιμήδης είχαν φροντίσει με την αυστηρή μέθοδο της εξάντλησης να αποκαταστήσουν όλες τις πιθανές διαμάχες γύρω από τα αδιαίρετα ή απείρως μικρά κομμάτια. Η χρήση των απειροστών δημιούργησε έντονη διαμάχη τον 17^ο αιώνα. Ο Newton χρησιμοποιεί το θ για να συμβολίσει την απειροελάχιστη μεταβολή. Ο Berkley διερωτάται: Τι είναι το θ , το μηδέν; αν ναι τότε δεν έχουμε δικαίωμα να διαιρέσουμε με αυτό αν όχι τότε τι λάθος κάνουμε διώχνοντας το... όταν κάποιος λέει ότι οι αυξήσεις είναι μηδενικές ή ότι δεν υπάρχουν άλλες αυξήσεις, η προηγούμενη υπόθεση που είχε την έννοια ότι οι αυξήσεις ήταν κάτι ή ότι υπήρχαν αυξήσεις χάνεται.....

Κανένας μαθηματικός δεν κατάφερε να απαντήσει στον Berkley με ικανοποιητικό τρόπο. Κάποιος χρησιμοποιεί τον όρο απειροστό για να απλουστεύσει τις εκφράσεις. Δεν θα λέγαμε επομένως ότι μια ποσότητα είναι απείρως μικρή ούτε προτού αυτή εξαφανιστεί ούτε μετά, αλλά την στιγμή που εξαφανίζεται (D'Alembert στο άρθρο του *Differentiel εγκυκλοπαίδεια Methodique*)

Πίσω από την όλη διαμάχη υπήρχε ένας έντονος προβληματισμός σχετικά με την έννοια του ορίου. Οι Newton και Leibniz έβρισκαν σωστά παραγώγους των συναρτήσεων αλλά δεν μπορούσαν να τις εξηγήσουν με κατάλληλες αποδείξεις. Το 1797 ο Lagrange προσπαθεί να απελευθερώσει την Ανάλυση από τα απειροστά και να θεμελιώσει ένα νέο κλάδο των μαθηματικών την άλγεβρα των άπειρων σειρών (το οποίο κατά Cauchy ήταν σοβαρό λάθος αφού δεν μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόματα την άλγεβρα των πεπερασμένων ποσοτήτων

για άπειρες ποσότητες.) Οι Cauchy, Riemann και Weierstrass θεμελίωσαν αυστηρά τον απειροστικό λογισμό χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των ανισοτήτων. Για το απειροστό ο Cauchy λέει τα εξής:

Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν (Boyer 1939 .σελ..279)

Η μεταφυσική χρήση των απειροστών όπως την αντιλαμβάνονταν οι Newton, Leibniz παίρνει τέλος. Ο Cauchy ορίζει το άπειρο ως μεταβλητή ποσότητα που οι τιμές της μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από ένα οσοδήποτε μεγάλο αριθμό. Για τον Cauchy:

Αν δοθεί κάποιο $\varepsilon > 0$ τότε μπορεί να βρει κάποιος ένα n , τέτοιο ώστε κάθε μερικό άθροισμα με περισσότερους από n όρους να διαφέρει από το άθροισμα της σειράς λιγότερο από ε .

Αν και ο Cauchy έδωσε τις έννοιες του απειροστικού λογισμού στην παρούσα γενική τους μορφή ο Weierstrass (1815-1897) ήταν εκείνος που έδωσε την αυστηρή θεμελίωση και διατύπωση των ορισμών και εννοιών του απειροστικού λογισμού. Κατά τον Boyer (1939) ο Weierstrass ήταν αυτός που εξοστράκισε αποτελεσματικά από τον απειροστικό λογισμό την ιδέα του απειροστού.

2.2 Το άπειρο κατά τον Αριστοτέλη και η έννοια του ορίου

Για το Αριστοτέλη η ανάγκη να διερωτηθούμε γύρω από το άπειρο προέρχεται από τις εξής πηγές

- ✱ Από την επαγωγικής υφής πίστη μας πως ο χρόνος είναι άπειρος
- ✱ Από την δυνατότητα ύπαρξης διαδικασιών τμήσης εκτεταμένων μεγεθών όπου ο αριθμός των πράξεων τμήσης χωρίς να μπορεί να είναι άπειρος δεν είναι φραγμένος προς τα άνω.
- ✱ Από την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς κάθε αισθητού αντικειμένου
- ✱ Από την αντίληψη πως οτιδήποτε έχει όρια, οριοθετείται πάντα από κάτι άλλο που δεν αποτελεί μέρος του
- ✱ Από το απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης που συνεπάγεται το απεριόριστο των νοητικών κατασκευών

Οι διαδικασίες που κατά τον Αριστοτέλη είναι υπεύθυνες για την εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου είναι δυο: η αθροιστική και η διαιρετική. Η αθροιστική διαδικασία μπορεί να μας οδηγήσει στη θεώρηση πεπερασμένων αντικειμένων οσονδήποτε μεγάλων διαστάσεων. Για τον Αριστοτέλη άπειρα αντικείμενα δεν υπάρχουν και έχει νόημα μόνο η δυνητική σπουδή του απείρου. **Το πραγματικό άπειρο, σαν μαθηματικό αντικείμενο, είναι αποτέλεσμα νοητικού άλματος**, όπου πια το προηγούμενο άπειρο σύμπαν αποτελεί αντικείμενο στα πλαίσια ενός νέου σύμπαντος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας διαδικασίας είναι η αντικειμενοποίηση του σύμπαντος των φυσικών αριθμών στα πλαίσια της κατά Zermelo – Fraenkel θεωρίας των συνόλων. (Δ. Αναπολιτάνος - Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών σελ.62)

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη τα εκτεταμένα μεγέθη δεν είναι τελειωμένα, πραγματικά άπειρα με την έννοια που διαθέτουν πέρατα. Παρά ταύτα υπάρχει τρόπος να θεωρηθούν σαν δυνάμει δυνητικά άπειρα δεδομένου πως μπορούν να τμηθούν επανειλημμένα.

Μέχρι τον D'Alembert οι μαθηματικοί αποφεύγουν να χρησιμοποιήσουν έννοιες που εμπεριέχουν το άπειρο και όπως αναφέρει ο ίδιος « κάποιος μπορεί να τα καταφέρει εύκολα στον Λογισμό χωρίς την μεταφυσική του απείρου » και ότι « ένα όριο δεν μπορεί να συμπίπτει ποτέ ή δεν γίνεται ίσο με την ποσότητα που είναι το όριο αλλά την προσεγγίζει και μπορεί να διαφέρει από αυτήν τόσο λίγο όσο κάποιος θέλει ».

Από την εποχή του Wallis το σύμβολο του ∞ άρχισε να χρησιμοποιείται αλλά δεν είχε δοθεί κανένας συγκεκριμένος ορισμός. Ο ίδιος θεωρούσε το ∞ ως τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ή το άθροισμα όλων των θετικών ακεραίων. Η ανάπτυξη της έννοιας του ορίου και των μαθηματικών γενικότερα προϋποθέτει μια θεωρία για το άπειρο. Το άπειρο υπεισέρχεται είτε στη διαδικασία εύρεσης ενός ορίου ως άπειρο πλήθος βημάτων είτε ως αποτέλεσμα της διαδικασίας. Η θεωρία του Cantor για τα άπειρα αριθμήσιμα σύνολα στην οποία το άπειρο καθορίζεται από τον πληθικό αριθμό των συνόλων προσπάθησε να δώσει στο άπειρο μια πιο

μαθηματική ερμηνεία. Η έννοια του απείρου εξακολουθεί να δημιουργεί σύγχυση ακόμα και στην ορολογία του Fischbein (1979) στην οποία το δυνητικό άπειρο είναι μια αρχική διαίσθηση ενσωματωμένη στην επιστημολογική μας αντίληψη. Κατά τον Tall (1980) υπάρχει το πληθικό άπειρο, το διατακτικό άπειρο και η έννοια του μη συμβατικού απείρου και όλα αυτά αποτελούν λογικές οντότητες που συντελούν στην μελέτη προηγμένων μαθηματικών.

2.3 Η έννοια της διαίσθησης -Αρχικές διαισθήσεις για το άπειρο και τα όρια

“And so any human knowledge begins from intuition, from there it goes on with the shaping of concepts and it ends with ideas” Kant

...οποιαδήποτε ανθρώπινη γνώση αρχίζει από την διαίσθηση, από εκεί συνεχίζει με την διαμόρφωση των εννοιών και τελειώνει με τις ιδέες..Kant

Ένας ουσιώδης στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη από τους μαθητές της δεξιότητας χειρισμού των διαδικασιών (επίλυσης προβλημάτων). Αυτός ο σκοπός είναι, πράγματι, μια αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη των άλλων σκοπών, εφόσον οι υπολογισμοί γίνονται με το χέρι, αλλά συχνά οδηγεί σε πρόωρη αυτοματοποίηση των αλγορίθμων, που βασίζεται σε εσφαλμένη ή ανεπαρκή κατανόηση των εννοιών (Davis, 1988, Dreyfus, 1991, Hiebert & Lefevre, 1986, Lehtinen & Savimäki, 1993, Schoenfeld, 1989, Wertheimer, 1959).

Οι έννοιες του απειροστικού λογισμού, όπως το όριο των ακολουθιών και των πραγματικών συναρτήσεων εισάγονται γενικά τα τελευταία δύο χρόνια του κύκλου σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με φορμαλιστικό τρόπο, που περιλαμβάνει τα θεωρήματα και εμπλουτίζεται από τις τεχνικές λεπτομέρειες υπολογισμού του ορίου. Η εφαρμογή τέτοιων εννοιών εν τούτοις, περιορίζεται συχνά σε στερεότυπες ασκήσεις που σκοπό δεν έχουν την κατανόηση του ορίου ως έννοιας αλλά την κατανόηση μεθόδων για τον υπολογισμό των ορίων. Κατά συνέπεια, η εκμάθηση είναι κάπως μηχανική και επιφανειακή. Οι Πατρώνης και Σπανός γράφουν στις « Σύγχρονες Θεωρήσεις και έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία »(2000 σελ.80) **Κάθε μαθηματική έννοια που περιέχει μια οριακή διαδικασία είναι δυνατόν να κατανοηθεί μόνο όταν οι μαθητές βιώσουν αυτή τη διαδικασία και μάλιστα με διάφορους τρόπους και από πολλές πλευρές, όπως με γεωμετρικές εικόνες αλλά και με αριθμητικές δοκιμές.όμως οι πιο σημαντικές διαδικασίες, που πρόκειται να διδαχθούν πρέπει να αντιμετωπιστούν νοητά με συμμετοχή της σκέψης και της φαντασίας. Λαμβάνοντας υπόψη την πολυπλοκότητα και τη σημασία τέτοιων εννοιών, εξετάζουμε αν μια βαθμιαία προσέγγιση είναι κατάλληλη, που επιδιώκει να αναπτύξει μια κατανόηση από τα πρώτα έτη στο σχολείο, έχοντας ως αφετηρία τις πρώτες διαισθήσεις των παιδιών των σχολείων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Σε αυτό το πλαίσιο, θα υπογραμμίζαμε τη σημασία της προσέγγισης. Η έρευνά μας, όπως και άλλες στον τομέα των δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, δείχνει την ανάγκη για την ανάπτυξη τέτοιας διδασκαλίας»**

Στο *A lengthy process for the establishment of the concept of limit* οι ερευνήτριες Lucia Grugnetti, και Angela Rizza(2002) γράφουν:

«η διδασκαλία μιας έννοιας πρόκειται να είναι αποτελεσματική, αν η διαισθητική γνώση του μαθητή που αποκτιέται σε ένα εξωσχολικό πλαίσιο ή σε προηγούμενες μελέτες δεν απορριφθεί. Ειδικότερα ο Fischbein (1973, 1987) αναφέρεται σε τέτοιες διαισθητικές ιδέες σαν "αρχικές διαισθήσεις", υπογραμμίζοντας τη σημασία στήριξης και ενίσχυσης αυτών με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέψουν να εξελιχθούν στο στάδιο "δευτεροβάθμιων διαισθήσεων".»

Στο δοκίμιο του *Towards a disciplined intuition* ο Bruner αναφέρεται στη διαίσθηση ως προσέγγιση λιγότερο αυστηρή όσον αφορά την απόδειξη, περισσότερο προσανατολισμένη σε ολόκληρο το πρόβλημα παρά σε συγκεκριμένα μέρη, λιγότερο λεκτική όσον αφορά την αιτιολόγηση και βασισμένη σε μια αυτοπεποίθηση για δράση με ανεπαρκή γεγονότα διαχωρίζοντας την από την αναλυτική προσέγγιση. Η ύπαρξη των διαφορετικών τρόπων σκέψης προτείνει μια διάκριση μεταξύ των διαισθητικών νοητικών διαδικασιών και της λογικής σκέψης που απαιτείται από τα μαθηματικά. Μια διαίσθηση φτάνει πλήρης στο νου

και μπορεί να είναι δύσκολο τα συστατικά της να διαχωριστούν σε μια λογική παραγωγική σειρά. Οι οπτικές πληροφορίες υποβάλλονται σε μια επεξεργασία. Μόνο το αποτέλεσμα αυτής της επεξεργασίας τίθεται στην διάθεση αυτού του συνειδητού και όχι η διαδικασία με την οποία σχηματίζεται η μορφή (Bogen 1969, Gazzaniga 1974)

Ο Bruner (1966) αντιπαραβάλλει την διαίσθηση με την αναλυτική σκέψη, ο Poincaré (1913) την διαίσθηση με την λογική, το ίδιο και ο Hadamard (1945), ο Skemp (1971) αντιπαραβάλλει την διαίσθηση και την αντανakλαστική σκέψη ως διαφορετικούς τρόπους διανοητικής δραστηριότητας (Skemp, 1979) διαφέροντας αρκετά από την περιγραφή του Poincaré. Εν τω μεταξύ, ο Fischbein (1978) περιγράφει τη διαίσθηση σαν άμεση γνώση χαρακτηριζόμενη από τις ιδιότητες της αυτοφάνειας (self-evidence), καταναγκαστικής επίδρασης (coercive effect), συμπερασματικής ικανότητας (extrapolative capacity) και συνολικότητας (globality) (D. Tall Berkeley, *Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes* 170–176 (1980).

Κατά τον D. Tall:

Μια γνωστική προσέγγιση στη διαίσθηση μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας τις φυσιολογικές ιδέες που περιγράφονται στο Εγχειρίδιο της ψυχολογίας Textbook of Psychology (D. O. Hebb's 1972- chapter 4) ή, πιο πρόσφατα, στο «Προγράμματα του εγκεφάλου» (J. Z. Young's Programs of the Brain (1978). ... Hebb postulates that the mechanism of excitation and inhibition of neurons causes activities of cell assemblies in the brain. Sensory information from the eyes, for instance, is conveyed both to the area of the brain which gives rise to the sensation of sight and also, by a network of diverging paths, to other parts of the brain, setting up complex neuronal excitations. The stimulation of certain neurons passes messages to others, which excite or inhibit them, making them more or less sensitive to subsequent stimulation. In this way global mental activity is made up of an amalgam of local processes which have been selectively excited. . Faced with a novel situation the brain can only make sense of it by reacting with such an amalgam of mental activity from its currently available cognitive structure. This mental activity may be anything but logical and it is such activity, performed relatively quickly without analysis, which we term intuition. We may wish to qualify this definition by excluding logical or reflective processes, or we may wish to add more precise refinements such as those of Fischbein.

Ο Hebb αξιωματικά δέχεται ότι ο μηχανισμός της διέγερσης και παρεμπόδισης των νευρώνων δημιουργεί δραστηριότητες συγκεντρώσεων των κυττάρων στον εγκέφαλο. Αισθητήριες πληροφορίες μέσω της οράσεως, παραδείγματος χάριν, μεταβιβάζονται αμφοτέρως στην περιοχή του εγκεφάλου που προκαλεί την διαίσθηση και ακόμα, από ένα δίκτυο αποκλινόμενων πορειών, σε άλλα μέρη του εγκεφάλου, που οργανώνουν τις σύνθετες νευρωνικές διεγέρσεις. Η υποκίνηση ορισμένων νευρώνων περνά τα μηνύματα σε άλλα, τα οποία διεγείρει ή εμποδίζει, και τα καθιστά ευαίσθητα σε επόμενη υποκίνηση. Κατ' αυτό τον τρόπο η σφαιρική διανοητική δραστηριότητα αποτελείται από ένα αμάλγαμα από τις τοπικές διαδικασίες που έχουν διεγερθεί επιλεκτικά. Αντιμέτωπος με μια νέα κατάσταση ο εγκέφαλος μπορεί μόνο να τη κατανοήσει αντιδρώντας με τέτοιο αμάλγαμα διανοητικής δραστηριότητας από την διαθέσιμη μέχρι σήμερα γνωστική του δομή. **Αυτή την διανοητική δραστηριότητα που μπορεί να είναι οτιδήποτε παρά λογική με απόδοση σχετικά γρήγορα χωρίς ανάλυση καλούμε διαίσθηση.** Μπορούμε να επιθυμήσουμε να τροποποιήσουμε αυτόν τον ορισμό με τον αποκλεισμό της λογικής ή αντανakλαστικής διαδικασίας, ή μπορούμε να προσθέσουμε ακριβέστερους όπως εκείνοι του Fischbein. Προς το παρόν, εντούτοις, θα συγκεντρωθώ σε αυτό που θεωρώ την κεντρική ποιότητα της διαίσθησης: **το σφαιρικό αμάλγαμα των τοπικών διαδικασιών από την τρέχουσα γνωστική δομή που υποκινείται επιλεκτικά από μια νέα κατάσταση.** Ο Vinner (1975) ορίζει μια μεμονωμένη "διανοητική εικόνα μιας έννοιας για να είναι το σύνολο όλων των οπτικών αναπαραστάσεων (συμπεριλαμβανομένων των συμβόλων) που είναι συνδεδεμένες με εκείνη την έννοια. Καθορίζει την εικόνα έννοιας (concept image) του ατόμου (Vinner, 1980) που συνίσταται από την διανοητική εικόνα μαζί με όλες τις ιδιότητες που είναι συνδεδεμένες με την έννοια στο μυαλό του ατόμου (Tall & Vinner (1980)).

Ένας από τους λόγους που η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού βρίσκεται σε αποδιοργάνωση είναι ότι οι έννοιες που έμπειροι μαθηματικοί θεωρούν διαισθητικές δεν είναι για τους μαθητές. Ο λόγος είναι ότι η διαίσθηση είναι μια καθολική αντήχηση στον

εγκέφαλο και εξαρτάται από την γνωστική δομή του ατόμου, που και αυτή με τη σειρά της εξαρτάται από την προηγούμενη εμπειρία του ατόμου. Ο Tall αναφέρεται στην διαίσθηση που μπορεί να αναπτυχθεί στον απειροστικό λογισμό με την χρήση της τεχνολογίας των H/Y. Συγκεκριμένα στο άρθρο του “Intuition and rigour : the role of visualization in the calculus (1991 σελ.8) αναφέρει ότι : *Αν θέλουμε να καλύψουμε το χάσμα που προκύπτει κατά την κατανόηση του λογισμού από τους μαθητές, πρέπει να βρούμε έναν τρόπο που να είναι γνωστικά ελκυστικός για τον μαθητή την στιγμή που αρχίζει η μελέτη της έννοιας και ταυτόχρονα φέρει τους σπόρους για την κατανόηση των τυπικών εννοιών που εμφανίζονται αργότερα. Η ανάλυση μου είναι ότι δεν θα το επιτύχουμε με το να καταστήσουμε τις έννοιες απλούστερες. Η εναλλακτική λύση είναι να καταστούν πιο περίπλοκες. Η απάντηση βρίσκεται στην αποτελεσματική χρήση της νοερής οπτικής αναπαράστασης για να δοθεί η κατάλληλη διαίσθηση για την τυπική απόδειξη.* Και στη συνέχεια :

Οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν με την βοήθεια κατάλληλου λογισμικού την οπτική διαίσθηση που είναι απαραίτητη για ισχυρή τυπική ενόραση. Η διαίσθηση και η αυστηρότητα επομένως δεν είναι απαραίτητο να συγκρούονται. Η διαίσθηση οδηγεί φυσιολογικά στην αυστηρότητα της τυπικής απόδειξης.

Λαμβάνοντας υπόψη το υπογραμμισμένο θεωρητικό πλαίσιο οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ανάγκη μιας μακροπρόθεσμης κατασκευής της έννοιας του ορίου που αρχίζει από τις προγενέστερες εμπειρίες και τη διαίσθηση των μαθητών.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι είναι απαραίτητο να ερευνήσουμε

- ❖ ποια είδη διαισθητικών ιδεών είναι παρόντα στους μαθητές των διαφορετικών σχολικών επιπέδων

- ❖ πώς η διαδικασία της διδασκαλίας μπορεί να υποστηρίξει ή να εμποδίσει την ανάπτυξή τους.

- ❖ Υπάρχουν ευνοϊκές διαισθήσεις για την προσέγγιση, οι οποίες παραμελούνται παράκαιρα από τη συχνή διδακτική πρακτική και πως μπορούν να έρθουν στη επιφάνεια, ώστε να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα

- ❖ Λαμβάνοντας υπόψη την πολυπλοκότητα και τη σημασία τέτοιων εννοιών, μήπως θα πρέπει να επανεξετάσουμε μια βαθμιαία προσέγγιση, επιδιώκοντας να αναπτύξουμε μια κατανόηση από τα πρώτα έτη στο σχολείο

- ❖ Σε ποιο βαθμό ο H/Y αυξάνει την οπτική διαίσθηση και επομένως την τυπική ενόραση

2.4 Δυσκολίες συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου

Ο προσδιορισμός από πολλούς ερευνητές ποικίλων διαφορετικών δυσκολιών και εμποδίων για τη διαδικασία της κατασκευής της έννοιας του ορίου είναι ευρέως γνωστός: Η M.Artigue (1998) επισημαίνει στο “*Teaching and Learning Elementary Analysis : What can we learn from didactical research and curriculum evolution ?*” την ύπαρξη ισχυρών δυσκολιών που συνδέονται με την μαθηματική πολυπλοκότητα των βασικών αντικειμένων των πραγματικών αριθμών, των ακολουθιών, των συναρτήσεων, δυσκολίες στον πυρήνα του τομέα που συνδέονται με τον τυπικό ορισμό της έννοιας του ορίου και την πρακτική και τεχνική δυσκολία της εφαρμογής του. Σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση του ορίου εντοπίζονται από τους διάφορους ερευνητές που μοιάζουν να συμφωνούν στα εξής σημεία.

Η κοινή έννοια της λέξεως όριο που εμπεριέχει την έννοια του τελευταίου όρου μιας διαδικασίας, την μη δυνατότητα γενίκευσης των πεπερασμένων διεργασιών στις άπειρες (υπέρ-απλούστευση των ιδιοτήτων), τη γεωμετρία των σχημάτων που αποτρέπει τον σαφή προσδιορισμό των μορφών που εμπλέκονται στην διαδικασία του ορίου (M.Artigue (*Teaching and learning elementary analysis*)) στην μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο και τι συμβαίνει πέρα από το άπειρο. Ακόμα σημαντικές δυσκολίες ενσωματώνονται στη γλώσσα. Έννοιες όπως τείνει, προσεγγίζει, όριο, όσο μικρό θέλουμε είναι έννοιες που συγκρούονται με τις τυπικές έννοιες. Οι λέξεις αυτές έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν οποιαδήποτε μαθήματα και οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σ’ αυτές ακόμα και να έχει δοθεί ένα τυπικός ορισμός.

Η διαδικασία του ορίου δεν μπορεί να εκτελεστεί με κανόνες της άλγεβρας και οι αυθαίρετα μικρές μεταβλητές ποσότητες δημιουργούν σύγχυση και δυσκολία κατανόησης των

αφαιρετικών διαδικασιών. Είναι σημαντικό «πίσω» από μια συγκεκριμένη αλγοριθμική ακολουθία, να προσέξει ο μαθητής τις αφηρημένες έννοιες και λειτουργίες. Αν προσπαθεί να μάθει την ύλη με απομνημόνευση των μηχανικών διαδικασιών και συμβολικών εκφράσεων τότε χάνει το ενδιαφέρον του «η απομνημόνευση δεν οδηγεί σε γνωστικές δομές και το αποτέλεσμα είναι να καταπιέζεται η επιθυμία των μαθητών να μαθαίνουν καθώς μεγαλώνουν. Έτσι, ο μαθητής ή η μαθήτρια παύει να δείχνει ενδιαφέρον για τα μαθηματικά» (Dubinsky, 1991, σελ. 120)

Επομένως εδώ υπογραμμίζεται η ανάγκη μιας προσπάθειας να περιγραφούν οι δυσκολίες και τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές για την κατανόηση της έννοιας. Θα προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε όλα τα προβλήματα και να οδηγηθούμε σε μεθόδους αντιμετώπισης. Τα τελευταία χρόνια μεγάλο μέρος της έρευνας που αφορά την αντίληψη των μαθητών (και φοιτητών) στην έννοια του ορίου στηρίζεται πάνω στην μελέτη των εμποδίων γνωστικών και επιστημολογικών. Η κατανόηση του ε-δ ορισμού του ορίου αποτελεί και τον τελικό στόχο αφού αντιπροσωπεύει την αυστηρή έκφραση με την οποία με σαφή μαθηματικό τρόπο διατυπώνεται η έννοια του ορίου.

2.5 Η έννοια του εμποδίου

Ένα εμπόδιο δεν είναι έλλειψη γνώσης αλλά γνώση που επιτρέπει στον μαθητή να παράγει απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα ή κατηγορίες προβλημάτων ενώ για άλλους τύπους προβλημάτων οδηγεί σε λάθος απαντήσεις. Έτσι επανεμφανίζεται να κυριαρχεί σε ορισμένες καταστάσεις, ακόμα και αν έχει αντικατασταθεί από μια καινούργια γνώση. (Michel Henry -Π. Σπύρου σελ. 82)

Ο προσδιορισμός από πολλούς ερευνητές διαφορετικών δυσκολιών εντοπίζεται σε εμπόδια (Lucia Grugnetti, και Angela Rizza(2002))

επιστημολογική φύσης τα οποία οφείλονται σε εσωτερικές αιτίες των μαθηματικών (Brousseau , 1997, Sierpinska 1985)

διδασκαλικής φύσης, λόγω των μεθόδων διδασκαλίας που δεν είναι πάντα αποτελεσματικές (Artigue 1998 ,Brousseau ,1998)

γνωστικής φύσης λόγω των διαδικασιών αφαίρεσης που εμπλέκονται

(Cornu, 1991; Dubinsky, 1991; Sfard, 1992; Tall and Vinner, 1981; Tall, 1996) και

μεταγνωστικής φύσης που οφείλονται στην γενικότερη αντιμετώπιση της προσέγγισης των μαθητών στα μαθηματικά (Zan, 2001, 2002).

Θα αναφερθούμε σε δυο τύπους εμποδίων.

2.5.1 Επιστημολογικά εμπόδια

Σχετικά με τα επιστημολογικά εμπόδια πρώτος ο Gaston Bachelard (1972) θεωρεί ότι η επιστημονική γνώση δεν δομείται με μια συνεχή διαδικασία αλλά προκύπτει από απόρριψη προηγούμενων γνωστικών σχημάτων που ο Bachelard ονόμασε πρωταρχικές γνώσεις. Αποτελούν επομένως αναπόφευκτα στοιχεία του νέου γνωστικού σχήματος. Κατά τον Bachelard είναι έμφυτα στη ίδια την γνώση. Το πολυσύνθετο των εννοιών και των σχέσεων τους μέσα σε ένα εννοιολογικό πεδίο που οι μαθητές κατέχουν ελάχιστα συγκρούεται με τις αυθόρμητες αντιλήψεις που τείνουν να αντιπαραθέσουν τη γνωστική εμπειρία με την επιστημονική γνώση. Παράδειγμα επιστημολογικού εμποδίου είναι το **0 (μηδέν)**: αν και εμφανίζεται στους Ινδούς για να γεμίζει κενά σε ένα θεσιακό σύστημα αρίθμησης, έπρεπε να περιμένουμε τον 9ο αιώνα για να το ανακαλύψουμε στις αραβικές πραγματείες και τον 12ο αιώνα για να δούμε να επεξεργάζονται τις αλγεβρικές του ιδιότητες. Η εξομοίωση του 0 με το τίποτα μετατοπίζει το επιστημολογικό εμπόδιο προς μια ψυχολογική εκδοχή και γίνεται αιτία για πολλά σφάλματα. Και **το άπειρο**: η ιστορία του απείρου ως πηγή πολύ μεγάλων δυσκολιών των θεμελιώσεων είναι πλούσια σε προσπάθειες ορισμού, από τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι του Cantor και του Russel.

Ο Brousseau (1983) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως αντίληψη που μπορεί να λειτουργεί καλά στο πλαίσιο μιας γνωστικής περιοχής αλλά αποτυγχάνει να το κάνει σε ένα άλλο πλαίσιο και επομένως οδηγεί σε αντιφάσεις .

Όσον αφορά το ζήτημα της σχέσης των επιστημολογικών εμποδίων με την διδακτική μας αντίληψη ο Brousseau θεωρεί ότι το μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας πρέπει να επανεξεταστεί . Σκοπός δεν είναι μόνο η μεταβίβαση κάποιας καινούργιας γνώσης αλλά η συνειδητή ίσως απόρριψη όποιας προϋπάρχουσας δεν είναι συμβατή με την νέα γνώση.

2.5.2 Διδακτικά εμπόδια

Είναι τα εμπόδια που δημιουργούνται από την επιλογή κάποιας στρατηγικής διδασκαλίας που διαμορφώνει κατά την μάθηση λανθασμένες ή ημιτελείς γνώσεις εννοιών που εκδηλώνονται σαν εμπόδια στην εξέλιξη της ανάπτυξης των εννοιών .

Παραδείγματα διδακτικών εμποδίων είναι : Η εκμάθηση των δεκαδικών από τα μέτρα μεγεθών , το τετράγωνο που δεν είναι ρόμβος κ.α

Είναι τα λάθη των μαθητών σημαντικά ;

Μπορούν να μας οδηγήσουν σε γόνιμες ανακαλύψεις ;

Ο μαθητής δεν γράφει στην τύχη αλλά οδηγείται πάντοτε από μια εσωτερική καθοδήγηση . Η ανάλυση των λαθών του μαθητή απαιτεί απ' τον εκπαιδευτικό μεγάλη προσοχή και καλλιέργεια ιστορική , επιστημολογική και διδακτική. Η S. Rousset έδειξε πως οι αναπαραστάσεις των εκπαιδευτικών προσδιορίζουν την διαχείριση των λαθών από τους μαθητές τους. Όταν ένα εμπόδιο εντοπίζεται πρέπει να αρπάξουμε την ευκαιρία και να οδηγήσουμε τον μαθητή μας σε μια νέα κατάσταση .Ο G .Brousseau γράφει : Ένα εμπόδιο εκδηλώνεται από τα λάθη αλλά αυτά τα λάθη δεν οφείλονται στην τύχη. Παροδικά και άτακτα αναπαράγονται επίμονα. Επιπλέον αυτά τα λάθη στο ίδιο υποκείμενο συνδέονται μεταξύ τους σε μια κοινή αιτία : μια μέθοδο του γνωρίζειν , μια χαρακτηριστική αντίληψη , συνεκτική αν όχι γνωστή , μια παλιά γνώση και η οποία κατάφερε να κυριαρχεί μέσα σε κάθε περιοχή δράσης Έτσι το λάθος είναι η έκφραση ή η σαφής εκδήλωση ενός συνόλου αυθόρμητων προκατασκευασμένων αντιλήψεων , ενταγμένων σε ένα λογικά συνεπές δίκτυο γνωστικών αναπαραστάσεων που ορθώνονται ως εμπόδια στην απόκτηση και την κατοχή καινούριων γνώσεων . Η υπέρβαση αυτών αποτελεί το σχέδιο της διδακτικής πράξης και το λάθος είναι η υποχρεωτική της διαδρομή .

Επομένως σημαντικός ρόλος του δασκάλου είναι να δημιουργεί , να εφευρίσκει και να ανακαλύπτει καταστάσεις που οδηγούν σε μια σύγκρουση γνώσεων . Η Sierpinska (1987) στο Humanities students and epistemological obstacles related to limits γράφει :

Αν η παρουσία ενός επιστημολογικού εμποδίου συνδέεται με κάποια πεποίθηση του σπουδαστή , τότε η υπερπήδηση του εμποδίου δεν συνίσταται στο να αντικατασταθεί αυτή η πεποίθηση από την αντίθετή της γιατί αυτό θα μας οδηγούσε σε άλλο αντίθετο εμπόδιο ενός δίπολου . Αντίθετα ο σπουδαστής πρέπει να αποκτήσει συνείδηση των ενδεχόμενα διαφορετικών υποθέσεων .

2.6 Δυσκολίες από την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών

Είναι υψίστης σημασίας να γίνει αντιληπτή η έννοια των δεκαδικών αφού σύμφωνα με τους Carpenter & Moser (1984) οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς οφείλονται κυρίως σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης (Γαγάτσης ,2004 σελ. 168)

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς σαν κάτι που κάνει τους αριθμούς πιο πολύπλοκους (Sweeney & Quinn, 2000). Σύμφωνα με τον Vance (1986) μερικοί μαθητές δυσκολεύονται να τοποθετήσουν σε σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς Θεωρούν ο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που έχει τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία Δυσκολίες επίσης παρουσιάζουν οι μαθητές όταν τους ζητείται να βρουν έναν αριθμό μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών (για παράδειγμα ανάμεσα στο 0,1 και 0,2 , δεν δυσκολεύονται όμως το ίδιο όταν

τους ζήτησαν να βρουν έναν αριθμό ανάμεσα στο 0,15 και στο 0,20) .(Thomson & Walker , 1996) Κατά τη διαδικασία πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς εντοπίστηκε μετά από έρευνες και η εξής παρανόηση : όταν βάζεις ένα 0 στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού τον κάνεις δέκα φορές μεγαλύτερο (Bell , Swan & Taylor , 1981) και ότι κάνεις στη μια πλευρά το κάνεις απαραίτητως και στην άλλη .

Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου αναφέρεται σε σχέση με τις δυσκολίες των μαθητών με τους δεκαδικούς αριθμούς και στα κλάσματα .Η γνώση των φυσικών αριθμών αν και λειτουργεί για έναν μεγάλο αριθμό καταστάσεων στα πρώτα χρόνια του σχολείου , γίνεται εμπόδιο για την εισαγωγή δεκαδικών και κλασματικών στην διδασκαλία (λόγω της επίδρασης των προηγούμενων γνώσεων) . Ο τομέας των ρητών αριθμών ήταν πάντα δύσκολος για να τον χειριστούν οι μαθητές του δημοτικού και οι έρευνες δείχνουν μια έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και θέτουν σε αμφισβήτηση τις υπάρχουσες μεθόδους διδασκαλίας των συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών . (Moss & Case , 1999) Η Confrey (1994) επίσης πιστεύει ότι έχει σημασία η σειρά των συντονισμών να παραμένει συγχρονισμένη με τις αρχικές κατανοήσεις των μαθητών .(Γαγάτσης ,2004σελ .184)

Η πρώτη διδακτική προσέγγιση των ρητών αριθμών γίνεται με χρήση του εμβαδού και με χρήση της αναπαράστασης της υποέννοιας μέρος όλο .Αυτή η διδακτική προσέγγιση οδηγεί σε παρανοήσεις .Οι Thomson & Walker (1996) πιστεύουν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν διάφορες παρανοήσεις σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς γιατί κατά την διάρκεια της διδασκαλίας τους δεν γίνεται καμία σύνδεση με άλλες μαθηματικές έννοιες όπως κλάσματα , την αξία θέσης της ψήφου , τις μετρήσεις μήκους και αναπαραστάσεις των πιο πάνω εννοιών . Με βάση την έρευνα της Ni (2001) οι μαθητές σημείωσαν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα που εξέταζαν την ισοδυναμία των ρητών αριθμών είτε σε αναπαραστάσεις που έδιναν έμφαση στην υποέννοια μέρος- όλο όπως είναι το εμβαδά .Η ίδια ερευνήτρια είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η πηγή δυσκολιών για την κατανόηση της ισοδυναμίας των ρητών αριθμών είναι η πολλαπλασιαστική φύση της έννοιας , αλλά και η απόδοση της ίδιας έννοιας με διαφορετικές αναπαραστάσεις που προσφέρουν πληροφορίες με διαφορετικούς τρόπους και απαιτούν διαφορετικούς τρόπους ερμηνείας (Γαγάτσης 2004 ,σελ. 204)

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα είδη της μετατροπής ίσως να οφείλονται στο γεγονός ότι δεν είναι εύκολο να οριστεί μια σημασιολογική συμφωνία μεταξύ δυο μορφών του ρητού αριθμού . (Duval 1993 ,1997) Η σημασιολογική ασυμφωνία αποτελεί παράγοντα που πιθανόν να συμβάλλει στη διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας στα διαφορετικά είδη μετατροπής . Η κατανόηση της ισοδυναμίας είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχημένη μετατροπή ανάμεσα στις μορφές του ρητού αριθμού .Οι μαθητές αντιμετωπίζουν αυτή την δυσκολία λόγω της διαφορετικής σημειολογίας που χρησιμοποιείται , λόγω της μεμονωμένης διδασκαλίας και της μη επαρκούς επεξήγησης ότι αποτελούν εναλλακτικό τρόπο γραφής . Σύμφωνα με τον Sweller (1993) δημιουργούνται έτσι επιπρόσθετα εμπόδια στην μαθησιακή διαδικασία .Η ικανότητα αναγνώρισης και αναπαράστασης αφορούν την εννοιολογική γνώση ενώ η μετατροπή την διαδικαστική γνώση . Η μαθηματική γνώση περιλαμβάνει σχέσεις ανάμεσα στα δυο είδη γνώσης και η σύνδεση των δυο μπορεί να συμβάλλει στην οικοδόμηση ολοκληρωμένων γνωστικών δομών (Philippou & Christou , 1994) Οι μαθητές μετά από αποτελέσματα ερευνών δεν έχουν οικοδομήσει συνδέσεις ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση κάτι που καταδεικνύει την αποσπασματικότητα των γνώσεων αναφορικά με την έννοια του ρητού αριθμού(Γαγάτσης ,2004 σελ. 206)

2.7 Δυσκολίες προερχόμενες από τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουμε τη έννοια του ορίου

Στην περίπτωση των ορίων ,πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες διαισθήσεις που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία , είναι αυθόρμητες , όπως οι κοινές έννοιες των όρων που χρησιμοποιούμε και δεν εξαφανίζονται όταν ο μαθητής έρχεται σε επαφή με την έννοια με μαθηματικό τρόπο . Για να λυθεί ένα πρόβλημα είναι τόσο σημαντική η ανάπτυξη της επιστημονικής θεωρίας όσο και ο φυσιολογικός και αυθόρμητος

συλλογισμός που οφείλεται στις αυθόρμητες ιδέες. Οι λέξεις τείνει ή προσεγγίζει ή συγκλίνει είναι λεκτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της έννοιας του ορίου. Οι μαθηματικές τους ερμηνείες είναι ισοδύναμες. Από έρευνες που έχουν γίνει στο συγκεκριμένο θέμα οι μαθητές σχηματίζουν αναπαραστάσεις που πιθανότατα έρχονται σε αντίθεση με την πραγματική τους ερμηνεία και πιθανότατα να οδηγούν σε παρανοήσεις.

Όταν χρησιμοποιεί ο μαθητής την έννοια του προσεγγίζει πιστεύει ότι πλησιάζει όλο και πιο κοντά και πιθανά αγγίζει. Προσεγγίζει μεταφράζεται εσωτερικά για τον μαθητή ότι δεν μπορεί να φτάσει ή είναι ένα όριο στο άπειρο.

Συγκλίνει δηλώνει κίνηση άρα η αναπαράσταση που δημιουργείται πιθανότατα να δημιουργεί εμπόδιο αφού κάτι που κινείται δεν μπορεί να συγκλίνει σε κάτι στατικό όπως το 0 ή ένας αριθμός.

Η ομοιότητα των λεκτικών αναπαραστάσεων για την έννοια του ορίου δημιουργεί μια σύγχυση. Η γλώσσα και οι διαφορετικές ερμηνείες των εννοιών που αναφέραμε δημιουργούν εσωτερικές αναπαραστάσεις που δημιουργούν εμπόδια στην εννοιολογική κατανόηση του ορίου. Η γλώσσα είναι ένα κρίσιμο εργαλείο και οι ερμηνείες των μαθηματικών εκφράσεων με εσφαλμένο τρόπο μπορεί να κατευθύνει τους μαθητές σε λάθος δρόμους.

Ένας από τους λόγους που η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού είναι σε αποδιοργάνωση είναι ότι έννοιες που έμπειροι μαθηματικοί θεωρούν διαισθητικές δεν είναι διαισθητικές για τους μαθητές. Και δεν υπάρχει λόγος να υποτεθεί ότι ο αρχάριος θα διαθέτει τις ίδιες διαισθήσεις με τον έμπειρο, ακόμα και όταν εξετάζονται απλές οπτικές ενοράσεις. Σε πειράματα που έχουν γίνει η αυθόρμητη έννοια του ορίου δεν εμφανίζεται στους μαθητές που δεν έχουν εμπειρία στον απειροστικό λογισμό. Η Aline Robert έχει μελετήσει τα διαφορετικά πρότυπα που οι μαθητές μπορούν να έχουν για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας. Παρά το γεγονός ότι τους είχε δοθεί ένας τυπικός ορισμός έχουν την τάση να δημιουργούν αντιλήψεις που σχετίζονται με διάφορες πτυχές της προηγούμενης εμπειρίας τους. Σοβαρά εννοιολογικά προβλήματα παρουσιάζονται και οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες λόγω της γλώσσας που υποδηλώνει ότι ένα όριο προσεγγίζεται αλλά δεν μπορεί να επιτευχθεί. Δυσκολίες με την ατελή φύση της έννοιας που φαίνεται να πλησιάζει αλλά δεν φτάνει. Αν θέλουμε να καλύψουμε το χάσμα που εμφανίζεται στην κατανόηση του απειροστικού λογισμού από τον μαθητή πρέπει να βρούμε έναν τρόπο που να είναι γνωστικά ελκυστικός στον μαθητή από την στιγμή που ξεκινά η μελέτη και ταυτόχρονα οδηγεί στην κατανόηση των εννοιών αργότερα.

2.8 Συγκλίνουσα αριθμητική ακολουθία

Η είσοδος στην έννοια της ακολουθίας φέρνει για πρώτη φορά τον μαθητή αντιμέτωπο με την έννοια του ορίου και τις άπειρες διαδικασίες, που περιλαμβάνουν υπολογισμούς που δεν αρκεί η άλγεβρα να αντιμετωπιστούν. Αλλά παρά το γεγονός ότι οι δάσκαλοι των μαθηματικών προσπαθούν να παρακάμψουν τέτοια προβλήματα και με όποιο τρόπο και αν προσεγγίζονται τα θέματα οι έρευνες που έχουν γίνει δείχνουν ότι υπάρχουν εγγενείς δύσκολες έννοιες που δεν κατανοούνται επαρκώς ανεξάρτητα από τις μεθόδους που διδάσκονται. Τι είναι η κατανόηση των εννοιών; Ενέργεια ή διαδικασία; Είναι μια στιγμιαία ενέργεια ή οφείλεται σε συνειδητή προγενέστερη πνευματική διεργασία με το προς κατανόηση πρόβλημα;

Η Sierpinska προτείνει να θεωρήσουμε την κατανόηση ως μια ενέργεια η οποία όμως είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με μια διαδικασία ερμηνείας. Η κατανόηση αρχίζει με μια εικασία την οποία προσπαθούμε στη συνέχεια να αξιολογήσουμε έτσι ώστε στην πορεία η εικασία αυτή να βελτιωθεί, να απορριφθεί ή να μεταβληθεί. Η διαλεκτική αυτή διαδικασία εικασιών και ανακατασκευών συνεχίζεται έως ότου η υπό κατασκευή έννοια θεωρηθεί ότι έχει κατανοηθεί. Οι προγενέστερες γνώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση μιας έννοιας. Το επιστημολογικό εμπόδιο εμφανίζεται την στιγμή κατά την οποία ανακαλύπτουμε ότι υπάρχει κάτι εσφαλμένο στις μέχρι τότε γνώσεις μας. **Υπέρβαση επιστημολογικού εμποδίου και κατανόηση είναι δυο συμπληρωματικές εικόνες του ανεξερεύνητου τρόπου που χρησιμοποιεί η ανθρώπινη σκέψη για να κατακτήσει την γνώση.** Για την κατανόηση

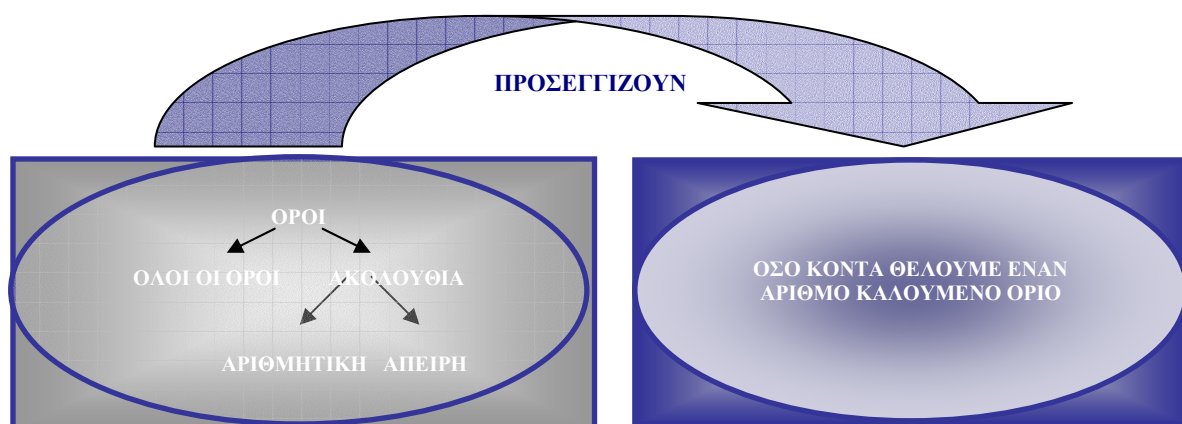
μιας μαθηματικής έννοιας η Sierpinski στο *Some remarks on understanding in mathematics* (1990) καταγράφει τις ακόλουθες διανοητικές ενέργειες :

- ☀ Αναγνώριση των αντικειμένων των συνδεδεμένων με την έννοια
- ☀ Διάκριση μεταξύ των αντικειμένων που προηγουμένως ήταν συγκεχυμένα
- ☀ Γενίκευση και επέκταση του εύρους των εφαρμογών της έννοιας
- ☀ Σύνθεση δυο ή περισσότερων ιδιοτήτων και οργάνωσή τους σε ένα συνεπές σύστημα

Ο βαθμός κατανόησης της έννοιας θα μπορούσε να μετρηθεί από τον αριθμό των ενεργειών κατανόησης που έχει ο μαθητής ή από τον αριθμό των επιστημολογικών εμποδίων που έχει υπερβεί. Πως όμως θα προκαλέσουμε αυτές τις ενέργειες στους μαθητές μας και πως θα ελέγξουμε αν αυτές έχουν υλοποιηθεί. Αυτές αποτελούν και το βασικό στοιχείο για την υπέρβαση όλων των γνωστικών και επιστημολογικών εμποδίων στην προσπάθεια κατανόησης του ορίου.

Για την συγκλίνουσα αριθμητική ακολουθία μπορεί κατά την ερευνήτρια να δοθεί ο ακόλουθος άτυπος ορισμός «Σχεδόν όλοι οι όροι της προσεγγίζουν όσο κοντά θέλουμε έναν αριθμό τον οποίο ονομάζουμε όριό της»

Η δομή της πρότασης είναι :



Με βάση αυτή τη δομή η Sierpinski προτείνει τις ακόλουθες ενέργειες σε διαδοχικά βήματα. Στόχος των ενεργειών είναι η υπέρβαση εμποδίων που έχουν σχέση με την φύση του απείρου :

🌀 Προσδιορισμός των απείρων ακολουθιών

Οι μαθητές πρέπει να εξοικειωθούν με τις άπειρες αριθμητικές ακολουθίες. Μια πρώτη επαφή γίνεται με την διαδικασία της μέτρησης που οδηγεί στην ακολουθία των φυσικών αριθμών. Άλλα παραδείγματα άπειρων ακολουθιών είναι οι άρτιοι, περιττοί αριθμοί, προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 ή του 3 με άπειρες ακολουθίες ρητών.

🌀 Προσδιορισμός των ακολουθιών οι οποίες προσεγγίζουν κάτι

Στο βήμα αυτό πρέπει να γίνει η διάκριση των ακολουθιών που τείνουν προς κάτι από το σύνολο όλων των ακολουθιών που προσδιορίστηκαν στην 1^η ενέργεια.

Για να φτάσουν όμως οι μαθητές να αποκτήσουν μια εξοικείωση με τις συγκλίνουσες αριθμητικές ακολουθίες είναι απαραίτητο να υπερβούν ορισμένα επιστημολογικά εμπόδια όπως :

🌀 Διάκριση μεταξύ αριθμού και του τύπου των αριθμών

Το εμπόδιο αυτό δημιουργείται από το γεγονός ότι οι μαθητές εστιάζουν την προσοχή τους στον τύπο του αριθμού και όχι στην αξία του αριθμού.

🌀 Διάκριση μεταξύ σύγκλισης και στρογγυλοποίησης δεκαδικών αριθμών

Εδώ οι μαθητές θεωρούν την στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών ως σύγκλιση. Το εμπόδιο εμφανίζεται λόγω της υπερβολικής χρήσης των υπολογιστών και της εξαγωγής δεκαδικών προσεγγίσεων σε όρους. Αναφέρεται το έξης παράδειγμα από την Sierpinski στην παρανόηση των μαθητών στους αριθμούς 3,999998, 3,999999, 3,99999999 ότι συγκλίνουν στα εννιά.

Διάκριση μεταξύ ακολουθίας και του τύπου εξαγωγής των αριθμών

Οι μαθητές εστιάζουν την προσοχή τους στον τύπο της ακολουθίας (ως συνάρτησης $N^* \rightarrow \mathbb{R}$) και όχι στους όρους της ακολουθίας .Έτσι δυο ίσες ακολουθίες μπορεί να ταξινομηθούν σε διαφορετικές κατηγορίες επειδή φαίνεται να έχουν διαφορετικό τύπο .

Αναγνώριση της διάταξης των όρων ως σημαντικού χαρακτηριστικού των ακολουθιών και της σύγκλισης της

Εμπόδιο που συνδέεται με την δυσκολία της διάκρισης μεταξύ των τιμών των όρων μιας ακολουθίας και της τάξης των όρων αυτών . Στην ακολουθία για παράδειγμα $a_n = n+1$ ο 3^{05} όρος είναι ο 4 .

Ερωτήματα που αναφέρονται είναι τα ακόλουθα :

-  Τι είναι αυτό που συγκλίνει τελικά ;
-  Συγκλίνουν οι όροι της ακολουθίας ;
-  Αν συγκλίνουν , πόσοι είναι αυτοί ;

Το πλήθος των όρων της ακολουθίας είναι ένας βασικός παράγοντας των εμποδίων Εδώ θα αναφέρουμε και το παράδοξο της διχοτομίας του Ζήνωνα .

Κάποιος βρίσκεται στο εσωτερικό ενός δωματίου και απέχει από την πόρτα 1 μέτρο Επιχειρεί να φτάσει στην πόρτα με βήματα που διχοτομούν κάθε φορά το εναπομείναν διάστημα .Έτσι θα διανύσει την απόσταση : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots 1/2^n$

Το ερώτημα είναι αν θα βγει ποτέ από το δωμάτιο

Αν οι μαθητές δουν την διαδικασία ως ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων τότε δεν υπάρχει για αυτούς παράδοξο .Για παράδειγμα πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι έπειτα από έναν ορισμένο αριθμό βημάτων η απόσταση είναι πολύ μικρή που μπορεί να αγνοηθεί . Αν όμως την προσεγγίσουν σαν άπειρη σειρά βημάτων τότε τους είναι δύσκολο να κατανοήσουν γιατί η σειρά που αναφέραμε προηγουμένως ισούται με 1 .

Η απόδειξη μέσω του ορισμού ε - δ του Weierstrass ότι το όριο είναι ίσο με 1 δεν λύνει το πρόβλημα στους μαθητές του κατά πόσο μια ακολουθία φτάνει στο όριο της.

Προφανώς στην κατανόηση του ορίου ένα ιδιαίτερος επικίνδυνος σημείο συνδεδεμένο με το άπειρο είναι η πεποίθηση πως ότι είναι άπειρο είναι απαραίτητως μη φραγμένο .Όλες όμως οι συγκλίνουσες ακολουθίες , μολονότι άπειρες είναι φραγμένες .

Έτσι η υπέρβαση εμποδίων σχετικά με το άπειρο φαίνεται να είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για μια συνειδητή κατανόηση της έννοιας του ορίου . Για τον λόγο αυτό οι διαφορετικές έννοιες του απείρου (δυνητικό , πραγματικό , αυθαίρετα μεγάλος αριθμός) , τα άπειρα αλλά φραγμένα σύνολα , διαφορετικές φιλοσοφικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά προσέγγιση του ορίου ως φιλοσοφικού προβλήματος που αφορά την φύση των Μαθηματικών και του απείρου είναι από τις ενέργειες που υποστηρίζουν την κατανόηση .

2.8.1 Ο όρος «προσεγγίζει»- Υπέρβαση εμποδίου

Ο όρος προσεγγίζω εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο λειτουργεί .

Η κατανόηση γίνεται μέσω της σύνδεσης των εννοιών προσεγγίζει και απόσταση δυο αριθμών ή μεταξύ των όρων και του αριθμητικού ορίου της ακολουθίας .

Καθώς ο δείκτης n αυξάνει οι μαθητές συλλαμβάνουν την έννοια προσεγγίζουν ως προσέγγιση των όρων μεταξύ τους .Η διαίσθηση των μαθητών συνίσταται σε μια μείωση της απόστασης μεταξύ των όρων της ακολουθίας Ένα εμπόδιο που πρέπει να υπερβούν οι μαθητές είναι η πεποίθηση ότι οι συγκλίνουσες ακολουθίες προσεγγίζουν απλώς κάτι Επομένως αν υπάρχει διάκριση μεταξύ του **προσεγγίζω κάτι και προσεγγίζω κάτι όσο κοντά θέλω** που είναι απαιτούμενο για τη σύγκλιση της ακολουθίας .Έτσι η ακολουθία 0,9 , 0,99 για παράδειγμα έχει όριο το 1 .

Το θέμα είναι κατά πόσο οι μαθητές

-  αντιλαμβάνονται ότι όσο κοντά θέλουμε στο όριο είναι τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας
-  διακρίνουν τις έννοιες απείρως μικρή και απείρως μεγάλη ποσότητα
-  διακρίνουν τις έννοιες του ορίου και την τιμή της ακολουθίας .

Κάνοντας χρήση επομένως η Sierpinski ενός λεκτικού ορισμού περιέγραψε με σαφήνεια τα εμπόδια που σχετίζονται με αντιλήψεις που έχουν σχέση με την έννοια της ακολουθίας. Εξηγεί πως ο λεκτικός ορισμός μπορεί να εκφραστεί συμβολικά και από τις μεταβλητές της αυστηρής μορφής ποιες είναι ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες (και ποιες συμβολίζουν σταθερές).

Για παράδειγμα το όριο L μια ακολουθίας είναι συνάρτηση του A όπου A το σύμβολο της άπειρης αριθμητικής ακολουθίας με όρους $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Οι δείκτες της ακολουθίας ως φυσικοί αριθμοί σηματοδοτούν ένα όρο της ακολουθίας. Επομένως υπάρχει ένα n κατάλληλο έτσι ώστε οι όροι της ακολουθίας προσεγγίζουν στο όριο.

Η προσέγγιση εκφράζεται με την έννοια της απόστασης επομένως εκφράζεται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς του ορίου από τις τιμές της ακολουθίας. Αυτό στην συνέχεια θα πρέπει να γίνεται όλο και μικρότερο από κάποια θετική ποσότητα ε . Αυτό είναι απολύτως αναγκαίο αφού πρέπει να μπορούμε να πλησιάσουμε όχι απλώς πιο κοντά αλλά όσο κοντά θέλουμε. Το τελικά όλοι οι όροι σημαίνει ότι οι όροι εκτός ίσως κάποιων πεπερασμένων βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από ε από το όριο L . Ο τυπικός ορισμός εκφρασμένος με συμβολικό τρόπο είναι

$$\exists L \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \kappa \in \mathbb{N}: \forall n > \kappa \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

και βοηθά στην σύνθεση συζητήσεων γύρω από το όριο, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια ακολουθία φτάνει στο όριο της και μπορεί να οδηγήσει σε γενίκευση της εφαρμογής του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ
των μαθηματικών έννοιες

3.1 Θεωρητικά μοντέλα κατασκευής των μαθηματικών δομών

Η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών ως αντικείμενα ή διεργασίες

.....το πρώτο μπορούμε να το ονομάσουμε *γνώση* , το δεύτερο *διάνοια* , το τρίτο *πίστη* το τέταρτο *εικασία* και λαμβανόμενα μαζί τα δυο τελευταία να τα λέμε *γνώμη* , ενώ τα δυο πρώτα μαζί να τα λέμε *νόηση* και *η μεν γνώμη έχει να κάνει με το γίνεσθαι ενώ η νόηση έχει να κάνει με την ουσία*. Και όπως σχετίζεται η ουσία με το γίνεσθαι έτσι σχετίζεται η νόηση με τη γνώμη και όποια σχέση έχει η νόηση με τη γνώμη , έχει και η γνώση με την πίστη και η διάνοια με την εικασία .

(534 α Πλάτωνος Πολιτεία μετάφραση Ν. Μ. Σκουτερόπουλος)

Ο Πλάτωνας εξετάζει τα μαθηματικά αντικείμενα ως ουσίες που υπάρχουν ανεξάρτητα από τον άνθρωπο, ανεξάρτητα από τον τρόπο και την δυνατότητα που μπορούν να γνωσθούν , αναλλοίωτα και χωρίς αλλαγές δηλ. να εμφανίζουν μια αχρονικότητα με την έννοια να υπόκεινται σε χωροχρονικές μεταβολές και να μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια

(Αναπολιτάνος σ.30)

Σε αντίθεση με τον Πλάτωνα ο Αριστοτέλης δεν αποδίδει στα μαθηματικά αντικείμενα κάποιο αυτόνομο τρόπο ύπαρξης .Μελετητές του Αριστοτέλη όπως ο Hussey (1991) υποστηρίζουν με βάση τα δυο πρώτα κεφάλαια στα Μεταφυσικά ότι αυτό που ενδιαφέρει κυρίως τον Αριστοτέλη είναι να τονίσει την σχέση των αντικειμένων με τον φυσικό κόσμο .Καταλήγει ότι τα αντικείμενα των μαθηματικών α) δεν υπάρχουν χωριστά από τα αισθητά β) προηγούνται από τα αισθητά σε ότι αφορά τον ορισμό και γ)έπονται των αισθητών σε ότι αφορά τη ύπαρξη .

Κατά τον Hussey τα μαθηματικά αντικείμενα του Αριστοτέλη μπορούν να θεωρηθούν ως αναπαραστατικά όντα ,δηλαδή υπάρχει μια νοητική διαδικασία θεώρησης των αντικειμένων που μας βοηθά να απομονώσουμε τις κοινές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν όλα τα μέλη της εκάστοτε κλάσης (Χριστοπούλου σ.7,13 Ευκλείδης Γ΄ τεύχος 53-54)

Για τον φορμαλισμό τα μαθηματικά είναι αξιώματα , ορισμοί και θεωρήματα .Τα μαθηματικά αντικείμενα αποκτώνται στο πλαίσιο μιας θεωρίας αξιωμάτων και δεν έχουν κανένα άλλο νόημα . Για τον κονστрукτιβισμό τα μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευάσιμα σε πεπερασμένα βήματα από κάποια αρχικά. Η κατασκευή τους μας βοηθά να κατανοήσουμε τον κόσμο .

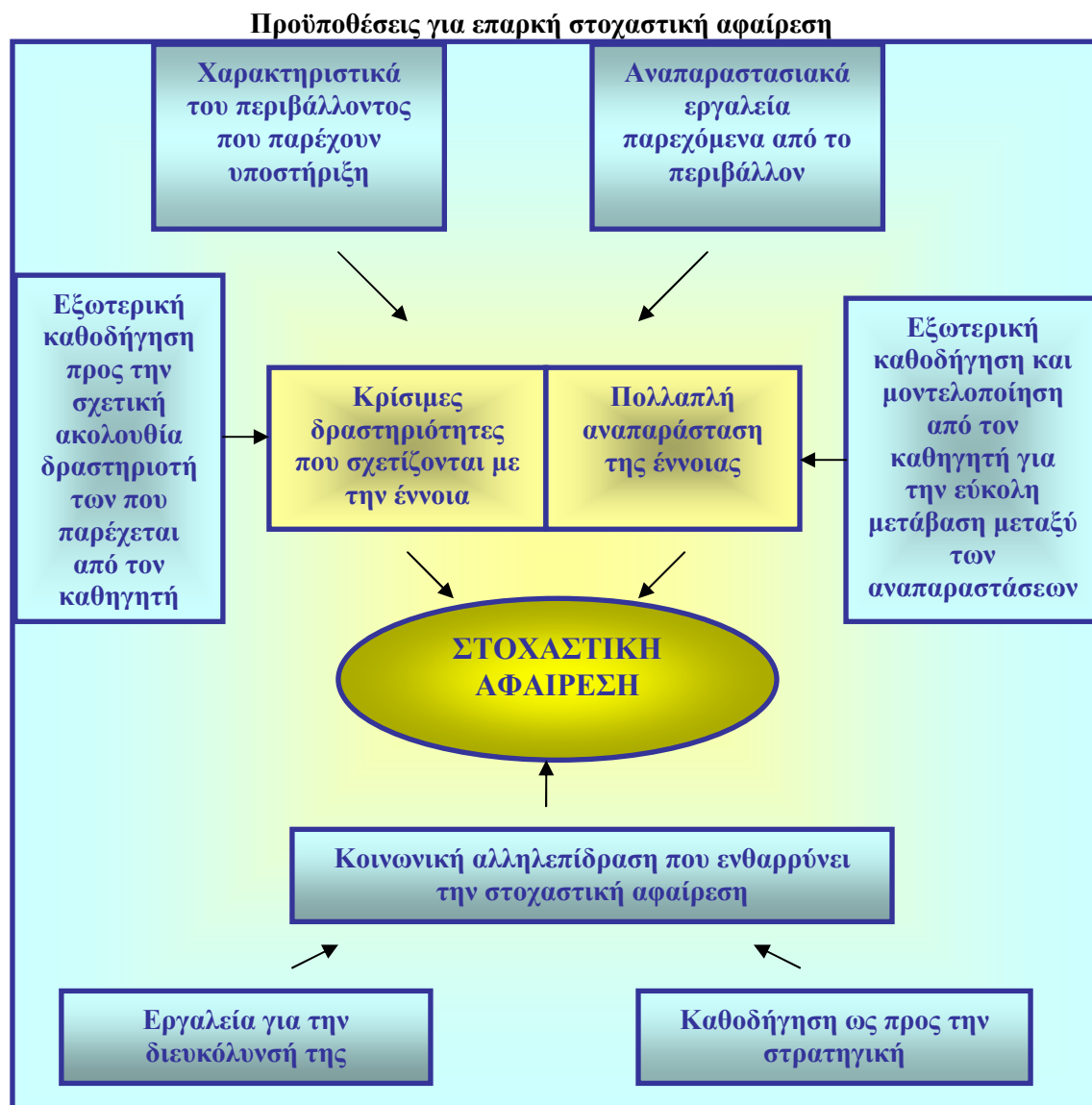
Από τα τέλη της δεκαετίας του 50 οι ψυχολογικές έρευνες άρχισαν να συγκλίνουν στην άποψη ότι η κατανόηση των μαθηματικών δομών αποτελεί προϋπόθεση για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών όχι στο επίπεδο της σύνθεσης μαθηματικών αποδείξεων αλλά στο επίπεδο της ανακάλυψης σχέσεων μεταξύ των επιμέρους μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών .Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να δοθεί έμφαση στις μαθηματικές δομές (στρουκτουραλιστική προσέγγιση) . Ο Bruner γράφει (1960 σελ.32) *η μάθηση που υστερεί ως προς τη σύλληψη των γενικών αρχών προκαλεί ελάχιστο νοητικό ενδιαφέρον για ανακάλυψη. Οι γνώσεις που αποκτήθηκαν χωρίς να είναι συνδεδεμένες στα πλαίσια μιας συνολικής δομής θα ξεχαστούν γρήγορα* (Κολέζα σελ. 14 « Γνωσιολογική κα Διδακτική Προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών»)

Οι δομές στο σπειροειδές αναλυτικό πρόγραμμα παρουσιάζονται αρχικά με τρόπους που διευκολύνουν τη διαισθητική κατανόηση και επαναπροσδιορίζονται μέχρι τον πλήρη σχηματισμό τους . Σύμφωνα με την θεωρία gestalt ο ανθρώπινος νους ερμηνεύει τα δεδομένα των αισθήσεων με βάση συγκεκριμένες οργανωτικές αρχές. Αυτό σημαίνει ότι το προϊόν της ανθρώπινης αντίληψης δεν μπορεί να νοηθεί ως μια απλή άθροιση ερεθισμάτων .Σ'αυτές τις θεωρίες υπάρχει μια πλατωνική αντίληψη ως προς την ύπαρξη και ανακάλυψη μαθηματικών αληθειών .Αναπτύσσεται ένα είδος εποπτείας που βοηθά τα υποκείμενα να διαμορφώσουν από ένα στάδιο και πέρα την εντύπωση πως αυτή η εποπτεία αποτελεί ένα στοιχείο του νοητικού τους οπλισμού . Ο Gödel (1930) εξέφρασε την άποψη ότι η μαθηματική εποπτεία αποτελεί έναν άλλο τρόπο απόκτησης της γνώσης ως πρόσβαση προς περιοχές της πραγματικότητας που δε είναι δυνατόν να γνώσουν με άμεσο τρόπο δηλαδή στην αισθητηριακή αντίληψη . Και ο Polya επισημαίνει την ανάγκη χρησιμοποίησης

δισαισθητικών ευρετικών μεθόδων στην λύση προβλημάτων . Η προσπάθεια είναι να συλληφθεί η λύση σαν μια ολική μορφή . Η δισαισθητική σκέψη, σε αντίθεση με την αναλυτική, δεν προχωρά με προσεκτικά, σαφή βήματα. Επιτρέπει ελευθερία, μεγάλα άλματα, χρήση της σύντομης οδού και κατασκευάζει κατά κάποιο τρόπο ένα δρόμο, πάνω στον οποίο θα κινηθεί με καθορισμένα, βαθμιαία βήματα η αναλυτική σκέψη. Η διαίσθηση, επομένως, είναι πολύ σημαντική για τη μάθηση και η καλλιέργειά της θα πρέπει να είναι ένας από τους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Για τον Wertheimer(1959) η επανοργάνωση των στοιχείων ενός προβλήματος προϋποθέτει παραγωγική σκέψη που στηρίζεται στη σύλληψη της συνολικής δομής του προβλήματος Σύμφωνα με τον Katona (1967) η κατανόηση της δομής δεν βελτιώνει απλώς την ικανότητα του υποκειμένου για μεταβίβαση της μάθησης σε προβλήματα με παρόμοια δομή (δομική κατανόηση) αλλά ενισχύει την ικανότητα της απομνημόνευσης (μια σημασιολογική οργάνωση της πληροφορίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο για μια αποτελεσματική απομνημόνευση) . Εξετάζοντας από κοινού την θεωρία gestalt (σύλληψη ενός μαθηματικού αντικειμένου ως συνόλου – ολότητα) και την στρουκτουραλιστική προσέγγιση της διδασκαλίας (με έμφαση στην κατανόηση της δομής των μαθηματικών αντικειμένων) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η πρώτη παρέχει μια επαρκή θεωρητική βάση για τη δεύτερη. Κατά τους Noss –Hoyles (1996) η κατασκευή της γνώσης είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον στο οποίο δρα είτε αυτό είναι φυσικό είτε νοητό :*Για τον Piaget τα μαθηματικά αναπτύσσονται από την αλληλεπίδραση δεν είναι δεδομένα στην πραγματικότητα ούτε εγγεγραμμένα στον νου , αλλά αποτελούν μια σύνθεση της ανακάλυψης και της δημιουργίας . Προσαρμόζοντας αυτή την διπλή άποψη στη κατάσταση της διδασκαλίας –μάθησης των μαθηματικών , οι δάσκαλοι πρέπει να λειτουργήσουν σαν τα μαθηματικά αντικείμενα να υπάρχουν και πρέπει να ανακαλυφθούν , ενώ οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν αυτά τα αντικείμενα για τον εαυτό τους .*

Οι διάφορες θεωρίες προτείνουν κάποιες απόψεις σχετικά με τη δόμηση της γνώσης από τις γνωστικές μελέτες που έχουν γίνει σε παιδιά που μαθαίνουν στοιχειώδη μαθηματικά .Ακόμα είναι βασισμένες σε διαφορετικές απόψεις όπως η λογική δομή της προτασιακής σκέψης και της μεταφοράς από τους υπολογιστές για την δραστηριότητα του εγκεφάλου και κυρίως αφορούν τη δόμηση της γνώσης και την ανάπτυξη λεπτών αφηρημένων εννοιών μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες (Tall , 1995) .Αυτό θα συμβεί όταν το υποκείμενο αντιληφθεί τα μαθηματικά αντικείμενα , ενεργήσει σε αυτά και σκεφτεί σχετικά με αυτές τις ενέργειες να δομήσει τις κατάλληλες θεωρίες . Γενικά, η δόμηση των εννοιών στα μαθηματικά βασίζεται σε συγκεκριμένες δραστηριότητες που αναλαμβάνει ο μαθητής, καθώς και στην επικοινωνία με το πολιτισμικό περιβάλλον και ειδικότερα με τον καθηγητή και τους άλλους μαθητές (Aebli, 1987, Ernest, 1991). Στην παραδοσιακή διδασκαλία μαθηματικών, η διαδικασία δόμησης της γνώσης από το μαθητή συνήθως βασίζεται σε μια διαδικασία γενίκευσης που την αποκαλούμε εμπειρική ή οριζόντια γενίκευση (βλ. Dubinsky, 1991, Karmiloff-Smith & Inhelder, 1974-1975, Piaget, 1978). Οι γενικεύσεις δεν βασίζονται στην οικοδόμηση ενός αφηρημένου θεωρητικού μοντέλου, αλλά στις ομοιότητες των επιφανειακών χαρακτηριστικών μεταξύ των προβλημάτων. Με τη βοήθεια της οριζόντιας γενίκευσης οι μαθητές μπορούν να λύσουν τα προβλήματα που συνήθως περιέχονται στα σχολικά βιβλία, αλλά δεν είναι σε θέση να οικοδομήσουν μια επαρκή κατανόηση των εννοιών, επειδή τα νοητικά τους μοντέλα περιορίζονται στο επίπεδο της συμπαγούς μαθηματικής γνώσης (οντότητες). Αν ο στόχος μας είναι να καλύψουμε τα βαθύτερα και πιο αφηρημένα επίπεδα μαθηματικής γνώσης, χρειάζεται ένα άλλο είδος διαδικασίας δόμησης της γνώσης. Σύμφωνα με τον Piaget, αυτό το διαφορετικό τρόπο δόμησης της γνώσης μπορούμε να τον ονομάσουμε στοχαστική αφαίρεση. Αυτός ο όρος αναφέρεται σε μια διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής προσπαθεί να οικοδομήσει αφηρημένες δομές και λειτουργίες σκεπτόμενος πάνω στις δικές του δραστηριότητες και στα επιχειρήματα που διατυπώθηκαν στα πλαίσια της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Piaget, 1976, 1978).



Το σχήμα (σε άλλη μορφή) περιέχεται ως εικόνα 11.1 στο βιβλίο(υπό έκδοση) «Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες »των Vosniadou, Eric De Corte , Robert Glasserv , Heinz Mandl

Σύμφωνα με τις Erno Lehtinen, Sisko Repo στο «Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες » οι υπολειτουργίες της στοχαστικής αφαίρεσης έχουν συνοψιστεί από τον Dubinsky (1991, σελ. 101) και τους συνεργάτες του (Cottrill et al. 1996) ως εξής:

α) Η εσωτερίκευση αναφέρεται στη μετάφραση μιας διαδοχής υλικών δράσεων σε ένα σύστημα εσωτερικευμένων λειτουργιών (Beth & Piaget, 1966, σελ. 206).

β) Ο συντονισμός δύο ή περισσότερων διαδικασιών για τη δημιουργία μιας καινούριας. γ) Η ενσωμάτωση δυναμικών διαδικασιών σε ένα αντικείμενο, που σημαίνει ότι «... οι δράσεις ή λειτουργίες γίνονται αντικείμενα σκέψης ή αφομοίωσης, αναφορικά με κάποιο θέμα» (Piaget, 1985, σελ. 49).δ) Η γενίκευση σημαίνει ότι ένα υποκείμενο μαθαίνει να εφαρμόζει ένα υπάρχον σχήμα σε ένα ευρύτερο σύνολο φαινομένων. Για να σχεδιάσουμε τη διδασκαλία ώστε να ωθεί τους μαθητές στα γνωσιακά βήματα, πρέπει να αναπτύξουμε μια ακολουθία δραστηριοτήτων και να δημιουργήσουμε καταστάσεις που θα παρακινήσουν τους μαθητές να κάνουν τις συγκεκριμένες στοχαστικές αφαιρέσεις που απαιτούνται

Ο Piaget από το 1972 στις «Αρχές της Γενετικής Επιστημολογίας », είχε εκφράσει την άποψη ότι η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης δεν είναι παρά κατασκευή δομών , άποψη που

αποτελέσει 20 χρόνια αργότερα τον πυρήνα της θεωρίας APOS , αλλά και της έννοιας του concept:

«το σύνολο των Μαθηματικών μπορεί να εκφραστεί με όρους κατασκευής δομών , ...οι μαθηματικές οντότητες κινούνται από το ένα επίπεδο στο άλλο. Μια «λειτουργία» (operation) πάνω σ' αυτές τις οντότητες, γίνεται με τη σειρά της «αντικείμενο» της θεωρίας, και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουμε σε δομές που δομούνται από «ισχυρότερες»δομές ... («structures, being structured by "stronger" structures») (σελ.70).

Η θεωρία στην οποία οι ενέργειες γίνονται στη συνέχεια διαδικασίες (συμπυκνωμένη επεξεργασία)που ενσωματώνονται ως αντικείμενα και αργότερα οργανώνονται σε γνωστικά σχήματα , (in which actions become routinized into processes that are then encapsulated as objects, later to be embedded into cognitive schemas)είναι γνωστή ως APOS theory (Action -Process- Object - schema). Το νοητικό αντικείμενο σύμφωνα με την θεωρία APOS συγκροτείται μέσα από τρία στάδια:

την ενέργεια(δράση- Action) : φυσικός ή νοητός μετασχηματισμός αντικειμένων, σε άλλα αντικείμενα ,

την επεξεργασία (Process): εσωτερική γνωστική κατασκευή που προκύπτει από εσωτερίκευση της ενέργειας

αντικείμενο (Object): διαδικασία ενθυλακωμένη σε ένα αντικείμενο process encapsulated into an object) που θα αποτελέσει μέρος ενός πληρέστερου σχήματος (schema).

Ο στόχος της θεωρίας είναι να βρούμε τα κρίσιμα βήματα, κατά τη δόμησή της μαθηματικής έννοιας , που είναι αναγκαία για την επαρκή κατανόηση της. Αυτά τα βήματα εξαρτώνται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της εν λόγω έννοιας και μπορούν να περιγραφούν με αναφορά στις υπολειτουργίες της στοχαστικής αφαίρεσης. Σύμφωνα με τους Lakoff, G. & Núñez, R. (2000) εννοιολογικοί μηχανισμοί κεντρικοί για τα μαθηματικά (και ιδιαίτερα για τα ανώτερα) είναι τα σχήματα ή αλλιώς οι νοητικές αναπαραστάσεις , οι εννοιολογικές μεταφορές (μηχανισμός που το αφηρημένο γίνεται αντιληπτό) και οι εννοιολογικοί συνδυασμοί. Ο Tall χωρίζει τα μαθηματικά σε τρεις κόσμους : τον ενσωματωμένο(που είναι ένα περιβάλλον που μέσα από πειραματισμούς δομούνται αφαιρετικές μέθοδοι) , τον διαδικασιο-εννοιολογικό (που εμπλέκεται σε υπολογιστικές διαδικασίες και διαδικασίες χειρισμού συμβόλων) και τον τυπικό –αξιωματικό (στον οποίο επικρατεί πλήρως η μαθηματική αφαίρεση)

Η Sfard (1991), στο έγγραφο *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin* αποδεικνύει ότι μια αλληλεπίδραση δομικών και λειτουργικών αντιλήψεων της ίδιας έννοιας συντελεί στη διαδικασία μάθησης και επίλυσης προβλημάτων στα Μαθηματικά. Όπως γράφει συγκεκριμένα «για να αναπτύξει κανείς το νόημα για ανώτερου επιπέδου μαθηματικές έννοιες , πρέπει να σκέφτεται συγχρόνως λειτουργικά και δομικά» . Οι μαθηματικές έννοιες σύμφωνα με την Sfard μπορούν να προσεγγιστούν με τη δομική προσέγγιση(structural conception) ως αφηρημένα αντικείμενα ή με τη λειτουργική προσέγγιση (operational conception) ως διεργασίες .

Δομική προσέγγιση : πως αντιλαμβανόμαστε σφαιρικά την έννοια

Λειτουργική προσέγγιση : πως μπορούμε να ερμηνεύσουμε μια διαδικασία

Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών συνδέεται με την δυνατότητα να αντιληφθούμε τις μαθηματικές έννοιες ταυτόχρονα ως αντικείμενα και ως διαδικασίες. Στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας η λειτουργική προσέγγιση προηγείται της δομικής(Sfard 1991, σελ.10). Κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σύμφωνα με τους Sfard –Linchevski (1994) είναι η ικανότητα αντίληψης των μαθηματικών εννοιών ταυτόχρονα ως αφηρημένα αντικείμενα και ως διεργασίες .Επομένως στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να αποκτήσει ο μαθητής την ικανότητα να προσεγγίσει ένα θέμα λειτουργικά και δομικά .Η δομική προσέγγιση είναι και ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας .

Η Sfard (1992 σελ..64) στο *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function*,περιγράφει τη μετάβαση από την «λειτουργική» («operational ») στη «δομική » («structural ») αντίληψη ως μια δομή τριών βημάτων:

"A constant three step pattern can be identified in the successive transitions from operational to structural conceptions: first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into a more compact, self contained whole

should emerge, and finally an ability to view this new entity as a permanent object in its own right must be acquired. These three steps will be called interiorization, condensation and reification." (Sfard, 1992, σελ.64-65).

«Ένα σταθερό σχέδιο τριών βημάτων μπορεί να προσδιοριστεί στις διαδοχικές μεταβάσεις από λειτουργικές σε δομικές συλλήψεις. Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση της μετατροπής αυτής της διαδικασίας σαν ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα να αντιμετωπίσουμε (αντιληφθούμε) αυτή τη νέα οντότητα σαν ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο».

δηλαδή: Την **εσωτερίκευση** (interiorization), την **συμπύκνωση** (condensation) και την **αντικειμενοποίηση** (reification)». (Sfard, 1992, σελ.64-65).

Εσωτερίκευση: το υποκείμενο αντιλαμβάνεται τις λειτουργίες σε μαθηματικά αντικείμενα χωρίς να πραγματοποιήσει μια διαδικασία.

Συμπύκνωση: το υποκείμενο συνδυάζει διαδικασίες, συγκρίνει και γενικεύει με ικανότητα παράλειψης κάποιων ενδιάμεσων βημάτων.

Αντικειμενοποίηση: το υποκείμενο αντιλαμβάνεται μια μαθηματική έννοια ως πλήρες αντικείμενο.

Τα τρία αυτά βήματα θεωρούνται απαραίτητα για να ολοκληρωθεί η διαδικασία κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας. «Χωρίς την αντικειμενοποίηση οι ικανότητες του ατόμου περιορίζονται σε ένα επίπεδο καθαρά λειτουργικό» («operational») (Sfard 1992 σελ.64). Με άλλα λόγια: «η χαμηλότερου επιπέδου αντικειμενοποίηση και η ανώτερου επιπέδου εσωτερίκευση είναι προϋποθέσεις η μια της άλλης». (Sfard 1991 σελ.31).

Το «procept», είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας πραγματοποίησης (κατά Sfard), ή μιας διαδικασίας ενσωμάτωσης (κατά τη θεωρία APOS).

Για τους Gray και Tall (1993, 1994) ένα υποκείμενο μπορεί να συνδυάσει νοητικές δομές ως σύνθεση δύο συνιστωσών: μιας επεξεργασίας (process) με σκοπό να παράγει μια μαθηματική έννοια (concept). Τότε είναι ικανό για μαθηματικούς συλλογισμούς και ικανό να διαμορφώσει σχήματα που στη συνέχεια «συμπυκνώνονται» ως αντικείμενα.

Γι' αυτές τις νοητικές δομές που εμπεριέχουν διαδικασία και προϊόν, ο Tall και οι συνεργάτες του επινόησαν τον όρο «procept».

3.2 Η έννοια της αναπαράστασης

Έχοντας ως βάση την θεωρία του Piaget σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη συνεπάγεται συνεχείς αναδομήσεις γεγονότων και σχέσεων οι οποίες απορρέουν από την αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον του, ο Bruner, ερευνήσε τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι αλληλεπιδράσεις αναπαρίστανται στο νου του παιδιού. Σύμφωνα με τον ίδιο η πιο σημαντική λειτουργία σε σχέση με την μνήμη δεν είναι η αποθήκευση της πληροφορίας αλλά η κατανόηση της πληροφορίας που μας χρειάζεται κάθε φορά.

Το τελικό προϊόν της κωδικοποίησης και επεξεργασίας είναι αυτό που ονομάζουμε αναπαράσταση (Bruner 1964). Ο Bruner περιγράφει τρεις τρόπους αναπαράστασης: την πραξιακή (αναπαράσταση με όρους δράσης) την εικονική (αναπαράσταση με όρους στατικών αντιληπτικών εικόνων) και την συμβολική (χρήση γλώσσας και συμβόλων). Οι υπάρχουσες θεωρίες για τις αναπαραστάσεις διακρίνονται από έναν βαθμό ασυνέπειας, όχι μόνο στην ορολογία τους αλλά και στους ορισμούς των κύριων εννοιών. Ο Janvier (1987) δηλώνει ότι η αναπαράσταση είναι υλική οργάνωση των σημείων (όπως τα διαγράμματα, τα σχέδια) που συσχετίζεται με άλλες οντότητες ή που διαμορφώνει τις διαφορετικές διανοητικές διαδικασίες. Ακόμα η αναπαράσταση είναι ορισμένη οργάνωση της γνώσης στο μυαλό ενός προσώπου μερικές φορές προσδιορίζεται με την έννοια, μερικές φορές γίνεται κατανοητή ως μέρος της ή, υπάρχει η έννοια σχετική με τις διανοητικές εικόνες (είναι έτσι μια συγκεκριμένη περίπτωση της προηγούμενης έννοιας).

Ο Halford (1993) μιλά για τις αναπαραστάσεις σε σύνδεση με την κατανόηση της έννοιας: "Για να καταλάβει ο μαθητής μια έννοια συνεπάγεται μια εσωτερική, γνωστική αναπαράσταση

ή ένα διανοητικό πρότυπο που απεικονίζει τη δομή εκείνης της έννοιας." Καθορίζει τις γνωστικές αναπαραστάσεις ως "εσωτερική δομή που αντανακλά ένα τμήμα του περιβάλλοντος" και τις χαρακτηρίζει ως δομικά σύμφωνες με το περιβάλλον.

Ο Palmer (1978) καθορίζει ότι ένα σύστημα μια αναπαράστασης περιλαμβάνει δύο οντότητες: τον αναπαριστώμενο(represented) κόσμο και την αναπαράσταση (representing) του κόσμου .

Κατά τον Kaput (1987) το σύστημα αναπαράστασης περιλαμβάνει την οντότητα που αναπαρίσταται , την οντότητα που αναπαριστά και τον κανόνα αντιστοίχισης μεταξύ των δυο. Ο Duval (1995) ισχυρίζεται ότι ο χειρισμός των μαθηματικών εννοιών συντελείται μέσω των συμβολικών (σημειωτικών)αναπαραστάσεών τους (οι αναπαραστάσεις με χρήση σημείων (signes) όπως εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα)).Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις αποτελούν το μέσο που διαθέτει το άτομο για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις και επομένως ως εξαρτώμενες από αυτές δεν εξυπηρετούν παρά την ανάγκη επικοινωνίας. Χαρακτηρίζει τις σημειωτικές αναπαραστάσεις ως εκείνες που επιτρέπουν την εντόπιση ενός αντικειμένου μέσω της αντίληψης για το ερέθισμα (των σημείων, των γραμμών, των ήχων) δεδομένου ότι διαδραματίζουν έναν ρόλο σημαίνοντος όπως εκείνες που επιτρέπουν την εντόπιση ενός αντικειμένου όταν όλα τα αντιληπτά σημαίνοντα είναι απόντα. Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις όπως έχουμε αναφέρει είναι εργαλεία που εκφράζουν τις διανοητικές αναπαραστάσεις (για να τους καταστήσουν ορατές ή προσιτές) επομένως είναι αναπόφευκτες για την επικοινωνία και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Σύμφωνα με τον Duval (1995α, σελ. 3-4):

«η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Αρκεί να εξετάσει κάποιος την περίπτωση της Αριθμητικής για να το καταλάβει: δεν παρατηρείται το ίδιο επίπεδο δυσκολίας στην περίπτωση της δεκαδικής γραφής και στη περίπτωση της κλασματικής γραφής ενός αριθμού...»

Αν δούμε το θέμα σφαιρικά, η πρόοδος στα Μαθηματικά συνοδεύεται πάντα από την εμφάνιση και εξέλιξη νέων σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν με το πρώτο και βασικότερο σύστημα, εκείνο της φυσικής γλώσσας...Η ποικιλία των σημειωτικών συστημάτων επιτρέπει την ύπαρξη διαφόρων μορφών αναπαράστασης του ίδιου αντικειμένου αυξάνοντας έτσι τις γνωστικές δυνατότητες του υποκειμένου και κατά συνέπεια τις νοητικές του αναπαραστάσεις...»

Ένα άτομο μπορεί να έχει πρόσβαση σε μια μαθηματική έννοια ,μόνον αν διαθέτει τουλάχιστον δύο σημειωτικά συστήματα γι' αυτή την έννοια, και αν μπορεί να περνά χωρίς δυσκολία από το ένα σύστημα στο άλλο (Duval 1995α, σελ. 22).

Η εσωτερίκευση αυτών των σημειωτικών αναπαραστάσεων ως νοητικές αναπαραστάσεις δημιουργεί νοητικές εικόνες (mental images). Επομένως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε μονομερώς ότι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι προϊόντα νοητικών αναπαραστάσεων. Το αντίστροφο ισχύει επίσης.

Ο Vergnaud (1998) δεν καταλαβαίνει την αναπαράσταση ως **στατικό φαινόμενο, αλλά ως δυναμική διαδικασία** .Η βασική έννοια της θεωρίας του είναι βασισμένη στη δραστηριότητα και τη γλώσσα, σχήμα το οποίο σημαίνει "την αμετάβλητη οργάνωση της συμπεριφοράς για μια ορισμένη κατηγορία καταστάσεων" Καθορίζει τις λειτουργικές σταθερές ως σημαντικότερα μέρη ενός σχήματος :μια έννοια (εν δράσει) (concept-in-action) και ένα θεώρημα (εν δράσει) (theorem-in-action). *"A theorem-in-action is a proposition which is held to be true. A concept-in-action is an object, a predicate, or a category which is held to be relevant."*(Ένα θεώρημα (εν δράσει) είναι μια πρόταση που θεωρείται ως αληθής .Μια έννοια (εν δράσει) είναι ένα αντικείμενο ένα κατηγορημα ή μια κατηγορία που θεωρείται σχετική). Σε ένα σημειωτικό σύστημα (ομοίως σε μια φυσική γλώσσα), διακρίνει το σημαίνον (signifier) και το σημααινόμενο (signified) . Προσδιορίζει τη λειτουργική σταθερά με τη σημααινόμενη πτυχή της γλώσσας ή ενός άλλου σημειωτικού συστήματος στο οποίο μετασχηματίζεται.



Σχήμα : Τα δυο βέλη δηλώνουν αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών εννοιολογικών πεδίων αναπαράστασης κατά Vergnaud υπό την έννοια της ανταλλαγής πληροφοριών και δομών.

Το αναφορικό(referent) είναι η πραγματική κατάσταση , όπως εμφανίζεται στο υποκείμενο , σύμφωνα με την εμπειρία που αποκτά καθώς δρα μέσα σε αυτή για να παραγάγει τα γεγονότα και τα αποτελέσματα που αυτός επιθυμεί ή που είναι σύμφωνα με τις συνειδητές ή ασυνειδητές προσδοκίες του και τις προθέσεις του.

Το σημαϊνόμενο(signified) αφορά την εσωτερική αναπαράσταση που έχει το άτομο για τον κόσμο και είναι όπου «οι σταθερές αναγνωρίζονται, τα συμπεράσματα σχεδιάζονται , οι ενέργειες παράγονται , και οι προβλέψεις κατασκευάζονται»(and it is where invariants are recognized inferences drawn ,actions generated and predictions made) (Vergnaud 1998 σελ.229) . Είναι το επίπεδο στο οποίο αναγνωρίζει κανονικότητες , σχεδιάζει τις ενέργειες του , κατασκευάζει τις προβλέψεις του και εξάγει τα συμπεράσματά του .

Το σημαϊνόν(signifier) είναι το συμβολικό επίπεδο και αποτελείται από τα διαφορετικά συμβολικά συστήματα , όπως είναι αυτά της γλώσσας και των μαθηματικών , τα οποία χρησιμοποιεί για να εκφράσει τα συμπεράσματά του

Παραδείγματα χάριν, η σύνταξη της άλγεβρας, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες, τα διαγράμματα είναι διαφορετικά το ένα από το άλλο.

Οι Sierpinski, Dreyfus and Hillel (1999) ισχυρίζονται ότι δεδομένου ότι υπάρχουν διάφορες αναπαραστάσεις ενός αντικείμενου, η γνωστική ανάπτυξη ρυθμίζεται από τη δυνατότητα να διακριθεί το αντικείμενο σε τουλάχιστον δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις . Αρχίζουν από την ιδέα του Duval να μην θεωρηθούν τα αντικείμενα της επιστημονικής γνώσης ως λογικά ανεξάρτητα θέματα ή ως περιεχόμενο διανοητικών αναπαραστάσεων, αλλά μάλλον ως σταθερές, σε σχέση με διάφορες σημειωτικές αναπαραστάσεις (Duval, 1998).

3.3 Εσωτερικές –Εξωτερικές Αναπαραστάσεις Πολλαπλές αναπαραστάσεις και η επίδραση τους στην οπτικοποίηση (visualization) των εννοιών

Το NCTM (2000) θεωρεί ότι αναπαράσταση σημαίνει την πράξη σύλληψης μιας έννοιας ή της σχέσης και την ίδια την σχέση . Αυτός ο ορισμός ενσωματώνει τους ορισμούς για εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις .Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις εμφανίζονται στο μυαλό του μαθητή και μπορούν να αναφερθούν ως γνωστικά πρότυπα, σχήματα, έννοιες, ή διανοητικά αντικείμενα. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι ενσωματώσεις των μαθηματικών ιδεών ή εννοιών όπως τα αλγεβρικά σύμβολα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, λεκτικές δηλώσεις, και συγκεκριμένα υλικά (Aspinwall, 1995). Σύμφωνα με το NCTM (2000) οι μαθητές από το προ-παιδικό σταθμό έως τη 12η βαθμίδα εκπαίδευσης πρέπει να είναι ικανοί να δημιουργήσουν και χρησιμοποιήσουν τις αναπαραστάσεις για να οργανώσουν, να καταγράψουν και να επικοινωνήσουν τις μαθηματικές ιδέες ,να επιλέξουν , να εφαρμόσουν και να μεταφράσουν μεταξύ των μαθηματικών αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλημάτων , να χρησιμοποιήσουν τις αναπαραστάσεις για να διαμορφώσουν και ερμηνεύσουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα (σελ.63). Ακόμα περιλαμβάνουν την “ αναγνώριση και χρησιμοποίηση των συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και κατανόηση πώς οι μαθηματικές ιδέες διασυνδέονται και στηρίζονται ή μια στην άλλη για να

παραγάγουν έναν συνεπές σύνολο» . Ο Arnheim (1969) υποστηρίζει ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι διαφορετικές από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις .Για παράδειγμα ότι ζωγραφίζουμε στο χαρτί μπορεί να είναι διαφορετικό από τις διανοητικές εικόνες και ότι βλέπουμε μπορεί να είναι διαφορετικό από την πραγματική εικόνα. Οι ερευνητές Pape και Tchoshanov (2001). υποστηρίζουν ότι υπάρχει μια σε εξέλιξη αλληλεπίδραση μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων μέσα στο κοινωνικό περιβάλλον.

Κατά την Κολέζα(2003) μια αναπαράσταση δεν χαρακτηρίζεται εξωτερική ή εσωτερική απλά και μόνο από τη μορφή της, αλλά από τον τρόπο που δημιουργείται και το ρόλο που καλείται να παίξει στην κατασκευή της γνώσης. Για παράδειγμα ένα σχήμα ή ένα διάγραμμα δεν είναι απαραίτητα εξωτερική αναπαράσταση, αλλά μπορεί να υφίσταται και ως νοητική εικόνα, προϊόν εσωτερίκευσης μιας εξωτερικής σημειωτικής αναπαράστασης. Οι νοητικές αυτές εικόνες σε ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης μπορούν να λειτουργήσουν ως «ευρετικό πεδίο» για τη σύλληψη, την κατανόηση, ή την επεξήγηση συνθετότερων εννοιών.

Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι προκειμένου οι μαθητές να κατασκευάσουν τη μάθηση μια έννοιας με νόημα στην εκπαίδευση των μαθηματικών πρέπει να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις συγχρόνως και να κάνουν τις μεταφράσεις μεταξύ τους . Στην παραδοσιακή διδασκαλία οι αναπαραστάσεις μιας έννοιας διδάσκονται χωριστά , σαν να ήταν χωριστές έννοιες ή τα θέματα διδάσκονται με μια αναπαράσταση . Έτσι οι μαθητές δεν καταφέρνουν να συνδέσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου θέματος . Η έρευνα τα τελευταία χρόνια μέσα στην εκπαίδευση των μαθηματικών έχει αποδείξει ότι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων ενισχύει την διαδικασία της μάθησης με το να παρέχει πολλαπλές πηγές πληροφοριών για το ίδιο θέμα . (Borba & Confrey, 1993; Yerushalmy, 1997;Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed, & Webb, 1997;Safford & Langrall, 2000; Porzio, 1999).

Οι Greeno and Hall (1997) προτείνουν ότι *"οι μορφές της αναπαράστασης μπορούν να θεωρηθούν ως χρήσιμα εργαλεία για την κατασκευή της γνώσης και για να μεταβιβάσουν τις πληροφορίες και την κατανόηση"*(σελ.362).

Όταν αναφερόμαστε σε πολλαπλές αναπαραστάσεις εννοούμε τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που παρέχουν τις ίδιες πληροφορίες για μια έννοια ταυτόχρονα. Αν κι όπως αναφέρθηκε υπάρχει μια σε εξέλιξη αλληλεπίδραση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων , όπου η εξωτερική αναπαράσταση δημιουργείται από τον μαθητή με προσπάθεια να καταλάβει την έννοια . Οι απόψεις των μαθηματικών για τη σχέση μεταξύ της εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης ποικίλλουν. Ο McKim (1972) ισχυρίζεται ότι η χρησιμοποίηση των αναπαραστάσεων για να αναπτυχθούν οι δεξιότητες σκέψης των σπουδαστών είναι σχετική με τη δυνατότητα των σπουδαστών να λειτουργήσουν με τις διανοητικές εικόνες. Από μια πλευρά η αναπαράσταση είναι εξωτερίκευση μια εσωτερικής αναπαράστασης , μια διανοητική αφαίρεση , και μια διασύνδεση μεταξύ της οπτικοποίησης των εννοιών και της εξωτερικής αναπαράστασης .Αυτό το επιχείρημα υποστηρίζεται και από την θεωρία του κονστρουκτιβισμού. Σύμφωνα με τους κονστρουκτιβιστές η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να διαχωριστεί από τον μαθητή. Οι ερμηνείες των μαθητών από τις μαθηματικές ιδέες αναπαριστώνται στα μυαλά τους σαν εσωτερικές αναπαραστάσεις και αν θέλουμε να έχουμε εκμάθηση μιας έννοιας οι μαθητές θα πρέπει να δημιουργήσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις. Εδώ αρχίζει να υπάρχει η μετάβαση σαν μια γέφυρα μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής αναπαράστασης . Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται από τα βιβλία των μαθηματικών και από τον δάσκαλο των μαθηματικών είναι πολύτιμα όταν διευκολύνουν την ανάπτυξη στην κατασκευή της γνώσης(Aspinwall, 1995). Υπάρχουν μελέτες για την σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της οπτικοποίησης των εννοιών . Και είναι σημαντικό εδώ να αναρωτηθούμε : Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ της οπτικής αντίληψης (perception) και της οπτικοποίησης (visualization);

Οπτική αντίληψη είναι μια συνολική εικόνα του αντικειμένου ή της κατάστασης που παρατηρούμε , η οποία προφανώς δεν μπορεί παρά να είναι ατελής. Η τέλεια οπτική αντίληψη είναι αποτέλεσμα εξερεύνησης μέσω κίνησης είτε του παρατηρητή, είτε του αντικειμένου.

Η **οπτικοποίηση** δεν στηρίζεται στην άμεση παρατήρηση του σχήματος αλλά στη δημιουργία αναπαραστάσεων και στην επεξεργασία τους. Επομένως στηρίζεται σε ενέργειες που εκτελούνται πάνω στο σχήμα. Η δυσκολία για το υποκείμενο έγκειται κυρίως στο να αποφασίσει ποιες οπτικές μονάδες θα συνδυάσει. (Κολέζα, 2000)

«Το σχήμα είναι μια αναπαράσταση, δηλαδή προϋποθέτει την κατασκευή μιας εικόνας διαφορετικής από το προϊόν της άμεσης αντίληψης, και τίποτα δεν αποδεικνύει ότι οι χωρικές σχέσεις σε αυτή την εικόνα θα είναι του ίδιου επιπέδου όπως εκείνες της αντίστοιχης αντιληπτικής εικόνας» (Piaget 1972, σελ. 65). Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι η οπτικοποίηση των εννοιών βελτιώνει την μαθηματική ικανότητα. (Presmeg, 1986; Wheatley, 1998). Οι Moreno και Mayer (1999) πραγματοποίησαν μια ερευνητική μελέτη για να ανακαλύψουν πως θα επιτευχθεί καλύτερο αποτέλεσμα σε περιβάλλον με πολλαπλές αναπαραστάσεις ή σε περιβάλλον με μια αναπαράσταση.

Η μελέτη που έγινε κρίνει αρκετό ενδιαφέρον για τα αποτελέσματα του επιτεύγματος της οπτικοποίησης των εννοιών των μαθητών με την χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.

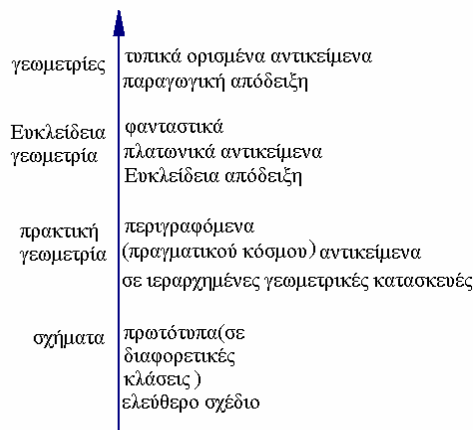
Μερικοί μαθητές δεν θέλουν να λύσουν προβλήματα ή να μάθουν μια νέα έννοια με περισσότερες από μια αναπαραστάσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται ή στο επίπεδο κατανόησης τους ή στο επίπεδο οπτικό-χωρικής ικανότητας τους. Οι περισσότερες από τις μελέτες για τη χρησιμοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εκπαίδευση μαθηματικών είναι ποσοτικές. (Moreno & Mayer, 1999; Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed, & Webb, 1997; Swafford & Langrall, 2000; Porzio, 1999). Ο ερευνητής μπορεί να κατανοήσει ενός μαθητή την αιτιολόγηση σε βάθος με μια κλινική συνέντευξη.

3.4 Ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών - διατύπωση θεωριών κατασκευής γεωμετρικών εννοιών

«Στην πραγματικότητα η σπουδή αυτή στο σύνολό της έχει αποκλειστικό αντικείμενο της τη γνώση (της γεωμετρίας)πρόκειται για τη γνώση εκείνου που έχει παντοτινή υπόσταση κι όχι εκείνου που κάποια στιγμή αποτελεί μια επιμέρους περίπτωση γένεσης και φθοράς»(Πλάτωνος Πολιτεία 527b μετάφραση Ν.Μ. Σκουτερόπουλος)

Η αντίληψη για τον κόσμο περιλαμβάνει την μελέτη του χώρου και των σχημάτων οδηγώντας στην γεωμετρία(όχι μόνο με τους όρους της δισδιάστατης και τρισδιάστατης γεωμετρίας αλλά περιλαμβάνοντας τις μορφές της προβολικής, ελλειπτικής, υπερβολικής, διαφορικής ...). Η ανάπτυξη της σκέψης στη γεωμετρία περιλαμβάνει τις γνωστικές αναδημιουργίες σχημάτων. Οι αναδημιουργίες είναι απαραίτητες για να δούμε ένα σχήμα όχι μόνο σε φυσικό αντικείμενο αλλά ως αποτέλεσμα νοητικών ενεργειών με τέλειες ιδιότητες. Η γλώσσα παίζει ένα όλο και περισσότερο λεπτό ρόλο στην γεωμετρική ανάπτυξη και οι λεκτικές διατυπώσεις οδηγούν στην ευκλείδεια απόδειξη. Οι πρωτότυπες μορφές όπως τα σχήματα της ευθείας γραμμής, του τριγώνου, του κύκλου περιγράφονται προφορικά με τρόπο που υποστηρίζουν την φαντασία των τέλειων πλατωνικών αναπαραστάσεων και κατά συνέπεια οι τέλειες γεωμετρικές οντότητες εξαρτώνται από την γλώσσα για να κατασκευάσουν την έννοιά τους. Η Ευκλείδεια απόδειξη οικοδομείται με αυτή τη χρήση της γλώσσας για να δώσει λεκτικά επιχειρήματα να υποστηριχθούν οι αφαιρέσεις που είναι βασισμένες στις οπτικές έννοιες. Συγκεκριμένα από τη στιγμή που το υποκείμενο οικοδομήσει ένα λεκτικό κώδικα επικοινωνίας αρχίζει να βλέπει το σχήμα ως σύνολο ιδιοτήτων, στη συνέχεια ως στοιχείο ευρύτερου συνόλου και τελικά ως κρίκο μιας ιεραρχικής δομής. (ανάλυση, αφαίρεση και αυστηρότητα της θεωρίας του van Hiele).

Το υποκείμενο στη διαδικασία εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης αναγνωρίζει αρχικά ένα σχήμα ως μια ολότητα (gestalt), στη συνέχεια το συγκρίνει με γνωστά πρότυπα εικόνων και κατόπιν ανάλυσης που αναπτύσσεται με κατάλληλο λεκτικό κώδικα επικοινωνίας το μετατρέπει σε οπτικό αντικείμενο, σε αντικείμενο καθορισμένο λόγω ιδιοτήτων και σε ορισμένο αντικείμενο νοητικό, περιγραφόμενο από κάποιο ορισμό (Tall, 1994)



Σχήμα 4. Γνωστική ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών

Ο Bruner (1966) υποστηρίζει ότι το υποκείμενο στο στάδιο των εικονικών αναπαραστάσεων, περνά από τα πραγματικά αντικείμενα μέσω αφαιρετικών διαδικασιών σε οπτικά αντικείμενα και στην περίπτωση της γεωμετρίας, έχει την δυνατότητα να εκτελεί νοητικά πειράματα.

Οι (Hershkowitz, Vinner, 1983) ισχυρίζονται ότι για να κατακτήσουμε μια γεωμετρική έννοια δεν απαιτούνται ορισμοί αλλά καλά συγκροτημένες εικόνες της έννοιας.

Σχήμα : Το σχήμα είναι μετάφραση του αντίστοιχου του στο άρθρο των D.Tall, et al(2000) “*Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking*”

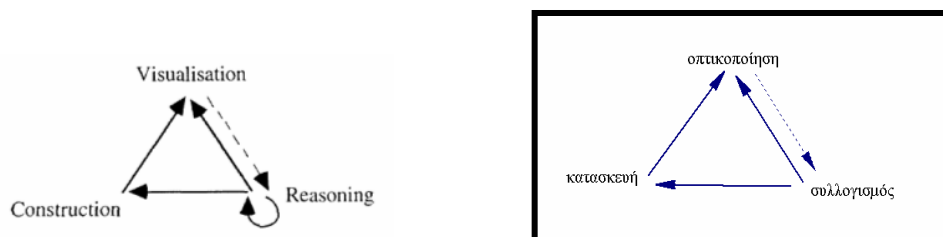
Ο Fischbein (1993) στο «The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*» γράφει ότι «το γεωμετρικό σχήμα είναι η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο, η αφηρημένη οντότητα (figural concept), που καθορίζεται επακριβώς από τον ορισμό». Σύμφωνα με τον Fischbein στο γεωμετρικό σχήμα εμπεριέχονται τρεις κατηγορίες νοητικών οντοτήτων ο ορισμός, η εικόνα και η σχηματική έννοια. Ακόμα «έχει μια ιδιότητα που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα περιέχει την νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου» (σελ. 141) και ο χαρακτήρας τους είναι συγχρόνως εννοιολογικός και σχηματικός. Γι' αυτό το λόγο αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα ως «σχηματικές έννοιες» (figural concepts). Προεκτατικά η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και της αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας. (Κολέζα, 2003)

Οι D. Tall et al.(1991) γράφουν ότι η συνύπαρξη νοητικών εικόνων δημιουργεί μια εικόνα της έννοιας (concept image) που διαφοροποιείται από τον ορισμό της έννοιας (concept definition) επομένως κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει συνιστώσες σχηματικές και λογικές.

Ο Duval (1995) προσδιορίζει τους εξής τύπους γνωστικής κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος: την αντιληπτική κατανόηση (κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος), την σειριακή κατανόηση (πώς δομείται ένα σχήμα), την λεκτική κατανόηση (κατανόηση της εκφώνησης, αποδεικτικής διαδικασίας) και την λειτουργική κατανόηση (οργανωτική κατανόηση του σχήματος).

Ο Duval (1998) υποστηρίζει ότι η γεωμετρική σκέψη περιλαμβάνει τρεις γνωστικές διαδικασίες.

Διαδικασίες οπτικοποίησης (ή νοερής απεικόνισης, σχετιζόμενες με τη νοερή αναπαράσταση μιας γεωμετρικής έννοιας), διαδικασίες κατασκευής και διαδικασίες συλλογισμού, ή αιτιολόγησης (ιδιαίτερα λεκτικές),



Σχήμα : Γνωστικές αλληλεπιδράσεις που εμπλέκονται (περιλαμβάνονται) σε μια γεωμετρική δραστηριότητα (Duval (1998) σελ. 38) *Geometry from a Cognitive Point of View*. Dordrecht: Kluwer.

Ο Duval υποστηρίζει, ότι, *«αυτά τα τρία είδη γνωστικών διαδικασιών είναι πολύ συνδεδεμένα και η σύμπραξή τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την ικανότητα στη γεωμετρία»*

Στο σχήμα κάθε βέλος αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίο ένα είδος γνωστικής διαδικασίας μπορεί να υποστηρίξει ένα άλλο είδος σε οποιαδήποτε γεωμετρική δραστηριότητα. Το κυκλικό «βέλος» επεξηγεί εκείνο τον συλλογισμό που μπορεί να αναπτυχθεί με έναν τρόπο που είναι ανεξάρτητος από την κατασκευή ή τις διαδικασίες οπτικοποίησης. Δεδομένου ότι η σύμπραξη αυτών των τριών διαδικασιών είναι γνωστικά απαραίτητη για την ικανότητα στη γεωμετρία, το ζήτημα, όπως προσδιορίζεται από τον Duval, είναι πώς μπορούμε να επιτύχουμε τη επικοινωνία μεταξύ τω τριών αυτών διαδικασιών.

Ο Duval υποστηρίζει ότι, στην προσπάθεια να γίνει κατανοητή η ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού, η έρευνα του έχει παρουσιάσει τα εξής:

1. Τα τρία είδη διαδικασιών πρέπει να αναπτυχθούν χωριστά.
2. Απαιτείται εργασία στο πρόγραμμα σπουδών για τη διαφοροποίηση των διαδικασιών οπτικοποίησης και μεταξύ των διαφορετικών διαδικασιών αιτιολόγησης.
3. Ο συντονισμός αυτών των τριών ειδών διαδικασιών μπορεί πραγματικά να εμφανιστεί μόνο μετά από αυτήν την εργασία για τη διαφοροποίηση.

Ο D. Tall(1999),γράφει ότι : *«Η Γεωμετρία περιλαμβάνει πολλές ενέργειες εμπειρικής αφαίρεσης εστιάζοντας σε αντικείμενα ... ξεκινά ως μια θεωρία που στηρίζεται στα αντικείμενα και όχι σε ενέργειες πάνω σ'αυτά »*

Οι επεξεργασίες ενός σχήματος στη γεωμετρία κατά τον Tall δεν έχουν στόχο τον νοητικό σχηματισμό των αντικειμένων αλλά την γνώση που θα αποκτηθεί από αυτά τα ίδια αντικείμενα. Στη γεωμετρία επομένως **προηγείται η δομική αντίληψη των αντικειμένων της λειτουργικής αφού τα σχήματα αναγνωρίζονται ως ολότητες** (gestalt) συνδεδεμένα με τα πρωτότυπα του πραγματικού κόσμου (real-world prototypes).Επομένως αμφισβητείται κατά τον Tall η εφαρμογή της θεωρίας APOS στη γεωμετρία.

Σύμφωνα με τους D.Tall et al. (2000), η γνωστική εξέλιξη στη Γεωμετρία διαφέρει από την εξέλιξη στους άλλους κλάδους των Μαθηματικών.

Η άλγεβρα, ο απειροστικός λογισμός, η γεωμετρία έχουν αφετηρία για την μελέτη της φύσης των εννοιών τον πραγματικό κόσμο. Η γεωμετρία βοηθά το παιδί να διαμορφώσει μια αντίληψη για τα αντικείμενα του περιβάλλοντος (εμπειρική αφαίρεση) ενώ η άλγεβρα τις ενέργειες που αφορούν τα συγκεκριμένα αντικείμενα (ψευδό-εμπειρική αφαίρεση)

Επομένως **η ικανότητα για δομική αντίληψη μιας συμβολικής έννοιας (:επίπεδο Πραγματοποίησης κατά τη Sfard, ή Ενσωμάτωσης κατά τον Dubinsky) θεωρείται το τελικό στάδιο μιας διαδικασίας - με ενδιάμεσες τις φάσεις της Εσωτερίκευσης και Συμπύκνωσης (κατά τη Sfard), ή Δράσης και Επεξεργασίας (κατά τον Dubinsky) που συνεισφέρουν στη λειτουργική αντίληψη της έννοιας-, η δομική αντίληψη μιας γεωμετρικής έννοιας είναι το πρώτο στάδιο μιας διαδικασίας που- περνώντας από μια εξαιρετικά σύνθετη φάση οπτικοποίησης - καταλήγει στη λειτουργική αντίληψη της έννοιας.**(Κολέζα ,2003)

3.5 Ο ρόλος τω υπολογιστών στην οπτικοποίηση των εννοιών

Έχουμε υπογραμμίσει τον ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων, εικόνων και προτύπων των δεδομένων καταστάσεων, έτσι ώστε η περιγραφή των διαδικασιών σκέψης να αποτελείται ουσιαστικά από το μετασχηματισμό και το χειρισμό των φυσικών ή και γνωστικών, διανοητικών προτύπων (Dörfler, 1993). Η διάκριση μεταξύ των φυσικών και διανοητικών πηγών δόμησης της γνώσης και των αλληλεπιδραστικών διαδικασιών που αναπτύσσονται μεταξύ αυτών των πηγών είναι μια αναπόφευκτη διάκριση, που γίνεται στο πλαίσιο εξέτασης μαθηματικών εννοιών από ένα άτομο το οποίο προσπαθεί να συνδέσει τη εμπειρία με τα μαθηματικά Σύμφωνα με τον Kaput (1993) *αυτή η διάκριση χαρακτηρίζεται ως διάκριση μεταξύ του σημαίνοντος και του σημαινόμενου. Οι δυο πηγές δόμησης διαφέρουν σε μια άλλη σημαντική πτυχή. Το φυσικό είναι το αισθητό ενώ το διανοητικό το υποθετικό που συνάγεται από τις παρατηρήσεις και τη θεωρία που το συνοδεύει κάτω από μια αλληλεπιδραστική προοπτική.*

Οι υπολογιστές και το λογισμικό των υπολογιστών παρέχουν τους τρόπους και τα πρότυπα για τα μαθηματικά. Η επέκταση και η μεταβλητότητα αυτών των νέων μέσων έχει αλλάξει την παραδοσιακή σχέση μεταξύ των γνωστικών διαδικασιών και αναπαραστάσεων (Dörfler, 1993). Η επίδραση είναι τόσο ισχυρή για να οδηγήσει κάποιον να μιλήσει για μια νέα εμπειρική μαθηματική πραγματικότητα. Μέσα από το υπολογιστικό αντίστοιχό τους σύμφωνα με την Mariotti(2000) οι αρχικά αφηρημένες και αυστηρές έννοιες γίνονται όλο και περισσότερο κατανοητές δηλαδή επέρχεται κάποια αντικειμενοποίηση (reification) που δίνει την εντύπωση ενός άμεσου χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων. Εξετάζοντας το όλο ζήτημα κάτω από αυτή την προοπτική ο Kaput (1991, 1992) και έχοντας ως στόχο να εστιάσει στη λειτουργία των σημειωτικών συστημάτων σε σχέση με τα νέα ηλεκτρονικά μέσα, έδωσε μια διαφωτιστική ανάλυση που συζητά τις δυνατότητες του υπολογιστικού περιβάλλοντος (Kaput, 1992, σελ. 522).

Ο αντίκτυπος ο βασισμένος στην αντικειμενοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων και των σχέσεων μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερες αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών σχετικά με το "ποια μαθηματικά είναι αφομοιώσιμα και από ποιους σπουδαστές" (Balacheff & Kaput, 1996, σελ. 469)

Όπως οι Hoyles και Noss σημειώνουν, μια ριζική αλλαγή πρέπει να ολοκληρωθεί "Η αφαίρεση πρέπει να θεωρηθεί όχι τόσο πολύ ως βήμα ανοδικό, αλλά μάλλον ως συνδυασμός θεωριών, εμπειριών και αποσυνδεδεμένων τεμαχίων της γνώσης συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών» (Hoyles & Noss, 1996, σελ. 44). Από αυτή την άποψη οι μαθηματικές έννοιες είναι αφαιρετικές δεδομένου ότι απεικονίζουν και αναδημιουργούν την συστημική και διασυνδεδεμένη φύση των αντικειμένων. Η διαφορετική και συχνά αντιπαραβαλλόμενη θέση συνοψίζεται στη συζήτηση (Dubinsky, 1991; Sfard & Linchevski, 1994). Σε ένα περιβάλλον υπολογιστών, ο χρήστης ενεργεί και αλληλεπιδρά σε μια εικονική πραγματικότητα όπου οι δράστες είναι "αντικείμενα" στοιχεία, τα οποία μπορούν να αναφερθούν ως "υπολογιστικά αντικείμενα". (Mariotti, 1997)

Η πολυπλοκότητα στη σύγκριση των διαφορετικών περιβαλλόντων είναι ευρέως γνωστή και εμφανίζεται για παράδειγμα, σε σχέση με τη γεωμετρία στη συζήτηση τη σχετική με τη σύγκριση μεταξύ της Logo και ενός δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας όπως το Cabri. (Laborde, 1993; Balacheff & Sutherland, 1994; Hoyles & Noss, 1996).

Σε ένα περιβάλλον όπως του GSP ή άλλων λογισμικών χρησιμοποιούνται γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα και πίνακες για την κατανόηση και τη μάθηση των εννοιών. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μεταφράζουν τις ενέργειές τους και τις ερμηνείες που δίνουν σ' αυτές από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. Ορισμένοι ερευνητές έχουν καταγράψει διάφορες εκτιμήσεις για τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σε τέτοια περιβάλλοντα (Ainsworth, 1999) όπως δεν μπορούν να περάσουν από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (conversion), δεν μπορούν δηλαδή να κινητοποιήσουν πολλά συστήματα συγχρόνως, και κυρίως δεν αναγνωρίζουν την ίδια έννοια μέσα από διαφορετικές της αναπαραστάσεις σε διάφορα σημειωτικά συστήματα.

Για να υπερνικήσουν αυτές τις δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστάσεων, πολλά μαθησιακά περιβάλλοντα έχουν σχεδιαστεί για να εκμεταλλευτούν την αυτόματη μετάφραση ή τη «δυναμική σύνδεση». Σ' αυτή την περίπτωση, καθώς ένας μαθητής ενεργεί σε μια αναπαράσταση, τα αποτελέσματα των ενεργειών του παρουσιάζονται σε άλλη, με αποτέλεσμα να μειώνεται το γνωστικό φορτίο που απαιτείται κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο επιπέδων, του αναφορικού και του σημαινόμενου. Σύμφωνα με τον (Ainsworth, 1999) οι πολλαπλές αναπαραστάσεις λειτουργούν συμπληρωματικά. Δηλαδή

🌀 παρέχουν συμπληρωματικές διαδικασίες ή πληροφορίες που είτε αφορούν εργασίες ή στρατηγικές ενεργειών ή πληροφορίες (διαφορετικές ή κοινές) ή από τη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη.

🌀 ενθαρρύνουν τους μαθητές να κάνουν βαθύτερες κατανοήσεις της κατάστασης που μελετούν, καθώς μπορούν να κάνουν επεκτάσεις, αφαιρέσεις και συσχετίσεις.

Η αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται σ' ένα τέτοιο περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι πολυποίκιλη, ενισχύεται από τις διαφορετικές διαδικασίες και στηρίζεται από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Όσο σημαντική είναι η αναγκαιότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών με ταυτόχρονη χρήση και ενός κατάλληλου λογισμικού άλλο τόσο είναι και η ανάπτυξη της δεξιότητας για σχεδιασμό με το χέρι (ανάπτυξη της ίδιας δεξιότητας για κατασκευή με διαβήτη και χάρακα). Είναι προφανές ότι οι μαθητές δεν μπορούν να κάνουν μαθηματικά αν δεν θέλουν να ασχοληθούν με αυτά. Και η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων με την βοήθεια υπολογιστών βοηθά ιδιαίτερα αυτή την ομάδα μαθητών που έχουν μια αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά.

Η αλληλεπίδραση με τον υπολογιστή έχει γίνει όλο και περισσότερο άμεση και παρόμοια με την ανθρώπινη αλληλεπίδραση. Σύμφωνα με τους Hoyles & Noss (1996) ο ρόλος του προγραμματισμού στην επικοινωνία μεταξύ του χρήστη και του υπολογιστή έχει ως αποτέλεσμα μια βαθιά αντανάκλαση στα οφέλη ενός τέτοιου συγκεκριμένου τύπου. Απαιτείται βέβαια περαιτέρω έρευνα λαμβάνοντας υπόψη επίσης την εξέλιξη των γλωσσών προγραμματισμού και την πολλαπλή σχέση τους στη μαθηματική γνώση.

3.5.1 Η κονστρουβιστική προσέγγιση των εννοιών μέσα στο περιβάλλον ενός υπολογιστή

Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι ο υπολογιστής γίνεται μέρος του περιβάλλοντος η ερώτηση που πρέπει να τεθεί είναι ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθητών με τον υπολογιστή;

Το 1980 ο S. Papert εισήγαγε την ιδέα του "μικρόκοσμου". Τότε υπήρξε μια άνθηση "των μαθησιακών περιβαλλόντων", και οι μαθητές αναμένονταν να κατασκευάσουν τη μαθηματική γνώση μέσα από το περιβάλλον. Η κύρια υπόθεση που εμπνέει την ιδέα του μικρόκοσμου είναι η δυνατότητα της χρησιμοποίησης δραστηριοτήτων για την επίλυση προβλήματος.

Σε άλλο επίπεδο (Hoyles, 1992, p. 152), ο υπολογιστής μπορεί να θεωρηθεί ένα ισχυρό εργαλείο, όχι μόνο σαν ισχυρή πηγή για να ολοκληρώσει έναν στόχο αλλά και ικανός να μετασχηματίσει τον ίδιο τον στόχο, και συγχρόνως να μετασχηματίσει τη σχέση του χρήστη με την υποβόσκουσα γνώση.

Ένας μικρόκοσμος αποτελείται από τα ακόλουθα αλληλένδετα ουσιαστικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

i) Ένα σύνολο πρωτότυπων (primitive) αντικειμένων, στοιχειωδών διαδικασιών σε αυτά τα αντικείμενα, και έκφρασης κανόνων και τρόπων που οι διαδικασίες μπορούν να εκτελεστούν και να συνδεθούν, που είναι η συνηθισμένη κατασκευή ενός τυπικού συστήματος υπό τη μαθηματική έννοια.

ii) μια *περιοχή της φαινομενολογίας* που συσχετίζει αντικείμενα και ενέργειες με τα ελλοχεύοντα αντικείμενα προς τα φαινόμενα στη "επιφάνεια της οθόνης". Αυτή η περιοχή της φαινομενολογίας καθορίζει τον τύπο ανατροφοδότησης που ο μικρόκοσμος παράγει συνεπεία των ενεργειών και των αποφάσεων των χρηστών (ii) a *domain of phenomenology that relates objects and actions on the underlying objects to phenomena at the 'surface of the screen'*. This domain of phenomenology determines the type of feedback the microworld produces as a consequence of user actions and decisions (Balacheff & Sutherland, 1994, Balacheff & Kaput, 1996, σελ. 471)

Κατά συνέπεια ένα κομμάτι της μαθηματικής γνώσης ενσωματώνεται σε ένα κομμάτι του λογισμικού για να ενεργήσει και να αλληλεπιδράσει με τον υπολογιστή, αντιμετωπίζοντας τη λύση ενός προβλήματος μέσα στο περιβάλλον του μικρόκοσμου που ο χρήστης κατασκευάζει τη γνώση. Ειδικότερα, το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας προκύπτει από ένα σύνολο προβλημάτων το οποίο παρέχεται μέσω της λύσης. Το κονστρουβιστικό αποτέλεσμα που παράγεται μέσω της στοχαστικής αφαίρεσης στη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος είναι σύμφωνο με την θεωρία του εννοιολογικού πεδίου του Vergnaud (Vergnaud, 1990). Αυτός είναι και ο βασικός ρόλος που αποδίδεται στα συστήματα αναπαραστάσης από πολλούς ερευνητές (Hoyles & Noss, 1996; Kaput, 1992),

Οι μαθηματικοί μικρόκοσμοι παρέχουν μια δυναμική σημασιολογία για ένα επίσημο σύστημα και επιτρέπουν με αυτές τις ενέργειες στους μαθητές να ερευνήσουν ταυτόχρονα

τη δομή των αντικειμένων, τις σχέσεις τους και τις αναπαραστάσεις που τις καθιστά προσιτές.

Κατά συνέπεια, ένας μικρόκοσμος προσφέρει μεγάλες δυνατότητες εκμάθησης: η ίδια η φύση ενός μικρόκοσμου χαρακτηρίζεται από τη διαθεσιμότητα των "υπολογιστικών αντικειμένων" και οι διαδικασίες που εμφανίζονται μέσα σε αυτόν, διαδραματίζουν έναν βασικό ρόλο στην αυτόνομη κατασκευή των εννοιών από τους χρήστες. Για αυτόν τον λόγο ένας μικρόκοσμος μπορεί να παίξει έναν ρόλο ποιοτικά διαφορετικό από την παραδοσιακή διδασκαλία.

3.5.2 Η κονστρουβιστική προσέγγιση μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις Διάκριση artefact –instrument .

Συνοψίζοντας οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να προκύψουν από τις διαδικασίες αφαίρεσης, βασισμένες στις αλληλεπιδράσεις με τα συστήματα.

Όπως ο Dreyfus λέει (1993), ενεργώντας σε τέτοιους τεχνητούς μαθηματικούς κόσμους δεν απαιτείται μόνο αντίληψη: η ερμηνεία των εικόνων οθόνης μπορεί να απαιτήσει εκείνη την μαθηματική γνώση ώστε η αρχή πρέπει να προκύψει μέσα από τη βασισμένη στον υπολογιστή δραστηριότητα.

Η περίπτωση των πολλαπλών αναπαραστάσεων από μια συνάρτηση σε έναν γραφικό υπολογιστή είναι ίσως το καλύτερο παράδειγμα, αλλά παρόμοια φαινόμενα έχουν παρατηρηθεί επίσης και σε άλλο περιβάλλον (Laborde, 1993; Sutherland, 1993)

Γενικά, η ανάπτυξη των εννοιών από τους σπουδαστές ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασής τους με το μαθησιακό περιβάλλον εγείρει ένα σημαντικό ζήτημα, σχετικό με την ερμηνεία των φαινομένων που παρατηρούνται πάνω στην οθόνη. Το πρόβλημα γίνεται ακόμη και πιο περίπλοκο εάν λαμβάνει υπόψη του κάποιος τις πιθανές αποκλίσεις μεταξύ της μαθηματικής γνώσης και της υπολογιστικής μετάθεσής (transposition) του σε έναν υπολογιστή (Balacheff & Sutherland, 1994)

" Λόγω των χαρακτηριστικών του hardware και της ιδιοσυγκρασίας του λογισμικού, ο υπολογιστής εισάγει ένα νέο σημειωτικό ζήτημα (semiotic of mathematics) των μαθηματικών (Balacheff, 1997, σελ. 113)

Η συζήτηση για τα πιθανά επιτεύγματα εκμάθησης που μπορούν να αναμένονται ως αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης με έναν υπολογιστή φαίνεται να γίνεται όλο και περισσότερο σύνθετη εξ αιτίας των διαφορετικές πτυχών και προοπτικών. Σε άλλο επίπεδο, είναι χρήσιμο να γίνει η ακόλουθη διάκριση μεταξύ ενός artefact και ενός εργαλείου (instrument).

Artefact είναι το ιδιαίτερο αντικείμενο με τα εγγενή χαρακτηριστικά του που σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε για το σκοπό με έναν ιδιαίτερο στόχο και **instrument** είναι το artefact και οι μορφές της χρήσης του, όπως είναι διαμορφωμένες από έναν ιδιαίτερο χρήστη. (Mariotti, 2002)

Σύμφωνα με την Mariotti ένα εργαλείο είναι η σύνδεση μεταξύ ενός αντικειμένου (artefact /τεχνική συσκευή) και η οργάνωση των πιθανών ενεργειών δηλ. των "σχεδίων χρησιμοποίησης", τα οποία αποτελούν ένα δομημένο σύνολο σταθερών, που αντιστοιχούν στις κατηγορίες πιθανών διαδικασιών. Τέτοια σχήματα λειτουργούν σαν διοργανωτές της δραστηριότητας του χρήστη. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα εργαλείο είναι μια εσωτερική κατασκευή, η ανάπτυξη της οποίας είναι μια μακροπρόθεσμη διαδικασία. Όπως τα διαφορετικά και συντονισμένα σχέδια της χρήσης είναι διαδοχικά διαμορφωμένα, η σχέση μεταξύ του χρήστη και του artefact εξελίσσεται: αυτή η διαδικασία καλείται "εργαλειακή γένεση" ('instrumental genesis'). Σε γενικές γραμμές δεν βεβαιώνεται ότι η ανάπτυξη των σχεδίων που χρησιμοποιούνται είναι σύμφωνη με τον αρχικό σκοπό για τον οποίο το αντικείμενο σχεδιάστηκε.

Η εισαγωγή μιας εργαλειακής προσέγγισης το καθιστά πιθανό να αναλύσει και να ερμηνεύσει τις δυσκολίες που συναντώνται από τους μαθητές στη μεταχείριση και την πολυπλοκότητα ενός υπολογιστή.

Η τεχνολογία έχει αναγνωριστεί ευρέως ως σημαντικό μέσο και εργαλείο στην διδασκαλία αφού όπως προτείνει το NCTM (2000 p.24) η χρήση της τεχνολογίας έχει την δυνατότητα να ασκήσει επιρροές στα μαθηματικά που διδάσκονται και να ενισχύσει την εκμάθηση και κατανόηση των εννοιών .Ο σχεδιασμός της εκπαιδευτικής εμπειρίας , οι πηγές και δραστηριότητες που θα επιτρέψουν την αύξηση των δεξιοτήτων , της διαίσθησης και κατανόησης των μαθητών μας ,είναι μια επινοητική τέχνη.

Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας όπως αναφέρει η N.Sinclair στο άρθρο της *Gaining Fluency and understanding with Sketchpad* «προσφέρουν τρεις σημαντικές υποστηρίξεις της μάθησης στο πρόγραμμα σπουδών : **συνεχή κίνηση** , που τονίζει την μαθηματική πίστη , τις ιδιότητες και σχέσεις , **συνδετικότητα** που υποκινεί συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών θεμάτων και των τρόπων της σκέψης και **επικοινωνία** που υποστηρίζει και ενισχύει την ανάπτυξη και χρήση των μαθηματικών σχέσεων συμπεριλαμβανόμενου του λεξιλογίου και των σημειώσεων »

Ο Battista (2002) υποστηρίζει ότι τέτοιοι οπτικό –κινηστικοί μετασχηματισμοί είναι στοιχειώδεις ως βασικά γνωστικά μέσα της κατανόησης ενός σχήματος . Με το σύρσιμο των αντικειμένων , μπορούμε να τα θέσουμε σε κίνηση και είναι στην ανθρώπινη φύση να προσέχει περισσότερο τα κινούμενα αντικείμενα παρά τα στατικά .Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανότερο να παρατηρήσουμε ιδιότητες και σχέσεις σε περιβάλλοντα με συνεχή κίνηση , ειδικά αυτές τις σχέσεις που παραμένουν αμετάβλητες . Όπως σύρουμε τις κορυφές ενός σχήματος , μπορούμε να αλλάξουμε δραστικά μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες του σχήματος Ο Battista αναφέρεται στο πως οι μαθητές που ασχολήθηκαν με γεωμετρικά αντικείμενα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ανέπτυξαν σημαντικές γεωμετρικές έννοιες και τρόπους κατανόησης , καθώς αλληλεπίδρασαν με δραστηριότητες που είχε ο ίδιος σχεδιάσει .

3.6 Η συμβολική αλληλεπίδραση στα μαθηματικά ως προέκταση της λεκτικής

« οι λέξεις ή η γλώσσα , όπως γράφονται ή μιλιούνται , δεν φαίνεται να διαδραματίζουν κάποιο ρόλο στον μηχανισμό της σκέψης μου ...»Α.Einstein

Η αλληλεπίδραση στην μάθηση σημαίνει τη χρήση επικοινωνίας, και η επικοινωνία σημαίνει χρήση συμβόλων με τα οποία κάποιος μπορεί να μεταβιβάσει σε άλλους ανθρώπους την εμπειρία και τις σκέψεις του. Η γλώσσα είναι το αναπτυγμένο συμβολικό σύστημά μας, και ο λόγος είναι επομένως ο κύριος τρόπος επικοινωνίας μας. Τα μαθηματικά, με τα ειδικά σύμβολά του, μπορούν να θεωρηθούν ως επέκταση του φυσικού λόγου . Είναι εμφανές ότι η γλώσσα των μαθηματικών συμβόλων, που χρησιμοποιείται στα ανώτερα μαθηματικά, δεν είναι επαρκές εργαλείο για την αλληλεπίδραση μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης, είτε αυτή λαμβάνει χώρα ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές ή ανάμεσα στους μαθητές μόνο. Αν θέλουμε να αυξήσουμε τις πιθανότητες για αμοιβαία κατανόηση, θα πρέπει τα αλληλεπιδραστικά εργαλεία να σχετίζονται επαρκώς και με τις νέες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες πρόκειται να διδαχθούν αλλά και με την προϋπάρχουσα εμπειρία και γνώση των μαθητών. Είναι αναγκαίο διαθέσιμες ευέλικτες μέθοδοι, να βοηθήσουν τους μαθητές να εξωτερικεύσουν τις προϋπάρχουσες ιδέες τους και να αποκαλύψουν τους τρόπους σκέψης τους στους άλλους. Τα εργαλεία που είναι διαθέσιμα σε ένα περιβάλλον δραστηριοτήτων με χρήση υπολογιστή επιτρέπουν στους μαθητές να παρακολουθήσουν ο ένας τον ειρμό της σκέψης του άλλου, ακόμα και σε καταστάσεις που δεν περιγράφονται με λόγια. Έτσι το περιβάλλον και οι μέθοδοι εργασίας ενθαρρύνουν τους μαθητές προς την κατεύθυνση του εσωτερικού και αμοιβαίου στοχασμού. Κατά συνέπεια, εάν η εκμάθηση των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιηθεί με μια διαλογική συζήτηση , η δυνατότητα των σπουδαστών "να μιλήσουν μαθηματικά" πρέπει να ενθαρρυνθεί. Ο λόγος είναι ένα "εργαλείο της σκέψης" και ένας φορέας για μεταφορά των σκέψεων κάποιου σε άλλους . Αυτό είναι αναγκαίο να συμβεί για κάποιον να συνειδητοποιήσει ότι τα εννοιολογικά συστήματά μας, δημιουργούνται μέσω της δραστηριότητας του λόγου ("λόγος " μπορεί να είναι και ένας "εσωτερικός διάλογος," φυσικά, και όχι μόνο μια συνομιλία με άλλους). Το αναπόσπαστο του λόγου και της σκέψης καταδεικνύεται στην αναπτυξιακή διαλεκτική της λέξης/ χρήσης

συμβόλων και της λέξης/ της έννοιας συμβόλων (κατανόηση). Και δεν μπορεί να κατασκευάσει την έννοια μιας έννοιας πριν από την εισαγωγή μιας λέξης ή ενός συμβόλου με τις οποίες κάποιος μπορεί να σκεφτεί για αυτήν την έννοια. Στα μαθηματικά, η αναπτυξιακή αλληλεξάρτηση μεταξύ του λόγου και των αντικειμένων της, καθώς επίσης και η διαλεκτική φύση της σχέσης μεταξύ των σημαδιών (σύμβολα και λέξεις) και της κατανόησής τους, βρίσκουν τη σαφέστερη έκφρασή τους. Εν ολίγοις, η ερώτηση δεν είναι εάν θα πρέπει να διδάξει κάποιος μέσω της συζήτησης, αλλά μάλλον πως δεδομένου ότι μαθαίνουν μαθηματικά οι μαθητές, ποιος είναι ο ειδικός τύπος συζήτησης για να ενισχύσουμε την κατασκευή της γνώσης. Δεδομένου ότι εξαρτάται κυρίως από το δάσκαλο εάν μια μαθηματική συζήτηση, που σχεδιάζεται με σκοπό την εκμάθηση, θα είναι επιτυχημένη ή όχι οι δάσκαλοι πρέπει να προετοιμαστούν προσεκτικά και οι δραστηριότητες γύρω από τις οποίες οι μαθηματικές συζητήσεις πρόκειται να πραγματοποιηθούν. Μία θέση του Bruner είναι ότι το γνωστικό αντικείμενο μπορεί να διδαχτεί αποτελεσματικά στα παιδιά όλων των ηλικιών αρκεί να χρησιμοποιηθεί η γλώσσα που το παιδί καταλαβαίνει, ανάλογα με το επίπεδο της νοητικής ανάπτυξης, στο οποίο είναι σε θέση να λειτουργεί όσον αφορά την πραγματοποίηση ενός συγκεκριμένου έργου. Σύμφωνα με τον Vygotsky η γλώσσα δεν είναι απλώς έργο, έτοιμο αποτέλεσμα, αποσπασμένη και αμετάβλητη γλωσσική δομή, αλλά ενέργεια δημιουργική και αναπτυσσόμενη διαδικασία.

Ο Rorty (1979) δεν αναφέρεται απαραίτητως στην αμεσότερη, κυριολεκτική έννοια των συστατικών όρων. Για αυτόν, η συνομιλία είναι μια ευρεία μεταφορική ιδέα που περιλαμβάνει όλα τα είδη ανθρώπινης επικοινωνίας. Discourse είναι ένας άλλος όρος που χρησιμοποιείται ευρέως αυτές τις μέρες υπό παρόμοια έννοια (Foucault, 1972) η λέξη έχει μια πολύ ευρεία έννοια και αναφέρεται στο σύνολο των επικοινωνιακών δραστηριοτήτων, όπως ασκείται από μια δεδομένη κοινότητα (για να αποφύγει τη σύγχυση με την καθημερινή στενή αίσθηση του όρου).

3.7 Ο ρόλος της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη μάθηση –Οι θέσεις των Vygotsky - Piaget ως προς την φύση και προέλευση της ανθρώπινης γνώσης

Ο Vygotsky όπως και ο Piaget υποστηρίζει ότι η γνώση είναι μια ανθρώπινη κατασκευή και πηγή της γνώσης είναι η οι ενέργειες του υποκειμένου. Ενώ όλοι οι θεωρητικοί φαίνονται να συμφωνούν για την κεντρική σημασία της ανθρώπινης ανάγκης για τη γνώση και την κατανόηση, ο Vygotsky υπογράμμισε την ουσιαστική σημασία της κοινωνικής φύσης της μάθησης.

Ο Bruner αναφέρει (1985 σελ. 25), *ένα σημείο... έχει αγνοηθεί ή του έχει δοθεί δεύτερη σημασία στον προσανατολισμένο για επιτεύγματα δυτικό πολιτισμό μας. Είναι έμφυτο [στην πεποίθηση του Vygotsky] ότι το πέρασμα στη γνώση είναι όπως το πέρασμα στη γλώσσα —της βασικής πεποίθησής του ότι η κοινωνική συναλλαγή είναι ο θεμελιώδης φορέας της εκπαίδευσης.* (one point ... has usually been overlooked or given second billing in our own achievement-orientated Western culture. It is inherent in [Vygotsky's] conviction that passing on knowledge is like passing on language—his basic belief that social transaction is the fundamental vehicle of education and not, so to speak, solo performance). Ο ρόλος της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην εκμάθηση σήμερα δεν έρχεται σε δεύτερη θέση. Οι ερευνητές της εκπαίδευσης για τα μαθηματικά έχουν γράψει για αυτόν εκτενώς (Cobb, 1995, ; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1996; O'Connor, 1996; Forman, Minick, & Stone, 1993; Cole, 1996). Η ιστορία της συζήτησης (debate) με τον Piaget και τον Vygotsky να θεωρούνται σήμερα ως ηγέτες δύο αντίθετων στρατοπέδων, σχετικά με την σημασία του μεμονωμένου ή συνεργατικού τρόπου εκμάθησης, είναι πιθανώς όση η ιστορία της έρευνας για την ανθρώπινη εκμάθηση. Το πρότυπο του Piaget απεικονίζει τον μαθητή σαν να είναι "ένας απομονωμένος οργανισμός" εκτός ίσως από το άμεσο φυσικό περιβάλλον (Bruner, 1985, σελ. 25), ενώ ο Vygotsky υποστηρίζει την σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη εκμάθηση. Αυτό έχει παρερμηνευθεί ως άρνηση του Vygotsky για τον ρόλο της αλληλεπίδρασης του παιδιού με το φυσικό περιβάλλον και ότι υπαινίσσεται μια απουσία οποιασδήποτε αναφοράς στο κοινωνικό πλαίσιο στις γραφές του Piaget. Σύμφωνα με την

Sfard (1998) κανένας υπαινιγμός δεν είναι αληθινός. Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1969) ο Vygotsky συμφώνησε ότι επίσης μη κοινωνικές (nonsocial) πτυχές του κόσμου που ζούμε επηρεάζουν πολύ τη σκέψη μας και ο Piaget δήλωσε επανειλημμένα ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες στην εκμάθηση. Για τον Piaget η μαθησιακή διαδικασία καθορίζεται από εσωτερικούς παράγοντες ενώ για τον Vygotsky από εξωτερικούς

Η θεωρία του Vygotsky επικεντρώνεται ως η εσωτερίκευση (internalization) που κατανοείται ,σε αντίθεση με τον Piaget ως ο μετασχηματισμός μιας διαψυχολογικής διαδικασίας σε ενδοψυχολογική .

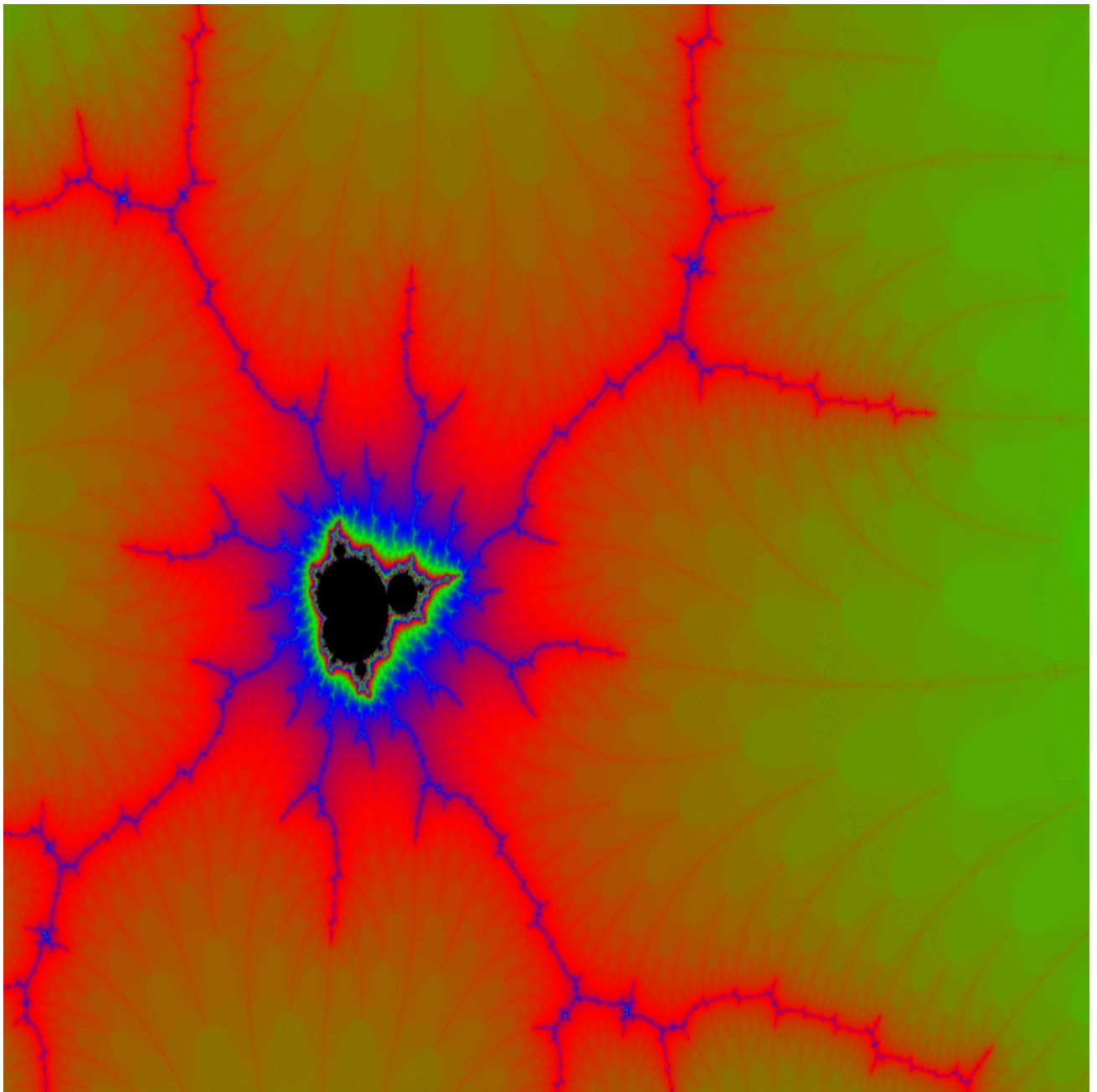
Και ο Piaget και ο Vygotsky διαχώρισαν την άποψή τους ως προς τη φύση της ανθρώπινης εκμάθησης η ουσία της διαμάχης, εντούτοις, δεν βρίσκεται στο όραμα τους για τον μηχανισμό της μάθησης , όσο στην κατανόησή τους για τη φύση και την προέλευση της ανθρώπινης γνώσης. Ενώ ο Piaget θεώρησε την ανθρώπινη διανοητική ανάπτυξη ως βιολογικά καθορισμένο φαινόμενο που μπορεί να επηρεαστεί από τον πολιτισμό μόνο περιθωριακά, ο Vygotsky έδωσε την πρωτοκαθεδρία στους κοινωνικοπολιτιστικούς παράγοντες. Επιπλέον, ενώ ο Piaget υπονόησε ότι η γνώση που χτίζουμε είναι κυρίως μια λειτουργία του κόσμου γύρω από μας και κυριολεκτικά δημιουργείται εκ νέου με κάθε αρχάριο, ο Vygotsky είδε αμφότερες και την γνώση και τη σημασία ως συλλογικές δημιουργίες που συντηρούνται μέσα στον πολιτισμό και ιδιοποιούνται επανειλημμένως από κάθε παιδί στο στάδιο της εκμάθησης. Σύμφωνα με την Sfard *οι έννοιες που μαθαίνουμε απλά δεν προέρχονται άμεσα από τη φύση και δεν καθορίζονται μεμονωμένα από τη φύση. Η εννοιολογική σκέψη είναι ένα υποπροϊόν της ανθρώπινης επικοινωνίας και είναι μόνο δυνατή μέσα στη γλώσσα. Η γλώσσα, στη συνέχεια, είναι μια κοινωνική δημιουργία και οι έννοιες οι ίδιες είναι επομένως ουσιαστικά κοινωνικές.*

Η επιμονή του Vygotsky στην κοινωνική φύση της γνώσης φέρνει στο προσκήνιο τη σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην ανθρώπινη εκμάθηση. Αντίθετα από τον Piaget, υπονοεί ότι χωρίς μια τέτοια αλληλεπίδραση καμία εννοιολογική εκμάθηση δεν θα ήταν δυνατή. Η προφανέστερη μορφή εκμάθησης της αλληλεπίδρασης είναι μια αλληλεπίδραση μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών ή των μαθητών μεταξύ τους . Η θεωρία του Piaget διατυπώθηκε σε αντιπαράθεση με την μιτσεβιοριστική θεωρία αλλά δεν ασχολήθηκε ιδιαίτερα με θέματα διδασκαλίας (Janvier ,1996). Για τον Vygotsky η διαδικασία της μάθησης δεν διαχωρίζεται από την διαδικασία διδασκαλίας. Εκτός από την άμεση διδασκαλία, υπάρχουν ποικίλες καθημερινές αλληλεπιδράσεις όπου η μάθηση εμφανίζεται. Μέσω μιας διαπραγμάτευσης της έννοιας, που είναι αναπόσπαστο μέρος οποιασδήποτε επικοινωνίας, τα παιδιά μαθαίνουν να καταλαβαίνουν τις νέες λέξεις, κατά συνέπεια τις νέες έννοιες. Ακόμη και το να μελετήσουν ένα εγχειρίδιο μπορεί να θεωρηθεί ως μορφή κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Τελικά, το κείμενο που διαβάζεται είναι ένα αποτέλεσμα μιας προσπάθειας να μεταβιβαστούν οι κοινωνικά κατασκευασμένες έννοιες, και η ανάγνωση τέτοιου κειμένου είναι επομένως μια μορφή αλληλεπίδρασης με άλλους .

Η επιμονή του Vygotsky στον ουσιαστικό ρόλο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και η συνεργατική μάθηση αποτελούν ένα λόγο της γενικότερης αναγνώρισης της ανάγκης για τις πολυσχιδείς μορφές των αλληλεπιδράσεων, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δεν χαρακτηρίζουν το δάσκαλο στον κεντρικό ρόλο (Davidson, 1990). Επομένως φαίνεται ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση είναι απαραίτητη για να υπάρξει οποιαδήποτε εκμάθηση εννοιών

Τα *Standards* ((NCTM, 1989, σελ. 10) προτείνουν ένα ουσιαστικό βήμα προς τις αρχές του Vygotsky. “shift in teaching: toward questioning and listening, away from telling” (NCTM 1995, σελ. 2). Στο έγγραφο, η κύρια σημασία για τον μαθητή στις διαφορετικές μορφές αλληλεπίδρασης είναι υπογραμμισμένη με διάφορους τρόπους. Μεταξύ των προτεινόμενων πέντε τρόπων, τρεις μιλούν ρητά για τους διαφορετικούς τύπους αλληλεπιδράσεων : 1)ομάδα και μεμονωμένες αναθέσεις 2) συζήτηση μεταξύ του δασκάλου και των σπουδαστών και μεταξύ των σπουδαστών 3) έκθεση από το δάσκαλο. Είναι σημαντικό να τονιστεί η ποικιλομορφία στις συνθέσεις των ομάδων μέσα στις οποίες η αλληλεπίδραση θα πραγματοποιηθεί και η ποικίλη έκταση της συμβολής του δασκάλου και των σπουδαστών στην ανταλλαγή. Αυτή η τάση για ομαδική εργασία έχει τροφοδοτηθεί επίσης από τα αυξανόμενα συμπεράσματα που φαίνονται να δείχνουν τα πλεονεκτήματα της συλλογικής

προσπάθειας και της ευεργετικής επίδρασής του στα επιτεύγματα των σπουδαστών (Webb , 1991 , O'Connor 1998) Το θέμα της αλληλεπίδρασης στην εκμάθηση των μαθηματικών μπορεί να είναι πιο σύνθετο . Για τις πραγματικά αποτελεσματικές ουσιαστικές επεμβάσεις εκμάθησης, η μεμονωμένη εργασία μπορεί να είναι τόσο ζωτικής σημασίας όσο η ομαδική εργασία. Η άρνηση αυτής της ανάγκης είναι μια παρερμηνεία της θεωρίας. Για λόγους που εξηγήθηκαν στα προηγούμενα τμήματα, η διαδικασία της κατασκευής της έννοιας δεν μπορεί να θεωρηθεί ως θέμα συλλογικής προσπάθειας .Μάλλον, πρέπει να γίνει κατανοητό ως περίπλοκο μίγμα κοινωνικής αλληλεπίδρασης και μεμονωμένης προσπάθειας . Ίσως λόγω του κεντρικού ρόλου αυτού του τελευταίου συστατικού, οι μαθηματικοί αναφέρονται συχνά ότι προτιμούν την μεμονωμένη εργασία από τη συνεργατική επίλυση προβλήματος (Sfard, Nesher, Streefland , Cobb, & Mason , 1998). Η επικοινωνία με άλλους, που είναι μια άλλη επίμονη δραστηριότητα, μπορεί να αποσπάσει την προσοχή του μαθητή και να κάνει την επίλυση του προβλήματός που προσπαθεί λιγότερο αποτελεσματική. Η εκμάθηση δεν είναι απαραίτητο να είναι διαλογική για να είναι κοινωνική. Η αλληλεπίδραση, με τη σειρά της, δεν είναι απαραίτητο να είναι μεταξύ των μαθητών. Η επέμβαση του δασκάλου είναι επίσης μια μορφή αλληλεπίδρασης. Η αληθινή εκμάθηση επίσης μπορεί μόνο να εμφανιστεί όταν τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται από τους σπουδαστές είναι κάπως υψηλότερα από το επίπεδο της ικανότητάς τους. Όπως αναφέρει η Sfard(1998) *σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορεί η μάθηση να πραγματοποιείται χωρίς τη βοήθεια ενός πιο πεπειραμένου προσώπου*. Ένα έμμεσο επιχείρημα είναι ότι δεν μπορεί να αναμένεται ότι τα παιδιά θα εφεύρουν ένα σώμα γνώσης του οποίου η ιστορική κατασκευή διάρκεσε χιλιάδες έτη (Sierpinski & Lerman, 1996). Αυτή η αξίωση είναι αληθινή εάν κάποιος αναφέρεται σε έναν μεμονωμένο μαθητή τύπου "Piaget" ή σε μια ομάδα "Vygotsky". Και ο Piaget και ο Vygotsky μίλησαν εκτενώς για εκείνες τις ειδικές στιγμές όταν προκειμένου να προχωρήσει, πρέπει κάποιος να αναενοιολογήσει (reconceptualize) τι ήδη ξέρει. Δεν μπορεί να αναμένεται ότι ο μαθητής θα αρχίσει να εισβάλλει σε ένα "εξωτερικό διάστημα" πριν η ύπαρξη αυτού του διαστήματος παρουσιαστεί από κάποιον με μεγαλύτερη εμπειρία. Σύμφωνα με τον Cobb(1995,σελ.13) ισχυρισμοί ότι η μια άποψη ή η άλλη συλλαμβάνει την ουσία του χαρακτήρα του ατόμου ή του κοινωνικού πλαισίου πρέπει να απορριφθούν υπέρ μιας πραγματιστικής ερμηνείας η οποία θα λαμβάνει υπόψη της τη μια ή άλλη οπτική σε σχέση με το υπό διαπραγμάτευση θέμα κάθε φορά . Η αναζήτηση αυτής της συμπληρωματικότητας στηρίζεται στην άποψη ότι υπάρχει και ένα ενεργητικό άτομο και ένα ενεργητικό περιβάλλον .Σύγχρονες ερευνητικές προσεγγίσεις προτείνουν μια αλληλεπιδραστική θέση (Bauersfeld 1994 ,σελ.139)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 Μεθοδολογία της έρευνας

.....In addition to the observer writing down details in field notes, a powerful recording device are through audio-visual recording Comprehensive audio-visual recording can overcome the partialness of the observer's view of a single event and can overcome the tendency towards only recording the frequently occurring events. Audio-visual data collection has the capacity for completeness of analysis and comprehensiveness of material, reducing both the dependence on prior interpretations by the researcher, and the possibility again of only recording events which happen frequently

“.... Εκτός από τον παρατηρητή που καταγράφει απαριθμώντας λεπτομέρειες σε σημειώσεις, μια ισχυρή συσκευή καταγραφής είναι μέσω της (audio-visual) οπτικοακουστικής καταγραφής Η περιεκτική οπτικοακουστική καταγραφή μπορεί να υπερνικήσει την μεροληψία της άποψης του παρατηρητή ενός ενιαίου γεγονότος και μπορεί να υπερνικήσει την τάση να καταγράφει τα συχνά εμφανιζόμενα γεγονότα. Η οπτικοακουστική συλλογή δεδομένων έχει την ικανότητα για την πληρότητα της ανάλυσης και περιεκτικότητα του υλικού, μειώνοντας αμφότερα και την εξάρτηση από προγενέστερες ερμηνείες του ερευνητή, και τη δυνατότητα να καταγράψουν πάλι μόνον τα γεγονότα που συμβαίνουν συχνά.....” (Cohen, Manion 2000)

Η έρευνα ακολούθησε την ποιοτική μεθοδολογία με ανάλυση της συμπεριφοράς, των αντιδράσεων, του τρόπου σκέψης των παιδιών, την εξέλιξη του τρόπου σκέψης σε περιβάλλον με χρήση Η/Υ. Πραγματοποιήθηκε στα σχολεία των παιδιών με καταγραφή των συνομιλιών της ερευνήτριας με του μαθητές και των ενεργειών των παιδιών που συμμετείχαν. Η συλλογή των πληροφοριών έγινε με χρήση συσκευής μαγνητοφώνου. Τα δεδομένα της έρευνας για ανάλυση στηρίχθηκαν σε από -μαγνητοφώνηση των συνομιλιών των παιδιών και της ερευνήτριας, καθώς και σε σημειώσεις των παιδιών. Η μελέτη των διαλογών είχε στόχο την διερεύνηση

- της κατανόησης των εννοιών από την πλευρά των μαθητών,
- της μεθόδου που θα οδηγούσε στην κατασκευή της γνώσης, στηριζόμενοι στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις
- της ορθότητας ως προς την αντιμετώπιση των νέων καταστάσεων
- την καταλληλότητα του τρόπου προσέγγισης από την πλευρά της ερευνήτριας,
- την καταλληλότητα του τρόπου διασύνδεσης των εννοιών του λογισμού και των αφηρημένων εννοιών μέσω της εμπειρίας που είχε προκληθεί από τις δραστηριότητες

Στην αρχή οι μαθητές δεν ήταν αρκετά ελεύθεροι στις αντιδράσεις και στο να εκθέσουν την άποψή τους. Ο λόγος που συνέβαινε αυτό ήταν ότι δεν υπήρχε κάποια προηγούμενη γνωριμία της ερευνήτριας με τους μαθητές, ότι δεν γνώριζαν ούτε είχαν ασχοληθεί ποτέ με το συγκεκριμένο λογισμικό και ότι η συσκευή του μαγνητοφώνου λειτουργούσε ανασταλτικά (δεν ήταν τουλάχιστον αρχικά αυθόρμητοι). Το πρόβλημα δεν ήταν τόσο έντονο στους μαθητές του Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου όσο στους μαθητές του Λυκείου. Αυτό βέβαια στο ξεκίνημα της κουβέντας γιατί στην συνέχεια απέβαλλαν το άγχος για τη “λάθος” απάντηση. Ένα άλλο σημείο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι δεν ακολούθησαν τις περισσότερες φορές τους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου πιστεύοντας ότι πρέπει απαραιτήτως να δώσουν μια απάντηση. Οι απαντήσεις ήρθαν αυθόρμητα και τα συμπεράσματα που προέκυψαν ήταν αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων των μαθητών μεταξύ τους ή με την ερευνήτρια ή με το λογισμικό και την ερευνήτρια. Στόχος της ερευνήτριας δεν ήταν να επαληθεύσει κάποια θεωρία αλλά να διερευνήσει την καταλληλότητα ή μη της συγκεκριμένης μεθόδου και τον καλύτερο τρόπο προσέγγισης για την κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης. Ένα άλλο σημείο ήταν κατά πόσο τα προβλήματα γλώσσας (όχι μόνο των μαθηματικών εννοιών) θα προκαλούσαν δυσκολία στους μαθητές του Δημοτικού ή οι παραστάσεις στον Η/Υ διευκολύνουν στην κατανόηση εννοιών, αφού οι μισοί περίπου μαθητές που ασχολήθηκαν με το λογισμικό και συμμετείχαν στην έρευνα ήταν παιδιά μεταναστών από χώρες της Ρωσίας, Αλβανίας και Πολωνίας πράγμα που αποτελεί δεδομένο της πραγματικότητας των Ελληνικών δημοσίων σχολείων. Έπρεπε λοιπόν να λάβουμε υπόψη μας και αυτόν τον παράγοντα. Οι παρεμβάσεις από την ερευνήτρια έγιναν ακολουθώντας συγκεκριμένη μέθοδο. Οι μαθητές αντιμετώπιζαν τις νέες έννοιες στις

δραστηριότητες μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις που έχουν καταγραφεί και παροτρύνθηκαν να λειτουργούν αυθόρμητα με κατάλληλο τρόπο (π.χ « πώς μπορούμε να σας βοηθήσουμε αν δεν ξέρουμε σε ποια σημεία δυσκολεύεστε ή κάνετε λάθη »). Οι ορισμοί των εννοιών ερχόντουσαν στην συνέχεια από τους μαθητές ως αποτέλεσμα της συζήτησης και της κατανόησης μέσα από τις δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες περιλάμβαναν τρόπους κατασκευής fractals μέσα από επαναληπτικές διαδικασίες, γενίκευση της κατασκευής με την διαδικασία του iteration (στη συνέχεια θα γίνει μια αναφορά για την συγκεκριμένη διαδικασία), μέτρηση των εμβαδών των σχημάτων που προέκυπταν, γενίκευση των μετρήσεων με την διαδικασία του iteration και παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε πίνακες, αποτύπωση (plot) των αποτελεσμάτων του πίνακα σε γραφικές παραστάσεις και εξαγωγή συμπερασμάτων. Οι δραστηριότητες ήταν έτοιμες σε συνεχόμενες σελίδες του ίδιου αρχείου (ένα από τα νέα δεδομένα του GSP4.03). **Έτσι οι δραστηριότητες στο λογισμικό είχαν την εικόνα ενός ζωντανού βιβλίου.** Κάθε αρχείο και μια ενότητα βιβλίου στην οποία οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να κατανοήσουν την επανάληψη, την επαναληπτική διαδικασία, τις έννοιες που προκύπτουν από άλλες ήδη προϋπάρχουσες, τα λάθη που υπήρχαν στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα, πώς μπορούμε να επεκτείνουμε την διαδικασία. Ταυτόχρονα μπορούσαν να πειραματιστούν σε νέες σελίδες με τα εργαλεία του λογισμικού και να κατασκευάσουν μαθηματικά αντικείμενα. Με αυτό τον τρόπο τους δινόταν η δυνατότητα να εικάσουν, να ερευνήσουν, **να παίξουν πρωταγωνιστικό ρόλο αφού διαπίστωναν ότι έφτιαχναν μόνοι τους μαθηματικά.**

Οι μαθητές που επιλέχθηκαν για τη έρευνα ήταν

- Στην ΣΤ΄ Δημοτικού 3 μετρίου επιπέδου και 3 πολύ καλοί.
- Στην Α΄ Γυμνασίου πολύ καλοί (η επιλογή της μαθήτριας με την οποία συνεχίσαμε και την έρευνα σε μεμονωμένο επίπεδο έγινε τυχαία)
- Στην Α΄ Λυκείου μετρίου επιπέδου (στα Μαθηματικά) και με αμετάκλητη απόφαση να στραφούν προς την θεωρητική κατεύθυνση λόγω της σημαντικής δυσκολίας κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και των προβλημάτων που είχαν προκύψει από τα γνωστικά κενά.
- Στην Β΄ Λυκείου οι μαθητές ήταν πολύ καλοί με υψηλό επίπεδο ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά και προορισμό για την θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση.

Η έρευνα διεξήχθη, όπως αναφέραμε στο εργαστήριο πληροφορικής του κάθε σχολείου. Πραγματοποιήθηκε σε 4-5 συναντήσεις. Στην πρώτη συνάντηση έγινε μια παρουσίαση του λογισμικού (του οποίου καμία ομάδα δεν είχε γνώση) και πλαισίωση του θέματος με ιστορικά στοιχεία και στοιχεία από την βιβλιοθήκη των fractal. Τα υποκείμενα της έρευνας, είναι όπως εξηγήσαμε και προηγουμένως αναλυτικά, μαθητές άνω του μετρίου. Το GSP τους εντυπωσίασε και η παρουσίαση με τα έτοιμα fractals που υπάρχουν στην βιβλιοθήκη του λογισμικού με ταυτόχρονη αναφορά σε ιστορικά στοιχεία σχετικά με τα fractal και τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους, τους ενίσχυσε το ενδιαφέρον.

Όταν ένας μαθητής έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με ένα περιβάλλον όπως είναι το περιβάλλον του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας στο οποίο οι γεωμετρικές έννοιες παρουσιάζονται με χρώμα και κίνηση μέσα από τα μαθηματικά αντικείμενα, είναι αναμενόμενο να προκληθεί αυτό το ενδιαφέρον αφού το περιβάλλον δίνει στο μαθητή την αίσθηση ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα γίνονται αντικείμενο παιχνιδιού και μάλιστα σε ένα μάθημα που ίσως δεν του προκαλούσε ενδιαφέρον μέχρι χθες.

4.2 Στόχοι της έρευνας

Σε αυτήν την έρευνα και ανάλυση των συμπερασμάτων, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας σε έννοιες του απειροστικού λογισμού, όπως είναι το όριο και η ακολουθία, έννοιες που περιλαμβάνουν επιστημολογικά εμπόδια. Με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας τα όρια εισάγονται συχνά μέσω φορμαλιστικών τυποποιημένων διαδικασιών και υπόγειων ρουτινών που σκοπό έχουν την επίλυση ασκήσεων. Ένας άλλος λόγος που οι έννοιες του απειροστικού

λογισμού γίνονται ελάχιστα κατανοητές από τους μαθητές είναι ότι η οπτικοποίηση τους που επιχειρείται από τα σχήματα του βιβλίου είναι στατική επομένως θα μπορούσαμε να μιλήσουμε μόνο για οπτική αντίληψη, ενώ αυτές περιέχουν το στοιχείο της μεταβολής και της κίνησης. Το αποτέλεσμα είναι η μη κατανόηση σε βάθος των εννοιών.

Η κατασκευή παιδαγωγικών στρατηγικών για τους μαθητές πρέπει να λάβει υπόψη την ύπαρξη εμποδίων επιστημολογικής και διδακτικής φύσης.

Όπως αναφέρει ο Cornu (1991, σελ. 162) «Δεν είναι ένα θέμα που πρέπει να αποφεύγουμε αλλά αντίθετα να οδηγήσουμε τους μαθητές μας να το συναντήσουν και να το υπερνικήσουν». Συνήθως τα λάθη δείχνουν τα εμπόδια αλλά τα εμπόδια δεν είναι μόνο λάθη ή δυσκολίες. «Τα λάθη δεν είναι μόνο η επίδραση της άγνοιας από την αβεβαιότητα όπως διατυπώνεται από τις θεωρίες μάθησης των μπιχεβιοριστών ή των εμπειρικιστών αλλά η επίδραση ενός προηγούμενου κομματιού της γνώσης που ήταν ενδιαφέρον και επιτυχής αλλά που τώρα αποκαλύπτεται ότι δεν είναι αληθής ή προσαρμοσμένος στη νέα γνώση. Λάθη αυτού του τύπου καλούνται εμπόδια» (Brousseau, 1997, σελ. 82).

Θα πρέπει να πούμε ότι τεχνολογία η ίδια δεν προωθεί την αλλαγή (Valero & Gomez, 1996). Όπως αναφέρει η O. Robuti στο άρθρο της "The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Calculus" **«Αυτό που προωθεί την αλλαγή είναι το διδακτικό πρόγραμμα στο οποίο η τεχνολογία παρεμβάλλεται και ειδικότερα οι διδακτικές ακολουθίες που προγραμματίζονται από τους δασκάλους προκειμένου να εισαχθούν οι έννοιες του λογισμού με κατάλληλη χρήση της τεχνολογίας ως υποστήριξη των διδακτικών μεθόδων. Ο προγραμματισμός αυτής της διδακτικής ακολουθίας υπονοεί να επανεξετάσει τις δραστηριότητες, μεθοδολογίες, μαθήματα, πλαίσια εκμάθησης και όλες τις πτυχές της διδασκαλίας, που σκοπό έχουν την ενσωμάτωση στην παλαιά γνώση της νέας».**

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να κάνουμε σημαντικές επιλογές για την τεχνολογία πώς, πότε, γιατί, και ποιο είδος τεχνολογίας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Και στην συνέχεια ανάλογα με το είδος της τεχνολογίας που χρησιμοποιείται τον τρόπο χρήσης από το δάσκαλο ώστε να μπορεί να μεταβιβάσει μια δεδομένη έννοια με έναν ιδιαίτερο τρόπο.

Στην συγκεκριμένη έρευνα ο τρόπος που επιλέχθηκε για να διδαχθεί η έννοια του ορίου είναι η διαισθητική μέθοδος του «πλησιάζω πιο κοντά» στην τιμή που είναι το όριο, με την διαισθητική προσέγγιση των απειροελάχιστων, χωρίς αυτά να διδαχθούν μέσα από έναν αφηρημένο τρόπο.

Σε μια πρόσφατη έρευνα για τα απειροελάχιστα οι Milani & Baldino, (2002, σελ. 346) γράφουν «Γιατί να περιμένουμε να προκύψουν οι απειροελάχιστες ποσότητες και να μην τις υποκινήσουμε εμείς... Μια τέτοια συνειδητοποίηση θα υποκινήσει την μετάθεση του εμποδίου προς την κατανόηση των ορίων ή θα δημιουργήσει νέα εμπόδια.»

Με την τεχνολογική υποστήριξη του zoom θα διερευνήσουμε αν οι μαθητές μπορούν να εισαχθούν στις βασικές ιδέες των απειροελάχιστων και της χρήσης τους στον απειροστικό λογισμό. Το να αναφέρουμε σε μια τάξη για τις απειροελάχιστες ποσότητες δεν βοηθάμε τους μαθητές να ενισχύσουν την γνώση.

Τα ερωτήματα που τίθενται είναι

🌀 **Μπορεί η ερευνητική διαδικασία με την υποστήριξη του λογισμικού και μέσα από το zoom να οδηγήσει τους μαθητές να διεκδικούν αυθόρμητα τις εικόνες της έννοιάς ώστε να ενσωματώσουν τα απειροελάχιστα;**

🌀 **Μπορεί να επιτευχθεί η μετάβαση από την οπτική ερμηνεία της έννοιας του ορίου στον επίσημο και αυστηρό συλλογισμό με την χρήση των γραφικών παραστάσεων (Kidron, Zelavi & Openheim, 2001)**

Το GSP με την διαδικασία της αποτύπωσης των τιμών της γραφικής παράστασης σε μια ακολουθία σημείων ενισχύει την επεξήγηση της προσεγγιστικής διαδικασίας.

Η διαδικασία του animation παράγει τις αλλαγές των τιμών των πινάκων που επιτρέπει στους μαθητές να δουν τη δυναμική διαδικασία σε μια εικόνα. Οι αλλαγές αυτές προέρχονται από τις αυξομειώσεις του μεγέθους ενός αντικειμένου fractal που έχει την δυνατότητα να αλλάζει θέσεις.

Έτσι οι μαθητές «πρέπει να αλληλεπιδράσουν με τη δυναμική γραφική παράσταση, για να έχουν τον έλεγχο της δυναμικής αναπαράστασης» (Kidron, Zelavi & Openheim, 2001) Η

εξέλιξη της διαδικασίας συντελείται σε διαφορετικές σελίδες με σχηματικούς μετασχηματισμούς artefacts που μπορούν να ενεργοποιηθούν από τους μαθητές.

Στο περιβάλλον του GSP κατασκευάζονται τα σχήματα με τη χρήση μιας σειράς επιλογών από το μενού του προγράμματος ή με τις διαδικασίες του αρχείου εντολών και μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές στην διερεύνηση ανοικτών καταστάσεων

Οι μαθητές πρέπει να διαπιστώσουν ότι με το να σύρουν το σχήμα αυτό διατηρεί τις κανονικότητες της κατασκευής και τις ιδιότητες. Με το σύρσιμο των κορυφών και των αρχικών σημείων μεταβάλλονται οι μετρήσεις του σχήματος. Η διαδικασία είναι μια συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών αλληλεπιδραστικών πεδίων κατά Vergnaud και η εσωτερίκευση της διαδικασίας οδηγεί στην διατύπωση προτάσεων και συμπερασμάτων. Έτσι οι μαθητές οδηγούνται να αναλάβουν ενέργειες που έχουν τον χαρακτήρα της απόδειξης και οδηγούνται στη τυποποίηση και αυστηρό ορισμό της έννοιας.

Όπως αναφέρει ο Κυνηγός (1995)

Ο προγραμματισμός σε αυτές τις περιπτώσεις υποχρεώνει τους μαθητές να τυποποιήσουν τις διαισθητικές τους ιδέες με το να τις εκφράζουν με την χρήση των συμβόλων, να τις εκτελούν στον υπολογιστή και ταυτόχρονα να παρατηρούν την επίδρασή τους, συγκρίνοντας (τα αποτελέσματα) με αυτά που σκόπευαν πριν από την εκτέλεση. Τους επιτρέπει να ομαδοποιήσουν ένα σύνολο ιδεών και έπειτα είτε να το χρησιμοποιήσουν ως ονομασμένο αντικείμενο σε ένα πιο υψηλό επίπεδο αφαίρεσης, είτε να απεικονίζουν μια συγκεκριμένη ιδέα με αυτό το αντικείμενο. (για να χρησιμοποιήσω την ορολογία Douady, 1985) Όσον αφορά την αναπαράσταση αυτών των ιδεών και των αντικειμένων, το περιβάλλον προγραμματισμού σχεδιάζεται συχνά έτσι ώστε η εκτέλεση μιας συμβολικής έκφρασης να παράγει μια γραφική ανατροφοδότηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μαθητές συμμετέχουν σε μια πλούσια αλληλεπίδραση μεταξύ των αναπαραστάσεων όπως η κίνηση κατά μήκος μιας enactive – εικονικής – συμβολικής αναπαραστατικής σπείρας

Μέσα από το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας δημιουργούνται δυνατότητες (affordances) που δηλώνουν την συμπληρωματικότητα του έμβιου όντος (παιδιού – δασκάλου) με το περιβάλλον (συμπεριλαμβανομένου του H/Y)

Οι δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν στα διάφορα σχολικά επίπεδα της έρευνας μπορούν να χαρακτηριστούν ως δραστηριότητες προ-λογισμού που είναι χρήσιμες να εισαγάγουν τους μαθητές στην έννοια της ακολουθίας και του ορίου. Αυτή η μελέτη εστιάζει

- ✱ στις απαντήσεις των μαθητών στα προβλήματα λαμβάνοντας υπόψη το σχολικό επίπεδο αλλά και
- ✱ διερευνάται η δυνατότητα κατανόησης συνθετότερων εννοιών ακόμα και σε μικρότερες τάξεις.

Αναλύονται οι διαφορετικές στρατηγικές που εφαρμόζονται και στο τέλος ταξινομούνται οι απαντήσεις και τα συμπεράσματα των μαθητών

Μέσα από τις διαδικασίες οι μαθητές και κάνοντας χρήση της **τεχνολογίας ελέγχουν τις στρατηγικές των υπολογισμών σαν εξέλιξη μιας διαδικασίας εξέτασης των υποθέσεων που έχουν κάνει**

Στην εξέλιξη της διαδικασίας χρησιμοποιείται και το Excel για να υπολογίσει το άθροισμα κάποιων σειρών και να επικυρώσει τις εικασίες ή τα αποτελέσματα που θέλουμε να καταλήξουμε και απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων.

Αλλά σε έναν πιο σύνθετο στόχο, που εισάγεται με το στόχο της κατασκευής των εννοιών, η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ερευνήσει, για να υποθέσει, και για να εξετάσει τις υποθέσεις, για να επικυρώσει μια δήλωση που βρέθηκε ακριβώς και να τη διατυπώσει με έναν κατάλληλο τρόπο.

Επομένως συγκεντρωτικά οι παιδαγωγικής και διδακτικής φύσεως στόχοι που διερευνώνται στις δραστηριότητες είναι οι ακόλουθοι:

- ✱ Του τρόπου σκέψης των μαθητών μέσα από το περιβάλλον του λογισμικού και τις δυνατότητες που αναπτύσσονται (affordances) (διατύπωση υποθέσεων με ανάλυση

του προβλήματος, έλεγχος και πειραματισμός υποθέσεων με σκοπό την λήψη συμπερασμάτων .)

- ✱ Του επιπέδου κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών μέσα από την οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή και στο περιβάλλον του λογισμικού
- ✱ Της διαπίστωσης των εμποδίων που συναντάμε με τις γεωμετρικές ή αλγεβρικές έννοιες , της υπέρβασης αυτών και της αντικατάστασης με τη νέα γνώση .
- ✱ Της ικανότητας για κατάλληλες συνδέσεις ανάμεσα σε πολλαπλές αναπαραστάσεις
- ✱ Της κατανόησης εννοιών μέσα από γραφικές παραστάσεις και το επίπεδο αντιληπτικότητας της διαδικασίας αποτύπωσης σημείων στο σχήμα
- ✱ Της προσέγγισης εννοιών όπως το άπειρο ως αποτέλεσμα μιας άπειρης διαδικασίας .
- ✱ Την ανάπτυξη της οπτικοποίησης των εννοιών μέσα από την οθόνη του υπολογιστή
- ✱ Την ανάπτυξη της έννοιας όταν εξελίσσεται σε ατομικό επίπεδο
- ✱ Τις αλληλεπιδράσεις που ασκούνται από το περιβάλλον στο υποκείμενο –μαθητή και την εξέλιξη των εννοιών μέσα σ' αυτό
- ✱ Της αναγνώρισης των ιδιαίτερων ικανοτήτων κάθε μέλους της ομάδας
- ✱ Της αποτελεσματικότητας της ομάδας στη συνολική επιβράβευση(ότι καταφέρνει ο ένας από όλους είναι καλό για όλους) και της δημιουργίας φιλικού κλίματος και συνεργατικότητας .
- ✱ Της ανάπτυξης της γνώσης σε ένα κοινωνικό πλαίσιο
- ✱ Της αναγκαιότητας ορισμών (όπως ο ε-δ ορισμός του ορίου) για ακριβή περιγραφή του αποτελέσματος
- ✱ Της ενίσχυσης της μάθησης με νόημα(learning with meaning) και το γεφύρωμα από τον εμπειρικό τρόπο μάθησης στον παραγωγικό
- ✱ Την διερεύνηση δυνατότητας μετάβασης μέσα από το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας από το επίπεδο αναγνώρισης και περιγραφής των σχημάτων κατά van Hiele στο επίπεδο αυστηρής διατύπωσης και συμβολικής γλώσσας .
- ✱ Της δυνατότητας να κατανοήσουν οι (μικροί) μαθητές έννοιες όπως η ακολουθία και το όριο μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες σε fractals

Συμπληρωματικά θα λέγαμε ότι στόχος της έρευνας η μέσα από τις δραστηριότητες αύξηση της φαντασίας , συμπλήρωση γνωστικών κενών και αδυναμιών , ανάπτυξη εννοιών. Η ενεργοποίηση των μαθητών και μέσα από ένα ελκυστικό και προκλητικό μαθησιακό περιβάλλον η ανάπτυξη της διερευνητικής , ενεργητικής και δημιουργικής μάθησης .

4.3 Το περιβάλλον του Geometer Sketchpad 4.03

Πρόκειται για ένα δυναμικό εργαλείο παρουσίασης εννοιών με χρήση πολλών ενισχυμένων δυνατοτήτων , σε σχέση με την προηγούμενη έκδοση στο animate, select ,transform και τη δυνατότητα να κατασκευάζει fractals (αυτό το είχε και η προηγούμενη έκδοση ,μέσα από τα αρχεία gss (αρχεία εντολών) και τις αναδρομικές διαδικασίες) με γενίκευση της κατασκευής μέσα από το μενού με την εντολή iterate που σημαίνει «επαναλαμβάνω» .

Όταν ήρθα για πρώτη φορά σε επαφή με το θέμα άρχισα να φτιάχνω fractals , πειραματιζόμενη σε αρχεία εντολών (στην παλαιά έκδοση) .Τι νόημα όμως έχει και ποια η παιδαγωγική αξία ενός αντικείμενου αν δεν εξεταστεί από την παιδαγωγική του σκοπιά . Ποιος ο παιδαγωγικός στόχος από την κατασκευή fractal .Πέρα από το ότι αναπτύσσεται από περιέργεια η ανάγκη κατασκευής και διερεύνησης τους , αφού μέσα από την προσελκυστική τους εμφάνιση προκύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες .Το σημαντικό είναι να διαπιστώσουμε τι μπορούμε να κάνουμε με την κατασκευή αυτών των αντικείμενων και τον

σχεδιασμό των δραστηριοτήτων με fractals ώστε να κατασκευάσουμε ένα χειροπιαστό παιχνίδι εννοιών μέσα στα χέρια του μαθητή .

Ένας μαθητής για να κατανοήσει την επαναληπτική διαδικασία είναι αναγκαίο να κάνει μετρήσεις και για να οδηγηθεί στην έννοια του ορίου , του απείρου να κατανοήσει την αναγκαιότητα της επαναληπτικής διαδικασίας των μετρήσεων .Αυτό ήταν κάτι που δεν μπορούσε να γίνει στην προηγούμενη έκδοση του λογισμικού . Το αρχείο εντολών επαναλάμβανε τις μετρήσεις αλλά δεν τις τοποθετούσε σε πίνακα(στην μορφή που είναι στην νέα έκδοση) .Στη νέα έκδοση οι μετρήσεις στον πίνακα προκύπτουν από τις επαναλήψεις και είναι ζωντανές ψηφιακές αναπαραστάσεις. Μπορούσε να επαναλάβει τις μετρήσεις αλλά μετά από ένα ορισμένο σημείο σταματούσε και δεν είχε αρκετή μνήμη για να συνεχίσει . Και το σπουδαιότερο τα αντικείμενα των fractals δεν μπορούσαν να μετακινηθούν .Έτσι η δυναμική γεωμετρία έπαυε να είναι δυναμική και ήταν ένας απλός ηλεκτρονικός αναντικατάστατος του χαρτιού και του μολυβιού .

Η νέα έκδοση καλύπτει ακριβώς αυτά τα κενά όπως θα διαπιστώσουμε και στην συνέχεια και επιπλέον φτιάχνει αρχεία εντολών χωρίς να είναι απαραίτητο να κάνουμε εγγραφή όπως στη παλιά έκδοση αλλά με πολύ πιο εύκολη διαδικασία. Ένα λοιπόν θέμα που ίσως θύμιζε δύσκολες γλώσσες προγραμματισμού και δεν γινόταν προσιτό και διαθέσιμο για τους μαθητές(που ίσως δεν είχαν την διάθεση και τον χρόνο να ψάξουν το θέμα σε βάθος), αντικαταστάθηκε με μια πολύ απλή διαδικασία κατασκευής αρχείων εντολών (με αποθήκευση της διαδικασίας ως αρχείο εντολών) . Εδώ θεωρώ ότι είναι αναγκαίο να αναφέρουμε κάποια πράγματα για το αρχείο εντολών . Το αρχείο εντολών είναι ένα αρχείο που έχει την δυνατότητα να καταγράψει τις εντολές κατασκευής ενός σχήματος ,και στην συνέχεια να τις επαναλάβει όταν του ζητήσουμε να το εκτελέσει . Ακόμα έχει την δυνατότητα να περιγράφει βήμα , βήμα την κατασκευή και να δείχνει έτσι τον δρόμο κατασκευής κάποιων σχημάτων . Έχει την δυνατότητα της αναδρομικής διαδικασίας με επαναλήψεις συγκεκριμένων μετρήσεων , πινακοποίησης των μετρήσεων , επανάληψης των αθροιστικών διαδικασιών και εμφάνισης των αποτελεσμάτων με την δυνατότητα εμφάνισης δεκαδικών στοιχείων (μπορεί να εμφανίσει μέχρι 6 δεκαδικά ψηφία – αυτό είναι και ένα σημείο αδυναμίας του λογισμικού , αφού δεν υπάρχει δυνατότητα των μετρήσεων με μεγαλύτερη λεπτομέρεια) .

4.4 Περιγραφή των δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες που θα ακολουθήσουν έχουν σκοπό την αντιμετώπιση ανοικτών προβλημάτων με η βοήθεια μαθηματικού λογισμικού όπως είναι το Geometer's Sketchpad Θα ακολουθήσει μια περιγραφή του σχεδιασμού και των συζητήσεων ξεχωριστά για την κάθε μια τάξη , θα διαπιστωθούν κοινά σημεία και θα γίνουν συγκρίσεις σε σχέση με την αποτελεσματικότητα της μεθόδου (ή όχι) στις διαφορετικές τάξεις . Θα οδηγηθούμε σε συμπεράσματα τα οποία θα αποτελέσουν και ένα αρχικό βήμα για μια περαιτέρω έρευνα με εφαρμογή της ποσοτικής μεθόδου ανάλυσης των αποτελεσμάτων σε ευρύτερη κλίμακα

Η διδασκαλία λαμβάνει χώρα με κατάλληλα προσχεδιασμένες διδακτικές καταστάσεις σε και για περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή . Βασικός μας στόχος είναι μέσω ενεργητικής μάθησης να δημιουργήσουμε το κατάλληλο πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές

- ▶ Να επισημάνουν το κατάλληλο pattern
- ▶ Να εικάσουν (επαγωγική συλλογιστική)
- ▶ Να διατυπώσουν
- ▶ Να γενικεύσουν
- ▶ Να αποδείξουν (παραγωγική συλλογιστική)

Οι μαθητές θα οδηγηθούν μέσω του προβλήματος και του κατάλληλου λογισμικού να παρατηρήσουν τα σχήματα , να ανακαλύψουν τα εμφανή χαρακτηριστικά γνωρίσματα του σχήματος , να κατασκευάσουν τους όρους των εννοιών , να αναπτύξουν την κατάλληλη γλώσσα που αφορά το σχήμα , να ενσωματώσουν την νέα γνώση στην παλαιά και να κάνουν διακρίσεις μεταξύ των σχημάτων .Η εξερεύνηση των σχεδίων επιτρέπει στους μαθητές :

- ▶ Να λύσουν τα προβλήματα
- ▶ Να αναπτύξουν τους όρους των μαθηματικών σχέσεων και εννοιών

- ▶ Να εξερευνήσουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων σε ένα σχέδιο
- ▶ Να γενικεύσουν τα σχήματα που χρησιμοποιούν με χρήση μεταβλητών
- ▶ Να επεκτείνουν και να συνδέσουν τα σχήματα και να κατασκευάσουν τους κατάλληλους όρους
- ▶ Να κάνουν συνδέσεις με άλλα μαθηματικά θέματα .

Αυτή η μέθοδος επιτρέπει στους μαθητές να ερευνήσουν τις καταστάσεις των προβλημάτων και να σκεφτούν πριν από και πέρα από μια απάντηση .Σε τάξεις του Δημοτικού η εμπειρία των μαθητών περιλαμβάνει την αναγνώριση ,ανάλυση και περιγραφή των σχεδίων καθώς και την αρχική δημιουργία εννοιών .Η εμπειρία στο Δημοτικό θέτει στερεά θεμέλια για την οικοδόμηση εννοιών ώστε ο μαθητής στο Γυμνάσιο να αρχίσει να γενικεύει τα σχήματα με λέξεις ή σύμβολα .

Κατά συνέπεια στο Γυμνάσιο εξερευνούν τα σχήματα και τους παρέχεται η δυνατότητα να αναπαραστήσουν τα προβλήματα με ποικίλους τρόπους και να μεταφράσουν τις αναπαραστάσεις σε εικόνες , διαγράμματα , πίνακες , γραφικές παραστάσεις , διατυπώσεις και σύμβολα.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται αναφέρονται σε τάξεις του Γυμνασίου και οι γενικεύσεις τους σε τάξεις του Λυκείου ακολουθώντας το σπειροειδές πρόγραμμα σπουδών του Bruner . Σύμφωνα με τον Somervell ,(Somervell 1975; Millington 1996 – <http://my.nctm.org/eresources>) τα παιδιά σε μικρή ηλικία μπορούν να εξοικειωθούν και αναπτύξουν ευχάριστα σχέδια με κατάλληλες συνδέσεις ευθ. τμημάτων που παράγουν καμπύλες , έτσι ώστε αργότερα η μαθηματική επεξεργασία να θεωρείται ως αποτέλεσμα της εμπειρίας .

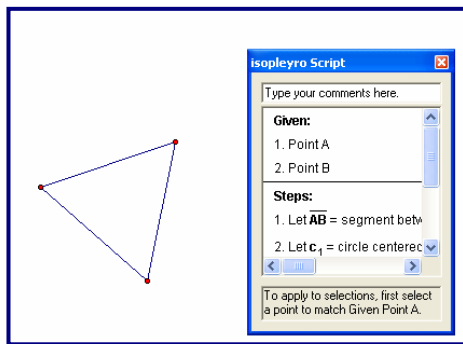
Οι δραστηριότητες εξελίσσονται ως προς την επεξεργασία τους στην τάξη με απλοϊκό τρόπο στην Στ΄ Δημοτικού , Α΄ Γυμνασίου . Γενικεύσεις και επεκτάσεις των εννοιών διδάσκονται σαν προπαρασκευαστικό μάθημα στις έννοιες της ακολουθίας και του ορίου στην Α΄ και Β΄ Λυκείου .

Με την βοήθεια του Η/Υ ο μαθητής ενθαρρύνεται και ενεργεί μόνος του χωρίς όμως ο ρόλος του καθηγητή να αντικαθιστάται.

Το λογισμικό που προτείνεται στην δραστηριότητα δίνει την δυνατότητα άμεσης διαχείρισης μαθηματικών αντικειμένων και την επεξεργασία των γεωμετρικών εννοιών ολιστικά και κάτω από διαφορετικές οπτικές γωνίες . Ο καθηγητής και οι μαθητές στο GSP μπορούν να μεγεθύνουν ένα σχήμα , να το μετακινήσουν , να εξετάσουν αν συμπίπτει με άλλο παρόμοιο που δεν είναι εύκολο με τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας .Η δυνατότητα της κίνησης και της ταυτόχρονης παρακολούθησης της αλλαγής τα διαφόρων στοιχείων και μεγεθών του σχήματος , ζωντανεύουν το σχήμα και δίνουν την δυνατότητα του πειραματισμού στην διδακτική πράξη μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις . Όταν κάποιος πεισθεί για κάποια πρόταση ότι πράγματι ισχύει περνάει με άλλη διάθεση στη φάση τη απόδειξης . Ο Polya (1954) υποστηρίζει : *«having verified the theorem in several particular cases , we gathered strong inductive evidence for it . The inductive phase overcome our initial suspicion and gave us a strong confidence in the theorem . Without such confidence we would have scarcely found the courage to undertake the proof which did not look at all a routine job . When you have satisfied yourself that the theorem is true , you start proving it »*

Έχοντας πιστοποιήσει το θεώρημα σε αρκετές ειδικές περιπτώσεις , συγκεντρώσαμε αρκετές επαγωγικές μαρτυρίες για αυτό . Η επαγωγική φάση ξεπέρασε την αρχική μας υποψία και μας γέμισε αυτοπεποίθηση για το θεώρημα . Όταν έχεις βεβαιωθεί ότι το θεώρημα αληθεύει τότε αρχίζεις **την απόδειξή του**

4.4.1 Περιγραφή της 1^{ης} δραστηριότητας



Κατασκευάζουμε στο Geometer Sketchpad 4.03 ένα ισόπλευρο τρίγωνο με όποιο τρόπο θέλουμε :

Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα και στην συνέχεια με κέντρα τις κορυφές του τμήματος κύκλους με ακτίνες ίσες με το τμήμα .Τα σημεία τομής των κύκλων , ορίζουν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου(όταν ενωθούν με το ευθύγραμμο τμήμα)

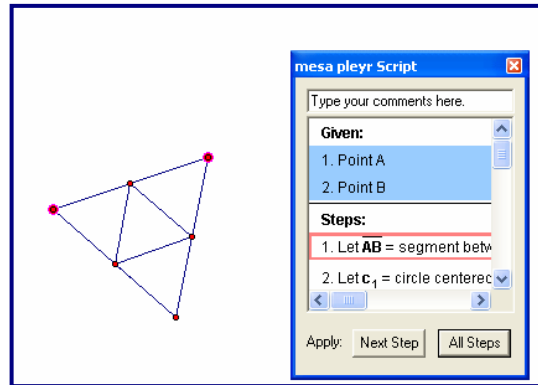
ή κατασκευάζουμε κύκλο και τον διαιρούμε σε τρία ίσα τόξα

ή κατασκευάζουμε τμήμα και στην συνέχεια με κέντρο την μια κορυφή κάνουμε περιστροφή κατά 60 μοίρες και ομοίως (δεν επηρεάζει ο αρχικός τρόπος κατασκευής την εξέλιξη της δραστηριότητας)

Επιλέγουμε για παράδειγμα τον πρώτο τρόπο και σώζουμε το αρχείο σαν αρχείο εντολών με το όνομα «ισόπλευρο»

Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν δυο σημεία και να διαπιστώσουν ότι με την εφαρμογή του script file το σχήμα του ισοπλεύρου τριγώνου επαναλαμβάνεται .

Στην συνέχεια δημιουργούμε νέα σελίδα από το Documents options , ανοίγουμε το αρχείο ισόπλευρο και κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο και στην συνέχεια τα μέσα των πλευρών του . Το νέο αρχείο το σώζουμε εκ νέου σαν αρχείο εντολών με το όνομα «μέσα πλευρών». Έτσι έχουμε την δυνατότητα να καλέσουμε το νέο αρχείο εντολών και να σχηματίσουμε ένα άλλο ισόπλευρο τρίγωνο με τα μέσα των πλευρών του . Οι μαθητές εδώ μπορούν να διαπιστώσουν ότι :



❖ Αν πάρουμε ως σημεία δεδομένα τα 2 από τα μέσα των πλευρών(οποιασδήποτε) του τριγώνου που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα και καλέσουμε το αρχείο εντολών «ισόπλευρο» τότε το σχήμα του τριγώνου που σχηματίζεται εκ νέου στο εσωτερικό του τριγώνου είναι πάλι ισόπλευρο και μάλιστα η τρίτη κορυφή συμπίπτει με το τρίτο μέσο .

❖ Αν επαναλάβουν την διαδικασία του αρχείου εντολών « μέσα πλευρών» σε οποιαδήποτε δυο σημεία εσωτερικά του τριγώνου τότε μπορούμε να πάρουμε και άλλα εσωτερικά(ή εξωτερικά) ,ισόπλευρα τρίγωνα που είναι μικρότερα , αλλά έχουν κάποια σχέση με το αρχικό και όλα έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους .

Πως θα διαπιστώσει όμως ο μαθητής ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα δυο ή περισσότερα τρίγωνα που θα σχηματίσει . Πρέπει να εισάγει στην όλη διαδικασία , όπως αναφέραμε , την διαδικασία της μέτρησης των πλευρών και εμβαδών , να σχηματίσει τα αθροίσματα των πλευρών και να διαπιστώσει ποια είναι η σχέση μεταξύ των περιμέτρων και τους λόγους των εμβαδών .

Έχουμε υπόψη μας ότι πρέπει να οδηγήσουμε τον μαθητή στο άθροισμα των απείρων όρων των εμβαδών .Αυτό θα προκύψει αν προσθέσουμε τις μετρήσεις των εμβαδών και διαιρέσουμε με το αρχικό εμβαδόν . Κατ' αυτό τον τρόπο δεν έχουμε απλώς το άθροισμα των εμβαδών αλλά και τον λόγο τους με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου .

Δηλαδή καλούμε το αρχείο εντολών «μέσα πλευρών» και στην συνέχεια κατασκευάζουμε επαναλήψεις του τριγώνου που σχηματίζεται από τα μέσα στο εσωτερικό του σχήματος . Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που σχηματίζονται εσωτερικά και να δούμε σε ποιον αριθμό πλησιάζει.

Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό τρίγωνο έχει εμβαδόν 1 τότε με τον σχηματισμό των μέσων το εσωτερικό τρίγωνο έχει εμβαδόν $1/4$.Αν έχει εμβαδόν E επομένως το εσωτερικό τρίγωνο θα

έχει εμβαδόν $E/4$. Αν επαναλάβουμε την διαδικασία τότε το επόμενο εσωτερικό τρίγωνο έχει εμβαδόν $E/16$. Το πρόβλημα που τίθεται είναι ο υπολογισμός του αθροίσματος των εμβαδών δηλαδή $E + E/4 + E/16 + \dots$. Παρατηρούμε ότι οι όροι μειώνονται με λόγο $\lambda = 1/4$. Δηλαδή ο επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο όταν πολλαπλασιάσουμε με το $1/4$ (γεωμετρική πρόοδος). Το άθροισμα αυτών των όρων όπως γνωρίζουμε προκύπτει ως άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου από τον τύπο

$\sum_{\infty} = a_1 / 1 - \lambda$, όπου a_1 είναι ίσο με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου. Επομένως θα μπορούσαμε να γράψουμε τον τύπο ως εξής $\sum_{\infty} = 1.E / 1 - \lambda$ ή $\sum_{\infty} / E = 1 / 1 - \lambda$ και στη

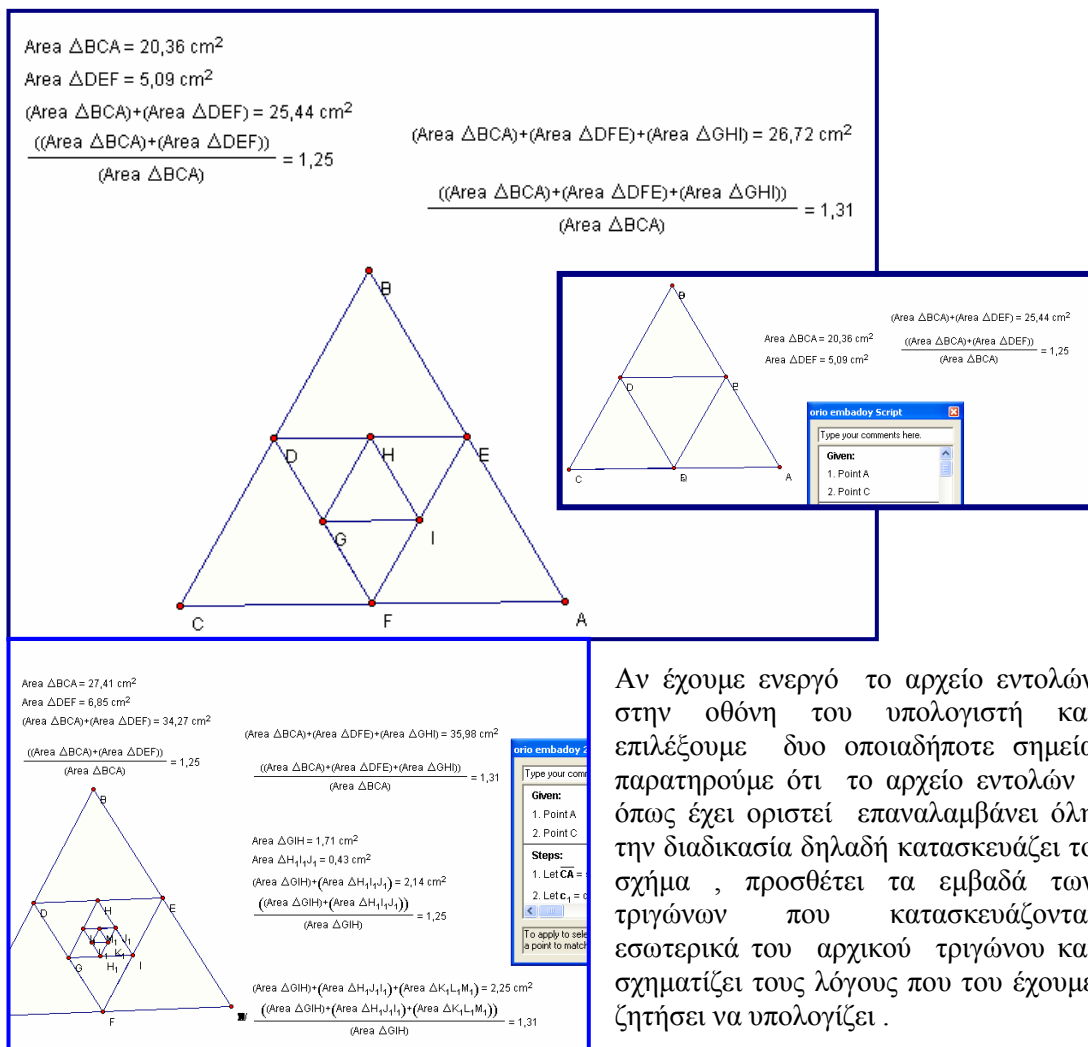
συνέχεια να υπολογίσουμε τον λόγο $1 / 1 - \lambda$ δηλαδή

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1,333\dots$$

Επομένως ο λόγος $\sum_{\infty} / E$ πρέπει να είναι πάντοτε σταθερός για $\lambda = 1/4$, για το άθροισμα απείρων εμβαδών (ως οριακή τιμή του αθροίσματος των απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου). Αυτό θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε εμπειρικά δηλαδή ότι όσες επαναλήψεις σχημάτων (iterations) και να κάνουμε στο βάθος του σχήματος, ο λόγος του αθροίσματος των εμβαδών δια του αρχικού εμβαδού γίνεται σταθερός (για τα δεκαδικά ψηφία που έχουμε). Θα προσεγγίσουμε το θέμα επαγωγικά.

Για τον λόγο αυτό κάνουμε τις μετρήσεις των δύο αρχικών εμβαδών, τα προσθέτουμε και σχηματίζουμε τον λόγο με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου και σώζουμε το συγκεκριμένο ως αρχείο εντολών «**άθροισμα εμβαδών**»

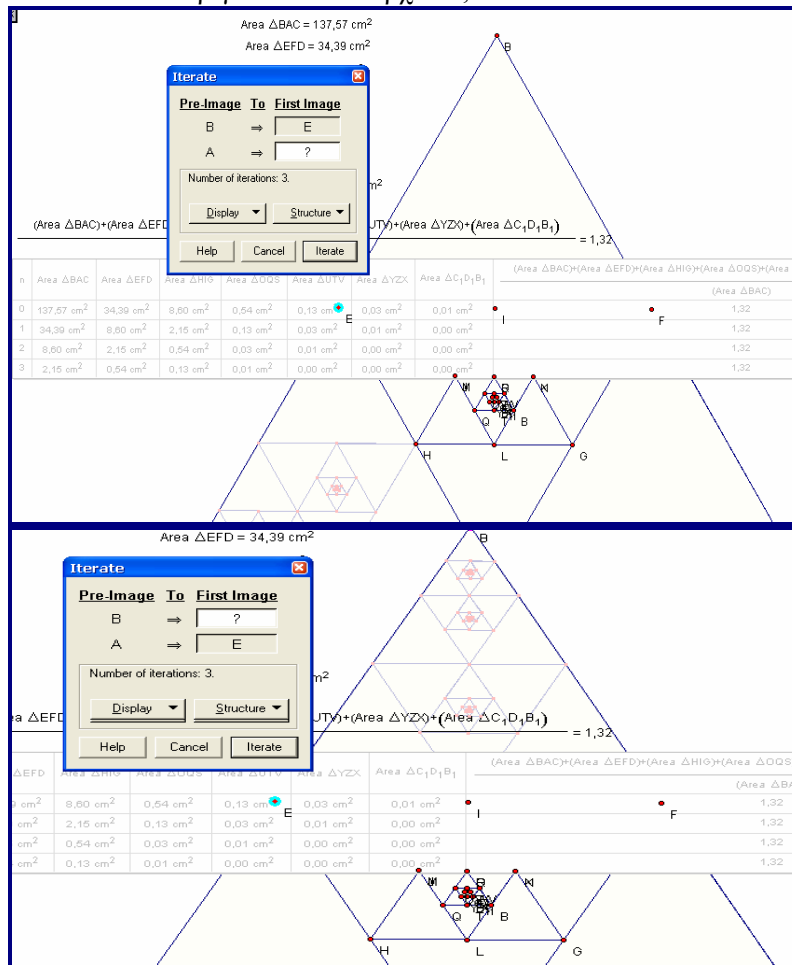
Κατασκευάζουμε νέο αρχείο εντολών το «**όριο εμβαδού**» στο οποίο ζητάμε να επαναλάβει την διαδικασία του αθροίσματος των μετρήσεων και του λόγου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Αν έχουμε ενεργό το αρχείο εντολών στην οθόνη του υπολογιστή και επιλέξουμε δυο οποιαδήποτε σημεία παρατηρούμε ότι το αρχείο εντολών, όπως έχει οριστεί επαναλαμβάνει όλη την διαδικασία δηλαδή κατασκευάζει το σχήμα, προσθέτει τα εμβαδά των τριγώνων που κατασκευάζονται εσωτερικά του αρχικού τριγώνου και σχηματίζει τους λόγους που του έχουμε ζητήσει να υπολογίζει.

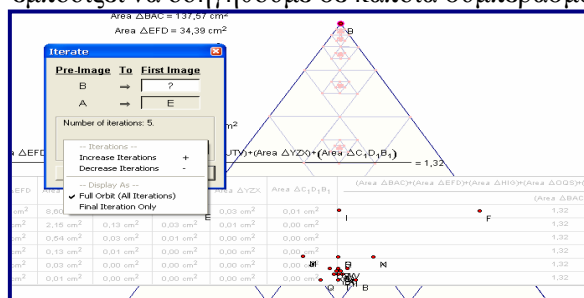
Στο συγκεκριμένο σημείο οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν (όπως βλέπουμε στο σχήμα επάνω) και να επαναλάβουν την διαδικασία στο εσωτερικό του σχήματος .Το αρχείο εντολών επομένως θα εκτελέσει τις ίδιες διαδικασίες και θα επαναλάβει τις μετρήσεις και τους λόγους που του έχουμε ζητήσει να επαναλαμβάνει. Οι παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι σημαντικές αφού διαπιστώνουμε ότι όπως επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις δεν εξαρτώνται από την θέση των σημείων και οι λόγοι που προκύπτουν είναι σταθεροί (όπως παρατηρούμε στην οθόνη 1,25 και 1,31) .

Έχουμε καταλήξει σε ένα pattern που θέλουμε να γενικεύσουμε .Τι θα συμβεί αν σταματήσουμε δώ την διαδικασία κατασκευής τριγώνων στο εσωτερικό και επαναλάβουμε τη διαδικασία με μικρότερα τρίγωνα .Θα επαναλαμβάνονται τα ίδια αποτελέσματα ανεξάρτητα από το μέγεθος του τριγώνου ; Πως μπορεί ένας μαθητής να διαπιστώσει καλύτερα την διαδικασία , όταν εξελίσσεται δομικά και σχηματικά στο εσωτερικό του τριγώνου ή σε ένα από υπολοίπα τρίγωνα που υπάρχουν ;



Η γενίκευση της διαδικασίας όπως έχουμε αναφέρει προκύπτει με την διαδικασία του iteration .Για τον λόγο αυτό επιλέγουμε τα σημεία A, B και από το μενού transform , την εντολή iterate. Στο εικονίδιο που βλέπουμε μας ζητά να θέσουμε στο first image τα σημεία της αντιστοίχισης με τα σημεία του A, B . Θα διαπιστώσουμε ότι όταν τοποθετήσουμε το πρώτο σημείο εμφανίζονται ήδη στην οθόνη μας προσχηματισμένες οι επαναλήψεις των σχημάτων που έχουν δομή όπως το αρχικό σχήμα . Οι μετρήσεις στα σχήματα έχουν σταματήσει στα 4 πρώτα εμβαδά και το

πλήθος των δεκαδικών είναι 2 , επομένως το αποτέλεσμα είναι περίπου 1,32 .(δεν μας εμποδίζει να οδηγηθούμε σε κάποια συμπεράσματα) .



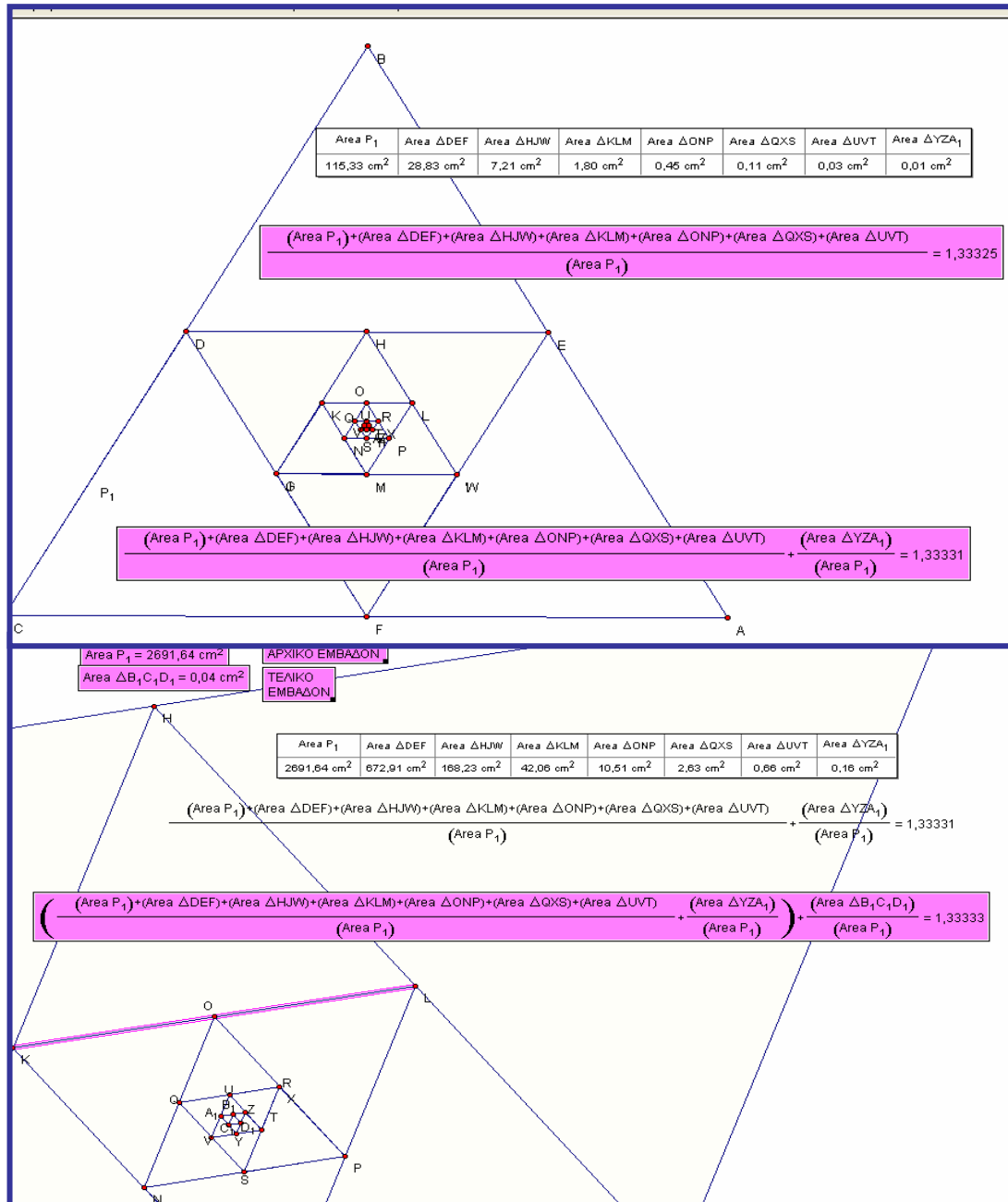
Ακόμα εμφανίζονται όλες οι μετρήσεις των εμβαδών όπως ακριβώς τις έχουμε επαναλάβει στο αρχικό σχήμα και οι λόγοι των αθροισμάτων .

Οι μαθητές πειραματιζόμενοι μπορούν να διαπιστώσουν ότι το σχήμα μπορεί να γενικευτεί και να επαναλάβουμε την διαδικασία

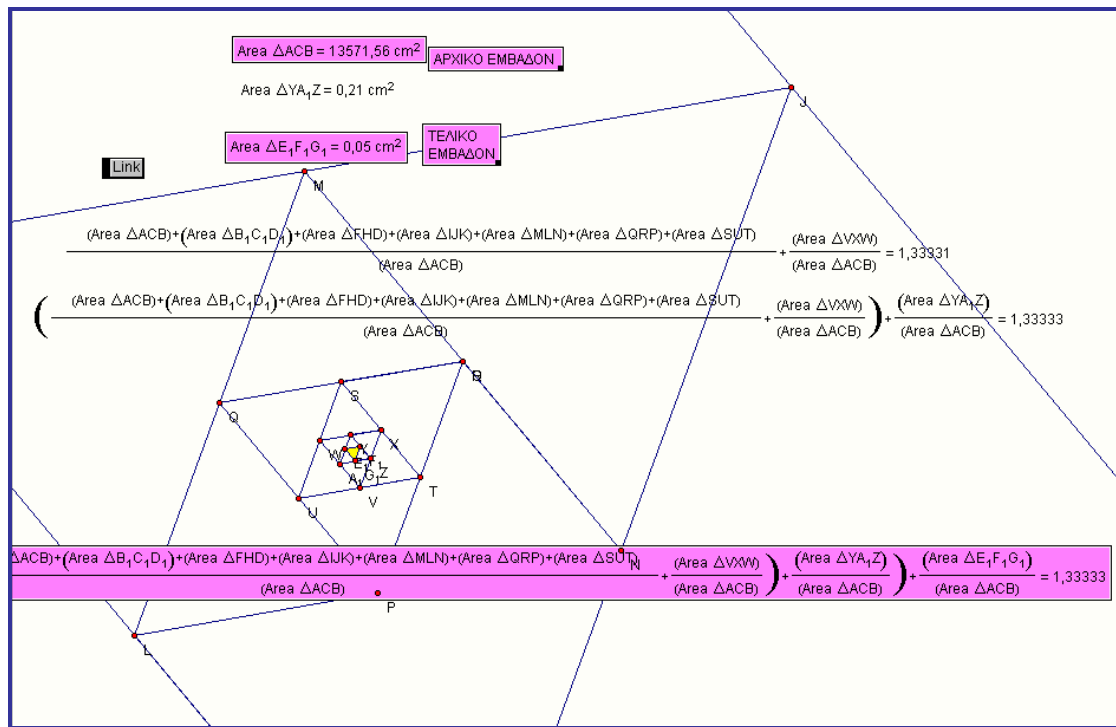
όπως και όπου εμείς θέλουμε .Αυτό που έχει σημασία είναι πώς θα επιλέξει τα σημεία που θα επαναληφθεί η διαδικασία .

Πόσες φορές μπορεί να επαναληφθεί η διαδικασία; Το GSP είναι πρόθυμο να επαναλάβει την διαδικασία όσες φορές θέλουμε .

Αρκεί να αυξήσουμε εμείς την διαδικασία των επαναλήψεων .Αυτόματα εμφανίζονται και οι επόμενες μετρήσεις στον πίνακα . (οι οποίες από ότι παρατηρούμε παραμένουν σταθερές) Όπως είναι φυσικό η διαδικασία όταν δεν έχει νόημα η επανάληψη της (για παράδειγμα αν είναι πολύ μικρό το σχήμα) δεν παράγει αποτελέσματα λογικά ή αναμενόμενα .



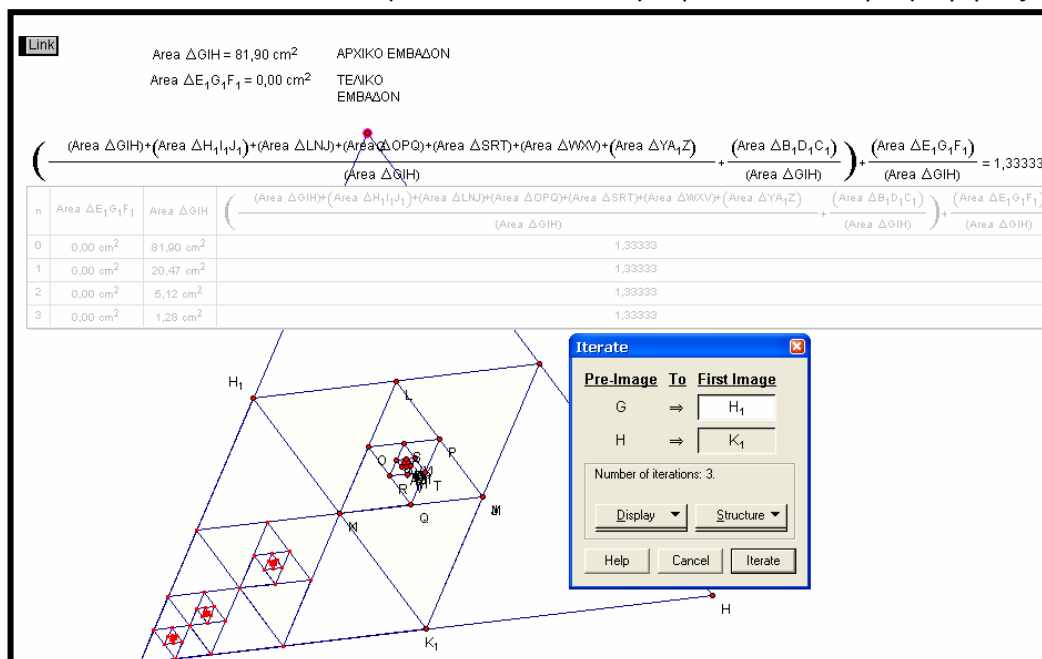
στο σχήμα παρατηρούμε ότι ο λόγος των εμβαδών προσεγγίζει στον αριθμό 1,3333... όταν εξακολουθήσουμε την διαδικασία με τις κατασκευές τριγώνων και τους υπολογισμούς των εμβαδών τους στο εσωτερικό του σχήματος .



Επανάληψη της διαδικασίας ακόμα μια φορά στο εσωτερικό τριγώνου άλλου σχήματος (στο προηγούμενο σχήμα υπολογίσαμε τον λόγο του αθροίσματος 9 τριγώνων με το αρχικό, ενώ στο σχήμα επάνω προσθέτουμε 10 τρίγωνα)

Στη τελευταία σελίδα (επαναλαμβάνουμε όλη την διαδικασία σε νέο σχήμα) που παρουσιάζεται στην εικόνα πιο κάτω έχουμε ολοκληρώσει τον σχεδιασμό της δραστηριότητας και τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα εξής :

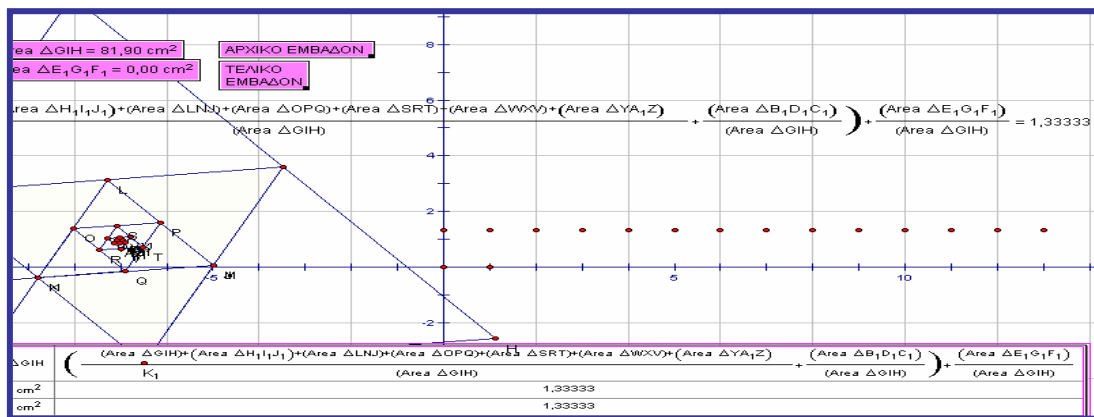
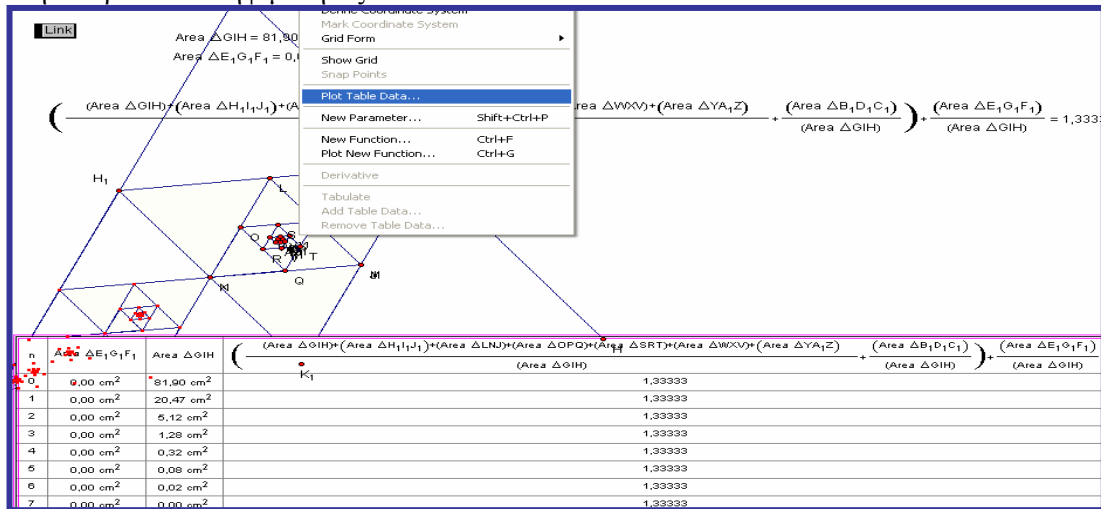
- Το αρχείο εντολών είναι το αρχικό βήμα που πρέπει να κάνει κάποιος προκειμένου να ορίσει τον τρόπο με τον οποίο θέλει να επαναληφθούν οι μετρήσεις .
- Η διαδικασία iteration είναι μια διαδικασία που μπορεί να επαναλάβει μετρήσεις και



κατασκευές σχημάτων (μπορεί να ανακληθεί και να την επαναλάβεις πειραματιζόμενος από την αρχή, αφού στο σχήμα εμφανίζονται οι προ-εικόνες του σχήματος που θα επιλέξουμε να προκύψει)

Τα σημεία που κατασκευάζουν το αρχικό σχήμα είναι καθοριστικά για την διαδικασία του iteration .

Επιλέγουμε τον πίνακα και από το μενού graph ,επιλέγουμε το plot table data και σχηματίζουμε την ακολουθία των όρων , δηλαδή συνδέουμε τους όρους της ακολουθίας με την σειρά επαναληψιμότητας .



Όπως είναι αναμενόμενο αυτό που προκύπτει είναι ένα σύνολο σημείων που είναι η αναπαράσταση της σταθερής ακολουθίας .

Επομένως το μέγεθος των τριγώνων δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της επαναληπτικής διαδικασίας το οποίο παραμένει σταθερά ίσο με 1,3333....

Το περιβάλλον που έχει ο μαθητής να κατανοήσει την έννοια του ορίου είναι πλούσιο σε αναπαραστάσεις αφού μέσα από την γεωμετρικοποίηση των εννοιών περνάμε στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης της ίδιας έννοιας , αλγεβρικά, με πίνακες και με γραφική παράσταση . Και εδώ πρέπει να αναρωτηθούμε :

Πόσο εύκολο είναι σε έναν δάσκαλο ή μαθητή που εργάζεται στον πίνακα , ή στο χαρτί να δημιουργήσει όλες αυτές τις αναπαραστάσεις με την ακρίβεια του υπολογιστή ή να κάνει επανέλεγχο των σχημάτων με διαφορετικό τρόπο, να συνθέσει όλα αυτά μαζί με ακρίβεια και ταχύτητα ;

Παρατήρηση : Για την διαδικασία υπολογίσαμε το άθροισμα των 8 αρχικών τριγώνων και το λογισμικό επανέλαβε την διαδικασία με iteration όσες φορές θέλαμε .

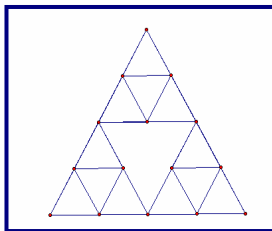
Η ακολουθία που προκύπτει σχηματίζεται από τα αθροίσματα των εμβαδών των τριγώνων που κατασκευάζονται στην κάθε επανάληψη . Κάθε φορά ένα από αυτά αντικαθίσταται με το αμέσως μικρότερο και έτσι έχουμε τελικά μια ακολουθία όρων ίση με 1,33333 .Θα είχαμε περίπου 1,3333... αν είχαμε σχηματίσει αριθμό τριγώνων μικρότερο από 8 στο εσωτερικό κάθε σχήματος .**Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να οδηγήσουμε τον μαθητή να κατανοήσει ότι το μέγεθος των προστιθέμενων τριγώνων δεν επηρεάζει τον λόγο του αθροίσματος**

των εμβαδών που είναι περίπου ($\sim 1,33$). (το πλήθος των τριγώνων είναι σημαντικό για την ακρίβεια του αποτελέσματος). Και στην συνέχεια παραμένει σταθερό ακόμα και αν συνεχίσουμε την διαδικασία στο εσωτερικό (για τον αριθμό δεκαδικών ψηφίων στο GSP). **Επαναλαμβάνουμε εν συντομία**

κάνουμε χρήση της εντολής **iterate** από το μενού εντολών με το **increase** αυξάνουμε ή μειώνουμε τις επαναληπτικές κινήσεις και παρατηρούμε τις αυξήσεις των τριγώνων που σχηματίζονται αλλά και των μετρήσεων που τοποθετούνται σε πίνακες. Με την εντολή **plot** έχουμε την δυνατότητα να τοποθετήσουμε τις τιμές στον άξονα. Ο πίνακας μας δίνει την σχέση μεταξύ της μέτρησης που θέλουμε και της τιμής του n (την θέση του όρου της ακολουθίας των εμβαδών).

Όσο αυξάνει η τιμή του n τόσο παρατηρούμε ότι μειώνεται η τιμή του εμβαδού και προσεγγίζει στο 0 ενώ ο λόγος παραμένει σταθερός και ίσος με το άθροισμα των απείρων όρων. Χρησιμοποιούμε το **dilate tool** για να κάνουμε **zoom** και να διαπιστώσουμε τι συμβαίνει στις διαφορετικές προσεγγίσεις του σχήματος.

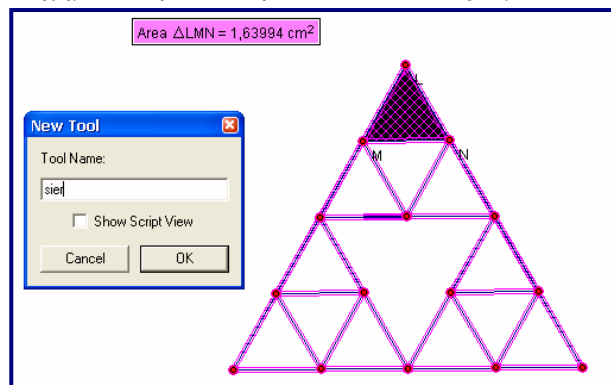
Κατασκευή του τριγώνου Sierpinski ακολουθώντας μια διαδικασία βήμα –βήμα μέσα από τα διαδοχικά αρχεία εντολών



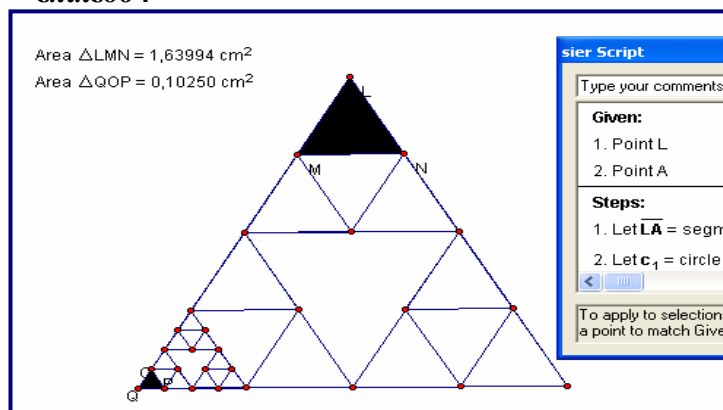
Εφαρμογή του αρχείου εντολών μέσα πλευρών τρεις φορές στα τρίγωνα (εκτός του μεσαίου) και μέτρηση του ενός εμβαδού από τα νέα τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Την διαδικασία σώζουμε σε ένα νέο αρχείο εντολών.

Το νέο αρχείο εντολών έχει τις εξής βασικές ιδιότητες:

- ✦ Να επαναλαμβάνει την κατασκευή που βλέπουμε
- ✦ να κάνει την μέτρηση του μικρότερου τριγώνου του σχήματος
- ✦ να τοποθετεί το χρωματισμένο (μαύρο) τρίγωνο ανάλογα με την επιλογή των σημείων.

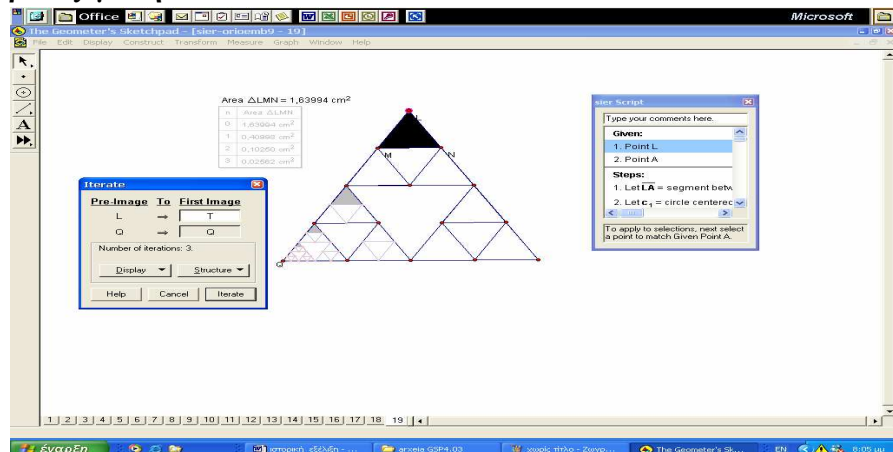


Έτσι να διδάσκει ένα pattern επαναληψιμότητας, μέτρησης και τοποθέτησης στο επίπεδο.



Πρώτος τρόπος επανάληψης του σχήματος μέσα στο σχήμα με επανάληψη της εφαρμογής του αρχείου εντολών στις δυο κορυφές του μικρότερου τριγώνου

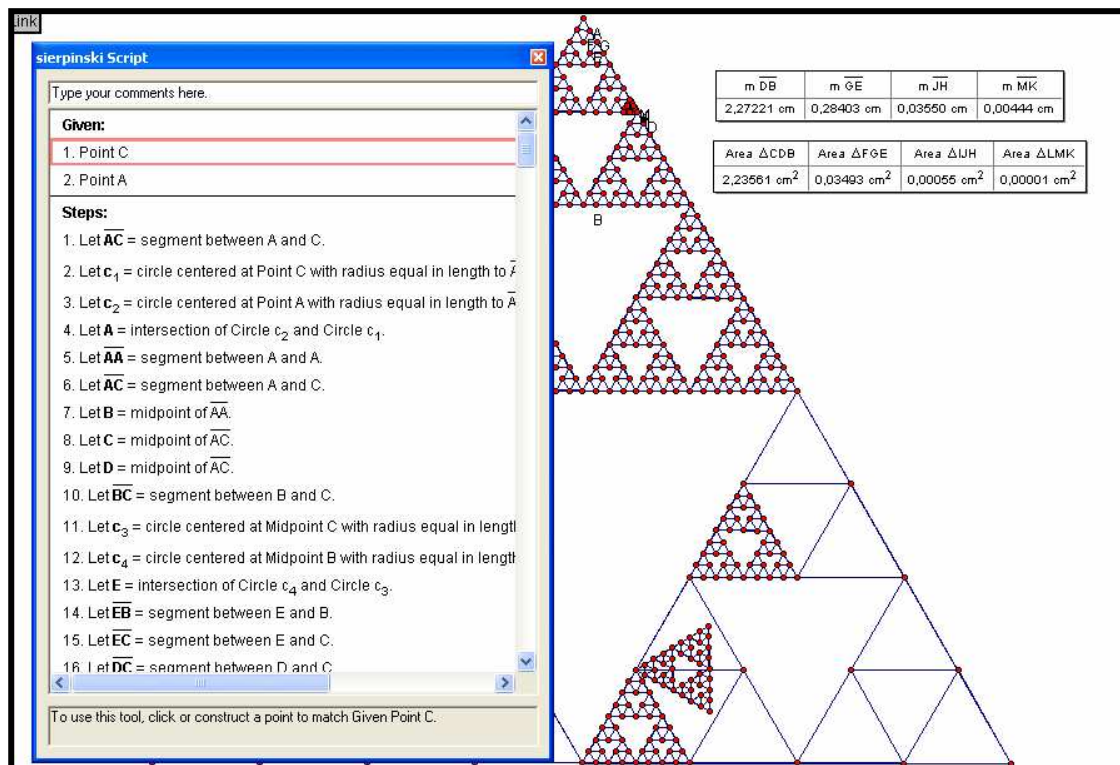
και δεύτερος τρόπος με την διαδικασία *iterate* .



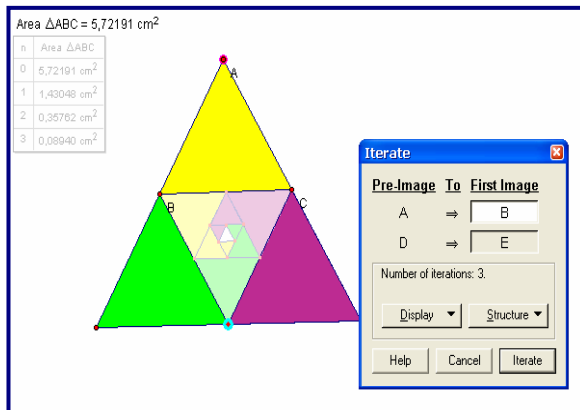
Στο πρώτο στάδιο, του παιχνιδιού, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με την κατασκευή του τριγώνου Sierpinski . Στο δεύτερο στάδιο μας ενδιαφέρει ο τρόπος προσέγγισης της ακολουθίας μέσα από το τρίγωνο του Sierpinski , πόσα αντικείμενα γεωμετρικά παράγονται και πόσα έχουμε την δυνατότητα να παράγουμε ακόμα , και ακόμα πιο σημαντικό να διαπιστώσουμε που τείνει το εμβαδόν του μικρότερου αντικειμένου (ή αν κάναμε την διαδικασία αντίστροφα που μπορεί να φτάσει το μεγαλύτερο εμβαδόν)

Εδώ παρατηρούμε μια προσέγγιση των εμβαδών των τριγώνων που είναι χρωματισμένα μαύρα στο σχήμα σε επανάληψη των μετρήσεων 5 φορές .

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου μειώνεται και προσεγγίζει προς το 0 . Είναι όμως 0 ή περίπου 0 ; Προφανώς το δεύτερο αφού δεν έχουμε την δυνατότητα μεγαλύτερης ακρίβειας στις μετρήσεις .



4.4.2 Περιγραφή της 2ης δραστηριότητας - Η σπείρα του Baravelle



Η κατασκευή είναι πολύ απλή μέσα από την διαδικασία iteration. Για τον λόγο αυτό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1) κατασκευάζουμε με το αρχείο εντολών «μέσα πλευρών» το σχήμα που υπάρχει αριστερά.

2) κατασκευάζουμε το εσωτερικό των τριών τριγώνων με διαφορετικά χρώματα.

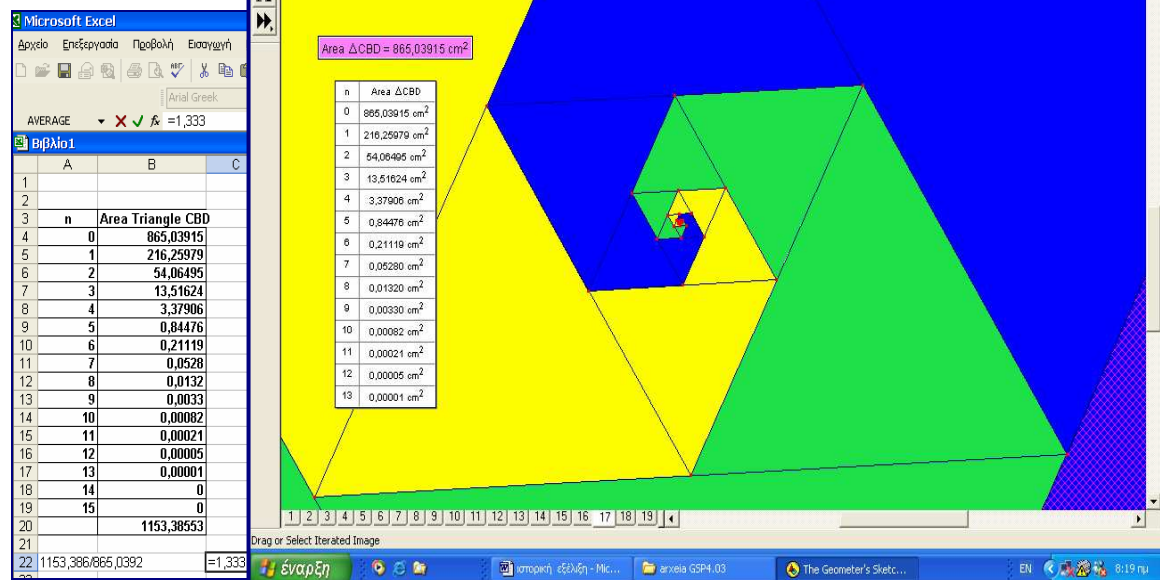
3) μετράμε το εμβαδόν του ενός τριγώνου με προτίμηση να έχει πολλά δεκαδικά ψηφία.

4) από το μενού transform –iterate και επιλογή των κατάλληλων σημείων όπως

βλέπουμε στην προ-εικόνα που εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή μας, κατασκευάζουμε τα εσωτερικά τρίγωνα και παίρνουμε και τον αντίστοιχο πίνακα των εμβαδών.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται και ο πίνακας των διαδοχικών μετρήσεων των εμβαδών.

Το άθροισμα των απείρων όρων υπολογίζεται όπως και προηγουμένως, αφού τα εμβαδά έχουν τιμές $E/4$, $E/16$, ... όπου E είναι η μέτρηση του εμβαδού του αρχικού τριγώνου.



Παρατηρούμε ότι το 1,333... προκύπτει ως αποτέλεσμα του πηλίκου $1153,386/865,039$ δηλαδή του αθροίσματος των εμβαδών δια της αρχικής μέτρησης.

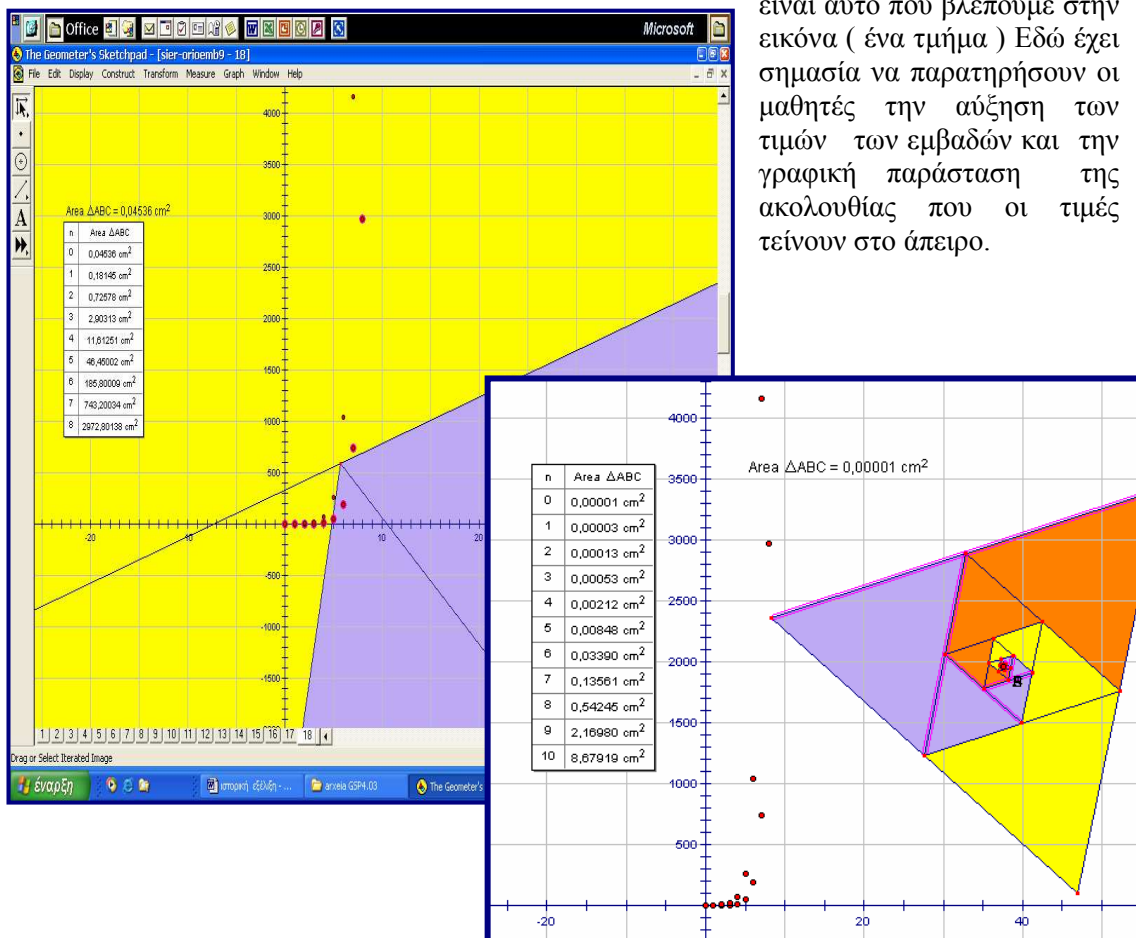
Επομένως το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου πρέπει να προκύψει όπως γνωρίζουμε κατά προσέγγιση ίσο με $1,33 \cdot E...$ (αφού ο λόγος είναι $1/4$)

Αυτό όμως είναι και το αποτέλεσμα που παίρνουμε από την μεταφορά του πίνακα των τιμών από το GSP στο Excel, όπως βλέπουμε στην εικόνα δεξιά.

Οι συγκεκριμένες μετρήσεις προέκυψαν με συνεχή αύξηση του αντικειμένου (με dilate tool). Όπως είναι φυσικό το αρχικό τρίγωνο δεν εμφανίζεται πλέον στην οθόνη μας, αλλά εμφανίζονται τα εσωτερικά του τρίγωνα με μεγέθυνση, όπως βλέπουμε στο σχήμα επάνω.

Στο σχήμα που βλέπουμε αριστερά έχουμε κάνει την αντίστροφη διαδικασία. Δηλαδή κατασκευάζουμε αρχείο εντολών που δίνει την σπείρα του Baravelle ξεκινώντας την κατασκευή από το εσωτερικό του τριγώνου και αυξάνοντας την σπείρα προς το εξωτερικό του τριγώνου. Το αποτέλεσμα των μετρήσεων και κάνοντας χρήση του dilate tool, πινακοποίησης των μετρήσεων και στην συνέχεια το πέρασμα τους ως γραφική παράσταση

είναι αυτό που βλέπουμε στην εικόνα (ένα τμήμα). Εδώ έχει σημασία να παρατηρήσουν οι μαθητές την αύξηση των τιμών των εμβαδών και την γραφική παράσταση της ακολουθίας που οι τιμές τείνουν στο άπειρο.

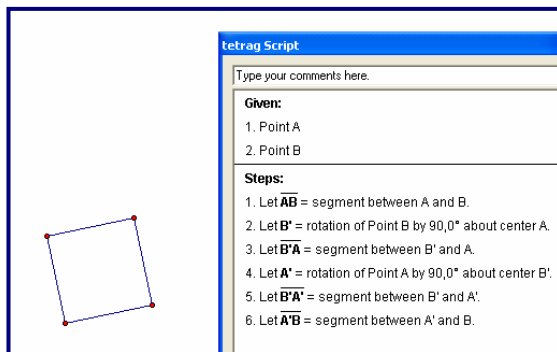


Παρατηρούμε ότι έχουμε την δυνατότητα να πάρουμε όσες μετρήσεις θέλουμε και αυτές να τις περάσουμε στην γραφική παράσταση.

Έτσι βλέπουμε τις διαφορετικές προσεγγίσεις για τις τιμές της ακολουθίας και την πειραματική απόδειξη του ορίου της ακολουθίας που τείνει στο άπειρο.

Παρατήρηση: δεν υπάρχει δυνατότητα για δυναμική αλλαγή της γραφικής παράστασης με τις αλλαγές του πίνακα και των μετρήσεων.

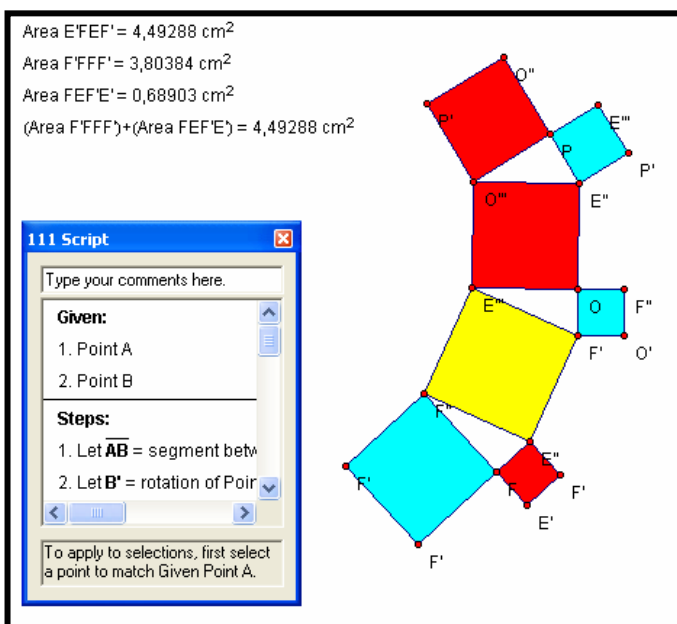
4.4.3 Περιγραφή της 3ης δραστηριότητας -Το πυθαγόρειο δένδρο



του λογισμικού. Το αντικείμενο, ένα δέντρο που μετακινείται ενώ αλλάζει χρώματα, είναι μια αναπαράσταση του Πυθαγορείου θεωρήματος επαναλαμβανόμενες φορές σε κάθε κλάδο, οδηγεί τους μαθητές μέσα από το παιχνίδι στην σύλληψη και κατανόηση εννοιών των μαθηματικών, ενώ προκαλεί τον θαυμασμό και την περιέργεια. Είναι όμως δύσκολο να μετρήσεις τα εμβαδά των σχεδιασμένων τετραγώνων και επομένως έπρεπε να κατασκευαστεί ένα αντικείμενο από την αρχή.

Στην πρώτη σελίδα της σχεδιασμένης δραστηριότητας περιέχεται η κατασκευή ενός τετραγώνου με την διαδικασία που προτείνεται από το αρχείο εντολών. Ο τρόπος που προτείνεται δεν είναι και ο μοναδικός τόπος κατασκευής του τετραγώνου. Μπορούμε να το κατασκευάσουμε και με άλλους τρόπους (δεν θα παίξει κανένα ρόλο στην εξέλιξη της εφαρμογής).

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε εξωτερικά του τετραγώνου ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει



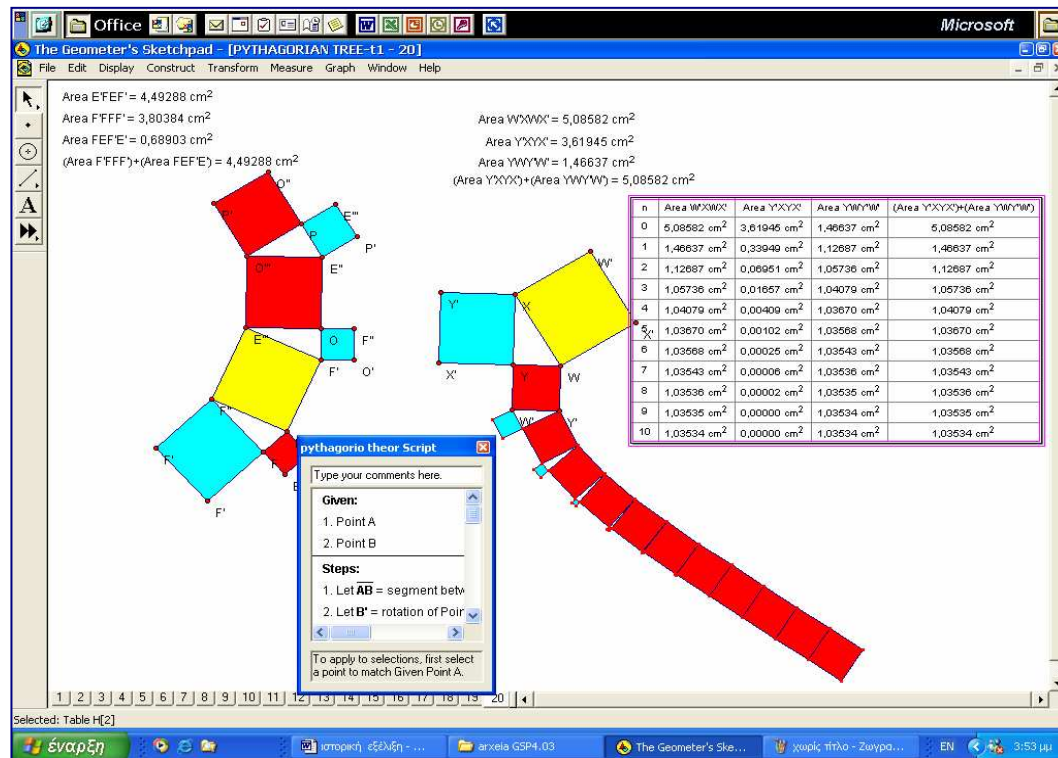
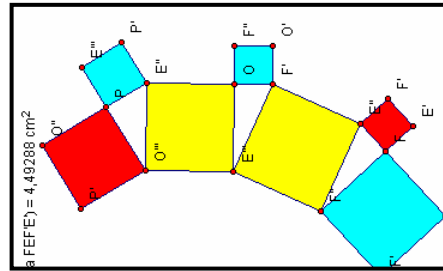
να κατασκευάσουμε κύκλο με διάμετρο την πλευρά του τετραγώνου. Κάθε σημείο του κύκλου όταν ενωθεί με τα άκρα της διαμέτρου δίνει ορθογώνιο τρίγωνο με τις ιδιότητες που θέλουμε και μάλιστα έχει την ιδιότητα τα σημεία της κορυφής της ορθής γωνίας να μετακινείται πάνω στον κύκλο.

Αν κατασκευάσουμε στις κάθετες πλευρές και τα τετράγωνα εξωτερικά, το συγκεκριμένο σχήμα είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Πειραματιζόμενοι στο Πυθαγόρειο θεώρημα κατασκευάζουμε ένα αρχείο εντολών με την ονομασία έστω

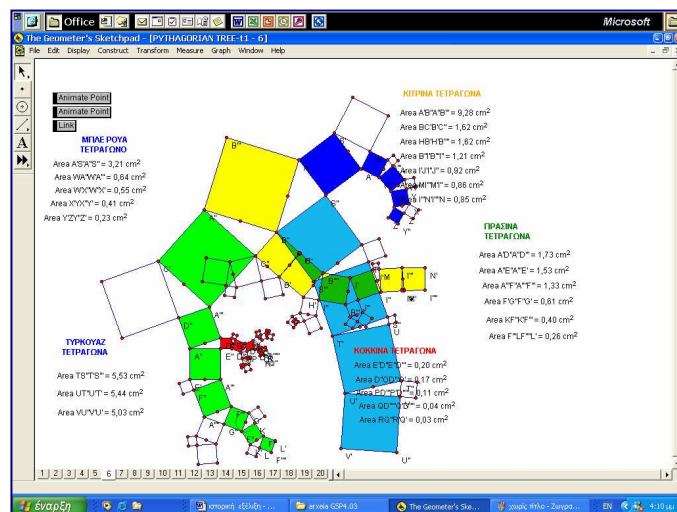
«111». Επαναλαμβάνουμε με το αρχείο εντολών την διαδικασία στις κορυφές των τετραγώνων και θα προσπαθήσουμε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα σχετικά με τα ερωτήματα παρακάτω:

- 1) πώς θα επαναληφθούν τα χρώματα στα τετράγωνα, αν ξανακάνουμε την διαδικασία
- 2) τι θα συμβεί με τα αθροίσματα των μετρήσεων των εμβαδών, αν κάνουμε την διαδικασία μέσω της εντολής iterate
- 3) υπάρχει μια κανονικότητα ή είναι τυχαίος ο τρόπος που συμβαίνουν οι επαναλήψεις
- 4) η διαδικασία έχει μια συγκεκριμένη φορά (από ποια κορυφή εφαρμόζουμε το αρχείο εντολών έχει σημασία ή όχι)

Απαντώντας με την σειρά τα ερωτήματα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια κανονικότητα στην τοποθέτηση των χρωμάτων, στα τετράγωνα όταν εκτελούμε την διαδικασία με οποιονδήποτε τρόπο. Ακόμα το ισχυρότερο χρώμα επικάθεται στο ασθενέστερο με αποτέλεσμα να δημιουργούνται οι εντοπώσεις ότι δεν επαναλαμβάνεται η όλη διαδικασία αλλά ένα τμήμα της.

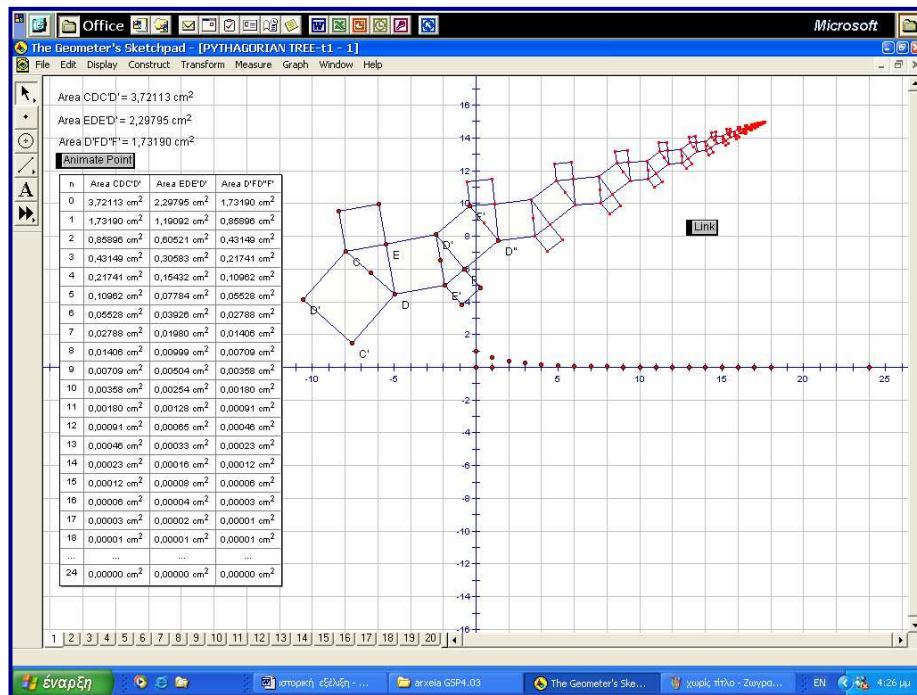


Στην εικόνα επάνω έχουμε και τους δύο τρόπους κατασκευών μαζί, και ταυτόχρονα τις παρατηρήσεις σχετικά με τα αθροίσματα των εμβαδών. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να διαπιστώσουν την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και ότι με την αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων ότι το εμβαδόν των τριάδων τείνει να γίνει σταθερό. Δηλαδή, η τιμή του εμβαδού είναι το όριο στο οποίο τείνει το άθροισμα των εμβαδών.

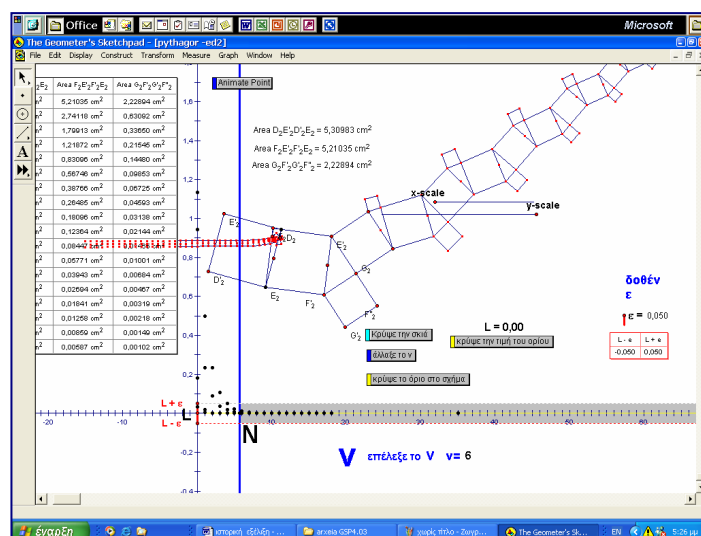


Επομένως είναι ώρα να γενικεύσουμε την διαδικασία.

Στο σχήμα αριστερά έχουμε σχηματίσει κάποιους κλάδους του Πυθαγορείου Δέντρου, έχουμε χρωματίσει τα τετράγωνα και υπολογίσαμε τα εμβαδά με την βοήθεια κατάλληλου αρχείου εντολών κατά μήκος του κάθε κλάδου. Ταυτόχρονα έχουμε συνδέσει με εντολή animation τις κορυφές των ορθών γωνιών των τριγώνων. Έτσι με τις κινήσεις των τετραγώνων παρατηρούμε τις αλλαγές των εμβαδών.



Στην εικόνα επάνω έχουμε υπολογίσει τα 3 πρώτα εμβαδά που παράγονται από έναν κλάδο και με την διαδικασία του iteration επαναλαμβάνουμε κατασκευή και μετρήσεις. Έχουμε επαναλάβει την διαδικασία π.χ 24 φορές, και ήδη έχουμε ενδείξεις για το όριο των τιμών της ακολουθίας ή των ακολουθιών των εμβαδών. Αν αποτυπώσουμε και τα αποτελέσματα σε μια γραφική παράσταση π.χ της τελευταίας στήλης των εμβαδών, θα έχουμε την έννοια της ακολουθίας των όρων και μπορούμε να δούμε εύκολα την τιμή που προσεγγίζει το όριο. Είναι μια σελίδα πολλαπλών αναπαραστάσεων που όπως είπαμε οι διαδικασίες λειτουργούν συμπληρωματικά, απλουστεύονται και γίνονται διαδικασίες –παιχνίδι στα χέρια των μαθητών. Επομένως έχουμε την δυνατότητα μέσα από κατάλληλη δραστηριότητα στο GSP να δοκιμάσουμε αν θα έχουμε την κατανόηση του ε-N ορισμού του ορίου της ακολουθίας. Για μια αυστηρότερη αντιμετώπιση του θέματος, σε άλλο αρχείο κατασκευάζουμε μια ζώνη παραλλήλων στα σημεία $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$ (που αποτελείται από δυο παράλληλες με μεσοπαράλληλο τον άξονα xx' , στην περίπτωση που το όριο είναι με 0 , και μεσοπαράλληλο στην απόσταση $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$ όταν το όριο είναι το L) και διαπιστώνουμε ότι όλες οι τιμές των εμβαδών, δηλαδή οι όροι της ακολουθίας είναι ανάμεσα στην συγκεκριμένη ζώνη (όπου ε είναι μια τιμή πολύ μικρή). Όταν η τιμή του n μεταβάλλεται, η μεταβολή εμφανίζεται και στη οθόνη, ενώ με κατάλληλη διαδικασία μπορούμε να κάνουμε zoom των αξόνων και να παρατηρήσουμε πώς οι τιμές συγκεντρώνονται ή απλώνονται, πώς απομακρύνονται από το 0 ή πώς πλησιάζουν στο 0 .



Όταν η τιμή του n μεταβάλλεται, η μεταβολή εμφανίζεται και στη οθόνη, ενώ με κατάλληλη διαδικασία μπορούμε να κάνουμε zoom των αξόνων και να παρατηρήσουμε πώς οι τιμές συγκεντρώνονται ή απλώνονται, πώς απομακρύνονται από το 0 ή πώς πλησιάζουν στο 0 . Στο σχήμα που βλέπουμε μπορούμε

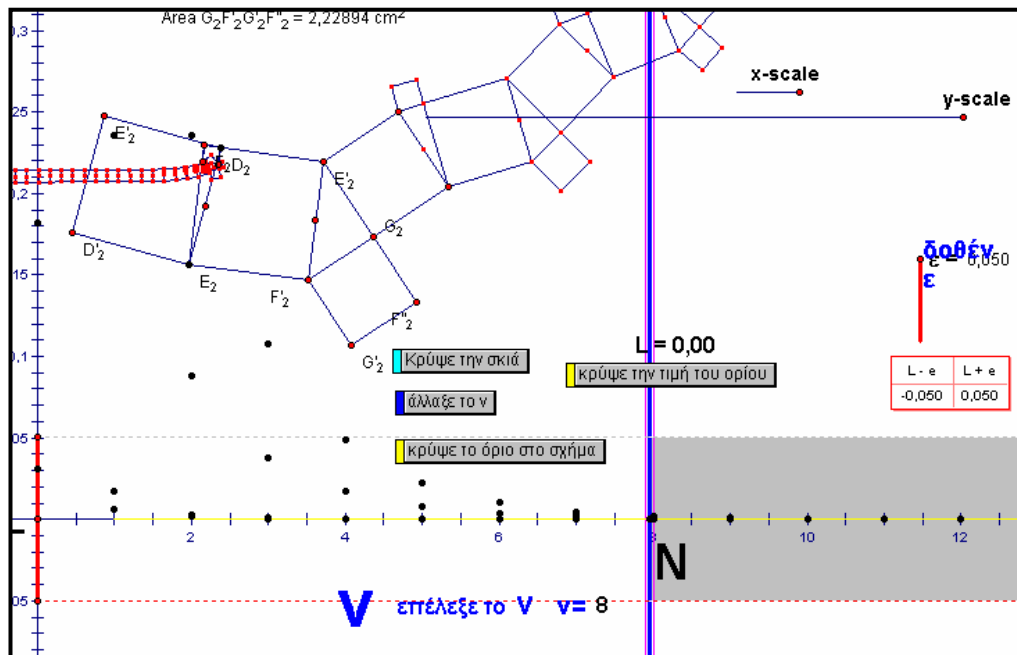
1) να κατασκευάσουμε και άλλα αντικείμενα 2) να μετακινούμε τα αντικείμενα αυξομειώνοντας τις τιμές στους πίνακες 3) να κάνουμε αποτύπωση των σημείων της ακολουθίας σε γραφικές παραστάσεις στον ίδιο πίνακα τιμών 4) να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει τιμή του N τέτοια ώστε σχεδόν

όλοι οι όροι της ακολουθίας με δείκτη μεγαλύτερο του N να είναι μέσα σε μια ζώνη παραλλήλων 5) να μεταβάλλουμε τις κλίμακες στους άξονες και την τιμή του ε 6) να εμφανίζουμε την τιμή του ορίου

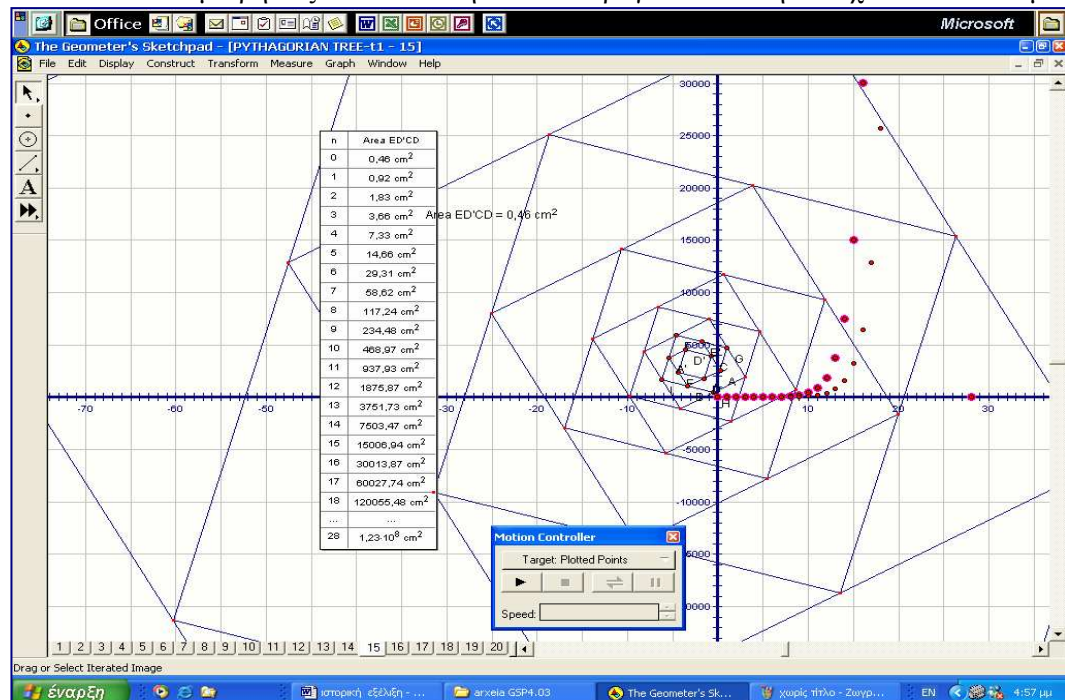
Με κίνδυνο να θεωρηθεί ότι προτείνεται αντικατάσταση των αποδείξεων και των αυστηρών ορισμών με απλές εικόνες, και εδώ θα χρησιμοποιήσω την φράση του Mandelbrot « κάτι που απεύχομαι », θα τολμήσω τις ερωτήσεις :

Πόσο απέχει αυτή η εικόνα από τον αυστηρό ορισμό του ορίου της ακολουθίας;

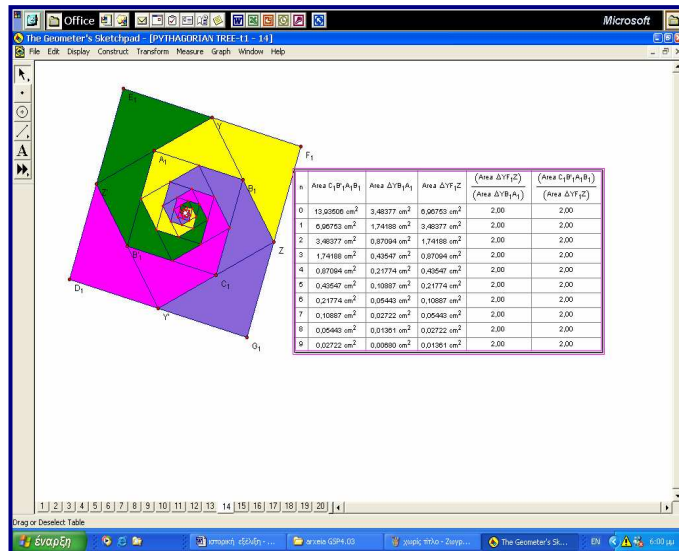
Μπορούν οι μαθητές να προσεγγίσουν τον ορισμό με ακρίβεια για τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες, όπως αυτοί αναφέρονται αυστηρά στον ορισμό;



Στην επόμενη δραστηριότητα κατασκευάζουμε τετράγωνα, με παράλληλες προς τις διαγωνίες αρχικού τετραγώνου του και γενικεύουμε με επαναληπτική διαδικασία μέσω ενός script file. Αν έχουμε μετρήσει το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου, τότε στον πίνακα τοποθετούνται οι μετρήσεις των επαναληπτικών τετραγώνων. Στη συνέχεια τοποθετούμε τις

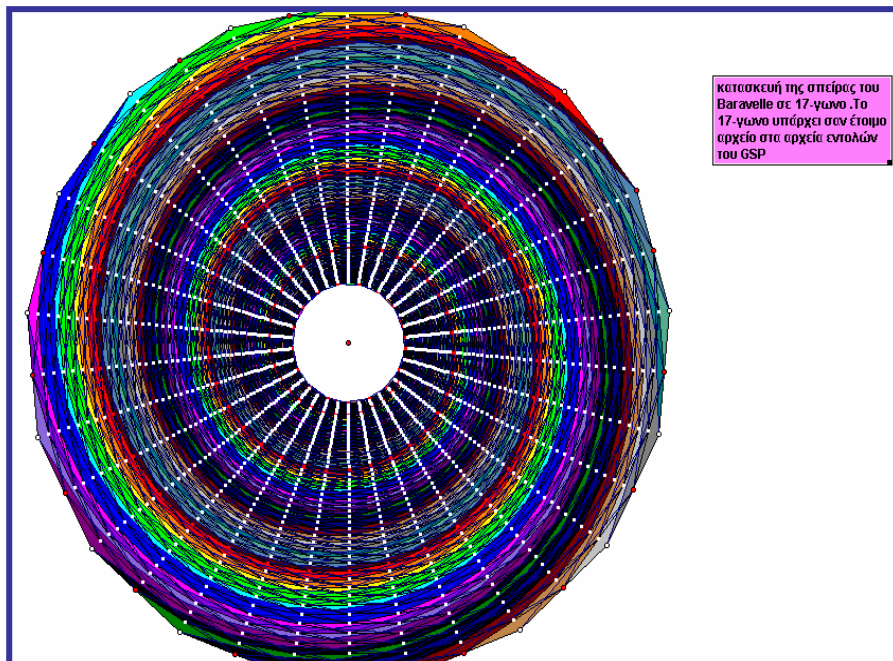


τιμές του n και τις τιμές των εμβαδών σε γράφημα στην οθόνη . Αν χρησιμοποιήσουμε το **dilate tool** ή την διαδικασία του **animation iterated image** παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του τελικού τετραγώνου αυξάνει εκθετικά ενώ η διαδικασία της αποτύπωσης των σημείων μας δίνει σημεία όρων της ακολουθίας των εμβαδών , αρχικά πολύ κοντά στο 0 (με μια νοητή καμπύλη εφαιπτόμενη του άξονα xx') και στην συνέχεια να τείνουν στο άπειρο . **Εδώ θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το λογισμικό έχει την δυνατότητα εκτέλεσης ,των επαναλήψεων που θέλουμε ,αλλά οι αποτυπώσεις στην γραφική παράσταση δεν ακολουθούν την επόμενη κίνηση του αντικειμένου .** Η τιμή όπως διαπιστώνουμε για την 28η μέτρηση είναι της τάξεως του 10^8 , πράγμα που επιβεβαιώνει τους ισχυρισμούς μας ότι το εμβαδόν του τελικού τετραγώνου τείνει στο άπειρο .

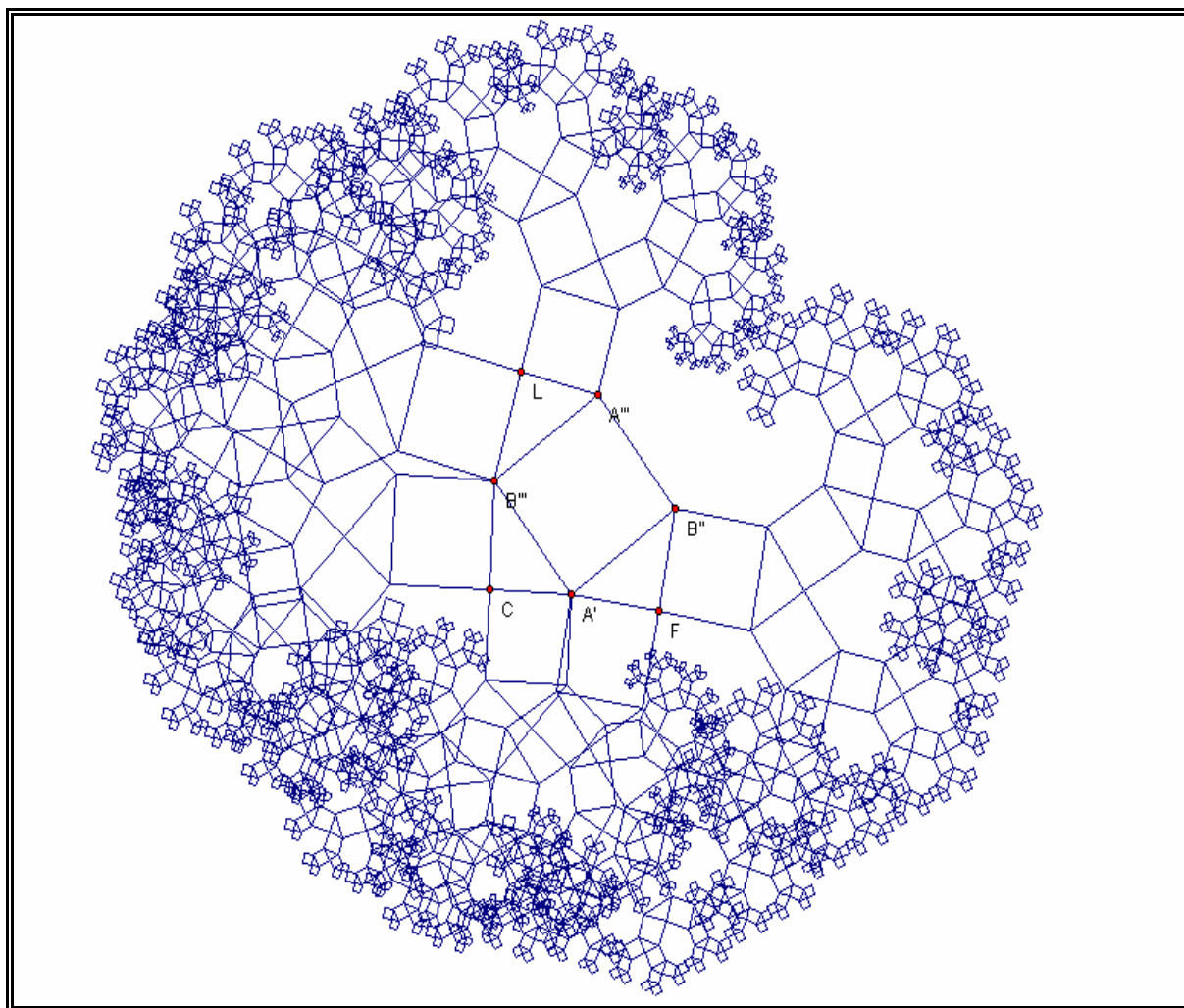


Σπείρα του Baravelle σε τετράγωνο

Στην εικόνα αριστερά μπορούμε να παρατηρήσουμε τις μετρήσεις που επαναλαμβάνονται σε μια σπείρα του Baravelle καθώς και τις σχέσεις των εμβαδών .



κατασκευή της σπείρας του Baravelle σε 17-γωνο .Το 17-γωνο υπάρχει στον έτοιμο αρχείο στα αρχεία εντολών του GSP



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Η ΕΡΕΥΝΑ

Β' Λυκείου

Οι μαθητές της Β Λυκείου, πέντε στο σύνολό τους, με ενδιαφέρον και θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν με την πρώτη ματιά « καλού επιπέδου ». Η κατεύθυνσή τους είναι Θετική ή Τεχνολογική. Έχουμε συζητήσει για το θέμα που θα ασχοληθούμε, δηλαδή τις ακολουθίες και τα όρια και μια εισαγωγή στις έννοιες μέσω της ειδικής τεχνολογίας του GSP τους κινεί την περιέργεια

(είναι η πρώτη φορά που έρχονται σε επαφή με το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας και τους έχει εντυπωσιάσει η αρχική επαφή όπως και οι έτοιμες βιβλιοθήκες του λογισμικού). Δηλώνουν το ενδιαφέρον τους και την περιέργεια για μαθήματα με H/Y , που θα τους ενισχύσει το ενδιαφέρον για μάθηση και ίσως τους βοηθήσει να κλείσουν τα γνωστικά κενά τους. Πιστεύουν ότι οι H/Y θα τους βοηθήσουν να ξεπεράσουν κάποια προβλήματα που ίσως έχουν. Παρά το γεγονός ότι προβληματίζονται για την απάντησή που θα δώσουν, (θέλουν να είναι σωστή) λειτουργούν αυθόρμητα. Οι μαθητές όπως αναφέραμε που συμμετέχουν είναι 5 (στην συνέχεια ήρθαν και άλλοι σαν ακροατές) και η συζήτηση που ακολουθεί εξελίσσεται στις έτοιμες δραστηριότητες που υπάρχουν στα αρχεία του GSP. Οι μαθητές πειραματίστηκαν και οι ίδιοι με τις κατασκευές. Οι έννοιες του Πυθαγορείου θεωρήματος, ακολουθίας, ορίου (κάποια αναφορά για το όριο έχει γίνει στις προηγούμενες τάξεις), τους είναι ήδη γνωστές αλλά όπως θα διαπιστώσουμε στην εξέλιξη της συζήτησης υπάρχουν πάντα εκπλήξεις

M1 : Διασπώνται σε πιο μικρά τετράγωνα, όλο και πιο μικρά τετραγωνάκια
E : Σταματάμε το animation και θα παρατηρήσουμε το σχήμα
M 1: Όλα σχηματίζουν μεταξύ τους ορθογώνια τρίγωνα
M 2: Σχηματίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα
M3 : Σε κάθε μια πλευρά του τριγώνου συνεχίζονται άλλα
M1 : Το τρίγωνο μετατρέπεται σε μικρότερο τρίγωνο και άρα η απόδειξη του Πυθαγορείου γίνεται σε όλο και πιο μικρά ορθογώνια
E :Τι κάνουν συνεχώς
M1 : Επαναλαμβάνονται
E :Τι είναι αυτά
M 1: Είναι ακολουθίες
E :Τι ακολουθίες
M 1: Τετραγώνων
M 2 : Και τριγώνων

Η εικόνα έννοιας της ακολουθίας είναι η πρώτη έννοια που οι μαθητές συνέδεσαν με τον ήδη υπάρχοντα ορισμό της. Οι μαθητές αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον του υπολογιστή που σκοπό έχει μέσα από την δραστηριότητα την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος. **Έτσι η διαδικασία ενεργοποιεί τον ορισμό έννοιας με αποτέλεσμα την εσωτερίκευση της έννοιας** Αυτό όμως είναι μια επιθυμητή διαδικασία. Οι μαθητές μέσα στο πρόβλημα αντιλαμβάνονται **την επανάληψη**, τον τρόπο (διαδικασία) της επανάληψης, τα αντικείμενα που επαναλαμβάνονται, την ισχύ των θεωρημάτων με τις αλλαγές σχήματος.

Στη συνέχεια ανοίγουμε το αρχείο με το τρίγωνο του Sierpinski

M 1: Είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο που αποτελείται από 4 ισόπλευρα τρίγωνα
M 2: Τα σχήματα είναι συμμετρικά
M 3: Στα τρίγωνα αφαιρώ το κεντρικό τρίγωνο
E :Τι σχήματα παράγονται συνεχώς
E :Αν το εμβαδόν του αρχικού είναι 1 το τρίγωνο που αφαιρώ
M 1: $1/2$ όχι $1/4$
E : άρα αυτό που είναι το εσωτερικό του εσωτερικού
M 1: $1/16$, $1/64$ (οι απαντήσεις έρχονται προφορικά και αμέσως –σχεδόν από όλους)
M : ή $1/4^2$, $1/4^3$... (όλοι)
E : τι είναι αυτοί οι αριθμοί
M : ακολουθία (όλοι)
E :τι ακολουθία είναι
M : γεωμετρική πρόοδος (όλοι)

M1 : πολλαπλασιάζεται το εμβαδόν
E : που φτάνει το εμβαδόν
M 1 : στο αρχικό μεγάλο τρίγωνο
ο άλλος μαθητής είπε ..
M3: μειώνεται το εμβαδόν όσο
M2 : όσο ο παρονομαστής αυξάνει
E : ο παρονομαστής που φτάνει κάποια στιγμή
βιάστηκε να απαντήσει
M3 : $1/\infty$
M3 : είναι 0
η μαθήτρια επιμένει
M1 : μα όταν θα τείνει να γίνει 0 τότε το εμβαδόν δεν θα τείνει να γίνει 1 (ερώτηση) γιατί θα ολοκληρώσει και θα γεμίσει όλο το αρχικό τρίγωνο

Η απορία της μαθήτριας φανέρωνε αναλυτική σκέψη , από την οποία θα μπορούσαμε να αρχίσουμε ολόκληρη συζήτηση , δυστυχώς όμως θα στρεφόταν όλο το ενδιαφέρον σε άλλο σημείο .

Η μαθήτρια σκέφτηκε : όλα τα τρίγωνα όσο και να μικρύνουν αν προστεθούν το αποτέλεσμα του αθροίσματος των εμβαδών τους θα είναι 1 δηλαδή του αρχικού τριγώνου. Στη σκέψη της ήταν μια μορφή οριακής διαδικασίας με άθροισμα απείρων σειρών εμβαδών τριγώνων που δίνουν αθροιστικά αποτέλεσμα το αρχικό τρίγωνο (η ερώτηση της ήταν : το όριο του εμβαδού του μικρού τριγώνου θα τείνει να γίνει ίσο με 1 δηλαδή το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου)

Της εξηγώ ότι εμείς θέλουμε να δούμε πόσο θα γίνει το εμβαδόν του μικρού , μικρού τριγώνου που σχηματίζεται μετά τις πολλές υποδιαιρέσεις στο τρίγωνο του Sierpinski , προσπαθώντας να κατευθύνω την συζήτηση

Εξηγώ στην συνέχεια την διαδικασία του αρχείου εντολών και αφήνω τους μαθητές να πειραματιστούν και να διαπιστώσουν πως κατασκευάζεται ένα σχήμα από το αρχείο εντολών .

E : ποια κορυφή μετακινείται
M : αυτή
E : τι γωνία είναι αυτή
E : γιατί είναι ορθή
M : γιατί όταν βαίνει σε ημικύκλιο ... (διατυπώνουν το θεώρημα , δείχνοντας σωστά στο σχήμα)

Οι απαντήσεις δηλώνουν ότι οι μαθητές έχουν υψηλό επίπεδο θεωρητικών γνώσεων , τους λείπουν όμως οι εμπειρίες των αλλαγών στις κατασκευές των σχημάτων Ένα στατικό μέσο όπως είναι το χαρτί και ο πίνακας δεν δίνει άμεσα την δυνατότητα των συνεχών αλλαγών των θέσεων των κορυφών και πλευρών του σχήματος . Στη συνέχεια το επαναλαμβάνουν και με άλλη διατύπωση πράγμα που επιβεβαιώνει ότι είχα σκεφτεί .

αλλάζω σελίδα στο λογισμικό

M1 : μια επανάληψη
M2 : έχουμε κύκλους , μικρότερους κύκλους ..
M3 : μικρότερα τρίγωνα
πειραματίζονται με το νέο αρχείο εντολών που επαναλαμβάνει το Πυθαγόρειο τρίγωνο
E : τι πρέπει να πάρω ακριβώς
M 2: να πάρω δυο σημεία , πρέπει να είναι μέσα στο σχήμα τα σημεία
E : να συνεχίσεις με την λογική που είναι κατασκευασμένο αυτό
M1 : εδώ το μικρότερο τετράγωνο και παίρνω τα δυο σημεία η μαθήτρια (ή ίδια) πειραματίζεται με τα πολύ μικρά τρίγωνα (από περιέργεια!)

και με έκπληξη διαπιστώνει όπως και οι άλλοι ότι η κατασκευή επαναλαμβάνεται ακόμα και αν το τρίγωνο είναι πολύ μικρό .

η κατασκευή του σχήματος μέσα από ένα αρχείο εντολών γίνεται με μια λογική σειρά ,με την σειρά που έχει οριστεί να γίνεται το πρώτο σχήμα που κατασκευάσαμε .Όταν ο μαθητής δίνει την επανάληψη και αυτή η επανάληψη εμφανίζεται ξανά και ξανά στην οθόνη με την ίδια σειρά αυτή η διαδικασία βοηθά από μόνη της τον μαθητή να οργανώσει την σκέψη του, **να επαναλάβει το σχήμα** , να κατανοήσει καλύτερα την έννοια που ίσως μόλις έμαθε

πάμε με το link στην επόμενη σελίδα
E :ποια μέρη του σχήματος έχω χρωματίσει με το ίδιο χρώμα
M2 : τα τετράγωνα
E :πως είναι κατασκευασμένα
M 3: αυτά που είναι με τον ίδιο τρόπο κατασκευασμένα
M : είναι μια ακολουθία
M : άλλη μια ακολουθία είναι αυτή
E :ας παρατηρήσουμε τι γίνεται για παράδειγμα στα εμβαδά στην κίτρινη ακολουθία
M 1 : αυξάνονται και τώρα .. γίνονται 0
M 1:στιγμιαία μηδενίζονται

Εξηγώ την διαδικασία του iteration και επαναλαμβάνουν οι μαθητές την διαδικασία στο σχήμα Παρατηρούν τις μηδενικές μετρήσεις του πίνακα και τις σχέσεις με τα εμβαδά που εμφανίζονται στην οθόνη . Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις

E :πως γίνονται οι γραφικές παραστάσεις
M 1: σε κάποια τιμή του χ δίνεται κάποια τιμή του ψ
E :η ακολουθία τι είναι
M1 : ακριβώς το ίδιο δεν είναι
E :τι διαφορά έχει από τις συναρτήσεις

Επιμένω στην ερώτηση με στόχο να συνδέσω στην γραφική παράσταση την πρώτη στήλη του πίνακα με το πεδίο ορισμού της ακολουθίας , όπως τους είναι ήδη γνωστός

E :το πεδίο ορισμού ποιο είναι
M2 : θετικός αριθμός
M 2: είναι οι φυσικοί
εδώ έχουμε ακολουθία
M : έχουμε , εδώ είναι οι φυσικοί
..... και εδώ έπρεπε να κάνουμε δυο τρεις φορές στο σχήμα τη γραφική παράσταση για να γίνει κατανοητό από τους μαθητές
M 3: αυξάνω τις επαναλήψεις
M 2: αυξάνονται τα εμβαδά
M 4: κάνουμε γραφική παράσταση των εμβαδών στην ουσία
M1 : δεν το είχα σκεφτεί ότι μπορεί να γίνονται έτσι γραφικές παραστάσεις των εμβαδών

Η μαθήτρια εδώ εκφράζει κάτι που κανένας άλλος δεν μου είπε .Η απορία της όπως διατυπώνεται είναι : Τι σχέση έχουν τα εμβαδά με τις γραφικές παραστάσεις ακολουθιών .Τι σχέση μπορεί να έχει η γεωμετρία με την άλγεβρα. Μπορώ να θεωρήσω την απορία της εύλογη . Παρά το γεγονός ότι η γεωμετρία μας παρέχει ένα πραγματικό περιβάλλον πλούσιο σε αναπαραστάσεις ,δεν υπάρχει δυνατότητα να τη συνδέσουμε με τις έννοιες των ακολουθιών με καλύτερο τρόπο από ότι τα φράκταλ ή οι σπείρες .

E :όταν αυξάνονται οι τιμές της ακολουθίας τα εμβαδά τι κάνουν ,
M4 : μικραίνουν
E :μεγαλώνουμε τα εμβαδά και οι τιμές
M 5: είναι απότομη υπερβολή
M 4: μηδενίζονται
M1 : όχι , όχι μηδενίζονται
M 3 : μήπως θα πάνε στο μείον άπειρο
E :όχι γιατί δεν θα είχαμε γεωμετρικά σχήματα
M 2: οι τιμές τείνουν στο 0
M1 : αυτό δεν έχει σχέση με το τρίγωνο Sierpinski;

M2 : μεγεθυντικός φακός χρειαζόταν και εκεί !
E : οι τιμές τι κάνουν
E : πόσες είναι οι τιμές τις ακολουθίας τόρα
M3 : ν (δεν είδε την τιμή στον πίνακα , ούτε στην γραφική παράσταση !)
M1 : όσο πάνε κατεβαίνουν
(Στο σημείο αυτό σκέφτηκα ότι χωρίς να το θέλουμε μπορεί να δημιουργήσουμε σύγχυση και εμπόδια στους μαθητές μας . Οι μαθητές δεν έβλεπαν στην οθόνη τον αριθμό των επαναλήψεων αλλά λειτουργούσαν με την φαντασία που απαιτείται όταν διδάσκουμε έννοιες των μαθηματικών , όπως τα όρια και οι ακολουθίες)
δείχνω στον πίνακα την ποσότητα (24)
M : 24 ! (όλοι μαζί)
και το 0 , 25
E : το $v=0$ τι σημαίνει
M1 : η αρχική μέτρηση
M 2: η επόμενη
E : η επόμενη τι
M2 : επανάληψη
E : δηλαδή τι κάνει το σχήμα στην ουσία
M4 : επαναλαμβάνει τις διαδικασίες
M3 : επαναλαμβάνει μικραίνοντας το εμβαδόν
οι μαθητές είναι λίγο επιφυλακτικοί στο τι θα πουν ,
M : όσο είσαι πιο μικρός , μου απαντούν τα λες πιο εύκολα , όταν μεγαλώνεις διστάσεις
E : αυξάνω τις επαναλήψεις στο 37 , τι κάνει
M 3: το εμβαδόν είναι 0 από αρκετές μετρήσεις πριν
E : είναι 0 ;
M 3: όχι
E : γιατί
M 2: γιατί έχουμε εμβαδά τετραγώνων , δεν έχουμε εμβαδόν σημείου
E : πως παρατηρείτε ότι πηγαίνουν οι μετρήσεις στην νέα γραφική
M 2: αλλάζουν ανά μονάδα
E : ανά μονάδα αλλάζουν γιατί αυτές είναι οι τιμές της ακολουθίας για $v=1,2$, δεν είναι συνεχόμενες οι τιμές
M 2: αλλάζουν και στον άλλο άξονα ταυτόχρονα
επιμένω ότι δεν μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία
E : δεν έχουμε ενδιάμεσες τιμές έχουμε μόνο σημεία
δείχνω τα σημεία
M 1: και αν είναι κοντινές οι τιμές δεν μπορώ να τις ενώσω ;
<i>Η μαθήτριά είχε μάθει πολύ καλά τον ορισμό της ακολουθίας , ήταν άριστη γνώστρια των γεωμετρικών προόδων(ήξερε όπως και οι άλλοι μαθητές ορισμούς και τυπολόγιο) <u>αλλά δεν είχε καταλάβει</u> (όταν ασχολήθηκαν με την έννοια της ακολουθίας στην τάξη) <u>ότι στη γραφική παράσταση δεν μπορούμε να πάρουμε και άλλες τιμές από αυτές που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ακολουθίας (το σύνολο N των φυσικών αριθμών) και επομένως δεν μπορεί να υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία(πραγματικοί αριθμοί)</u> Συνεχίζουμε:</i>
E : πόσο κοντινές να είναι ;
E : για ποιες τιμές έχουν προκύψει ;
M 1: για $v=1,2$..
E : δεν υπάρχουν ενδιάμεσες τιμές , θα μπορούσαμε να είχαμε άπειρες τιμές αλλά σε ποιο σύνολο ;
M 3: στους ακεραίους , (!)(άλλος μαθητής)
M 2: στους πραγματικούς
M 1: εδώ έχει τρεις τιμές (και δείχνει κάθετα τα σημεία που έχουν σχηματιστεί για $v=2$ είναι τρεις φορές που κάναμε τις γραφικές παραστάσεις
M1 : aaa! εγώ δεν το είχα καταλάβει ότι σε μια ακολουθία δεν μπορούμε να ενώσουμε

τις τιμές .
M1: τώρα το κατάλαβα !!

Επόμενη συνάντηση

ανοίγουμε την σελίδα που έχει την Baravelle σπείρα και αρχίζουμε να εξετάζουμε το σχήμα

M1: είναι τετράγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ,τα τετράγωνα έχουν το ίδιο κέντρο
M2: αρχίζει από μικρή ακτίνα μέχρι μεγάλη
M1: είναι τρίγωνα
M3: έχουν κάτι διαφορετικό τα χρώματα
E: πώς το κατασκευάζουμε
M4: από τα μέσα των πλευρών
κάνουμε animate για να παρατηρήσουμε
M1: εγώ θέλω να πω ότι το τρίγωνο αυτό έχει την μισή πλευρά από αυτή εδώ (δείχνει το μεγαλύτερο τρίγωνο)
E : άρα με ποια λογική γίνεται
M1: είναι επαναλαμβανόμενη
E : τι κατασκευάσαμε αρχικά
M1: ένα τετράγωνο
E : και μετά
M2: τα μέσα των πλευρών
E : στη συνέχεια έχουμε τα εμβαδά
M3: και κάνουμε σύνδεση των τιμών του πίνακα και του γραφήματος
δείχνουμε ξανά τις τιμές
E : για $n=0$ έχουμε τιμή 22 ,..που είναι στη οθόνη σας
Στο ψ πρέπει να είναι
οι μαθητές έδειχναν σε λάθος σημείο
E : πόσο είναι το εμβαδόν τώρα
M4: είναι 0
E : και με πόσα δεκαδικά
M4: είναι 0,000000
E : και σε ποια υποδιαίρεση του σχήματος
M2: στη 30 υποδιαίρεση
E : αυτό τι σημαίνει
M5: είναι πια ένα σημείο
E : το εμβαδόν μηδενίζεται ;
M2: είναι αδύνατο ένα εμβαδόν να μηδενίζεται , δεν μπορούμε να απεικονίσουμε κάτι μηδενικό

Αυτό που βλέπουν είναι ένα σημείο. Όμως διαισθητικά απαντούν ότι το σημείο αυτό είναι ένα τετράγωνο . Που έχει εμβαδόν .Και το εμβαδόν του δεν είναι 0 .Επομένως έχουν μια διαισθητική έννοια της **απειροελάχιστης** ποσότητας του εμβαδού του τετραγώνου .Αυτό είναι και ένα σημείο που φαίνεται η αύξηση της διαίσθησης των μαθητών σε σχέση με διαπιστώσεις σε μικρότερη τάξη .Ένα συμπέρασμα επομένως που θα μπορούσε να προκύψει είναι ότι η εμπειρία και η γνώση ενισχύουν την διαίσθηση

E : γίνεται ένα σημείο και σημείο εστί ου μέρος ουδέν
E : τι είναι το μηδέν
M1: το μηδέν είναι μια οριακή τιμή , που ο καθένας μας ορίζει ξεχωριστά σε διαφορετικές περιπτώσεις π.χ σε μια συνάντηση αρχή (0) είναι η είσοδος των ατόμων στην αίθουσα
M2: το 0 είναι η αρχή του απείρου , ένα αρχικό σημείο ορισμού
E : εδώ στο σχήμα υπάρχουν δυο τιμές $L + \epsilon$, $L - \epsilon$
M2: είναι συμμετρικά ως προς το 0
M3: αν τα πολλαπλασιάσουμε έχουμε διαφορά τετραγώνων

E : ακριβώς έτσι το βρήκατε και στο βιβλίο
M: απόλυτες τιμές (όλοι)
E : εδώ δηλαδή ποια τιμή είναι ανάμεσα στο $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$
η μαθήτριά παρατηρεί
M1: δεν πρέπει σε όλα τα μέλη να αφαιρέσουμε το L
E : το L τι είναι
οι μαθητές κρύβουν και εμφανίζουν το όριο
M1: το όριο
M2: είναι στον άξονα $\chi\chi'$
M3: αυτές είναι ευθείες παράλληλες στον άξονα $\chi\chi'$
E : το ε τι είναι
E : οι τιμές της ακολουθίας βρίσκονται που ;
M2: ανάμεσα στις δυο αυτές παράλληλες
M 1: όχι όλες όμως αρχίζει από εδώ (δείχνει στην οθόνη για ποια τιμή του N και μετά οι τιμές της ακολουθίας τείνουν να γίνουν 0)
E : ποιο είναι το πεδίο ορισμού
M1: δεν είναι το N σύνολο των φυσικών ;
M1: ναι αλλά μήπως υπάρχει και ένα δεύτερο σύνολο (και δείχνει τις τιμές του N) από τις οποίες και μετά η ακολουθία μας μηδενίζεται

Από τις οποίες και μετά Η ερώτηση ήταν διατυπωμένη κατά τέτοιο τρόπο που δεν υπήρχε κάποιο νόημα .Η μαθήτριά εννοούσε- μήπως υπάρχει ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών που οι αντιστοιχίες τους στον άξονα των $\psi\psi'$ είναι 0; .Οδηγήθηκε από το σχήμα και τις αναπαραστάσεις σε ένα σημαντικό τμήμα του αυστηρού ορισμού του ορίου ακολουθίας .Η ήταν η αρχή της μετάβασης σε ένα επίπεδο αυστηρότητας που όμως προέκυψε με την οικοδόμηση της έννοιας μέσα από το περιβάλλον του H/Y

Επιθυμητό αποτέλεσμα είναι οι μαθητές να φτάσουν τελικά στο σημείο να δομήσουν τμήματα του ορισμού και στην συνέχεια να τα συνθέσουν ώστε να έχουμε τον αυστηρό ορισμό

$\exists L \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \exists \kappa \in \mathbb{N}: \forall n > \kappa \quad \left a_n - L \right < \varepsilon$
M 2: αυτός ο άξονας ο $\psi\psi'$
M 1: άξονας των συντεταγμένων
M 3: άξονας των εμβαδών
E : αν θέλουμε να διατυπώσουμε κάπως πιο ολοκληρωμένα την σκέψη μας τι θα γράφαμε
M 2: όταν N=8 και $\varepsilon=0,007$ το όριο είναι 0 (αυτό ειπώθηκε όπως έβλεπαν τις τιμές του N και ε που άλλαζαν στη οθόνη τους)
M 3: ανάμεσα στο $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$
M4: είναι οι τιμές των εμβαδών
M2: μεγαλώνει , αλλάζει το N
M5: τι είναι το ε τελικά
M: θα μείνουμε με την απορία

Το αποτέλεσμα της μάθησης έρχεται ως αποτέλεσμα γνωστικής σύγκρουσης .Οι μαθητές θέτουν ερωτήσεις ,αλλά κατασκευάζουν την γνώση μόνοι τους από τα προϋπάρχοντα σχήματα με γνωστικές συγκρούσεις .Όπως αναφέρει και η Mariotti (2001) «κάθε ισχυρισμός οδηγεί στην θεωρητική του τεκμηρίωση και στον καθορισμό των ανάλογων σχέσεων »

Ο υπολογιστής δεν χρησιμοποιείται ως μέσο που μπορούμε να εικάσουμε και να παρατηρήσουμε αλλά και να αποδείξουμε με παραγωγικό συλλογισμό .Από την περιγραφή οι μαθητές οδηγούνται να αναπτύξουν ένα θεωρητικό τρόπο σκέψης αφού η διαδικασία όπως χτίζεται σταδιακά τους οδηγεί στο να εξετάσουν περισσότερες παραμέτρους .Το σημαντικό στην περίπτωση αυτή είναι να επιμείνουμε κατάλληλα σε ένα θέμα που ίσως είναι δύσκολο να εννοηθεί . Ο μαθητής πρέπει να παρατηρήσει, να εικάσει σε δραστηριότητες που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα . Έτσι θα διαπιστώσει την αλήθεια των σχέσεων μέσα από επαναλήψεις των ιδίων αποτελεσμάτων και συνεχείς συγκρούσεις που προέρχονται με τις προϋπάρχουσες γνώσεις .

Ανοίγουμε το αρχείο που έχει την σπείρα του Baravelle ,το σχήμα μοιάζει ίδιο με το προηγούμενο που είχαν δει οι μαθητές αλλά η διαφορά σ' αυτό είναι ο τρόπος κατασκευής του

E : Τι διαφορετικό υπάρχει

M3: Εδώ ξεκινά από το 0 αλλά συνεχίζει στο 30.

M5: Είναι αύξουσα η ακολουθία

E : Πως κατασκευάζεται

M4: Ανάποδα

M2: Έχει θετικό λ

(Ο μαθητής σκέφτηκε ότι είναι μια αύξουσα ακολουθία αλλά η σκέψη του έδωσε ένα γρήγορο αποτέλεσμα ότι είναι θετικό το λ. Αυτό που σκεφτόταν ήταν έχει $\lambda > 1$ γιατί στην συνέχεια το διόρθωσε)

E : Πως γίνεται η κατασκευή του σχήματος

M4: Το εσωτερικό κάνουμε και πολλαπλασιάζουμε

M3: Αρχίζουμε με ένα πολύ μικρό μέγεθος

M3: Διπλασιάζουμε το εμβαδόν

M2 : Φέρω παράλληλες προς τις διαγώνιες

E : Τι παρατηρούμε εδώ ότι κάνουν τα σημεία

E : Αντίθετα με το εμβαδόν που τι κάνει

M: τείνει στο άπειρο (όλοι)

E : που έχει φτάσει το εμβαδόν

M: $2,8 \cdot 10^8$

Ανοίγουμε τις σελίδες που έχουν τα fractal των τριγώνων (που σχηματίζονται από τα μέσα των πλευρών) .

Οι μαθητές στο σχολείο δεν έχουν ασχοληθεί με το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου και αυτό γιατί είναι εκτός ύλης. Το αποτέλεσμα του αθροίσματος είναι αποτέλεσμα οριακής διαδικασίας(αφού οι όροι της επαναληπτικής διαδικασίας της ακολουθίας των εμβαδών τείνουν στο άπειρο) Στο παράδειγμα που θα διερευνήσουμε στην συνέχεια υπάρχει στην οθόνη ο αριθμός 1,33.. που εμφανίζεται σαν επαναλαμβανόμενη τιμή στον πίνακα υπολογισμού του επαναληπτικού αθροίσματος της φθίνουσας ακολουθίας των εμβαδών. Σχολιάζω στους μαθητές ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε , είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που θα παίρναμε αν εφαρμόζαμε τον τύπο του αθροίσματος των απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου . Ο τύπος δεν περιέχει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία σε σχέση με τους υπόλοιπους τύπους των αθροισμάτων των όρων γεωμετρικής ή αριθμητικής προόδου που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο Τα παραδείγματα όμως που αναφέρονται στο συγκεκριμένο θέμα προκαλούν φόβο και αποστροφή στους μαθητές .Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί

οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν το εσωτερικό του σχήματος (πως συνεχίζει με τις άπειρες υποδιαίρεσεις),

δεν έχουν κάποια αποτελέσματα εμβαδών(στην 30^η π.χ επανάληψη) ώστε να καταλάβουν το θέμα πρακτικά και

το πιο σημαντικό η απόδειξη του τύπου επικαλείται φορμαλιστικές διαδικασίες υπολογισμού ορίων που ο μαθητής τυπικά μαθαίνει στην επόμενη τάξη . Το άθροισμα όλων των όρων είναι ίσο προς 1,33 ...όπως φαίνεται .Στην οθόνη του υπολογιστή το βλέπουν .Θέλουν όμως και την τυπική απόδειξη .Στο χαρτί σημειώνουν τον τύπο. Οι σκέψεις τους είναι διαδοχικά οι εξής : Ο λόγος είναι $1/4$ Άρα για να προκύπτει ως αποτέλεσμα το 1,33 θα πρέπει το αρχικό εμβαδόν να είναι ίσο με την 1 .

M1: έχουμε ορίσει ως 1 το αρχικό εμβαδόν ;

E : Αλλά δεν μπορεί να είναι 1 το αρχικό εμβαδόν για αυτό και τι παίρνουμε ;

E : θέλουμε το άθροισμα όλων των όρων, άρα αρκεί να διαιρέσω το $\Sigma \infty$ με το E του αρχικού τριγώνου και θα είναι το ίδιο

M 1: δεν κατάλαβα γιατί δεν ορίσαμε σαν 1 το a_1 Δεν είναι 1 το αρχικό εμβαδόν ;

E : ωραία ας ξεκινήσουμε από την αρχή αν ήταν το εμβαδόν 1 τότε ο τύπος θα ήταν $1/1-\lambda$, τώρα όμως που είναι E

M 2: άρα θα έπρεπε να βάλω E / 1-λ όπου E το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου και αυτό που θα είχα θα ήταν το άθροισμα των απείρων όρων των εμβαδών .

Η διαδικασία στις διαδοχικές σελίδες GSP επαναλαμβάνεται κτίζοντας με ένα βήμα περισσότερο.

M 2: πάλι το ίδιο γίνεται
M 4 : δηλαδή βγαίνει 1,33 στο περίπου
Οι μαθητές επαναλαμβάνουν μόνοι τους με transform –iterate
M 2 : παίρνουμε το B και το τοποθετούμε στο F
M 5: Κάνουμε επαναλήψεις
M3 : 20 επαναλήψεις
E: τι είναι δηλαδή το 1,33
M 4: είναι μια σταθερά
M 3: αυτό το άθροισμα δεν θα φτάσει στο άπειρο ;
E :γι α πόσους όρους το πήραμε
M2 : για 20
E: για πόσους μπορούμε να το πάρουμε
M 3: για n
M4 : δηλαδή θα έχουμε αύξηση ;
M2 : συνεχίζει
μπορεί να είναι απειροελάχιστη η αύξηση τελικά αλλά δεν θα γίνει άπειρο ; δηλαδή τώρα είναι στο 20 και είναι 1,33... μετά που θα φτάσει στο άπειρο θα είναι πάλι 1,33;
E : Στον πίνακα τι βλέπεις , δεν φαίνεται να παραμένει 1,33...
M 2: Δηλαδή είναι τόσο μικρή η αύξηση που παραμένει 1,33...
Ο μαθητής έχει παρατηρήσει στον πίνακα τις τιμές των εμβαδών που προστίθενται και καταλήγει στο συμπέρασμα. Είναι όπως δηλώνει τόσο μικρή η αύξηση που το τελικό αποτέλεσμα δεν αλλάζει . Από τους 9 πρώτους όρους ήδη το αποτέλεσμα του αθροίσματος είναι 1,33....
M 5: Δηλαδή σε όλες τις ακολουθίες είναι 1,33... (ερώτηση)
E : Από τι εξαρτάται για να είναι 1,33....
M 2 : Από τον λόγο λ της ακολουθίας !

Οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις διαδικασίες της επανάληψης , της γραφικής παράστασης , της αποτύπωσης των σημείων

Με τα παραδείγματα που έχουν οι μαθητές πειραματιστεί διαπίστωσαν ότι μια ακολουθία μπορεί να έχει όριο το μηδέν ή το άπειρο , ή πραγματικό αριθμό . Όπως έχουμε διαπιστώσει από την συζήτηση οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν γιατί ένα άπειρο άθροισμα σταματάει και σταθεροποιείται στην κυριολεξία περίπου από τον 9ο όρο(στα σχήματα που έχουν κατασκευαστεί) . Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι είναι πολύ μικρά τα ποσά που προστίθενται. **Αυτό που δεν μπορούν να καταλάβουν είναι το άπειρο σαν διαδικασία αθροιστική τουλάχιστον αρχικά .** Αν και εδώ τα παραδείγματα είναι πολύ περισσότερο χειροπιαστά από ότι στο χαρτί ή στον πίνακα. Ακόμα το zoom στο λογισμικό βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν ότι παρά την μεγέθυνση των σχημάτων το τελικό αποτέλεσμα δεν αλλάζει . Στη συνέχεια οι παρατηρήσεις τους δείχνουν ότι υπάρχει μια αρχική κατανόηση Η υπέρβαση αυτού του εμποδίου είναι μια διαδικασία που απαιτεί χρόνο και ίσως περισσότερες συναντήσεις και παραδείγματα . Έχουμε σαν στόχο να φτάσουμε όσο γίνεται πιο κοντά στον τυπικό ορισμό της έννοιας του ορίου ακολουθίας Η διαδικασία που πιστεύω ότι είναι η πιο απλή για να πειραματιστούμε και να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να προσεγγίσουμε στον αυστηρό ορισμό είναι όταν το όριο της ακολουθίας είναι 0 .

Επανέρχομαι στην σελίδα με την εικόνα του ορισμού του ορίου ακολουθίας

E : Στο $n=0$ πόσο είναι το εμβαδόν
M 2 : 0,13
E : Από ποια τιμή του n οι όροι μηδενίζονται
M 2 : Από το $n=15$ περίπου
Μικραίνω το σχήμα
M : Οι τιμές των εμβαδών μικραίνουν

E:Από ποια τιμή του v και μετά έχουμε τιμή εμβαδού ίση με το 0
M 2 :Από την τιμή $v=9$
M 1 :Δηλαδή όσο μικραίνουμε το σχήμα οι τιμές του v μικραίνουν
E:Το σημείο από το οποίο ξεκινούν(οι τιμές του v) να μας δίνουν εμβαδόν περίπου 0
E:Υπάρχει τιμή να είναι ίση με το 0
M 2:Αν γίνει ένα σημείο
M 3:Τότε δεν θα είναι ένα σημείο για το v
E : Το v αλλάζει
M1 :Την οποιαδήποτε τιμή του v
M1 :Το L είναι η αρχή των αξόνων (εννοεί τον άξονα xx' γιατί αυτό δείχνει)
E :Τι είναι το L
M1 :Μήπως είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει
Τους παρακινώ να ασχοληθούν με το κρύψε –εμφάνισε των action buttons και να διαπιστώσουν τι εμφανίζεται .
E :Αν έχουμε 1,33 όπως είδαμε τότε
M 3 :Είναι μια ευθεία(σημεία) στο 1,3
E :Αν είναι 0
M2 :Τότε θα είναι στον xx'
E :Τα $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$ τι είναι
M2: Είναι πάνω στον άξονα yy' , άρα είναι πολύ μικρές τιμές εμβαδού που προσθαφαιρούνται στο L
E :Πόσο μεγάλο χρειάζεται να είναι το ε
M 2:Πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 0 (Και οι άλλοι συμφωνούν)
E :Πόσο μεγάλο όμως ή πόσο μικρό αντίστοιχα
E :Από ποια τιμή του v το L είναι =0
M 3:από το $v=9$, από το $v=14$ που το μεγάλωσα
M 2 :άρα οι τιμές θα είναι εδώ και δείχνει το διάστημα (όπως συγκλίνουν οι τιμές της ακολουθίας)
M4 :αν είχαμε και αρνητικές τιμές θα ήταν και εδώ και μου δείχνουν στο τέταρτο τεταρτημόριο αλλά εδώ δεν έχουμε γιατί είναι εμβαδά
M1 :εδώ μου φαίνεται λίγο άτοπο γιατί ενώ λέμε όριο 0 δεν είναι 0
M 2:αυτό είναι το όριο
M 2:κάποια στιγμή θα είναι πολύ κοντά στο 0
M 4:αν θα γίνει 0 ,θα εξαφανιστεί το εμβαδόν
E :το όριο τι είναι
M :μια πολύ μικρή τιμή του εμβαδού
M 2 :δηλαδή αν αφαιρέσουμε από το τελικό εμβαδόν την τιμή του ορίου αυτή θα είναι εδώ μέσα
E:Μπορείς να το γράψεις αυτό
M 2 : $L - \varepsilon < E < L + \varepsilon$ άρα αν μεταφέρω το L
$E - L < \varepsilon$ και το πρώτο μέρος θα είναι σε απόλυτη τιμή
M2 :Αν και μόνο αν $\varepsilon > 0$
E :Και το v δεν παίζει ρόλο ;
M 1:Ναι παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο
E :Τότε όσο αυξάνει το v τι συμβαίνει στο εμβαδόν ;
M 4:Είναι δηλαδή κάπως σαν αντιστρόφως ανάλογα ;
M 5 :Όσο αυξάνει το v μικραίνει το εμβαδόν
E :Δηλαδή από κάποια τιμή του v και μετά
M 2:Το E θα γίνει ίσο με το L
E : το E θα τείνει στο L
M :Το v τείνει στο άπειρο (σχεδόν όλοι)
E :Για v μεγαλύτερο του πόσο ;
M 2:Για v μεγαλύτερο του 18

E : Αν θέλουμε να γενικεύσουμε ,θα είναι 18 πάντα
M 2: Όχι $n=18$ θα είναι στο συγκεκριμένο παράδειγμα
E : Θα πρέπει να βρούμε έναν τύπο που θα πρέπει να εκφράζει ένα n που θα είναι πάντα μεγαλύτερο
E : Να βάλλουμε ένα $n > n_1$
E : Αν μικρύνουμε το ε ;
M 2: Αν μικρύνει και το ε δεν μικραίνει και το n που θα ξεκινάει να γίνεται 0 ; (εννοεί τον n_1 όρο)
M1 : Το n_1 είναι ένα φυσικός αριθμός από τον οποίο ξεκινάει η διαδικασία να μηδενιστεί το εμβαδόν
E : Έτσι για $n > n_1$
M 1: Δεν μας το δίνει όμως το n_1 , δηλαδή για οποιαδήποτε ακολουθία δεν μας λέει ποιο είναι το n_1
E : Αλλάζει
M2 : Το βρίσκουμε εμείς
M 3: Το E τείνει στο L σημαίνει ότι το E τείνει στο 0

$$E \rightarrow 0 \Leftrightarrow |E - e| < \varepsilon$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$N > 18$$

$$N > n_1$$

Οι μαθητές έχουν ακόμα παρατηρήσει ότι

Ότι υπάρχουν άπειροι όροι στο διάστημα $L+\varepsilon$, $L-\varepsilon$ και πεπερασμένοι εκτός

- ☞ Πρέπει το ε να είναι **μεγαλύτερο** του 0
- ☞ **Υπάρχει n_1** όπως το γράφουν τέτοιο ώστε να είναι για $N > n_1$ να έχουμε το όριο της ακολουθίας των εμβαδών που τείνουν στο 0 .
- ☞ Ότι το L είναι το 0 στην συγκεκριμένη περίπτωση
- ☞ Ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στον όρο n_1 της ακολουθίας και το ε

Ο τύπος που σημειώνει ο μαθητής σε συνεργασία με τους άλλους μαθητές της ομάδας του είναι αρκετά κοντά στον αυστηρό ορισμό αφού περιέχονται σχεδόν όλα τα τμήματα του ορισμού .Δηλαδή το όριο των εμβαδών είναι το 0 τότε και μόνον τότε όταν συμβαίνει η απόλυτη τιμή της διαφοράς να είναι μικρότερη από το ε (στο οποίο έφτασαν παρατηρώντας την ζώνη των παραλλήλων $L+\varepsilon$, $L-\varepsilon$)

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Η σύνθεση της ομάδας της Α΄ Λυκείου συγκροτήθηκε τυχαία από 4-5 μαθητές που είχαν φόβο απέναντι στα μαθηματικά. Από την πρώτη στιγμή που ήρθαν σε επαφή με το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας μέσω του GSP, εξέφρασαν την άποψή τους για το ενδιαφέρον που μπορεί να αποκτήσει το μάθημα με αυτό τον τρόπο. Πριν από την συνάντηση που περιγράφουμε παρακάτω αναλυτικά, είχε προηγηθεί και άλλη που σκοπό είχε την επίδειξη του λογισμικού, την εισαγωγή στα fractals μέσω της έτοιμης βιβλιοθήκης, την αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους, με τον υπολογιστή και το λογισμικό. Η έρευνα διεξήχθη στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Είχαμε συγκεντρωθεί σε έναν υπολογιστή και οι μαθητές που ήταν μπροστά στον υπολογιστή έκαναν τις κατασκευές με την βοήθεια των υπολοίπων. Τις περισσότερες απαντήσεις πήρα από έναν καλό μαθητή και από μια μαθήτρια που όπως δήλωσε η βαθμολογία ήταν ένας ανασταλτικός παράγοντας που την ωθούσε στη θεωρητική κατεύθυνση. Οι μαθητές αντιμετώπιζαν προβλήματα στα Μαθηματικά, πιστεύω όμως ότι ήταν σημαντικό να αναλώσουμε χρόνο για να διερευνήσουμε πως και πόσο μπορεί να προχωρήσει μια ομάδα μαθητών με όχι ιδιαίτερη συμπάθεια στα μαθηματικά. Ποιες έννοιες θα σχηματιζόταν από την αλληλεπίδραση με τον υπολογιστή και ποιος θα ήταν ο καταλληλότερος τρόπος προσέγγισης ώστε οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες να αποκτήσουν ενδιαφέρον για το αντικείμενο.

Στην πρώτη συνάντηση οι μαθητές έμαθαν να κατασκευάζουν ένα αρχείο εντολών από μια οποιαδήποτε κατασκευή, που έκαναν και στην συνέχεια να το χρησιμοποιούν για να επαναλάβουν το σχήμα. Αφού εξοικειώθηκαν με το περιβάλλον αποφασίσαμε να προχωρήσουμε στη δραστηριότητα του Πυθαγόρειου δέντρου. Παρουσίασα στην ομάδα των παιδιών ένα τετράγωνο που έχει κατασκευαστεί με script file και το μετακίνησα μεγαλώνοντας το ταυτόχρονα σύροντας από μια κορυφή.

M: Είναι ρόμβος
M: Είναι τετράγωνο
E: Όταν είναι ρόμβος είναι τετράγωνο;
M: Όχι πάντα
E: Όταν είναι τετράγωνο είναι ρόμβος;
M: Ναι
E: Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος;
M: Πάντα γιατί οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες
E: Τα έχετε κάνει τα παραλληλόγραμμα;
M: Ναι
(σκέφτηκα ότι ίσως δεν έθεσα καλά την ερώτηση και τους το εξήγησα – υπήρχε όμως μια δυσκολία στην κατανόηση της ιεραρχίας των τετραπλεύρων)
.....
E: Όπως βλέπετε έχω κατασκευάσει σελίδες για να τα βρίσκουμε πιο εύκολα και έχουμε κάνει link ανάμεσα στις σελίδες ώστε να συνδέεται κατάλληλα η μια σελίδα με την άλλη
E: Τώρα τι έχουμε κάνει σ' αυτό το σχήμα
M: Κάναμε ένα τετράγωνο και μετά ένα τρίγωνο και στις πλευρές αυτού του τριγώνου κατασκευάσαμε δυο άλλα τετράγωνα
E: Τι τρίγωνο είναι αυτό
M: Ορθογώνιο
E: Πως το κατάλαβες ότι είναι ορθογώνιο
M: Από το σχήμα
E: Μετακινώ εδώ την κορυφή
M: Μένει πάντοτε ορθή
E: Τα τρία τετράγωνα έχουν κάποια σχέση
M: Πυθαγόρειο θεώρημα
Άρα αυτό το τετράγωνο είναι ίσο με το άθροισμα αυτού και αυτού του τετραγώνου
E: Μπορώ να ξανακατασκευάσω εξωτερικά αυτού του τετραγώνου τρίγωνο ορθογώνιο
M1: Ναι με το αρχείο εντολών

M 2: Τώρα φάνηκε ένας κύκλος
M 1: Και κάνουμε απόκρυψη
M 1: Η κορυφή του ορθογωνίου κινείται πάνω στον κύκλο
M 2: Τα τετράγωνα εξαρτώνται από τα ορθογώνια τρίγωνα
M 1: Το κέντρο όλων των τετραγώνων που σχηματίζονται είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο
M2 : Μπορούμε να το κάνουμε άπειρες φορές
E : Κι τι είναι το άπειρο
M1 : Κάτι πολύ μακρινό , το άπιαστο , κάτι που εκτείνεται και δεν σταματάει πουθενά
M 2: Το άπειρο είναι ένας αριθμός που δεν σταματάει να μεγαλώνει ή να μικραίνει ποτέ , κάτι ατελείωτο
E : Και να μικραίνει
M 2: Ναι ,το μείον άπειρο
M 3: Για μένα είναι κάτι απροσδιόριστο που κάθε άνθρωπος το ορίζει σύμφωνα με το πού μπορεί να φτάσει η φαντασία του ,δηλαδή στο μυαλό του ανθρώπου υπάρχει ένα σημείο που για καθέναν ξεχωριστά ξεκινάει το άπειρο αλλά δεν τελειώνει ποτέ .Κάτι που όσο και να προσπαθήσουμε δεν μπορούμε να το φτάσουμε .
E :Να πάμε σε άλλη σελίδα ;
E :Τώρα τι βλέπετε
M : Έχουμε κάνει το σχήμα πολλές φορές
E :και τι πήραμε
M 1:Ισοσκελή τρίγωνα
M2 :Είναι και ορθογώνια
M 2:είναι μόνο ορθογώνια
E :για να δούμε τι γίνεται αν μετακινήσουμε αυτό το σημείο
Επιλέγω το σημείοanimation button
M1 :Μεγαλώνει το κάθε κλαδί του δέντρου και κάποιο άλλο μικραίνει
E :Πόσο μικραίνει
M2 : Τελείως , γίνεται μια κουκίδα
E :Το εμβαδόν του πόσο θα γίνει
M 1:0
M 1:θα γίνει 0
M 2:όχι αν κάνουμε zoom θα δούμε ότι είναι πολύ μεγάλο
M1 :όχι κα τόσο μεγάλο (παρακολουθώντας τις αλλαγές των εμβαδών στην οθόνη) αλλά θα έχει ένα εμβαδόν
M3 :τίποτα δεν γίνεται 0 ,εμάς μας φαίνεται
M3 :δεν μπορεί να διαιρεθεί άλλο αλλά δεν γίνεται 0 , αφού το βλέπουμε είναι υπαρκτό σημείο όταν το μεγεθύνουμε στην οθόνη μας
M2 :βλέπουμε ότι αυτό το σημείο δεν μπορεί να γίνει 0
M 1: αυτό δηλαδή πάει να γίνει 0 αλλά δεν είναι 0
M 2: όσο προσπαθούμε να φτάσουμε στο 0
E :ωραία
γιατί επέλεξα αυτά τα χρώματα στους κλάδους
M 4:χρωμάτισαμε με το ίδιο χρώμα τα μεγάλα τετράγωνα από το κάθε ορθογώνιο
E :και τι υπολογίσαμε
M3 :τα εμβαδά
M 1: κάνουμε μια ταξινόμηση των εμβαδών
E : animation και κίνηση στους διαφορετικούς κλάδους
M3 : υπάρχει ένα σταθερό τετράγωνο και τα υπόλοιπα αλλάζουν όπως και στο σχήμα
M 4:0,50 ,....0,000
M5 :ναι μπορεί να είναι 0,00000... αλλά δεν είναι 0
E :το σταματάμε και θέλω να το παρατηρήσουμε
E : αυτό εδώ , και αυτό εδώ έχουν καμία σχέση (τους δείχνω δυο διαφορετικά σημεία της

οθόνης που έχουμε κατασκευάσει δυο αντικείμενα fractal)
M4 :Δεν έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά έχουν το ίδιο σχήμα
E :Τα σχήματα είναι όμοια μεταξύ τους .
M2 :Παίρνει την βάση του τετραγώνου και φτιάχνει ένα τρίγωνο μετά παίρνει άλλη βάση και φτιάχνει άλλο τρίγωνο
M 1:Και μετά όμοια και όμοια
E :Και αυτό το ν τι είναι
Παρατηρήστε τον πίνακα
M :Είναι τα εμβαδά αυτά και μετά τα άλλα εμβαδά
M 3:Είναι οι φυσικοί αριθμοί από το nature
E : Ωραία δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικούς αριθμούς γιατί έχουμε γεωμετρικά σχήματα και επομένως είναι θετικές ποσότητες
E :Ποια εμβαδά πήραμε
M :Αυτά τα πρώτα
E :Και μετά ...
Παρατηρούν στην οθόνη και βλέπουν ποια εμβαδά παίρνει και με ποια διαδικασία παίρνει τα εμβαδά
M 1:Μετά παίρνει τα άλλα τρία (με δισταγμό)
Γυρίζω πίσω στο άλλο φύλλο και τους ξαναδείχνω πως κάνουμε το πρώτο πυθαγόρειο δέντρο και άρα πως ζητάμε να γίνουν οι μετρήσεις
E :τι κοινό υπάρχει ανάμεσα στις μετρήσεις που εμφανίζονται για $n=0$ και $n=1$
M 4:το πρώτο και το τελευταίο εμβαδόν είναι τα ίδια
E :συνεχίζει και παρακάτω ;
M 4:ναι πάλι το ίδιο
M :σε κάθε n γίνεται το ίδιο
E :το n τι είναι
M 1:το σύνολο που έχει τα τρία τρίγωνα
M2 :το 0 περιέχει ένα , δυο τρία 0
M :και μετά παίρνει ένα άλλο
M2 :κάθε αριθμός είναι ένα πυθαγόρειο δέντρο
E :δηλαδή
E :ο $n=1$ είναι το επόμενο πυθαγόρειο δέντρο άρα το $n=0$ τι είναι
M 1:είναι το πρώτο πυθαγόρειο δέντρο
E :δηλαδή το $n=0$ είναι η πρώτη επαναληπτική διαδικασία
E :αν στα μαθηματικά σας δώσω μια συνάρτηση π.χ x^2+1 και $n=1$ πόσο είναι το αποτέλεσμα
M :είναι 2
E :αν $n=2$ είναι 5
τώρα τι κάνουμε
M :κάνουμε γραφική παράσταση
E : ναι αλλά πως γίνεται η γραφική παράσταση
E : που θα γίνει η γραφική παράσταση
M 4: μπορεί να πάει στο 1, 2 τεταρτημόριο ;
M 2:όχι δεν θα είναι θετικό
M3 :στο 1και 4 ;
M 1:δεν θα είναι πάλι θετικό
<i>Είναι το πρώτο σημείο στην συζήτηση που οι μαθητές αρχίζουν να συζητούν μεταξύ τους και να ανταλλάσσουν τις απόψεις τους .</i>
E : θέλουμε να κάνουμε γραφική παράσταση του πίνακα, σωστά ;
E : Έχετε δει κάπου στο βιβλίο σας
Ναι είναι μια γραφική παράσταση
E : Ποιες είναι οι τιμές που τοποθετούνται στον άξονα των x και των y
E : Στο x τοποθετεί τις τιμές της πρώτης στήλης (επαναλαμβάνω την διαδικασία)
E : Τι κάνει

M 1:Τις πέρασε στην γραφική παράσταση
E : Τι σας θυμίζει αυτό
M1 :Μια συνάρτηση
E : Αλλά εδώ οι τιμές του πεδίου ορισμού της συνάρτησης
M 1 :Είναι οι τιμές από το σύνολο των φυσικών
Παρατηρούμε τις τιμές
M1 :Είναι τα σημεία που φαίνονται έντονα όταν ολοκληρώνουμε την διαδικασία του plot
Τώρα
M 1:Κάνει zoom
E : Εδώ υπάρχει ένα ε , τι σημασία έχει αυτό στο σχήμα
Οι μαθητές πειραματίζονται , κρύβουν την σκιά , εμφανίζουν την τιμή του ορίου ,
Μεγαλώνουν και μικραίνουν την σκιά και παρατηρούν τις αλλαγές του N .Ο ορισμός της ακολουθίας έχει προκύψει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθητών με τα σχήματα από την οθόνη του υπολογιστή .Εδώ οι μαθητές αναγνωρίζουν την ακολουθία .
M1 :Η συνάρτηση είναι μια ακολουθία . Η ακολουθία τείνει στο 0
Έχουν μάθει κάποια πράγματα για όρια σε προηγούμενες τάξεις , αλλά ατυχώς οι μαθητές δεν θυμούνται τίποτα
E : Τι κάνουν οι τιμές
M 1: Μοιάζει με μια υπερβολή
E : Πριν οι τιμές ήταν πάνω στον άξονα , τώρα που κάνουμε zoom
M2 :Πηγαίνουν στο άπειρο
E : Οι τιμές των εμβαδών πηγαίνουν στο άπειρο;
M1 :Το ν πάει στο άπειρο
E : Τα σημεία αυτά που τείνουν
E : Το 1ο σημείο τι είναι
M : Είναι η 1 ^η διαδικασία ,
E : Το L τι είναι
M1 :Το όριο είναι 0
M2 :Το όριο τείνει να γίνει 0
E : Το $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$ τι σας θυμίζει από το βιβλίο σας
M 1:Τις απόλυτες τιμές ,την διαφορά τετραγώνων
M 1:Το N είναι ανάμεσα στις τιμές αυτές
M 1:το N είναι
Δείχνουμε το N
M 1:Όχι οι τιμές του Εμβαδού είναι ανάμεσα
E : Άρα πως γράφεται
Ο μαθητής γράφει : (με δυσκολία)
$ x - l \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq x \leq l + \varepsilon$
όχι x στην θέση του x πρέπει να βάλλουμε E που είναι το εμβαδόν
$l - \varepsilon \leq E \leq l + \varepsilon \Rightarrow E - l \leq \varepsilon$
E : δηλαδή το ε τι είναι
M 1:είναι πολύ μικρό , είναι περίπου 0,095
M5 :όσο μεγαλώνει το N μικραίνει το E
M 5:Το N και η τιμή του E αλλάζουν . Όσο μεγαλώνει το ένα μικραίνει το άλλο
M 1:Οι τιμές είναι διαδοχικές και δεν έχει καμία σχέση η μια με την επόμενη ή την προηγούμενη

Είπαμε πριν ότι $|x - l| < \varepsilon$
 και γράφουμε τα αριθμούς:
 $|x - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - l < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow -\varepsilon + l < x - l + l < \varepsilon + l \Rightarrow l - \varepsilon < x < l + \varepsilon$
 Άρα το $l - \varepsilon < E < l + \varepsilon$ θα
 γράφεται $|E| < \varepsilon$
 Το V και το L αλλάζουν, όταν μεγαλώ-
 νο ένα μικραίνει το άλλο.
 Πάντα τείνει προς το 0 αλλά ποτε
 δεν γίνεται 0 .

Οι μαθητές συνεργάστηκαν, και ο μαθητής M1 τους εκπροσωπεί στο γράψιμο. Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την σκέψη των μαθητών για να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση περί απολύτων τιμών, για να την συνδέσουν με τις εικόνες στο λογισμικό. Επομένως καταλαβαίνουν ότι πρέπει να τοποθετήσουν μια μεταβλητή x προκειμένου να δώσουν μια έκφραση ολοκληρωμένη που να περιέχει τα $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$. Στην συνέχεια αντιλαμβάνονται ότι το x δεν είναι τίποτα άλλο από την τιμή του E (την τοποθετεί στην θέση του x).

Προς το τέλος της σχέσης ο μαθητής σημειώνει ότι η απόλυτη τιμή του εμβადού είναι μικρότερη απολύτως από το ε . Αυτό συμβαίνει γιατί έχουν καταλάβει ότι το όριο είναι το 0 , επομένως δεν χρειάζεται όπως πιστεύουν να το σημειώσουν ξανά. Άρα απλουστεύουν την διαδικασία, χωρίς να θεωρούν απαραίτητο να γενικεύσουν.

Την έκπληξη μου τη προκάλεσε μια μαθήτρια που μέχρι εκείνη την στιγμή δε μιλούσε καθόλου αλλά νόμιζα ότι παρακολουθούσε παθητικά. Ο μαθητής κάνει λάθος στην γραπτή διατύπωση και γράφει αυτό που νομίζει ότι άκουσε από την μαθήτρια. **Ο μαθητής γράφει το v και το L αλλάζουν, όταν μεγαλώνει το v , μικραίνει το άλλο.** Η μαθήτρια είχε πει. **Το v και το E αλλάζουν και όσο μεγαλώνει το v μικραίνει το E .** Εδώ είναι και οι σημειώσεις της που όπως βλέπουμε το διατυπώνει σωστά.

~~Το v και το E αλλάζουν, όταν μεγαλώνει το v , μικραίνει το άλλο.~~
~~Το v και το E αλλάζουν και όσο μεγαλώνει το v μικραίνει το E .~~
~~Το v και το E αλλάζουν και όσο μεγαλώνει το v μικραίνει το E .~~
 Το v και το E αλλάζουν και όσο μεγαλώνει το v μικραίνει το E .
 Ποτε το E δεν περνά των τιμών
 0 .

Α΄ Γυμνασίου

Οι μαθήτριες της Α΄ Γυμνασίου έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την θεωρητική πλαισίωση των *Fractals* αντικειμένων και τα ιστορικά στοιχεία που ανέφερα στην πρώτη συνάντησή μας. Τους εντυπωσίασε το GSP και όπως μου είπαν θα ήθελαν πολύ τα μαθήματα στο σχολείο να αποκτήσουν περισσότερο ενδιαφέρον (με την χρήση H/Y) . Το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν τους ήταν γνωστό (εισαγωγή του θεωρήματος από την ύλη του Αναλυτικού Προγράμματος προγραμματίζεται στη Β΄ Γυμνασίου) ,απλά είχαν ακούσει το όνομα του Πυθαγόρα. Στο GSP το Πυθαγόρειο θεώρημα υπάρχει στο Teaching Mathematics στη σελίδα του Πυθαγόρα . Το Πυθαγόρειο δέντρο υπάρχει στον φάκελο *fractal gallery* . Το κλίμα ήταν ιδιαίτερα ευχάριστο τα παιδιά που ήταν μεταξύ τους φίλες και σχεδόν χωρίς ανταγωνιστικές τάσεις ,άκουγαν με ενδιαφέρον τις πληροφορίες για τα μαθηματικά των Βαβυλώνιων και την αρχαία Ελλάδα , τον Πυθαγόρα και τον Hilbert , τους Sierpinski ,Koch και Mandelbrot. Οι μαθήτριες έδειχναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον που αυτό προκαλούσε όπως τα συκοινωνούντα δοχεία το αντίστοιχο ενθουσιασμό από την πλευρά μου . Κάποια αποσπάσματα από την κουβέντα μας αυτή υπάρχουν παρακάτω (αφαιρουμένων των πληροφοριακών ιστορικών στοιχείων)

E : Τι παρατηρείτε ότι κάνουν τα κλαδιά του δέντρου
M1 : Μεταβάλλονται κάτω από την ίδια κλίμακα
E : Τι παρατηρείτε στο πυθαγόρειο θεώρημα
M 1: Το άθροισμα των εμβαδών παραμένει ίδιο
M 2: Το μεγάλο εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δυο
M3 : Ακόμα και αν αλλάξουμε τις διαστάσεις του τριγώνου
E : Να δούμε το δέντρο του Πυθαγόρα
M1 : Είναι πάλι το θεώρημα του Πυθαγόρα μόνο που είναι πολλές φορές
M2 : Είναι σε επανάληψη
M3 : Είναι σε σμίκρυνση
M3 : όσο πάνε και μικραίνουν
M 1: αν κάνουμε όμως zoom μεγαλώνουν
M4 : Αν βρούμε τα εμβαδά το μεγάλο εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δυο εμβαδών
E : Να σύρουμε το τρίγωνο
M 1: Συνεχίζει και γίνεται το ίδιο
M 2: Καθώς κινείται το δέντρο σχηματίζεται συνεχώς το Πυθαγόρειο θεώρημα
M 3: Πάλι σχηματίζεται το ίδιο δέντρο όπως και το αρχικό με μικρότερη κλίμακα
M1 : Πόσες φορές μπορούμε να το κάνουμε
M 2: Άπειρες
M 3: Το άπειρο όχι ότι δεν τελειώνει ποτέ , σαν να ανακυκλώνεται
M 1: Το άπειρο είναι σαν το σύμπαν , συνεχίζεται ή δεν τελειώνει
M 3: Το 0 δεν είναι άπειρο ;
M 2: Το 0 είναι το κενό
E : γιατί το $v=0$
M3 : γιατί υπάρχει το 0 αφού πάνω από το 0 υπάρχουν άλλοι αριθμοί που έχουν κάποια έννοια , μπορείς να τους πολλαπλασιάσεις και να έχεις ένα αποτέλεσμα , κάτω από το 0 υπάρχουν άλλοι μικρότεροι αριθμοί τότε το 0 τι νόημα έχει ;
M 4: είναι το τίποτα το 0
E : Συνεχίζουμε με τα χρυσά ορθογώνια;
M : Τι είναι αυτά , χρυσά ;(γέλια)
M : Τι είναι η χρυσή τομή
Δείχνω στο σχήμα που έχει σχηματιστεί η χρυσή τομή ,και αναφέρω παραδείγματα χρυσής τομής που υπάρχουν στην φύση, ποιοι έχουν ασχοληθεί με αυτό το θέμα , και λίγα για την αρχιτεκτονική του Παρθενώνα
E : και αυτά είναι τα χρυσά ορθογώνια

E : αυτά είναι fractals
E : αυτά είναι Μαθηματικά
M 3: και οι φλέβες μας δεν είναι fractals
M 2: ναι και οι φλέβες , και οι πνεύμονες
E : να πάμε στο τρίγωνο του Sierpinski ;
E : αυτό είναι το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου
M 2: αφαιρώ το εσωτερικό
E : πόσο μένει
M : τα $3/4$ (όλες μαζί)
E : και αυτό που αφαίρεσα τι εμβαδόν έχει
M : το $1/4$
E : τώρα με το select και(+) προχωράμε στο επόμενο βήμα
M : τώρα πάλι χωρίζεται το κάθε ένα
M : τα τρία μικρά τρίγωνα μας δίνουν το κεντρικό
M2 : τα τρία τρίγωνα είναι κατασκευασμένα με τον ίδιο τρόπο που είναι κατασκευασμένο με το αρχικό
Οι μαθήτριες δοκιμάζουν τη αύξηση των τριγώνων , και την μείωση που προκύπτουν με τη επιλογή του σχήματος και του + ή – αντίστοιχα . Παρατηρούν ότι τα τρίγωνα αυξάνονται ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο pattern που θέλω να ανακαλύψουν
M 2 : είναι 4 τρίγωνα στο καθένα τρίγωνο
M 1: έχουμε 4 τρίγωνα
M : άρα συνολικά 16
E : ξανακάνουμε υποδιαίρεση
M 2: είναι 4 σε κάθε τέτοιο
M 3: άρα $16 \cdot 4 = 64$
τώρα
M 2: $64 \cdot 4 = 256$
E : πως θα συνεχίσει
E : δηλαδή πως προκύπτει κάποιος αριθμός
M 1: προκύπτει από τον προηγούμενο επί 4
E : τι πρώτο στοιχείο είναι 1
το επόμενο
M 1: το 4
E : άρα το επόμενο στοιχείο είναι το 16
το επόμενο
M 3: το 64 ,256
M : και μετά αν τα γράψουμε υπό μορφή δυνάμεων
4^1
M : μετά 1 εις την τετάρτη
M2 : μετά 16 είναι $4 \cdot 4 = 4^2$
Το $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$
Το 3 βήμα
M : 4^3
το 10 βήμα
M : 4^{10} (όλες μαζί)
το 20 βήμα
M : 4^{20}
M3 : τι σημαίνει 4^{20} ;

Επόμενη συνάντηση

Ξεκινάμε από την αρχή πηγαίνοντας σε ένα άλλο αρχείο που κατασκευάζει τα εσωτερικά τρίγωνα από τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου (ισοπλεύρου κατά προτίμηση) με το κατάλληλο script file

E: κατασκευάζουμε τα μέσα και τι τρίγωνο σχηματίζεται εσωτερικά
M : ένα ισόπλευρο (όλες μαζί)
E: αυτά τα τρίγωνα που σχηματίζονται
M 2:μοιάζουν να είναι ίσα
M 3:έχουν ίδια εμβαδά
E: κάνουμε κλικ στις κορυφές και κατασκευάζουμε το εσωτερικό του σχήματος και μετράμε το εμβαδόν
είναι λοιπόν όλα τα εμβαδά ίσα
E: αν το εμβαδόν όλου είναι 1 πόσο είναι το εμβαδόν του καθενός
M 1:1/2
M 4:1/4
E: τι σημαίνει 1/4
M 3:το ένα από τα 4 που σχηματίζονται
E: πόσα μπορώ να κατασκευάσω εσωτερικά
M 3:όσα θέλω
M4 :άπειρα
M 5:δεν χωράνε στην οθόνη
M2 :αλλά όσα μπορούν να χωρέσουν στην οθόνη
E: αυτό το τρίγωνο που είναι εσωτερικά είναι το 1/4 τίνος
M2 : του εσωτερικού
E: και τι σχέση έχει με το εσωτερικό
M2 :είναι το 1/8 (βιαστική απάντηση)
E: να τα κατασκευάσουμε . για να δούμε .Παίρνουμε το script file και κατασκευάζουμε πάλι τρίγωνο με άλλο εσωτερικό του
πόσα έχουν κατασκευαστεί
M :1,2...16
M :είναι το 1/16
E: τώρα για να κατασκευάσουμε το εσωτερικό του εσωτερικού
πόσα τέτοια εσωτερικά έχω
M 2:πολλά , άπειρα
E: τι είναι το άπειρο
M2 :κάτι που δεν μπορούμε να το μετρήσουμε και συνεχίζεται
M 1:κάτι χωρίς όριο
M 4:πάρα πολλά πράγματα , ο υπολογιστής μπορεί να κατασκευάσει ότι θέλω
M2 :κάτι που δεν τελειώνει ποτέ
M 1:μπορούμε να κατασκευάσουμε όσας θέλουμε μόνο που μας δεσμεύει το μέγεθος από το τρίγωνό μας
M 5:μπορούμε δηλαδή να κάνουμε εσωτερικά τρίγωνα αλλά τόσα που μπορούμε να βλέπουμε
M 2:τόσο που να πιάσει την οθόνη
E: να το μεγαλώσουμε λοιπόν
παίρνουμε το dilate tool και το μεγαλώνουμε
αυτό που βλέπετε είναι το κεντρικό τρίγωνο
πόσα τρίγωνα μπορώ να κατασκευάσω τώρα
M : αααα !!!άπειρα
E: γιατί
M 2:γιατί και πάλι θα μεγαλώσουμε το τρίγωνο και πάλι θα κατασκευάσουμε εσωτερικά και άλλο και δεν τελειώνουν
E: αν πάρω το αρχικό και το μέσα τρίγωνο και υπολογίσω τον λόγο με το calculate
M :παίρνω 4
το 4 τι είναι
M :το εσωτερικό είναι το 1/4 του αρχικού
και το εσωτερικό του εσωτερικού

M :1 / 4.4
E: και μετά
1 /4.4.4
E: Πως μπορεί να γραφτεί λίγο καλύτερα
M :1/4 ²
E: και στη συνέχεια
M :1/4 ³
E: και στο 10 βήμα
M :1/4 ¹⁰
E: τι είναι το 1/4 ¹⁰
M :το 1/4 ¹⁰ του αρχικού εμβαδού

Κατασκευή του τετραγώνου και του πυθαγόρειου δέντρου

E :Τι έκανε με το rotation
M 1: Το γύρισε κατά 90 μοίρες
M 2:Δηλαδή είναι μια στροφή
E :τι είναι αυτό που δημιουργεί πρόβλημα κα δεν κλείνει σωστά το σχήμα (οι μαθήτριες έκαναν το σχήμα αλλά δεν μπορούσαν να σκεφτούν ότι πρέπει να αλλάξουν την γωνία επίσης
M 2 :οι μοίρες
E :άρα πρέπει να ορίσουμε σωστά τις μοίρες
από την αρχή
προβληματιστήκαμε αρκετή ώρα ,στις 90 , 180 αλλά τις 270 δεν μπορούσαν να τις σκεφτούν
κατασκευάζουμε νέο εργαλείο
εξηγώ με μεγαλύτερη λεπτομέρεια από την ΣΤ Δημοτικού τι ακριβώς κάνει το αρχείο εντολών . Πως ακριβώς φαίνονται τα βήματα που ακολουθήσαμε ώστε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο
M2 :είδαμε ότι το εμβαδόν του κεντρικού τετραγώνου ήταν το ίδιο αν προσθέταμε τα εμβαδά των δυο μικρών τετραγώνων
E :που είναι τα τετράγωνα τα μικρά εφαπτόμενα
M 1:σε ένα τρίγωνο
E :τι τρίγωνο
M 2:ισοσκελές
M 4:αμβλυγώνιο
M5 :ισόπλευρο
M 1:οξυγώνιο
E :οι δυο οι γωνίες οξείες η άλλη γωνία
M 3:ευθεία
μετράμε την γωνία και εμφανίζεται η μέτρηση να είναι ίση με 90 μοίρες
M 3:ορθή
E :άρα το τρίγωνο
M :ορθογώνιο !!(με έκπληξη)
E :τι θέλουμε να κάνουμε
M :ένα ορθογώνιο που θα μετακινείται
E :τι θα μετακινείται
M 3:η μια κορυφή του
E :ποια κορυφή
M 2: αυτή
M1 :η ορθή γωνία

.....

οι μαθήτριες δεν έχουν μάθει το θεώρημα που αναφέρεται στην εγγεγραμμένη γωνία που βλέπει στη διάμετρο κύκλου . Αυτό σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα αναφέρεται στην Β΄ Γυμνασίου και στην συνέχεια αποδεικνύεται στην Α΄ Λυκείου. Έτσι είναι μια γνώση που αποκτούν εκείνη την στιγμή.

Κρύβουμε τον κύκλο

E :Πως θα κατασκευάσουμε τετράγωνα εξωτερικά
M 2:Πάλι με το rotate
M 3: Να ρωτήσω κάτι , μήπως ήδη έχουμε ένα πρόχειρο εργαλείο
E :Πιο εργαλείο έχουμε
M : To tetr (όλες μαζί)
M :Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα
E :Τι κατασκευάσαμε
M 3:Το πυθαγόρειο θεώρημα

Επιμένω με λεπτομέρειες στην διατύπωση του θεωρήματος ενώ μετακινώ το σχήμα και αλλάζω την κορυφή του ορθογωνίου τριγώνου .Τους ζητάω να κατασκευάσουν ένα Πυθαγόρειο στην πλευρά του ήδη υπάρχοντος σχήματος

M : Point A , point B
Κάνουμε αρκετές επαναλήψεις .Οι μαθήτριες δηλώνουν ενθουσιασμένες και το κάνουν αρκετές φορές
M1 :Όσο πάει συνεχίζεται
Από κάποια πλευρά συνεχίζει
E :Όπως κάνει animation τι κάνει
E :Τι μετακινούνται
M 2:Έχει κλάδους
M 1:Μεγαλώνει , ο ένας και μικραίνει ο άλλος
E : Το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου αλλάζει (δείχνω το αρχικό τετράγωνο)
M 4:Όχι
E :Τι κάνουμε
M 3:Ομαδοποίηση των εμβαδών
E :Γιατί μικραίνουν
M 2:Γιατί πρέπει να είναι μικρότερα ώστε με το άλλο τετράγωνο που είναι δίπλα να σχηματίζουν το εμβαδόν του αρχικού
Η μαθήτρια προφανώς εννοούσε Γιατί ενώ το ένα τετράγωνο μικραίνει στον έναν κλάδο , στον άλλο κλάδο το άλλο τετράγωνο μεγαλώνει ώστε τελικά να μας δίνουν το άθροισμα σταθερό (του Πυθαγορείου θεωρήματος)
αλλά δεν το διατύπωσε σωστά (!)

Η απάντηση με εξέπληξε !!Ενώ οι μαθήτριες προχωρούν με άλματα στην κατανόηση ενός θέματος , διαισθάνομαι ότι υπάρχουν μερικά πράγματα που με τον τρόπο που είμαστε υποχρεωμένοι να τα διδάξουμε (με τον στατικό τρόπο) δημιουργούνται εμπόδια στην κατανόηση .Εδώ θα κάνω την σύγκριση με τα παιδιά της ΣΤ΄ Δημοτικού . Οι απαντήσεις τους έδειχναν χαμηλότερο επίπεδο γνώσεων από τις απαντήσεις των παιδιών της Α΄ Γυμνασίου .Σε πιο βαθμό έπαιξε ρόλο η βιολογική ωρίμανση ;

E: Κάνουμε τις μετρήσεις και παρατηρείστε τι συμβαίνει
M1 :Μικραίνουν
M 2:Μόλις φτάσει στο σημείο χάνεται
M 4:Χάνεται και το δέντρο , δεν υπάρχει πια δέντρο
E: Τα εμβαδά
M 5:Γίνονται 0
M 2:Όχι , γιατί μπορούμε να το ξαναπάρουμε
Χρησιμοποιώ το dilate tool και μικραίνω το σχήμα
M 1:τα μικραίνω πάρα πολύ – το σχήμα όλο γίνεται σχεδόν ένα σημείο
παρατηρούν τα εμβαδά
M 1:είναι όλα 0

E : υπάρχουν;
M 2:ναι
E : τι κάναμε
M 3:σμίκρυνση
αλλάζουμε σελίδα
E : πως συνεχίζεται
M 2:με κλάδους
παρατηρούμε ένα εμβαδόν
M 3:εμείς μπορεί να το βλέπουμε πολύ μικρό στην οθόνη μας ,αλλά αυτό υπάρχει
E : τι νομίζετε ότι είναι το $v=0$
E : πως τακτοποιεί τις μετρήσεις
M 4:αυτό το εμβαδόν είναι του μεγάλου , του μικρού και του μικρότερου
δείχνουν στον πίνακα τις μετρήσεις και στην συνέχεια στον σχηματισμένο δέντρο τα εμβαδά ανά τρία

αλλάζω την κλίμακα μετρήσεων στον άξονα $χχ'$, και στον άξονα $ψψ'$

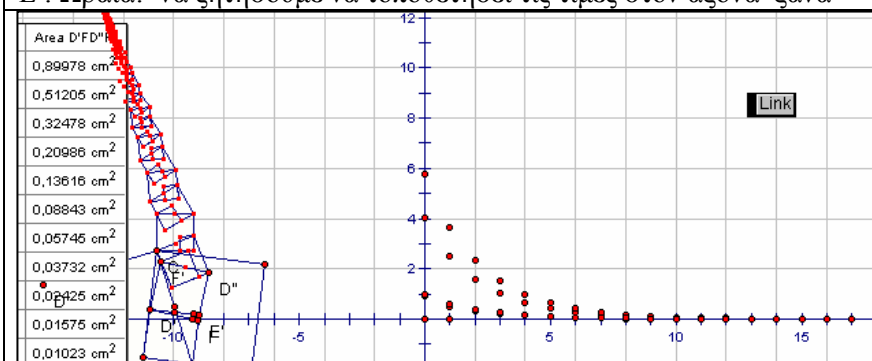
Αρχισα πάλι από την αρχή .Ημουν σίγουρη ότι δεν είχαν καταλάβει πως είχαν οριστεί τα σημεία από το μενού -graph

E : πάμε πάλι από την αρχή την τοποθέτηση των σημείων
M 1: αυτός δηλαδή είναι ο v (δείχνει τον άξονα $χχ'$) και αυτός είναι άξονας των εμβαδών
E : πάνω στον άξονα $χχ'$ τι βάλαμε
M2: τους φυσικούς αριθμούς
E : πάνω στον άξονα $ψψ'$ τι βάζουμε
.....
αρχίζω και πάλι από την αρχή

Το έδειξα αρκετές φορές .

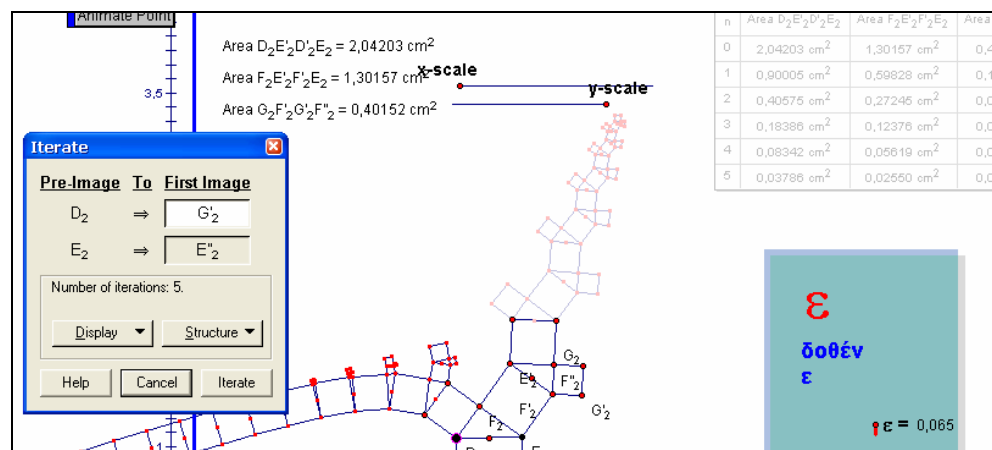
- Οι μαθήτριες δεν μπορούσαν να εντοπίσουν αμέσως τα σημεία γιατί χρησιμοποιούσαμε δεκαδικούς με πολλά δεκαδικά ψηφία για το παράδειγμά μας.
- Θεωρώντας ότι οι μαθήτριες τα ξέρουν ήδη προχώρησα με γρηγορότερα βήματα από ότι στο Δημοτικό .Το αποτέλεσμα βέβαια ήταν να αναλώσω περισσότερο χρόνο από όσο ανάλωσα για να το εξηγήσω στα παιδιά του Δημοτικού .

M3 :Στον άξονα $ψψ'$ μπορώ να βάλω μια από τις στήλες εμβαδών
E : Αν βάλω την τρίτη στήλη και αλλάξω το μέγεθος των τετραγώνων , τι παρατηρούμε
M 2:Αλλάζουν τα εμβαδά
E : Τοποθέτησε τα νέα εμβαδά στους άξονες;
M 1:Όχι
Κοιτάζουν με προσοχή
E : Ωραία! να ζητήσουν να τοποθετήσει τις τιμές στον άξονα ξανά



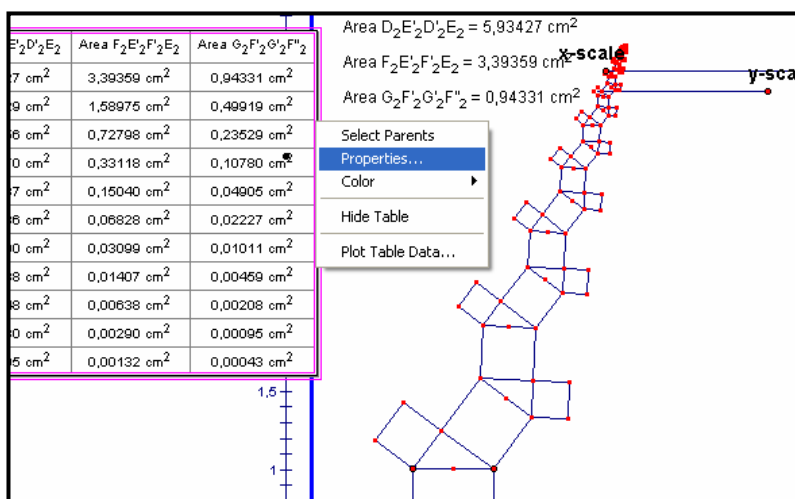
M4 : Τώρα που μικρύνουμε τα τετράγωνα οι τιμές μικρυναν

M 3:Αρχίζουν από το 0,9 περίπου
Και δείχνει τα σημεία πάνω στον άξονα
M 2:Τα σημεία απομακρύνονται
Για να το καταλάβουμε καλύτερα θα κάνουμε την διαδικασία από την αρχή
Οι μαθήτριες παρατηρούν τις επαναλήψεις που αυξάνονται στην οθόνη του υπολογιστή αλλά ταυτόχρονα και τις τιμές του πίνακα που αυξάνουν



Η έρευνα συνέχισε με μια μαθήτριά (την Μ3 –υπήρχε δυσκολία από το πρόγραμμα του σχολείου για να συνεχίσουμε με την υπόλοιπη ομάδα) :

Ε : Αν αυξήσουμε εδώ τον αριθμό (αυξάνω τον αριθμό των επαναλήψεων) τι παρατηρείς ότι κάνει στο δέντρο



Μ3: Αυξάνει τις iterations

Ε : Πόσες έχει κάνει τώρα

Μ : 10

Ε : Στον άξονα χχ' τι θα βάλουμε

Μ : Τους φυσικούς

Ε : Στον άξονα ψψ' τι θα βάλουμε

Μ : Τα εμβαδά

Ε : Το τελευταίο εμβαδόν

Ε : Ποιο είναι το τελευταίο εμβαδόν , δείξε μου στην οθόνη το τετράγωνο

Η μαθήτριά δείχνει λάθος τετράγωνο

Ε : Κάνουμε τις μετρήσεις των εμβαδών

παρατηρεί ότι η μέτρηση της τελευταίας στήλης έχει σαν πρώτο εμβαδόν το εμβαδόν που μόλις υπολόγισε

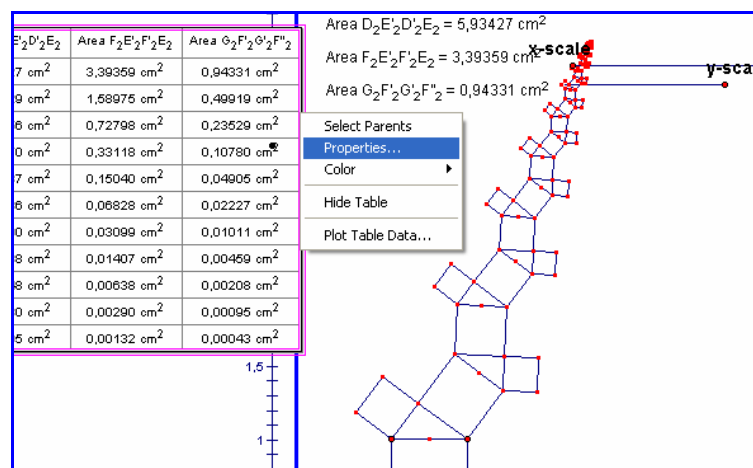
Μ : είναι αυτό το εμβαδόν

Ε : ποια είναι η τελευταία μέτρηση που κάνει

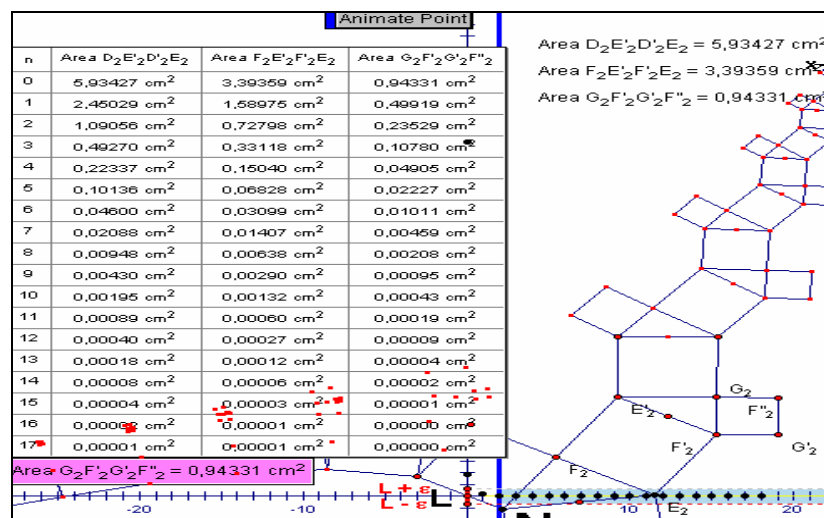
.....

της δείχνω το σημείο

Ε : αυτό είναι το τελευταίο εμβαδόν

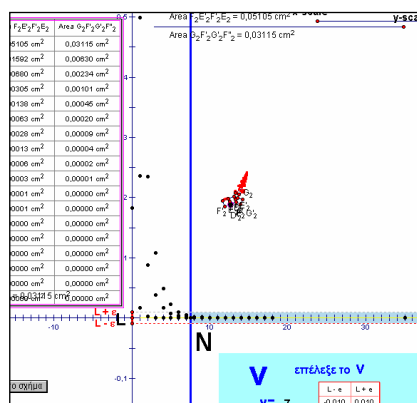


επαναλαμβάνω τις μετρήσεις
E : ποιο είναι το τελευταίο εμβადόν
και πάλι κάνει λάθος
πάλι της δείχνω
M:αα συνεχίζει δηλαδή τα εμβαδά διαδοχικά
μπορώ να αυξήσω κι άλλο τις iterations
Properties
E : τι λέει εδώ
10 – διαγράφουμε και γράφουμε π.χ 17
το διαγράφουμε
E : που πήγαν οι μετρήσεις
E : πόσες μετρήσεις έχει ο πίνακας
M όσες του ζητήσαμε
E : και τι κάνουν τα εμβαδά
M: είναι 0 το εμβαδόν
M: πώς γίνεται η 16 ^η μέτρηση να είναι ίση με τη 17η
E : πρόσεξε τις μετρήσεις της προηγούμενης σειράς είναι ίδιες;
M :όχι , ούτε σε καμία άλλη
M :άρα ο αριθμός του εμβαδού έχει γίνει σχεδόν 0
E : όλες οι άλλες μετρήσεις είναι διαφορετικές
E : πάνω στο σχήμα ποια σχήματα είναι τα εμβαδά



E : ποιο σχήμα είναι σαν και κι αυτό στην οθόνη μας που επαναλαμβάνεται όταν κάνουμε την κατασκευή

E : σαν θέση , σαν σχήμα , ποια εμβαδά γίνονται κατά τον ίδιο τρόπο
ααα αυτό , αυτό , αυτό αρχίζει να τα δείχνει
E : πόσα εμβαδά έχουν γίνει τέτοια
M : 17 , 18 με το αρχικό
E : αυτά τα εμβαδά θέλουμε να τα περάσουμε στο γράφημα
το χ είναι το ν και το ψ ποιο είναι
M : πως μπορώ να κάνω αυτά πιο κοντά
M : πως είναι δυνατόν τα εμβαδά να είναι στο 0 αλλά να μην είναι 0
E : παίρνω το εργαλείο y-scale και παρατηρούμε τις θέσεις των σημείων να απομακρύνονται
M : τώρα έγιναν 0
E : ναι γιατί τι δεν έχει
M : δεν είναι λεπτομερειακή η κλίμακα
M : αυτό είναι η ακολουθία ;
E : τι νομίζεις ότι είναι η ακολουθία ;
M : είναι αριθμοί που έχουν σχέση
E μια ακολουθία αριθμών
M : 2,4 ,6,8..
M : δηλαδή είναι αριθμοί που ακολουθεί ο ένας τον άλλον
E : στον άξονα των ψ τι βάζουμε
M : τα εμβαδά
E : άρα στις τιμές της ακολουθίας από ποια τιμή του ν και μετά οι τιμές τείνουν να γίνουν 0
αλλάζουμε το ν και παρατηρεί τις αλλαγές
M : από το 8
E : όλες οι τιμές μετά που περιέχονται
M : είναι εδώ , μοιάζουν να είναι εδώ στον άξονα $\chi\chi'$
E : είναι ;
M : πρακτικά ναι , ουσιαστικά όχι
μικραίνουμε το αρχικό εμβαδόν
E : τι παρατηρείς στον πίνακα
M : οι τιμές έγιναν 1.13....
M : γιατί δεν δίνει ακριβείς μετρήσεις , πως μπορώ να ξέρω ότι οι μετρήσεις αυτές δεν συνεχίζονται
E : συνεχίζονται , ακριβείς μετρήσεις δεν μπορούμε να έχουμε στην φύση πάντα
κάνουμε plot τις καινούργιες τιμές του πίνακα
E : που πήγαν οι τιμές τώρα
M : εδώ
E : τώρα από πιο ν και μετά οι τιμές γίνονται περίπου 0



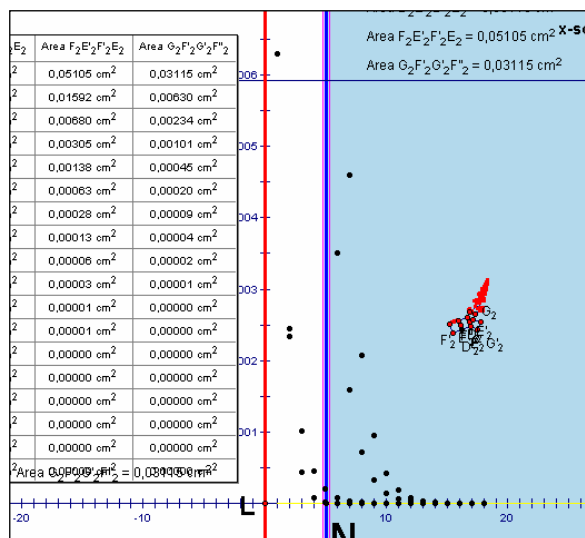
M : από το $\nu=7$ (με το ποντίκι μετακινεί την μπλε κάθετη γραμμή , παρατηρεί ότι το ν γίνεται ίσο με 7)

E : αν μικρύνουμε κι άλλο (παίρνω ξανά plot των τιμών) που πήγαν οι τιμές τώρα

E : από πού μετά οι τιμές γίνονται 0

M : από το $v=6$ όχι 5

E : τι μπορεί να πεις δηλαδή



E : τι κάνουν οι τιμές

M : όλες οι τιμές των εμβαδών κάποια στιγμή και μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό N τείνουν να γίνουν 0

E : Το $L+\epsilon$, $L-$ ε που έχει εδώ τι είναι

M : Το L είναι ο άξονας

E : Κρύψε μας έλεγε την τιμή του ορίου

M : Το L είναι το όριο

Το $L+\epsilon$ είναι πάνω από την τιμή του ορίου

Το $L-\epsilon$ είναι κάτω από την τιμή του ορίου

E : Οι τιμές όλες που βρίσκονται

M : Εδώ, οι τιμές δεν γίνεται να είναι κάτω από το όριο, γιατί δεν έχουμε αρνητικούς αριθμούς, είναι εμβαδά

Παρατηρήσεις:

Τα αντικείμενα fractals στην οθόνη του υπολογιστή οδηγούν τις μαθήτριες να διασυνδέσουν τα εξής σημεία των μαθηματικών :

✱ Μεταβολή των αντικειμένων υπό ίδια κλίμακα .Αυτό κρύβει την έννοια της ομοιότητας των αντικειμένων τα οποία όπως καταλαβαίνουν οι μαθήτριες μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο .

✱ Οι αλλαγές του σχήματος που οφείλονται στο σύρσιμο των κορυφών δεν οδηγούν και σε αλλαγές της ιδιότητας του εμβαδού του τετραγώνου που είναι στην υποτείνουσα και το οποίο παραμένει σταθερό ίσο με το άθροισμα των δυο άλλων εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται στις κάθετες .

✱ Έτσι επιβεβαιώνουν την αλήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος .Η επανάληψη , σμίκρυνση , κίνηση του σχήματος δεν αλλάζει την εμπειρική απόδειξη του θεωρήματος .

✱ Καταλαβαίνουν σε μια αρχική μορφή την έννοια του απείρου και προσπαθούν να συσχετίσουν το 0 με το άπειρο . Ενώ τα περισσότερα παιδιά έχουν συσχετίσει το 0 με το τίποτα , το «δεν υπάρχει κάτι »και με αυτό εννοούμε το 0 , εδώ υπάρχει μια μαθήτρια με διάθεση να φιλοσοφήσει που προσπαθεί να εξηγήσει τη σημασία του 0 , στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και μέσα από αυτό το άπειρο .Όπως αναρωτάται και εκφράζει τις σκέψεις της με απλό τρόπο , υπάρχουν αριθμοί πάνω και κάτω από το 0 , φαντάζεται την ευθεία των πραγματικών αριθμών σαν κύκλο που αναγκαία έχει ένα σημείο που είναι η αρχή αλλά και το τέλος , επομένως το τέλος που είναι το άπειρο θα είναι και η αρχή που είναι το 0 .

✱ Ένα άλλο σημείο εντυπωσιακό στη συζήτηση αυτή για το άπειρο είναι η ικανότητα αντίληψης τους , της άπειρης κατασκευής μέσα στο πεπερασμένο . Μπορούμε όπως ισχυρίζονται, να κάνουμε όσα τρίγωνα θέλουμε , με περιορισμό στο εσωτερικό του

τριγώνου .Όταν αντιλαμβάνονται ότι το σημείο που έβλεπαν στο κέντρο του τριγώνου είναι τελικά ένα υπαρκτό τρίγωνο (με το dilate tool) και ότι στο εσωτερικό του τριγώνου μπορούμε να κάνουμε και άλλες υποδιαιρέσεις , ενώ το αρχικό τρίγωνο έχει τέτοιες διαστάσεις που θα μπορούσε να καταλάβει το δωμάτιο , τότε αποκτούν μια πολύ δυνατή δόση διαίσθησης του απείρου .

❖ Οι δεκαδικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δυνάμεις είναι μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται στη οθόνη του υπολογιστή ως αποτελέσματα υπολογισμών στις σχέσεις των εμβადών που προκύπτουν .

❖ Με την ιδιότητα του zoom μπορούν να δουν τι συμβαίνει στο εσωτερικό του σχήματος και να διαπιστώσουν τι συμβαίνει με τα εμβαδά και τα σχήματα .

❖ Σημείο αδυναμίας των μαθητών είναι οι κατασκευές των σχημάτων .Το τετράγωνο σχηματίζεται λόγω της καθετότητας των πλευρών του ,που όμως έχει προκύψει ως αποτέλεσμα κατασκευής της γωνίας που είναι ανάμεσα στις δυο πλευρές .Η καθετότητα επομένως των ευθειών μπορεί να προκύψει με άπειρους τρόπους αλλά το σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τους δυο αρχικούς ως αποτέλεσμα της στροφής της ευθείας κατά 90° ή κατά 270° .

❖ Ακόμα ένα σημείο πολύ σημαντικό είναι η κατανόηση της ιεραρχίας των τετραπλεύρων .Οι μαθητές αν δεν έχουν την δυνατότητα να μετακινήσουν το σχήμα και να κάνουν ελέγχους πειραματικούς ,δύσκολα κατανοούν την ιεραρχία των τετραπλεύρων .

❖ Και αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και όταν απαντούν για το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει σχηματιστεί το πυθαγόρειο θεώρημα . Το σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου που υπάρχει στο βιβλίο δημιουργεί λανθασμένες εντυπώσεις αφού οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν το σχήμα ως μια οντότητα που αποτελείται από άπειρες κλάσεις ιδεατών αντικειμένων . Οι μαθητές δεν οδηγούνται να φανταστούν το σχήμα σε διαφορετική θέση ,ούτε σκέφτονται να πειραματιστούν για να το ανακαλύψουν.

❖ Ένα εργαλείο όπως το αρχείο εντολών δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να παίζουν με τα μαθηματικά σχήματα , αφού διαπιστώνουν πειραματικά την επαλήθευση της κατασκευής , την επανάληψη των βημάτων, την κατασκευή υπό κλίμακα .

❖ Κοινό πρόβλημα(σε όλες τις τάξεις) είναι η κατασκευή της γραφικής παράστασης από τον πίνακα τιμών .Αυτό γιατί οι μαθητές έχουν μάθει να αναπαριστούν στο σύστημα συντεταγμένων, ζεύγη αριθμών που είναι συνήθως ακέραιοι ή δεν έχουν τόσα δεκαδικά ψηφία που υπάρχουν στο πρόβλημα μας . Ακόμα το GSP δίνει την παράσταση απευθείας στην οθόνη του υπολογιστή ,χωρίς να φωτίζει για παράδειγμα το κάθε σημείο με το αντίστοιχο ζεύγος του πίνακα και δεν υπάρχει δυναμική σύνδεση με απευθείας μεταβολή των τιμών της γραφικής παράστασης όταν μεταβάλλονται οι τιμές του πίνακα .

❖ Οι μαθητές οδηγούνται σε παρατηρήσεις για την σύνδεση της τιμής του εμβადού με το αντίστοιχο σχήμα στην οθόνη . Έτσι όταν επαναλαμβάνονται διαπιστώνουν την ομοιότητα των σχημάτων ως προς τη θέση στο επίπεδο και ως προς το μέγεθος . Αυτό τους βοηθά να αναπτύξουν την οπτικό – χωρική τους ικανότητα ,με ταυτόχρονη ανάπτυξη της οπτικοποίησης των εννοιών .

❖ Μια πρώτη έννοια που οδηγούνται , άγνωστη για την τάξη τους είναι η έννοια της ακολουθίας και η γραφική της παράσταση . Αυτό που βλέπουν στην οθόνη τους είναι σημεία , που ενώνουν τους φυσικούς αριθμούς με το εμβαδόν του σχήματος που θέλουμε .Εδώ δημιουργείται ένα σημαντικό εμπόδιο . Οι μαθητές στο σχολείο έχουν μάθει να ενώνουν τα σημεία ,αφού μια καμπύλη ή μια ευθεία είναι αποτέλεσμα της συνένωσης των σημείων που παίρνουμε αυθαίρετα αλλά ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας κάνουμε την γραφική παράσταση . Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας είναι μόνο τα σημεία του συστήματος συντεταγμένων που προκύπτουν από τον πίνακα τιμών .Οι μαθητές καταλαβαίνουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών , και μπορούν να το δουν να σχηματίζεται και επαναλαμβάνεται για όσες αλλαγές πίνακα θέλουμε .

❖ Το πιο σημαντικό είναι ότι μπορούμε να αφήσουμε όλα τα αποτελέσματα των γραφικών παραστάσεων στην οθόνη και να επαναλάβουμε την μέτρηση , με αποτέλεσμα οι μαθητές να διαπιστώνουν την επαγωγική προσέγγιση της ίδιας απόδειξης .

❖ Οδηγούνται έτσι στην έννοια του ορίου της ακολουθίας των εμβαδών των τετραγώνων διαισθητικά .Τα εμβαδά γίνονται 0 , όπως διαπιστώνουν ,όταν αυξάνει το n (ο

αριθμός των επαναλήψεων) . Μάλιστα το βλέπουν στην εικόνα ότι υπάρχει κάποιο n από το οποίο και μετά οι τιμές της ακολουθίας τείνουν να γίνουν 0. Ακόμα ότι άπειροι όροι της ακολουθίας περιέχονται από κάποιο n και μετά αυστηρά σε μια ζώνη παραλλήλων ευθειών .

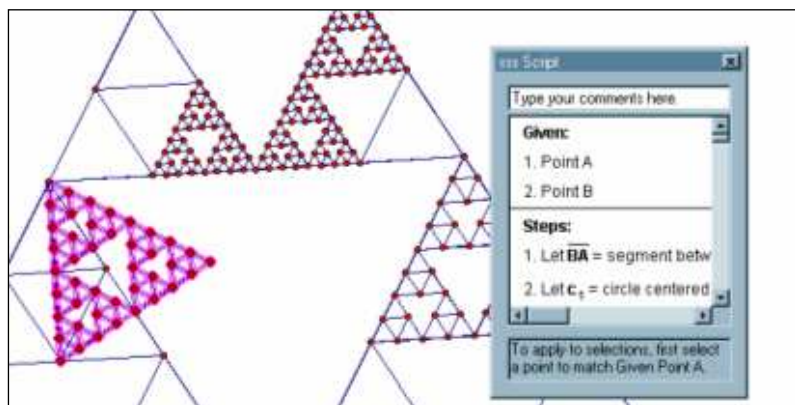
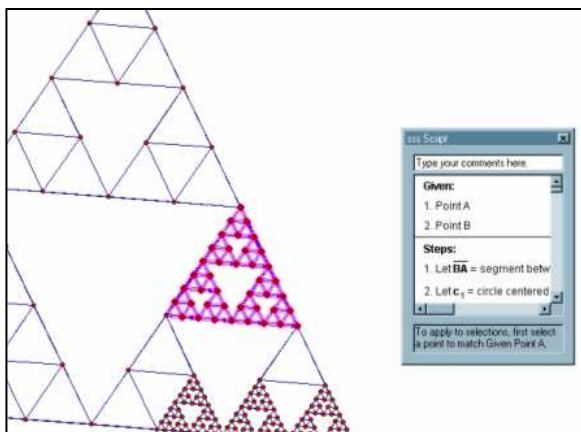
ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Οι μαθητές της ΣΤ Δημοτικού είναι μια ομάδα που είχε θετικές αντιδράσεις και πολύ περιέργεια ,για την εισαγωγή εννοιών των Μαθηματικών μέσα από λογισμικά υπολογιστών .Το Geometer's Sketchpad τους ήταν άγνωστο και όπως είναι φυσικό εντυπωσιάστηκαν από τα σχήματα και την κίνηση κατά την παρουσίαση των fractals από την βιβλιοθήκη fractal gallery του λογισμικού .

Η πειραματική διδασκαλία , που στόχο της είχε την κατανόηση ή μη των εννοιών ακολουθίας και ορίου στους μικρούς μαθητές , την διαπίστωση αν η γλώσσα που χρησιμοποιούμε επηρεάζει την κατανόηση των εννοιών ,και πόσο το περιβάλλον του λογισμικού επηρεάζει την αντίληψη των μαθητών στα μαθηματικά , άρχισε με μια ομάδα 6 ατόμων , **αλλά στην συνέχεια ήθελε και η υπόλοιπη τάξη !!**

E :Τι τρίγωνο είναι το αρχικό	<i>Διαισθητικά αντιλαμβάνονται ότι το σχήμα είναι πάλι ισόπλευρο που μπορούν να το επιβεβαιώσουν κάνοντας τις μετρήσεις</i>
M1 : Είναι ισόπλευρο	
E :Και αυτά τι σημεία είναι	
M1 : Τα μισά των πλευρών	
E :Τα συνδέουμε	
E :Τι τρίγωνο είναι πάλι αυτό	
M1 : Είναι ισόπλευρο	<i>Δεν επαναλαμβάνουν την διαδικασία του αρχείου εντολών για το εσωτερικό τρίγωνο</i>
E :Πως μπορούμε να ο ξέρουμε με βεβαιότητα .	
M2 : Με τις μετρήσεις	
Το κατασκευάζω με το script file	
E :Αν πάρω τώρα αυτό το σημείο και αυτό τι γίνεται τώρα	
M2 : Άλλο ένα τρίγωνο μέσα στο μεγαλύτερο	
Οι μαθητές δοκιμάζουν με το έτοιμο αρχείο μέσα πλευρών να κατασκευάζουν τρίγωνα	<i>Επαναλαμβάνουν με λεκτικό τρόπο την διαδικασία αφού παρατηρήσουν την αυτο-ομοιότητα του αντικείμενου fractal . Παρατηρούν ότι το αρχείο εντολών επαναλαμβάνει την διαδικασία με κάποια συγκεκριμένη σειρά</i>
E :Πόσα τρίγωνα μπορώ να κατασκευάσω έτσι	
M3 : Άπειρα	
E :Τι είναι όλα	
M3 : Ισόπλευρα	
M2 : Με αυτή τη διαδικασία	
M1 : Κάνουμε τρίγωνα μέσα	
E :Πόσα είναι συνολικά	
E :Τώρα μπορώ να τα μετρήσω	
Πάμε σε μια νέα σελίδα και αρχίζουμε ξανά με το αρχείο εντολών	
Επαναλαμβάνουμε πολλές φορές Τις κατασκευές εσωτερικά με το scrit file	
E :Τι σα θυμίζει αυτό	
M2 : Το Sierpinski	
E :Κοιτάξε το σχήμα και πείτε μου με ποιον τρόπο σκεφτήκαμε να το κατασκευάσουμε	
M : Νομίζω είναι αρχικά ένα τρίγωνο και μετά το χώρισε σε 4 τρίγωνα	
M : Και μετά βάλαμε στο καθένα από αυτά εκτός από το μεσαίο άλλα 4 τρίγωνα μέσα σ' αυτά .	
E :Αν πάω και ονομάσω την διαδικασία αυτή SSS script	

μπορώ να κάνω την διαδικασία ξανά να πάρω δύο σημεία μέσα σ' αυτό το τρίγωνο	
M : Ναι	
E : Πως	
M : Παίρνω από εδώ μέχρι εδώ	
Μου δείχνει το σωστό και το κάνουμε	
E : Αν ξεκινήσω από το άλλο σημείο	



M : Θα προκύψει ανάποδα !!

M : Δεν μπορούμε όμως να πάρουμε αυτά τα δυο σημεία όπως μου παρατηρεί ένας μαθητής	
E : Άρα πως πρέπει να είναι τα σημεία που επιλέγουμε	
M : Όπως είναι η βάση - είναι η κάτω πλευρά του τριγώνου	<i>Σχηματίζουν ένα pattern που έχει σχέση με τον τρόπο επανάληψης του σχήματος</i>
M : Και να τα πάρουμε αλλιώς θα μας κάνει το σχήμα προς τα κάτω	
M : Αν το πάρουμε αλλιώς θα μας κάνει από έξω	
τους εξηγώ ότι εμείς το ορίσαμε έτσι	
E : Βλέπετε τι κάνει όπως επαναλαμβάνει το σχήμα	
M : Ναι παραμένουν κάποια λευκά	
M : Άρα δεν μπορούμε να κάνουμε στο κεντρικό τρίγωνο	
E : Γιατί	
M : Γιατί δεν θα μείνει λευκό και δεν θα είναι ίδιο με τα άλλα	
E : Αν του ζητήσω στο script file να μου δίνει και το εμβαδόν	
Οι μαθητές πειραματίζονται με την διαδικασία που έχουν μάθει	
Τους δίνω χρόνο να πειραματιστούν να δοκιμάσουν για τον υπολογισμό του εμβαδού.	
Στην αρχή κάνουν υπολογισμό της γωνίας	
E : Τι θέλουμε να υπολογίσουμε	<i>Το λογισμικό τους βοήθησε να αντιληφθούν και συνειδητοποιήσουν κάτι που ίσως δεν είχαν καταλάβει ή σκεφτεί .Ότι το εμβαδόν είναι η επιφάνεια που καταλαμβάνει το τρίγωνο</i>
M : Το εμβαδόν	
Ωραία , άρα ποια σημεία θα πάρουμε	
M : Τις τρεις κορυφές	
Ναι αλλά το εμβαδόν του τριγώνου ποιο είναι	
M : Όλο αυτό	
Άρα πρέπει να πάρουμε το εσωτερικό	
E : τι βλέπουμε με τον υπολογισμό που κάναμε	

M : πόσες φορές χωράει το τρίγωνο στο πιο μεγάλο
E :σε πιο δηλαδή
M : σε όλο το τρίγωνο
E :1,25 φορές πιο τρίγωνο θα δείξετε
M : αυτό το τρίγωνο (δείχνουν το αρχικό)
E :αν πάρω την διαίρεση του μεγάλου τριγώνου με το τρίγωνο που παράγεται από τα μέσα
M : Calculate, 4
E :τι σημαίνει αυτό
M : ότι το μεγάλο τρίγωνο το χωρίσαμε σε 4 ίσα μέρη
M : χωράει στο μεγάλο 4 φορές
M : μπορούν να γίνουν σαν το DEF άλλα 4 τρίγωνα μέσα στο αρχικό
E :αν το πούμε με γινόμενο .Ποιο θα πολλαπλασιάσω και θα μου δώσει το μεγάλο
M : πολλαπλασιάζω το εμβαδόν του DEF (με αβεβαιότητα)
<i>Τα παιδιά καταλαβαίνουν ότι υπάρχουν 4 τρίγωνα όπως το εσωτερικό τρίγωνο στο αρχικό αλλά δεν καταλαβαίνουν την αντίστροφη πράξη. Ότι 4 φορές το μικρό τρίγωνο μας κάνει το μεγάλο .Ίσως γιατί δεν έχει τονιστεί κατάλληλα με εφαρμογές ή παραδείγματα Η γιατί δεν έχουν κατανοήσει τον πολλαπλασιασμό σαν προέκταση της πρόσθεσης ή αντίστροφη πράξη της διαίρεσης</i>
E: Πήγαινε στο calculate και κάνε αυτή τη μέτρηση δια της μέτρησης που είναι κάτω και τι δίνει
Τι είναι δηλαδή αυτό το 4
M :Ότι είναι 4 τρίγωνα από το μεγάλο τρίγωνο
E :Δηλαδή αν διαιρέσουμε το μεγάλο τρίγωνο δια του μικρού έχουμε αποτέλεσμα 4 , δηλαδή
M :4 φορές το μικρό , το μεγάλο είναι 4 φορές το μικρό
το βλέπουμε και στην οθόνη μας αυτό
E :Δηλαδή το εμβαδόν του μικρού τι σχέση έχει με το εμβαδόν του μεγάλου
M: Είναι τέσσερις φορές μικρότερο
E :Αν το λέγαμε με κλάσματα πως θα το λέγαμε αυτό
M: $\frac{1}{4}$
E: ωραία παιδιά τώρα για κοιτάζτε τι θα κάνω
Επιλέγω τις κορυφές και σχηματίζεται ...
M: ένα πιο μικρό τρίγωνο από μέσα
M:μπορούμε να κάνουμε και πιο μικρό ακόμα
E Τώρα τι παρατηρείτε
M:Θα γίνουν και άλλα πιο μικρά τριγωνάκια
Τα σμικρύνουμε
E Ναι αλλά τα βλέπουμε
E Πόσα τρίγωνα μπορώ να κάνω
M:1,2,3,4 ...
E αν σύρουμε την κορυφή το μεγαλώσουμε
πόσα θα κάνω
M:θα φτάσουν στο 0 , δεν θα πηγαίνει άλλο
M:δεν θα χωράει
E ορίστε το μεγαλώνω το σχήμα , μπορώ να το μεγαλώσω περισσότερο
πόσες φορές μπορώ να το μεγαλώσω
M:4, 24
M:άπειρες

Έχουν παρατηρήσει ήδη χωρίς την διαδικασία των μετρήσεων ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται το ένα μέσα στο άλλο είναι όλο και μικρότερα και ότι κάποια στιγμή δεν θα μπορούν να τα δουν , άρα θα γίνουν τα εμβαδά τους 0 (κάνουν αφαίρεση της λέξης εμβαδά

στην συζήτηση). Ακόμα καταλαβαίνουν ότι το σχήμα μπορεί να μεγαλώσει πολλές φορές , άπειρες

E άρα μπορώ να δω και τις μετρήσεις σε αυτό το πρόγραμμα .Τι παρατηρούμε
M:ένα τρίγωνο και ένα άλλο τρίγωνο μέσα και όλα είναι ίσα μεταξύ τους
E στη συνέχεια τι κάναμε
M:μετρήσαμε τα εμβαδά προσθέτει το μεγάλο τρίγωνο με το μικρό για να δούμε πόσο είναι και τα δυο τρίγωνα μαζί
M:και μετά το διαιρεί με το μεγάλο
E γιατί
M:το άθροισμα δηλαδή των εμβαδών δια του εμβαδού του αρχικού τριγώνου είναι 1,25
E τώρα που έγραψα αυτό το άθροισμα έτσι τι είναι
M:το άθροισμα του μεγάλου δια του μικρού αφού είναι 1,25 άρα είναι 1,25 φορές το αρχικό τρίγωνο
M:προσθέτουμε το εμβαδόν του μεγάλου και του μικρού και του πιο μικρού και διαιρώ και
M:διαιρώ με το αρχικό
E και τι προκύπτει
M:1,31
E τι είναι δηλαδή αυτό το 1,31
M:είναι 1,31 του τριγώνου ΑΒΓ του αρχικού
M:προσθέτουμε όλα τα εμβαδά
M:και προκύπτει 1,39
E τι είναι το 1,39
M:1,39 του αρχικού
E το τρίγωνο που σχηματίζεται από το μέσα πόσο είναι
M:το $\frac{1}{4}$ του αρχικού
E και μετά ξανακάνω ένα άλλο εσωτερικά
M και αυτό είναι $\frac{1}{4}$
M:1/8
M:1/24
M:μήπως είναι το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{4}$
E και το άλλο πόσο θα είναι
M: $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{4}$
E και αν θα ήθελα να το γράψω πιο γρήγορα πως θα το έγραφα

Δεν ήμουν ευχαριστημένη, είχα την εντύπωση ότι οι μαθητές αποστήθιζαν μια διαδικασία. Διαπίστωναν από την οθόνη τους υπολογισμούς των μετρήσεων αλλά δεν έβλεπαν την διαδικασία να εξελίσσεται μπροστά τους Το 1/16 έπρεπε να το κατασκευάσουμε .

Επόμενη συνάντηση

E : Είχαμε πει λοιπόν την προηγούμενη φορά ότι όταν χωρίζουμε το τρίγωνο παίρνουμε 1,2,3,4 τρίγωνα
Είχαμε πει ότι αν ανοίξουμε στην οθόνη μας ο script file τότε μπορώ να ξανακάνω αμέσως την διαδικασία και να ξανακάνω το εσωτερικό του εσωτερικού .Τότε τι σχέση θα έχει το τρίγωνο αυτό σε σχέση με το αρχικό
M:Το 1/16
E :Δεν πείστηκα όμως μπορείτε να μου το δείξετε
E :Γιατί είναι το 1/16
M:Θα πάρουμε το ποντίκι και θα κάνουμε και άλλα εσωτερικά τρίγωνα
E :Για να δω
M: επιλέγω αυτό το σημείο , επιλέγω και εδώ .ορίστε άλλο ένα εσωτερικό
M:Και 'γωκαι ακόμα ένα εσωτερικό
E :Να τα μετρήσουμε
M:1,2...16

E :άρα το ένα τριγωνάκι έχει κάποια σχέση με τα υπόλοιπα τρίγωνα
M:είναι το 1/16
E :τι είναι το 1/16
M:είναι το ένα κομμάτι από τα 16
E :και πάλι δεν πείστηκα
M:ωραία θα βρούμε το εμβαδόν του
E :και μετά
M:θα το συγκρίνουμε με το εμβαδόν του μεγάλου
E :πως το βρίσκουμε το εμβαδόν
M:constructtriangle interior(όλα μαζί)
M:και μετά area
M:και μετά calculate αυτό το εμβαδόν δια αυτού(το μεγάλο δια του μικρού) , ορίστε 16
E :συνεχίστε τις διαιρέσεις
.....
E :τόρα πόσα τρίγωνα έγιναν
M:64
E : είστε σίγουροι - μετρήστε τα
M:64
M:8 .8 =64
M:κάνουμε πολλαπλασιασμό , από 4 το καθένα τρίγωνο και έχουμε το 64
και μπορούμε να κάνουμε όλο και πιο μικρά τρίγωνα
E :να πάμε τώρα να ανοίξουμε μια άλλη σελίδα
M:προσθέτει όλα τα εμβαδά των τριγώνων αυτό , το εσωτερικό ,τα πιο εσωτερικό
και τα διαιρεί με το αρχικό και προκύπτει 1,31
E :τι είναι το 1,31
Οι μαθητές από ότι φαίνεται μπορούν να εκφράσουν με συμβολικό και λεκτικό τρόπο ένα κλάσμα .Διαπιστώνω την δυσκολία που αντιμετωπίζουν ως προς την μη κατανόηση της ισοδυναμίας των διαφόρων τρόπων συμβολικής αναπαράστασης ενός ρητού αριθμού .
M:να το δούμε εδώ στην άλλη διαίρεση που κάναμε
Το αρχικό δια του εσωτερικού είναι 64
Το εσωτερικό είναι 64 φορές το αρχικό
E :Το 1,31 τι είναι
M: Άρα είναι 1,31 φορές το αρχικό
E :Συνεχίζω πάλι τι υποδιαιρέσεις .Πόσες μπορώ να κάνω
M:πάρα πολλές , άπειρες
M:το κάνουμε τόσες πολλές φορές ώστε τα τρίγωνα μικραίνουν και μικραίνουν όλο και περισσότερο
M: Μέχρι να μην διαιρείται άλλο να φτάσει στο 0
E :Και το άπειρο τι είναι
Οι μαθητές σημειώνουν τις απαντήσεις τους
M: Το άπειρο είναι κάτι που μπορούμε να κάνουμε εκατοντάδες φορές, όσες φορές θέλουμε χωρίς να έχουμε κάποιο συγκεκριμένο σημείο και πρέπει να σταματήσουμε να κάνουμε κάτι .Εκτός κι αν θέλουμε να το σταματήσουμε εμείς οι ίδιοι
M: Είναι ένας αριθμός που δεν μπορούμε να το γράψουμε γιατί δεν γνωρίζουμε το ποσόν
M: Είναι κάτι που μπορούμε να μετρήσουμε αλλά δεν τελειώνει
M: Κάτι που δεν τελειώνει, αλλά πάντα θα συνεχίζεται
E :Και το 0
M: Το 0 είναι η αρχή των αριθμών
M: Το 0 είναι αριθμός που δεν δηλώνει αριθμό πραγμάτων
M: Τίποτα δεν είναι, κάτι που δεν υπάρχει
M: Είναι ένας αριθμός που μπορούμε να συνεχίσουμε
E :Ωραία τώρα για να δούμε τι κάνουμε εδώ
M: Έχουμε κατασκευάσει πολλά τρίγωνα

M: Είναι σμικρύνσεις
M: Αυτό είναι σμίκρυνση του αρχικού
M: Όχι του αρχικού, του εσωτερικού
E :Και αυτό
M: Και αυτό σμίκρυνση του αρχικού είναι πιο μικρή
E :Πόσες φορές τα βλέπετε
M: Μικραίνουν
M: Και χάνονται
M: Γίνονται 0
M: Και μικραίνουν και τα εμβαδά
M: Και το άθροισμα πάλι παραμένει σταθερό
E : Εννοείς τον λόγο αυτό
E :Ωραία , να πιάσουμε μια κορυφή και να το μικρύνουμε με το dilate tool
M: Μικραίνει πολύ
M: Χάνεται
M: Τα εμβαδά έγιναν 0
M: Τα μικρά τρίγωνα έγιναν σημεία
M: Το άθροισμα πάλι παραμένει σταθερό
E :Αν το μεγαλώσουμε πολύ
M: Πόσο να το μεγαλώσουμε
E :Κοιτάξτε πόσο έχει γίνει το αρχικό εμβαδόν
M: Άαα. 1253 , 46
E :Και ο λόγος
M: Πάλι παραμένει σταθερός
M: Παραμένει 1,32
E :Βλέπετε κάτι
M: Αρχίζει να φαίνεται το κεντρικό τρίγωνο που δεν φαινόταν

Διαπιστώνουν ότι με το σύρσιμο από τις κορυφές και τις αυξομειώσεις του τριγώνου δεν επηρεάζει του λόγους των εμβαδών

M: Όσο μεγαλώνει το τρίγωνο, τόσο μεγαλώνει και το εμβαδόν του τριγώνου
E :Τώρα τι έκανα
M: ααα έναν πίνακα!!
M: Υπολογίσατε όλα τα εμβαδά και τα βάλατε σε πίνακα
E :Αυτά το έκανε το πρόγραμμα , πολύ εύκολα , σε μερικά δευτερόλεπτα , φτάνει να του μάθουμε εμείς την διαδικασία
M: Μπορούμε να το κάνουμε πολλές φορές και άλλες ;
M: Τι είναι 40 iterationς
M: Σημαίνει ότι κάνει και άλλα τριγωνάκια;
E :Έκανε 40 επαναλήψεις
Eπανάληψη τίνος να μου πείτε εσείς
M: Του εσωτερικού και τις μετρήσεις
E :Μπορείτε να το δείξετε
M: Όλα το ένα είναι μικρότερο από το άλλο (δείχνουν στην οθόνη τα τρίγωνα)
E :Τι παρατηρείτε πάλι
M: Ο λόγος παρέμεινε σταθερός
E : Το ν τι είναι
M: ...Number
E :Ωραία
E : Και το 0 τι σημαίνει
M: Number 0
M: είναι το μεγάλο τρίγωνο

M: το αρχικό εμβαδόν, η αρχική μέτρηση

Οι μαθητές παρατηρούν ότι οι μετρήσεις που έχει προκύψει στον πίνακα για τις τιμές της ακολουθίας των εμβαδών έχουν σχέση με την μέτρηση των εμβαδών. Αυτό που διαπιστώνουν είναι η ταύτιση των δυο μετρήσεων, της μέτρησης που είναι έξω από τον πίνακα για το αρχικό τρίγωνο και η μέτρηση που είναι μέσα στον πίνακα για την τιμή 0. Έτσι το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα.

E : το $v=1$ τι σημαίνει

M: αυτοί οι υπολογισμοί

M: αυτά τα εμβαδά και αυτά που μικραίνουν και μικραίνουν (δείχνοντας τις μετρήσεις στον πίνακα)

M: δηλαδή προχωράμε στην πρώτη επανάληψη

E :και στο σχήμα να το δούμε στον υπολογιστή

M : είναι αυτή η επανάληψη (με βεβαιότητα δείχνει το σωστό - και οι άλλοι συμφωνήσαν αμέσως)

E :αυτό το $v=2$ ποια επανάληψη είναι

M :αυτή

αρχίζω να μετράω τις επαναλήψεις με λάθος τρόπο ξεκινώντας με 1 από την αρχική 1,2,3,4

και δείχνω τον πίνακα που είχε 5 μετρήσεις (γιατί έχει 5 ;)

M : όχι !! 0,1,2,3,4,5(όλοι μαζί) με διορθώνουν ξεκινώντας με 0 από την αρχική μέτρηση

Οι απαντήσεις των μαθητών με οδήγησαν να σκεφτώ ότι :είχαν καταλάβει πως επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις (δεν ήταν μια απλή σύμπτωση ή μια παρατήρηση)και το σπουδαιότερο ότι είχαν καταλάβει πως γίνεται η επαναληπτική διαδικασία και στα σχήματα .

E :κοιτάξετε εδώ στην τελευταία στήλη τι βλέπετε

M : το άθροισμα των εμβαδών είναι το ίδιο τελικά

M : είναι το ίδιο

M :σταθερό

E :αυτά τα εμβαδά πόσο γίνονται

M :γίνονται 0

E : είναι 0;

M :όχι δεν είναι

M :είναι 0,000000..1

E : υπάρχει δηλαδή και άλλο μετά από 0,000000..01

M :ναι και υπάρχει και άλλο

M :το 0,0000000000000000...1

M :γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι !!

Οι μαθητές καταλαβαίνουν, όπως φαίνεται από τις απαντήσεις τους ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί που είναι κοντά στο 0 αλλά δεν είναι 0.Είναι η πρώτη προσέγγιση των απειροελάχιστων και η πρώτη προσέγγιση του ορίου διαισθητικά .

Επόμενη συνάντηση

Είχαμε δει την προηγούμενη φορά τους πίνακες και λίγα περί γραφικών παραστάσεων .Το σχήμα ήταν αρκετά σύνθετο και οι μαθητές που δεν είχαν γνώση των γραφικών παραστάσεων δυσκολευόντουσαν να καταλάβουν τι συνέβαινε στην οθόνη . Έπρεπε να ξεκινήσω με μια απλή κατασκευή . Η σπείρα του Baravelle είναι ένα θέμα που εντυπωσιάζει και δεν είναι δύσκολο στην κατασκευή του .

E : με ποια διαδικασία υπολογίζουμε το εμβαδόν

..... μου εξηγούν , η διαδικασία του υπολογισμού του εμβαδού τους φαίνεται ένα παιχνίδι !

E :να δούμε πόσο είναι το εμβαδόν

M :το εμβαδόν είναι 3,98

E : ναι αλλά δεν θέλω μόνο 2 δεκαδικά ψηφία

θέλω περισσότερα
E :γιατί θέλω περισσότερα τι χρειάζονται
.....
M :για να βλέπω πιο καλά τα 0,000....
M :Για να βλέπω μεγαλύτερη αξία
M :Μεγαλύτερη προσέγγιση
E :Πάμε από το properties με δεξί κλικ και δεν θέλουμε εκατοστά αλλά δεκάκις χιλιοστά
E :Και τώρα κάνω κλικ στο transform και επιλέγω το iterate
E :Τι παρατηρείτε
M :Εδώ βγάζει κι άλλους αριθμούς και εδώ και άλλες τελίτσες
E :Είναι τελίτσες ;
M :Μοιάζουν τελίτσες αλλά δεν είναι
M :Μοιάζουν σημεία αλλά δεν είναι

Τα παιδιά διαισθάνονται ότι στο σχήμα αυτό που φαίνεται σαν τελεία ή σαν σημείο μπορεί να είναι κάτι άλλο .Δεν μπορούν όμως να απαντήσουν με βεβαιότητα

E :Τι είναι ;
E :αυτά τι είναι
M :είναι τρίγωνα
E :τι χρώμα έχουν
M :κόκκινο
E :και μέσα – dilate tool και βλέπω τι είναι αυτά τα σημεία
M : έχουν χρώμα κόκκινο και είναι τρίγωνα
M :είναι τρίγωνα όπως το αρχικό
M :μόνο που έχουν πάρει στροφή
M :και είναι τα μισά
M :και το άλλο το μισό του μισού
M :και συνεχίζουν πιο μικρά
M :Μεγαλώνει ο πίνακας
E :Σταματάω
E : Σύρω μια κορυφή
M :το τρίγωνο μεγαλώνει αλλά μεγαλώνουν και οι αριθμοί στον πίνακα
E :Στον πίνακα τι αριθμοί είναι αυτοί
M :Είναι τα εμβαδά των τριγώνων
E :Ποιων τριγώνων , θέλετε να δείξετε στην οθόνη ποια είναι
M :Το εμβαδόν αυτό είναι το πρώτο τρίγωνο
(Έδειχνε το μεγάλο τρίγωνο)
M :Το επόμενο είναι αυτό
E :Αυτό είναι κόκκινο το αρχικό δεν είναι όλο κόκκινο
M :Ααα, άρα αυτό είναι το πρώτο τρίγωνο
M :Και μετά αυτό
M :Και μετά αυτό
M :Αυτή αν την μικρύνετε είναι μια καμπύλη
M :Ναι , είναι μια καμπύλη
M :Dilate tool να το μεγαλώσουμε
M :Δεν είναι καμπύλη
M :Είναι τριγωνάκι , πολύ μικρό
M :Ναι , ναι είναι τρίγωνα
E :Τι σημαίνουν αυτά τα νούμερα
0,1,2,3,4,5....
M :Ότι είναι τα τρίγωνα
E :Αυτό το 0 ποια μέτρηση είναι
M :Είναι η πρώτη μέτρηση που κάναμε

M :Είναι το αρχικό κόκκινο τρίγωνο
E :Και μετά η επόμενη ποια
και γιατί δεν τα βλέπουμε
M :είναι πολύ μικρά και δεν φαίνονται
E :έχω το 0,0000099 και το 0,0000098 αυτό είναι εδώ
είναι δηλαδή στρογγυλοποίηση ενός αριθμού η επόμενη μέτρηση
M :δεν είναι στρογγυλοποίηση
M :όχι ,όχι
M :βρίσκει το μισό του μισού
E :Τα μικρύνω και θα επιλέξω τον πίνακα
M :Και θα κάνουμε τις τελίτσες (μου είχαν πει ότι δεν καταλάβαιναν τις τελίτσες)
(εδώ εννοούν τη γραφική παράσταση)
Τους εξηγώ σε ένα χαρτί ένα απλό παράδειγμα
1κιλο φρούτα 2 ευρώ , 2 κιλά φρούτα
4 ευρώ
3 κιλά
6 ευρώ
M : ααα ωραία
E :παίρνω δυο άξονες
M :δεν τα μάθαμε αυτά
E :θα τα μάθετε του χρόνου
E :στον άξονα χχ' (γέλια) βάζω τα κιλά
E :στον άξονα ψψ' βάζω τα ευρώ (τοποθετώ ένα σημείο στην τομή)
M :ααα αυτό είναι εύκολο
M :να οι τελίτσες !!
M :ααα αυτά είναι οι τελίτσες που είδαμε την προηγούμενη φορά
E :να τα δούμε τώρα στο σχήμα
κοιτάξτε τώρα τις μετρήσεις κα πείτε μου
όταν το $v=0$ η πρώτη μέτρηση είναι 19, ..
E :το βλέπετε πάνω στην γραφική παράσταση
E :δείξτε την επόμενη μέτρηση
M :το 1 με το 4,8
M :με τον άξονα πως λέγεται
M :το 2 με το 1,2
M :αα να το λίγο πιο πάνω
M :το 3 με το 0,3
οι μαθητές δείχνουν πάνω στον πίνακα τις μετρήσεις
E :να κάνω zoom του άξονα
M :βλέπουμε πως έχουμε μεγαλύτερη μεγέθυνση της οθόνης
E :και τα σημεία που είναι
M :έχουν φύγει
M :έχουν απομακρυνθεί πολύ
E :τα σημεία δηλαδή τι είναι
M :είναι τα σημεία του πίνακα
M :τα εμφανίσαμε εδώ
M :όταν κάνουμε μεγαλύτερες υποδιαιρέσεις τα σημεία πηγαίνουν πιο δεξιά
M :και πιο χαμηλά , κατεβαίνουν
E :που πλησιάζουν
M :στο 0 (όλα μαζί !!)
E :όταν κάνω zoom όμως
M :μεγαλώνουν
μετά όμως
E :αυτοί όλοι οι αριθμοί είναι μια ακολουθία αριθμών

E : Ξέρετε μια άλλη ακολουθία αριθμών
M : Δηλαδή σαν το 1,2 ,3
M : 0,1 0,2
M : 2,4,6,8 ..
M : 1,3,5,
M : 3,6,9.....
M : 3,5,7,9
E : ωραία
E : άρα τι είναι ακολουθία , πως το καταλαβαίνετε εσείς
M : είναι ένα νούμερο και μετά άλλα νούμερα
M : η μεγαλώνουν
M : ή μικραίνουν
E : μεγαλώνουν πολύ αυτοί οι αριθμοί ;
M : ναι μέχρι το άπειρο
M : ναι γιατί όλο υπάρχει και ένας μεγαλύτερος
M : αυτοί μπορεί και να μικραίνουν
E : Θα δούμε τι είχαμε κάνει με τα τρίγωνα την προηγούμενη φορά
M : Είχαμε μετρήσει όλα τα εμβαδά και είχαμε διαιρέσει με το αρχικό
E : Είναι μια ακολουθία αυτή
M : Δηλαδή τα εμβαδά τους
M : Ναι είναι .. πήραμε την ακολουθία των εμβαδών , τον πίνακα
E : Κάνουμε plot table data
M : Επιλέγουμε το ν' για τον άξονα χχ' και το άθροισμα για τον άξονα ψψ'
E : Και το 1,32 που βλέπουμε
M : Είναι το ίδιο για αυτό και στην γραφική παράσταση είναι σαν μια γραμμή
E : Αυτό είναι το όριο
E : Ποια ακολουθία εμβαδών τριγώνων αν προσθέσουμε τα εμβαδά μας δίνει το 1,33
M : Είναι αυτό το μεγάλο μετά αυτό (δείχνει εσωτερικά το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα)
M : Και μετά είναι αυτό
M : Δηλαδή η επανάληψη
M : η iteration που λέγαμε

Με την ομάδα δοκιμάσαμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο , και στην συνέχεια το Πυθαγόρειο δέντρο

E : Κάνουμε ευθύγραμμο τμήμα και μετά επιλέγουμε στο σημείο A , mark center
επιλογή του τμήματος και rotate
M : A να το φαίνεται
E : Τι έγινε
M : Μια ορθή γωνία
M : Με ίσες πλευρές
E : Τι έκανε δηλαδή το σχήμα
M : Πήρε το σχήμα και το γύρισε κατά 90 μοίρες
E : Δεν έγινε ακόμα τετράγωνο
M : Θα στρέψουμε και την άλλη πλευρά κατά 90 μοίρες
Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αλλά οι μαθητές ξεκινούν την κατασκευή από το άλλο σημείο με αποτέλεσμα η μια πλευρά να στρέφεται προς τα κάτω
E : Κάτι δεν πήγε καλά
E : Τι υπάρχει στην οθόνη που αλλάζει
M : Η πλευρά
E : Πως μεταφέρεται η πλευρά
M : Με το rotate
E : Για να κάνει όμως το rotate ο υπολογιστής μας

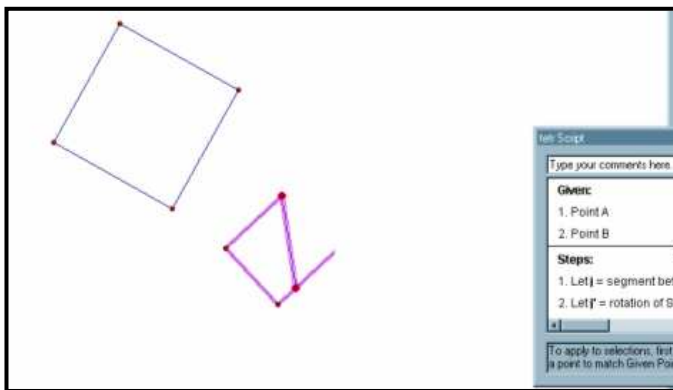
M :Ανοίγει αυτό το τετραγωνάκι
E : Και τι αλλάζει στο τετραγωνάκι
M :Η γωνία
E : Άρα δεν είναι σωστή η γωνία 90 μοίρες
M :Να το αλλάξουμε
M :180
M :230 (έβλεπαν ότι στο σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ή συνέπιπτε ή στρεφόταν κατά 90 μοίρες αλλά προς τα κάτω)
E : πως θέλουμε να γυρίσει η πλευρά
M :έτσι (και μου δείχνουν με το χέρι τους)
E : ναι , δηλαδή πόσες φορές θα γυρίσει
M :μια , δυο , τρεις φορές
E : άρα πόσες φορές θα κάνει το 90
M :3 φορές (με αβεβαιότητα)
M :3 x 90 = 270 μοίρες

Γιατί οι μαθητές δεν σκέφτηκαν τις 270 μοίρες ;

Οι μαθητές έχουν σχηματίσει εικόνες εννοιών από το περιβάλλον τους Παραδείγματα στροφών γωνιών δεν συναντάμε στο Δημοτικό ή δεν έχει δοθεί η κατάλληλη προσοχή (π.χ σε ένα ρολόι οι δείκτες) με αποτέλεσμα η συμβολική αναπαράσταση της γωνίας των 270 μοιρών να λείπει από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ένας μαθητής προκειμένου να δώσει το μέγεθος μιας γωνίας - δεν θα πει για παράδειγμα αυτή είναι γωνία 270 μοιρών αλλά 90 μοιρών . Ένας δεύτερος λόγος είναι ότι δεν επισημαίνεται ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζονται δυο κάθετες ευθείες με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην διαισθάνονται την στροφή ενός τμήματος κατά 90 μοίρες (ή κατά 270 μοίρες).

E : Create new tool και ονομάζουμε το script file tetr
E : τώρα πως μπορώ να κατασκευάσω ένα άλλο τετράγωνο
M :πάλι από την αρχή ένα ευθ. τμήμα και μετά rotate
M :με το script file

Στη συνέχεια οι μαθητές προσπάθησαν να κατασκευάσουν μόνοι τους ένα αρχείο εντολών που θα κατασκεύαζε ένα τετράγωνο

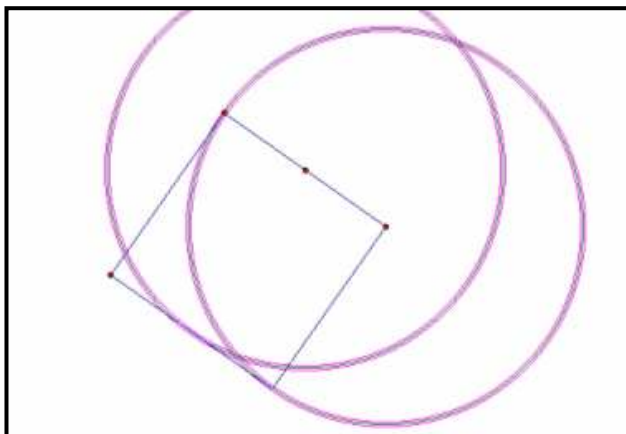


η αρχική κατασκευή του τετραγώνου έμοιαζε σωστή όμως δεν ήταν έτσι .Όταν επανέλαβαν την διαδικασία με το script file προέκυψε το σχήμα που βλέπουμε επιλεγμένο

Άλλη μια σύγχυση επικράτησε όταν στρέψαμε το σχήμα του τετραγώνου σύροντας μια κορυφή .Οι μαθητές πίστευαν ότι τότε δεν είναι τετράγωνο

αλλά ρόμβος .Η κατασκευή του τετραγώνου τους βοήθησε να καταλάβουν την ιεραρχία των σχημάτων .

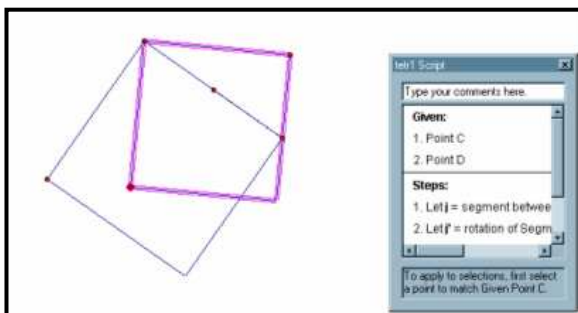
E : Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που να έχει μια πλευρά του ίδια με του τετραγώνου
M :Ναι ,στο σχήμα που είχαμε δει είχαμε κάνει έναν κύκλο



Οι μαθητές δοκιμάζουν να κάνουν κύκλους με διάμετρο την πλευρά του τετραγώνου

η πλευρά είναι διάμετρος του κύκλου άρα το κέντρο του κύκλου είναι στο μέσο του τμήματος

E : Πως κατασκευάζουμε τον κύκλο
M : Δεν είμαι σίγουρος . Πήραμε το midpoint του τμήματος
E : Και ποια θέλουμε να είναι η ακτίνα του κύκλου
M : Να κάνουμε τον κύκλο
E : Ωραία , να τον κάνουμε
Προσπάθησαν μερικές φορές αποτυχημένα . Κατασκεύαζαν κύκλους αλλά δεν ήταν σταθεροί κύκλοι . Τους εξήγησα πως σκεφτόμαστε .
Η μαθήτριά κατασκεύασε με επιτυχία τον κύκλο (πήρε σαν κέντρο το μέσο και μετά σιγά τον έσυρε μέχρι που η ακτίνα του έγινε ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου) Στην συνέχεια τοποθετήσαμε το σημείο πάνω στον κύκλο . Ενώσαμε το σημείο πάνω στον κύκλο με τις κορυφές του τετραγώνου και κατασκευάσαμε το ορθογώνιο τρίγωνο
E : Τι τρίγωνο είναι αυτό
M : Ισοσκελές
M : Αμβλυγώνιο
E : Να δούμε την γωνία
E : Επιλέγουμε τα σημεία και πόσο είναι η γωνία
M : 90 μοίρες !!
E : αν αλλάξουμε την θέση του σημείου
M : πάλι η γωνία είναι 90 μοίρες !
E : επομένως τι τρίγωνο είναι αυτό
M : είναι ορθογώνιο
Το ορθογώνιο τρίγωνο είχε την κορυφή της ορθής γωνίας σε διαφορετική θέση από την θέση που έχουν συνηθίσει οι μαθητές να το βλέπουν στα βιβλία τους Επομένως η έκπληξη ήταν αναμενόμενη !!
M : να κάνουμε απόκρυψη τον κύκλο
E : τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τα τετράγωνα
E : τι θα κάνουμε
M : θα κάνουμε show script view



Οι μαθητές κάνουν κλικ στην μια κορυφή και μετά στην άλλη το σχήμα που παράγεται στην αρχή είναι αυτό

Δοκιμάζοντας ξανά παρατηρούν ότι η διαδικασία γίνεται όπως την θέλουμε (το τετράγωνο προς τα έξω) όταν επιλέγουν τις κορυφές από αριστερά προς τα δεξιά

M : Γιατί έτσι το κατασκευάσαμε αρχικά
E : Μετακινούμε το σημείο πάνω στον κύκλο , και τι συμβαίνει με τα εμβάδα
M : Τα αθροίσματα παραμένουν τα ίδια

Στην συνέχεια οι μαθητές κατασκεύασαν νέο αρχείο εντολών με το πυθαγόρειο θεώρημα.. Δεν ήμουν σίγουρη ότι είχαν καταλάβει τι κάνει το αρχείο εντολών .

E: Μπορώ να κατασκευάσω τώρα ένα άλλο πυθαγόρειο θεώρημα που όμως η πλευρά του αρχικού τετραγώνου θα είναι πάνω στην πλευρά του τριγώνου

.....

M: show script view

E : πόσα σημεία χρειάζονται για να κάνουμε το πυθαγόρειο θεώρημα

M:δύο

E : παίρνω ένα αυτό και ένα αυτό και τώρα

M:all steps

και άρχισαν να το επαναλαμβάνουν .Εβλεπα την χαρά και την έκπληξη τους .Μια διαδικασία που κάναμε τόση ώρα να την κατασκευάσουμε γινόταν σε δευτερόλεπτα .

Μηχανικά επαναλάμβαναν την διαδικασία . Είχαν όμως καταλάβει το νόημα της διαδικασίας ;

E : Τι παρατηρείτε σχετικά με τα σχήματα που προκύπτουν

M: Είναι ίδια με το αρχικό

M:Είναι μικρότερα

M:Όσο περισσότερα γίνονται μικραίνουν

E : Τι μικραίνει

M:Το σχήμα τους

M:Δηλαδή οι πλευρές τους

Επόμενη συνάντηση

M : Έχουμε κατασκευάσει ένα τετράγωνο μετά ένα ορθογώνιο τρίγωνο

E : Στο οποίο τι ιδιότητα έχουμε

M :Να το μεγαλώνουμε , να το μικραίνουμε , να το αλλάζω τις θέσεις

E: Αυτή η κορυφή τι μπορεί να κάνει

M :Μπορεί να κινείται

M :Να αλλάζει το εμβαδόν

M :Να μικραίνει

M :Να μετακινείται πάνω στον κύκλο

M :Όλες οι κορυφές του ορθογωνίου τριγώνου

E: Όταν μετακινείται η κορυφή τι συμβαίνει το σχήμα

M :Μικραίνουν τα εμβαδά

E :Τι είναι το script file

M :Φτιάχνει όσα τετράγωνα θέλουμε

M :Ίσα τετράγωνα ,ορθές γωνίες

E : Πως θα κάνω το πυθαγόρειο θεώρημα

M :Θα ανοίξουμε το script file

E : Τι χρειάζεται για να κατασκευαστεί (ίσως δεν είχα θέσει σωστά την ερώτηση)

E : κάτι γράφει given point A , point B

M :δύο σημεία

M :δυο γωνίες

M :μας κατασκεύασε και ένα κύκλο

M :μπορούμε να τον κάνουμε απόκρυψη

E :ωραία

E :σε ποια κορυφή θα το κάνει

E: με ποια διαδικασία σκέφτεσαι ότι πρέπει να γίνει

M :να πάρω το σημείο A και το σημείο B

E: ποια σημεία είναι τα A και B

M :από αριστερά προς τα δεξιά

E: μήπως είδατε κάτι
M :τα τετράγωνα μικραίνουν
E: τι άλλο παρακολουθήσατε ότι συμβαίνει στο script file
M :Να την κάνουμε άλλη μια φορά
E: Τι κάνουν τα δυο σημεία
M :Φωτίζονται με γαλάζιο χρώμα
M :Αν δεν φωτιστούν και τα δυο κάτι δεν πάει καλά
M :All steps
E: Τι θα κάνουμε τώρα
M :Κλικ γενικά
M :Πρώτα το αριστερό και μετά το δεξί
E: Γιατί έτσι
E: Αν το κάναμε αλλιώς τι θα γινόταν
M :Θα γινόταν ανάποδα
E: Να το μεγαλώσουμε σαν σχήμα
M :Τι κατασκευάζουμε
M :Τετράγωνα και ορθογώνια με κύκλους
E: Αυτά τα σχήματα στην τύχη κατασκευάζονται
E: Με ποια ιδιότητα κατασκευάζονται
E: Τι είναι ανοικτό στην οθόνη
M :Υπάρχει το script file
E: Και τι κάνει
M :Μας επαναλαμβάνει την κατασκευή
E: Τι έχω κάνει όμως στο αρχείο εντολών .πως το έχουμε ορίσει
M :Να μας κάνει από μόνο του τα σχήματα
M :Όσες φορές θέλουμε
E: και υπάρχει σχέση ανάμεσα στο 1 ^ο σχήμα που κατασκευάσαμε και στο 2 ^ο ή στο 3 ^ο
M :ναι είναι ίδια
M :πιο μικρό το επόμενο
M :σε σμίκρυνση
E: γιατί σε σμίκρυνση
M :γιατί αυτή η πλευρά που ξεκινά η κατασκευή είναι πιο μικρή (και δείχνει τη 2 ^η επανάληψη)
M :άρα όλο το σχήμα είναι πιο μικρό
E: Αυτό που κάνουμε πως το λέμε
M :Μια παράσταση
M :Μια ακολουθία
M :Μια διαδικασία
(φωνάζουν όλα δυνατά και πιστεύουν ότι είναι σωστά αυτά που μόλις διατύπωσαν - μήπως δεν πρόκειται για την αναπαράσταση μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας , μιας ακολουθίας ;)
E: Τι διαδικασία όμως είναι, πως ονομάζεται αυτή η διαδικασία
M :Επανάληψη
M :Iteration
E: Με το link τι κάνουμε
M :Θα ενώσει τα διαφορετικά φύλλα που έχουμε κάνει
E: Τι έχουμε κάνει στη σελίδα αυτή
M :Πολλά σχήματα , πολλές επαναλήψεις
E: Κάποιος μπορεί να μου πει πως κάνουμε
M :Κάνουμε μια ευθεία γραμμή , κάνουμε κλικ με ανοιχτό το αρχείο από αριστερά E :προς τα δεξιά ,και πατάμε all steps
E : Είναι τυχαία αυτή η κατασκευή που γίνεται

M :Όχι δεν είναι τυχαίο
M :Είναι συγκεκριμένο
M : Το Πυθαγόρειο θεώρημα
E: Και τι λέει το πυθαγόρειο θεώρημα
Κάτι με τα εμβαδά
M :Τα δυο τετράγωνα μας δίνουν το τρίτο τετράγωνο
E: Πως δηλαδή γίνεται αυτό
Κόβουμε τα τετράγωνα και τα βάζουμε το ένα δίπλα στο άλλο ;
M :Όχι τα εμβαδά
M :Τα εμβαδά των δυο μικρών
M :Μας κάνουν το εμβαδόν του μεγάλου
E: Τι κάνει το animate ;
M :Βάλατε έναν αόρατο κύκλο και όλο το σχήμα γυρίζει
M :γύρω από την τελίτσα
M :Γύρω απ' το σημείο
E: τι κάναμε στον κύκλο
M :hide
Link στην επόμενη σελίδα
E: γιατί έχουμε διαφορετικούς χρωματισμούς
M :έχουμε κατασκευάσει το ίδιο χρώμα στην συνέχεια
M :έχουμε χρωματίσει με το ίδιο χρώμα τα μεγάλα τετράγωνα
M :έχουμε χρωματίσει με το ίδιο χρώμα τις ακολουθίες των εμβαδών
E: τι είναι λοιπόν αυτό
M :είναι μια ακολουθία τετραγώνων
E: και αυτό
E: θα πάρω το dilate
M :βλέπουμε τις επαναλήψεις
M :αυτή είναι μια άλλη ακολουθία τετραγώνων
M :και αυτή μια άλλη
M :αυτή η κίτρινη ακολουθία
E: να κάνουμε animation, αλλά να παρατηρήσετε τα συμβαίνει με τα εμβαδά όπως κάνετε το animation
M :μικραίνουν τα τετραγωνάκια και γίνονται τελείες
E: άρα δεν υπάρχουν
M :υπάρχουν !!!(με έντονη διαμαρτυρία)
M :είναι 0,00000000.....1
E: υπάρχουν όμως αυτά
E: και είναι το ένα εμβαδόν προσέγγιση του προηγούμενου
M :όχι είναι μια καινούργια μέτρηση
M :της επόμενης επανάληψης
E: αυτό τι είναι
M :το πινακάκι με τις επαναλήψεις
M :μεγαλώνουμε και μεγαλώνει το εμβαδόν
M :κάναμε μια διαδικασία επανάληψης
E: ποια διαδικασία
M :file script file – Πυθαγόρειο θεώρημα
E: πόσες φορές το κάναμε
M :το κατασκευάσαμε μετράνε , μετά κάποια μαθήτρια προσέχει τον πίνακα και φωνάζει
M :24
M :όχι 25 , είναι και το 0(μια άλλη μαθήτρια)
E : είναι μια κατασκευή που προέκυψε από πόσα εμβαδά
E: ποια είναι τα εμβαδά που επαναλαμβάνονται και γίνεται η κατασκευή

M (έρχεται και δείχνει τα εμβαδά)
M :αυτό το τετράγωνο και αυτό και αυτό
M :κατασκευάζω το πρώτο πυθαγόρειο
E: θέλω να τα περάσω σε γράφημα
M :plot table data
E: το n είναι
M :number
M :φυσικοί αριθμοί
E: το 0 ποια διαδικασία είναι
M :η πρώτη διαδικασία
E: τι μας δίνει τελικά
M :την γραφική παράσταση
E: θέλουμε να δείξουμε τις αντιστοιχίες του πίνακα στο γράφημα
το 0 που πηγαίνει: στο 3, 8
τα παιδιά δυσκολεύονται να μου δείξουν τα σημεία . Είναι μια αναμενόμενη κατάσταση , αφού ακόμα και τα παιδιά της Α΄ Λυκείου έχουν δυσκολία κατανόησης στο γράφημα της παράστασης, την αντιστοίχιση των τιμών του πίνακα με τα σημεία του γραφήματος έρχεται ένας , ένας και δείχνει τα σημεία , νομίζω ότι έχουν αρχίσει να το καταλαβαίνουν για αρκετές φορές επαναλάβαμε τα ίδια .
Πιστεύω ότι η γραφική παράσταση ήταν ένα θέμα που οι μαθητές έπρεπε να κατανοήσουν ώστε να οδηγηθούν σε μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της ακολουθίας ως συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο N των φυσικών αριθμών .Οι φυσικοί αριθμοί για τους μικρούς μαθητές της ΣΤ τάξης , τοποθετούνται πάνω στον άξονα χχ΄ και οι τιμές των εμβαδών πάνω στον άλλο άξονα .Έπρεπε να αναλώσω αρκετό χρόνο για να αντιληφθούν οι μαθητές απευθείας από την οθόνη τις αντιστοιχίσεις των σημείων του πίνακα και της γραφικής παράστασης .Ήταν όμως και ένα σημείο στην όλη διαδικασία που προκάλεσε πολύ το ενδιαφέρον τους και με χαρά μου διαπίστωσα ότι το επίπεδο κατανόησης τους μετά την όλη διαδικασία ήταν πολύ καλό. Μια απλή ένδειξη ήταν ότι οι μαθητές όταν περνούσαν τις τιμές οποιουδήποτε πίνακα στους άξονες διαπίστωναν τις συντεταγμένες των σημείων με μεγάλη ευκολία και τις έδειχναν μια -μια Οδηγήθηκα με αυτές τις παρατηρήσεις σε κάποια ερωτήματα που είχαν σχέση με την αντίστοιχη έρευνα σε μεγαλύτερη τάξη
☀ Πως οι μαθητές της ΣΤ Δημοτικού (χωρίς να έχουν διδαχθεί ποτέ στο σχολείο τους για γραφικές παραστάσεις) κατάλαβαν τα γραφήματα των παραστάσεων τόσο καλά από την οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή και οι μαθητές της Α΄ Λυκείου που είχαν διδαχθεί το αντίστοιχο θέμα ακόμα έκαναν λάθη .
☀ Ποια θα ήταν τα αποτελέσματα της διδασκαλίας στους ίδιους μαθητές του Δημοτικού σχολείου μετά από x χρόνια διδασκαλίας όταν έχουμε ήδη μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο σκέψης ; .
E: μπορείς να μεγεθύνεις την κλίμακα
M :κάνω κλικ στην οθόνη
E: τα βλέπετε τα σημεία
M :είναι πάνω
M :να ανεβούμε πιο πάνω να τα δούμε
M :πήγαμε κάτω από το 0 ο μεγαλώσαμε και τα σημεία αυτά πήγαν πιο πάνω
E: δηλαδή ανέβηκαν τα σημεία
M :έγινε μεγέθυνση στον χχ΄ και ψψ΄
M :έγινε zoom
M :όσο πλησιάζουμε πιο κοντά οι αριθμοί μεγαλώνουν
M : έχουν κατεβεί κάτω οι τελείες
M :πλησιάζουν στο 0
E: είναι 0
M :γίνονται 0

Μ : τείνουν να γίνουν 0
Ε: πως λέγεται αυτό
Μ : όριο ακολουθίας

Η προσέγγιση μέσω της διαδικασίας με όριο το 0 ήταν μια προφανής πια περίπτωση για τα παιδιά . Ο συλλογισμός τους ήταν όπως ακριβώς περιγράφεται σε μερικές απαντήσεις τους :

- ❖ Τα εμβαδά γίνονται τόσο μικρά που τείνουν στο 0
- ❖ Πηγαίνουν πολύ κοντά στο 0 αλλά δεν είναι 0
- ❖ Υπάρχουν πάντα οι αριθμοί αυτοί .
- ❖ Οι αριθμοί που είναι πριν από το 0 (με την έννοια ότι πλησιάζουν στο 0) είναι άπειροι αφού μπορούμε να βάλλουμε όσα μηδενικά θέλουμε μετά την υποδιαστολή , αλλά δεν είναι 0 ακόμα και αν υπάρχει μια μονάδα στο τέλος .
- ❖ Πως θα μπορούσε να ήταν 0 αφού πρόκειται για ένα εμβαδόν ενός τριγώνου που πάντα υπάρχει .

Η διαδικασία ης προσέγγισης διαισθητικά σε ένα όριο που είναι ένας πραγματικός αριθμός (στο συγκεκριμένο θέμα έχουμε μια σειρά) είναι ένα θέμα που δημιουργεί ιδιαίτερη δυσκολία για τους παρακάτω λόγους

- ❖ Οι μαθητές δεν έχουν επίγνωση των αλγεβρικών παραστάσεων , πχ . τα αθροίσματα των εμβαδών στον αριθμητή του κλάσματος
- ❖ Δεν μπορούν να συνδέσουν τις διάφορες μορφές συμβολικής αναπαράστασης ενός ρητού (π.χ ότι το $1/4$ είναι ίσο με το 0,25)
- ❖ Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ένα πρόσθετο εμπόδιο αφού οι μετρήσεις των σχημάτων δίνουν σχεδόν πάντα αριθμούς μη φυσικούς
- ❖ Οι δεκαδικοί αριθμοί δεν φαίνονται με ακρίβεια στο GSP με αποτέλεσμα ο μαθητής να προσπαθεί να βρει την αντιστοιχία του πίνακα με τα σημεία της γραφικής παράστασης
- ❖ Αν αλλάξει το σχήμα οι μετρήσεις του πίνακα αλλάζουν αυτόματα αλλά οι θέσεις των σημείων που είχαμε σχεδιάσει στη γραφική παράσταση δεν αλλάζουν , με αποτέλεσμα να πρέπει να επαναλάβουμε την αποτύπωση σημείων



Συμπεράσματα

Συγκριτικά συμπεράσματα ως προς την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές

Έχουμε ήδη σχολιάσει και παρατηρήσει τα αντίστοιχα σημεία της έρευνας που οδηγούσαν στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Θα αναφέρουμε συγκεντρωτικά τα σημαντικότερα ώστε να οδηγηθούμε σε γενικότερες συγκρίσεις και συμπεράσματα μεταξύ των σχολικών επιπέδων.

6.1 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της ΣΤ΄ Δημοτικού

Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης διαισθητικά αντιλαμβάνονται το είδος του σχήματος και το επιβεβαιώνουν κάνοντας τις **μετρήσεις**. Η διαδικασία του αρχείου εντολών περιλαμβάνει τη έννοια της γενίκευσης επομένως στο ξεκίνημα της διαδικασίας οι μαθητές δεν έχουν την ικανότητα να γενικεύουν. Αυτό έρχεται στη συνέχεια ως αποτέλεσμα της συνολικής εμπειρίας. Το επικοινωνιακό κλίμα που αναπτύσσεται κατά την διάρκεια της κατασκευής των εννοιών, τους βοηθά να επαναλάβουν **με λεκτικό τρόπο** την διαδικασία αφού παρατηρήσουν την αυτό-ομοιότητα του αντικείμενου fractal. Να παρατηρήσουν τις επαναλήψεις των διαδικασιών από το αρχείο εντολών που γίνονται **με κάποια συγκεκριμένη σειρά που τους οδηγεί να σχηματίσουν ένα pattern** που έχει σχέση με τον τρόπο επανάληψης του σχήματος. Το λογισμικό τους βοηθά να αντιληφθούν και συνειδητοποιήσουν κάτι που ίσως δεν είχαν καταλάβει ή σκεφτεί. **Ότι το εμβαδόν είναι η επιφάνεια που καταλαμβάνει το τρίγωνο. Ακόμα να συμπληρώσουν γνωσιακά κενά που έχουν σχέση με την αντιστροφή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.**

Το σχήμα τους οδηγεί να παρατηρήσουν (χωρίς την διαδικασία των μετρήσεων) ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται το ένα μέσα στο άλλο είναι όλο και μικρότερα και ότι κάποια στιγμή δεν θα μπορούν να τα βλέπουν σαν τρίγωνα αλλά σαν σημεία, άρα θα γίνουν τα εμβαδά τους 0 (κάνουν αφαίρεση της λέξης εμβαδά στην συζήτηση). Ακόμα καταλαβαίνουν ότι το σχήμα μπορεί να μεγαλώσει άπειρες φορές, έχουν δηλαδή αρχικές διαισθήσεις για το άπειρο. Υπάρχει σε κάποιο σημείο της έρευνας ο προβληματισμός μήπως οι μαθητές επαναλαμβάνουν αποστηθίζοντας την διαδικασία. Όπως όμως γίνεται αντιληπτό από τις απαντήσεις των μαθητών, αυτό δεν συμβαίνει αφού οι μαθητές ανταποκρίνονται στην κατασκευή των εννοιών.

Οι μαθητές όπως διαπιστώνουμε από την έρευνα μπορούν να εκφράσουν με συμβολικό και λεκτικό τρόπο ένα κλάσμα. Διαπιστώνω την δυσκολία όμως που αντιμετωπίζουν ως προς την μη κατανόηση της ισοδυναμίας των διαφόρων τρόπων συμβολικής αναπαράστασης ενός ρητού αριθμού. Οι μαθητές παρατηρούν ότι οι μετρήσεις που έχουν προκύψει στον πίνακα για τις τιμές της ακολουθίας των εμβαδών έχουν σχέση με την μέτρηση των εμβαδών και ότι με το σύρσιμο των κορυφών και τις αυξομειώσεις του τριγώνου δεν επηρεάζεται ο λόγος των εμβαδών. Αυτό που παρατηρούν για την τιμή 0 είναι η ταύτιση των δυο μετρήσεων, της μέτρησης που είναι έξω από τον πίνακα για το αρχικό τρίγωνο και της μέτρησης που είναι μέσα στον πίνακα. Έτσι τα συμπεράσματα προκύπτουν εύκολα. Ένα δυνατό σημείο στο οποίο οι μαθητές έδειξαν ότι κατανοούσαν την συσχέτιση των όρων της ακολουθίας με τα επαναλαμβανόμενα σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή είναι το παρακάτω:

«αρχίζω να μετρώ τις επαναλήψεις με λάθος τρόπο ξεκινώντας με 1 από την αρχική 1,2,3,4... και δείχνω τον πίνακα που είχε 5 μετρήσεις (γιατί έχει 5 ;)

M : όχι !! 0,1,2,3,4,5 (όλοι μαζί) με διορθώνουν ξεκινώντας με 0 από την αρχική μέτρηση».

Οι απαντήσεις όλων έδειξαν ότι είχαν καταλάβει πως επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις, δεν ήταν μια απλή σύμπτωση ή μια παρατήρηση και το σπουδαιότερο ότι είχαν καταλάβει πως γίνεται και στα σχήματα η επαναληπτική διαδικασία.

Ένα θέμα πολύ σημαντικό είναι η **κατασκευή των γωνιών**. Οι μαθητές δεν σκέφτηκαν ότι η γωνία μπορεί να είναι 270 μοιρών. Όπως προκύπτει από την έρευνα οι μαθητές έχουν σχηματίσει εικόνες εννοιών από το περιβάλλον τους. Παραδείγματα στροφών γωνιών δεν συναντάμε στο Δημοτικό ή δεν έχει δοθεί η κατάλληλη προσοχή (π.χ σε ένα ρολόι οι δείκτες) με αποτέλεσμα η συμβολική αναπαράσταση της γωνίας των 270 μοιρών να λείπει από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ένας μαθητής προκειμένου να δώσει το μέγεθος μιας γωνίας - δεν θα πει για παράδειγμα αυτή είναι γωνία 270 μοιρών αλλά 90 μοιρών. Ένας

δεύτερος λόγος είναι ότι δεν χρησιμοποιείται ο τρόπος αυτός για την κατασκευή δυο καθέτων ευθειών με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην διαισθάνονται την στροφή ενός τμήματος κατά 90 μοίρες (ή κατά 270 μοίρες)

Τα στατικά σχήματα που εισάγονται στις σελίδες των βιβλίων μπορούν να δημιουργήσουν γνωστικά , διδακτικά εμπόδια και αυτό το καταλαβαίνουμε στην **κατασκευή του ορθογώνιου τριγώνου** . Οι κατασκευές επανάληψης στο GSP είναι δυναμικές διαδικασίες που σχηματίζονται με τις διάφορες ενέργειες που κάνουμε . Μια διαδικασία επανάληψης μέσα από ένα αρχείο εντολών ή μέσα από την διαδικασία iteration είναι μια διαδικασία που γίνεται με ταχύτητα . Αυτό είναι κάτι που αρέσει πολύ στα παιδιά . **Τους προκαλεί ενθουσιασμό , κίνητρα για ενεργοποίηση και αυτενέργεια . Και αυτό είναι ότι σημαντικότερο στην εκπαιδευτική διαδικασία .**

Τα παιδιά έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις γραφικές παραστάσεις μέσα από τις δραστηριότητες . Στην αρχή δυσκολεύονται να δείξουν τα σημεία στην γραφική παράσταση . Αυτό είναι μια αναμενόμενη κατάσταση , αφού ακόμα και τα παιδιά της Α΄ Λυκείου έχουν δυσκολία κατανόησης στο γράφημα της παράστασης, και της αντιστοίχισης των τιμών του πίνακα με τα σημεία του γραφήματος . Αλλά στην συνέχεια όπως διαπιστώνουμε κατανοούν το θέμα . Η γραφική παράσταση είναι ένα θέμα που οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ώστε να οδηγηθούν σε μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της ακολουθίας ως συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών . Μια απλή ένδειξη της κατανόησης ήταν ότι οι μαθητές όταν περνούσαν τις τιμές οποιουδήποτε πίνακα στους άξονες διαπίστωναν τις συντεταγμένες των σημείων με μεγάλη ευκολία και τις έδειχναν μια -μια . Οδηγήθηκα με αυτές τις παρατηρήσεις στα παρακάτω ερωτήματα :

- ☀ Γιατί οι μαθητές της ΣΤ Δημοτικού χωρίς να έχουν διδαχθεί ποτέ στο σχολείο τους για γραφικές παραστάσεις κατάλαβαν τα γραφήματα των παραστάσεων ;
- ☀ Έχουμε μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο σκέψης μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων στο περιβάλλον του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας ;

Η κατανόηση της έννοιας της ακολουθίας όπως διαπιστώσαμε έρχεται διαισθητικά μέσα από κατάλληλη διαδικασία . Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι στο σχήμα έχουμε μια αναπαράσταση μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας μιας ακολουθίας και το επαναλαμβάνουν με λεκτικό τρόπο .

Οι μαθητές καταλαβαίνουν, όπως φαίνεται από τις απαντήσεις τους ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί που είναι κοντά στο 0 αλλά δεν είναι 0. Είναι η πρώτη προσέγγιση των απειροελάχιστων και η πρώτη προσέγγιση του ορίου διαισθητικά .

Τα παιδιά διαισθάνονται ότι στο σχήμα αυτό που φαίνεται σαν τελεία ή σαν σημείο μπορεί να είναι κάτι άλλο . Δεν μπορούν όμως να απαντήσουν με βεβαιότητα στην αρχή . Στο σημείο αυτό διαπιστώνουμε και την διαφορά με την μεγαλύτερη τάξη (Β΄ Λυκείου για παράδειγμα) όπου η **διαίσθηση των μαθητών** είναι περισσότερο ανεπτυγμένη . (οι μαθητές της Β΄ Λυκείου είχαν απαντήσει ότι το σχήμα που βλέπουν είναι ένα τετράγωνο ενώ βλέπουν ένα σημείο , οι μαθητές της ΣΤ΄ δίσταζαν να απαντήσουν)

Η έρευνα δείχνει ότι όταν το όριο της ακολουθίας είναι 0 οι μαθητές το προσεγγίζουν διαισθητικά με συλλογισμούς που περιγράφονται σε μερικές απαντήσεις τους :

- ☀ Τα εμβαδά γίνονται τόσο μικρά που τείνουν στο 0
- ☀ Πηγαίνουν πολύ κοντά στο 0 αλλά δεν είναι 0
- ☀ Υπάρχουν πάντα οι αριθμοί αυτοί .
- ☀ Οι αριθμοί που είναι πριν από το 0 (με την έννοια ότι πλησιάζουν στο 0) είναι άπειροι αφού μπορούμε να βάλλουμε όσα μηδενικά θέλουμε μετά την υποδιαστολή αλλά δεν είναι 0 ακόμα και αν υπάρχει μια μονάδα στο τέλος .
- ☀ Δεν θα μπορούσε να γίνει 0 αφού πρόκειται για το εμβαδόν ενός σχήματος που πάντα υπάρχει
- ☀ Όταν γίνεται 0 τελικά είναι ένα σημείο .

6.2 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Α΄ Γυμνασίου

Οι μαθήτριες της Α΄ Γυμνασίου έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την **θεωρητική και ιστορική πλαισίωση** των Fractals. Οι μαθήτριες άκουγαν με ενδιαφέρον τις πληροφορίες

για τα μαθηματικά των Βαβυλώνιων και την αρχαία Ελλάδα, τον Πυθαγόρα και τον Hilbert, τους Sierpinski, Koch και Mandelbrot. Η **βιβλιοθήκη των fractals** που υπάρχει έτοιμη στο λογισμικό, τους βοήθησε να σχηματίσουν κάποιες αρχικές διαισθήσεις για τα fractals και να σκεφτούν **τη σχέση τους με το ανθρώπινο σώμα και τη φύση**.

Αυτό μας οδηγεί σε σκέψεις σχετικά με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Μήπως θα ήταν καλό να εισχωρήσει στο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών αυτών των τάξεων (μαθητές της ηλικίας των 11-14 δηλαδή τέλος Α/θμιας και Γυμνάσιο) περισσότερη **ιστορία μαθηματικών** εμπλουτισμένη με κατάλληλες εφαρμογές; Αυτό που συμπεραίνεται εύκολα είναι ότι οι μαθητές **θέλουν να ξέρουν γιατί πρέπει να μάθουν αυτά τα μαθηματικά που μαθαίνουν**. Η Α' Γυμνασίου επομένως αντί να είναι μια τάξη σχεδόν **αδιάφορη**, που επαναλαμβάνει την ύλη της ΣΤ' Δημοτικού αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες ο μαθητής θα αποκτά τις **αρχικές διαισθήσεις για σημαντικές έννοιες που αναφέρονται σε μεγαλύτερες τάξεις**.

Τα αντικείμενα fractals στην οθόνη του υπολογιστή οδηγούν τις μαθήτριες να διασυνδέσουν τα εξής σημεία των μαθηματικών:

Μεταβολή των αντικειμένων υπό **κλίμακα**. Αυτό κρύβει την **έννοια της ομοιότητας** των αντικειμένων τα οποία όπως καταλαβαίνουν οι μαθήτριες μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο. Οι αλλαγές του σχήματος που οφείλονται στο σύρσιμο των κορυφών δεν οδηγούν και σε αλλαγές της ιδιότητας του εμβαδού του τετραγώνου που είναι στην υποτείνουσα το οποίο παραμένει σταθερά ίσο με το άθροισμα των δυο άλλων εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται στις κάθετες. Έτσι επιβεβαιώνουν την αλήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος. **Η επανάληψη, σμίκρυνση, κίνηση του σχήματος δεν αλλάζει την εμπειρική απόδειξη του θεωρήματος**.

Αν και δεν έχουν διδαχτεί προηγουμένως ή ακούσει για το Πυθαγόρειο θεώρημα, το κατανοούν εμπειρικά, από **τα αποτελέσματα των μετρήσεων των εμβαδών** των τετραγώνων που σχηματίζονται στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Σχηματίζουν κατασκευαστικά και αλγοριθμικά patterns, ενώ αποκτούν μια πρώτη εικόνα της έννοιας της γεωμετρικής προόδου και της ακολουθίας. Συγκεκριμένα η μαθήτρια λέει «σχηματίζεται από τον προηγούμενο επί 4». Αυτό όμως αποτελεί και **ένα ορισμό σε αρχική μορφή της γεωμετρικής προόδου με λόγο 4**, που μπορεί στην συνέχεια να γενικευτεί. Η έννοια της **επαναληψιμότητας και της γενίκευσης** μιας κατασκευής έρχεται μέσα από το script file.

Ένα σημείο που ήταν σημαντικό στην εξέλιξη της έρευνας είναι η **λεκτική διατύπωση του Πυθαγορείου θεωρήματος, με ταυτόχρονη διαπίστωση της σταθερότητας του αποτελέσματος κατά την κίνηση**. Από προσωπική εμπειρία και γνωστές έρευνες, οι μαθητές έχουν δυσκολία στην διατύπωση και κατανόηση ενός θεωρήματος. Αυτό που βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν το θεώρημα είναι το **αλληλεπιδραστικό περιβάλλον, οι ζωντανές μετρήσεις, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις**.

Οι απαντήσεις των παιδιών της ΣΤ' Δημοτικού ήταν χαμηλότερου επιπέδου. Άρα **έπαιξε ρόλο η βιολογική ωρίμανση**.

Καταλαβαίνουν σε αρχική μορφή την **έννοια του άπειρου** και προσπαθούν να συσχετίσουν το 0 με το άπειρο. Ενώ τα περισσότερα παιδιά έχουν συσχετίσει το 0 με το τίποτα, το «δεν υπάρχει κάτι» και με αυτό εννοούμε το 0, εδώ υπάρχει μια μαθήτρια με διάθεση να φιλοσοφήσει που προσπαθεί να εξηγήσει τη σημασία του 0, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και μέσα από αυτό το άπειρο. Όπως αναρωτάται και εκφράζει τις σκέψεις της με απλό τρόπο, υπάρχουν αριθμοί πάνω και κάτω από το 0, **φαντάζεται την ευθεία των πραγματικών αριθμών σαν κύκλο** που αναγκαία έχει ένα σημείο που είναι η αρχή αλλά και το τέλος, επομένως το τέλος που είναι το άπειρο θα είναι και η αρχή που είναι το 0.

Ένα άλλο σημείο εντυπωσιακό στη συζήτηση αυτή για το άπειρο είναι η ικανότητα αντίληψης τους, της **άπειρης κατασκευής μέσα στο πεπερασμένο**. Μπορούμε όπως ισχυρίζονται, να κάνουμε όσα τρίγωνα θέλουμε, ο περιορισμός μας είναι να είναι μέσα στο τρίγωνο. Όταν αντιλαμβάνονται ότι το σημείο που έβλεπαν στο κέντρο του τριγώνου είναι τελικά ένα υπαρκτό τρίγωνο (με το dilate tool) και ότι στο εσωτερικό αυτό τρίγωνο μπορούμε να κάνουμε και άλλες υποδιαιρέσεις, ενώ το αρχικό τρίγωνο έχει τέτοιες

διαστάσεις που θα μπορούσε να καταλάβει το δωμάτιο , τότε αποκτούν μια πολύ δυνατή δόση **διαίσθησης του απείρου** .

Οι δεκαδικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δυνάμεις είναι μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται στη οθόνη του υπολογιστή ως αποτελέσματα υπολογισμών στις σχέσεις των εμβαδών που προκύπτουν .Και στην τάξη αυτή οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα **ίδια προβλήματα με τις αναπαραστάσεις των δεκαδικών αριθμών** και μάλιστα οδηγούμαστε στο λάθος να θεωρούμε ότι είναι ήδη γνωστές έννοιες .Σημείο αδυναμίας των μαθητών είναι οι κατασκευές των σχημάτων .Το τετράγωνο σχηματίζεται λόγω της καθετότητας των πλευρών του ,που όμως έχει προκύψει ως αποτέλεσμα κατασκευής της γωνίας που είναι ανάμεσα στις δυο πλευρές .Η καθετότητα επομένως των ευθειών μπορεί να προκύψει με x τρόπους αλλά το σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν την κατασκευή ως αποτέλεσμα της στροφής της ευθείας κατά 90° ή **κατά 270°** . Ακόμα ένα σημείο πολύ σημαντικό που σε σύγκριση με την ανάλυση που έχει γίνει για μεγαλύτερη τάξη (Α΄ Λυκείου) διαπιστώνουμε ότι εξακολουθεί να παραμένει μεγαλώνοντας το κενό και δημιουργώντας εμπόδια , είναι η κατανόηση της ιεραρχίας των τετραπλεύρων .Οι μαθητές αν δεν έχουν την δυνατότητα να μετακινήσουν το σχήμα και να κάνουν ελέγχους πειραματικούς ,**δύσκολα κατανοούν την ιεραρχία των τετραπλεύρων** .

Και αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και όταν απαντούν για το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει σχηματιστεί το πυθαγόρειο θεώρημα . Το σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου που υπάρχει στο βιβλίο δημιουργεί λανθασμένες εντυπώσεις για την κατασκευή των ορθογωνίων τριγώνων , αφού οι μαθητές **δεν μπορούν να αντιληφθούν το σχήμα ως μια οντότητα που αποτελείται από άπειρες κλάσεις ιδεατών αντικειμένων** . Οι μαθητές δεν οδηγούνται να φανταστούν το σχήμα σε διαφορετική θέση ,ούτε σκέφτονται να πειραματιστούν για να το ανακαλύψουν .Αν αλλάξει το σχήμα οι μετρήσεις του πίνακα αλλάζουν αυτόματα αλλά οι θέσεις των σημείων που είχαμε σχεδιάσει στη γραφική παράσταση όχι , με αποτέλεσμα να πρέπει να επαναλάβουμε την αποτύπωση σημείων.

Η συνέντευξη με την μαθήτριά της Α΄ Γυμνασίου **μας οδηγεί σε ενδείξεις** σχετικά με την κατανόηση της γενίκευσης της έννοιας του ορίου και του αυστηρού ορισμού στα παιδιά αυτής της τάξης .Η μαθήτριά:

Οδηγήθηκε **σε παρατηρήσεις και συσχετίσεις σχετικά με την θέση σχημάτων** και τα συνέδεσε με τις κατάλληλες μετρήσεις .Πιστεύει ότι αν υπήρχε δυνατότητα να αυξήσει την λεπτομέρεια στην κλίμακα θα είχε καλύτερες εικόνες και συσχετίσεις των μετρήσεων με την γραφική παράσταση . Συγκεκριμένα λέει « δεν είναι λεπτομερειακή η κλίμακα » .Καταλαβαίνει ότι υπάρχει κάποια τιμή του N από την οποία και μετά οι τιμές της ακολουθίας τείνουν να πλησιάσουν στο 0 . Συγκεκριμένα λέει ότι

« όλες οι τιμές των εμβαδών κάποια στιγμή και μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό N τείνουν να γίνουν 0 »

Και σε ένα σημείο παρακάτω **«Εδώ , οι τιμές δεν γίνεται να είναι κάτω από το όριο, γιατί δεν έχουμε αρνητικούς αριθμούς , είναι εμβαδά»** εννοώντας ότι άπειροι όροι περιέχονται στην ζώνη των παραλλήλων $L+\varepsilon$, $L-\varepsilon$, αλλά είναι θετικοί .

Η διαδικασία της προσέγγισης διαισθητικά σε ένα όριο που είναι ένας πραγματικός αριθμός (στο συγκεκριμένο θέμα έχουμε μια σειρά) είναι ένα θέμα που δημιουργεί ιδιαίτερη δυσκολία και στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και ΣΤ΄ Δημοτικού για τους παρακάτω λόγους

- 🌀 Οι μαθητές δεν έχουν επίγνωση των αλγεβρικών παραστάσεων , πχ .τα αθροίσματα των εμβαδών στον αριθμητή του κλάσματος
- 🌀 Δεν μπορούν να συνδέσουν τις διάφορες μορφές συμβολικής αναπαράστασης ενός ρητού (π.χ ότι το $1/4$ είναι ίσο με το $0,25$)
- 🌀 Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ένα πρόσθετο εμπόδιο αφού οι μετρήσεις των σχημάτων δίνουν σχεδόν πάντα αριθμούς μη φυσικούς
- 🌀 Οι δεκαδικοί αριθμοί δεν φαίνονται με ακρίβεια στο GSP με αποτέλεσμα ο μαθητής να προσπαθεί να βρει την αντιστοιχία του πίνακα με τα σημεία της γραφικής παράστασης

6.3 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Α΄ Λυκείου

Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου είναι όπως αναφέραμε και στην έρευνα μετρίου επιπέδου. Έχουν χάσει το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά και οι απαιτήσεις της τάξης δημιουργούν όλο και μεγαλύτερα μαθησιακά κενά.

Το εργαλείο του αρχείου εντολών δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να παίζουν με τα μαθηματικά σχήματα, αφού **διαπιστώνουν πειραματικά την επαλήθευση της κατασκευής την επανάληψη των βημάτων, την κατασκευή υπό κλίμακα**.

Υπάρχει **δυσκολία αρχικά στην μεταξύ τους επικοινωνία**. Αυτό έρχεται σχεδόν φυσικά όμως στη συνέχεια, που οι μαθητές αποκτούν κάποια ευχέρεια με το λογισμικό.

Οι μαθητές οδηγούνται σε παρατηρήσεις για την σύνδεση της τιμής του εμβαδού με το αντίστοιχο σχήμα στην οθόνη. Έτσι όταν επαναλαμβάνονται **διαπιστώνουν την ομοιότητα των σχημάτων ως προς τη θέση στο επίπεδο και ως προς το μέγεθος**. Αυτό τους βοηθά να αναπτύξουν την οπτικό – χωρική τους ικανότητα με ταυτόχρονη ανάπτυξη της οπτικοποίησης των εννοιών.

Η έννοια της ακολουθίας έρχεται να προστεθεί στα παλαιότερα γνωστικά σχήματα για τις συναρτήσεις. Συγκεκριμένα ο μαθητής σε κάποιο σημείο λέει « **Η συνάρτηση είναι μια ακολουθία. Η ακολουθία τείνει στο 0** ». Δυσκολία υπάρχει σχετικά με την **γραφική παράσταση της έννοιας**. Αυτό που βλέπουν στην οθόνη τους είναι σημεία, που ενώνουν τους φυσικούς αριθμούς με το εμβαδόν του σχήματος που θέλουμε. Εδώ διαπιστώνεται η ύπαρξη ενός εμποδίου. **Οι μαθητές στο σχολείο έχουν μάθει να ενώνουν τα σημεία**, αφού μια καμπύλη ή μια ευθεία είναι αποτέλεσμα της συνένωσης των σημείων που παίρνουμε αυθαίρετα αλλά ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας κάνουμε την γραφική παράσταση. Μια μαθήτρια λέει «**Μοιάζει με μια υπερβολή**».

Οι μαθητές καταλαβαίνουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών, και μπορούν να το δουν να σχηματίζεται και να επαναλαμβάνεται για όσες αλλαγές πίνακα θέλουμε, δεν έχουν όμως από ότι φαίνεται καταλάβει **την σημασία του στην γραφική παράσταση**. Κοινό πρόβλημα (σε όλες τις τάξεις) είναι η κατασκευή της γραφικής παράστασης από τον πίνακα τιμών. Αυτό γιατί οι μαθητές έχουν μάθει να αναπαριστούν στο σύστημα συντεταγμένων, ζεύγη αριθμών που είναι συνήθως ακέραιοι ή δεν έχουν τόσα δεκαδικά ψηφία που υπάρχουν στο πρόβλημα μας. Ακόμα το GSP δίνει την παράσταση απευθείας στην οθόνη του υπολογιστή, χωρίς να φωτίζει για παράδειγμα το κάθε σημείο με το αντίστοιχο ζεύγος του πίνακα και δεν υπάρχει δυναμική σύνδεση με απευθείας μεταβολή των τιμών της γραφικής παράστασης όταν μεταβάλλονται οι τιμές του πίνακα.

Το πιο σημαντικό είναι ότι μπορούμε να αφήσουμε όλα τα αποτελέσματα των γραφικών παραστάσεων στην οθόνη και να επαναλάβουμε την μέτρηση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να διαπιστώνουν την επαγωγική προσέγγιση της ίδιας απόδειξης.

Οδηγούνται έτσι στην έννοια του ορίου της ακολουθίας των εμβαδών των τετραγώνων διαισθητικά. Τα εμβαδά γίνονται 0, όπως διαπιστώνουν, όταν αυξάνει το N (ο αριθμός των επαναλήψεων). Μάλιστα το βλέπουν στην εικόνα ότι υπάρχει κάποιο N από το οποίο και μετά οι τιμές της ακολουθίας τείνουν να γίνουν 0.

Αυτό είναι και το δυνατό σημείο της μεθόδου. **Ο μαθητής οπτικοποιεί τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και τοποθετεί τις μεταβλητές N , ε πάνω στο σχήμα**, τις μετακινεί και παίρνει κάποια αποτελέσματα που είναι πολύ δύσκολο να αντιληφθεί όταν αντιμετωπίζει το θέμα με φορμαλιστικό τρόπο.

Οι απόλυτες τιμές είναι ένα κεφάλαιο που προκαλεί μεγάλο φόβο και αντιπάθεια για τα μαθηματικά στους μαθητές. Εδώ οι τιμές $L+\varepsilon$, $L-\varepsilon$ οδηγούν τους μαθητές να σκεφτούν (με δυσκολία), το συγκεκριμένο θέμα. Να συνδέσουν την σχέση που έχουν δει στο βιβλίο των Μαθηματικών με την εικόνα και στην συνέχεια να σκεφτούν την αντικατάσταση του x με το E . Την έκπληξη κάνει μια μαθήτρια που καταλαβαίνει ότι το N και το E έχουν μια σχέση. Συγκεκριμένα λέει: «**όσο μεγαλώνει το N μικραίνει το E** » και **το επαναλαμβάνει και γραπτά**. Η συγκεκριμένη μαθήτρια έμοιαζε να παρακολουθεί παθητικά, αλλά η παρέμβαση της στο συγκεκριμένο σημείο έδειξε ότι είχε αρχίσει να καταλαβαίνει. Η αντίδραση της είχε μεγαλύτερη σημασία γιατί πρόκειται για μαθήτρια με ιδιαίτερο φόβο απέναντι στα μαθηματικά και όπως δηλώνει η ίδια αρκετές αδυναμίες. Το συμπέρασμα που προκύπτει

είναι πολύ σημαντικό γιατί η μαθήτρια οδηγήθηκε σε κατανόηση μιας έννοιας μόνο από τις αναπαραστάσεις του υπολογιστή και ακόμα πιο σημαντικό ότι είχε λεκτική αλληλεπίδραση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας, επομένως ξεπέρασε προς στιγμήν τους φόβους της.

6.4 Παρατηρήσεις που προέκυψαν από την έρευνα στην τάξη της Β' Λυκείου

Οι μαθητές της Β' Λυκείου έχουν υψηλό επίπεδο γνώσεων. Η εικόνα έννοιας της ακολουθίας είναι η πρώτη έννοια που οι μαθητές συνέδεσαν με τον ήδη υπάρχοντα ορισμό της. Οι μαθητές αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον του υπολογιστή που σκοπό έχει μέσα από την δραστηριότητα την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος. Έτσι η διαδικασία ενεργοποιεί τον ορισμό έννοιας με αποτέλεσμα την εσωτερίκευση της έννοιας. Έχουν αναλυτική σκέψη ειδικά η μια μαθήτρια που οδηγείται από το artefact αντικείμενο στην σκέψη του αθροίσματος απείρων σειρών εμβადών με όριο πραγματικό αριθμό.

Οι απαντήσεις τους δηλώνουν ότι οι μαθητές έχουν υψηλό επίπεδο θεωρητικών γνώσεων (επαναλαμβάνουν και με διαφορετικές διατυπώσεις το ίδιο θεώρημα). Η διερεύνηση του σχήματος είναι κάτι που τους οδηγεί σε εκπλήξεις (για παράδειγμα στο σημείο που διαπιστώνουν ότι η κατασκευή επαναλαμβάνεται ακόμα και αν το τρίγωνο είναι πολύ μικρό). Η διαδικασία του αρχείου εντολών βοηθά από μόνη της τον μαθητή να οργανώσει την σκέψη του, να επαναφέρει ένα γνωστικό σχήμα, να ανασχηματίσει μια εικόνα έννοιας, να κατανοήσει την κατασκευή μιας διαδικασίας. Οι πίνακες και τα σχήματα μέσα από την εικόνα του υπολογιστή οδηγούν τους μαθητές να σκεφτούν ότι τα μαθηματικά μπορούν να γίνουν ένα μάθημα χειροπιαστό. Συγκεκριμένα απαντούν ότι οι όροι της ακολουθίας είναι n ενώ θα μπορούσαν να έχουν το αποτέλεσμα από τον πίνακα. Δεν συναντούν ιδιαίτερο πρόβλημα στις γραφικές παραστάσεις. Βέβαια όπως και οι υπόλοιποι μαθητές οδηγούνται στην σκέψη ότι τα σημεία ενώνονται και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι είναι απότομη υπερβολή. Σε συγκεκριμένο σημείο της έρευνας υπάρχουν οι εξής παρατηρήσεις «Η μαθήτρια είχε μάθει πολύ καλά τον ορισμό της ακολουθίας, και τις γεωμετρικές προόδους (ήξερε όπως και οι άλλοι μαθητές ορισμούς και τυπολόγιο) αλλά δεν είχε καταλάβει (όταν ασχολήθηκαν με την έννοια της ακολουθίας στην τάξη) ότι στη γραφική παράσταση δεν μπορούμε να πάρουμε και άλλες τιμές από αυτές που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ακολουθίας (το σύνολο N των φυσικών αριθμών) και επομένως δεν μπορεί να υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία (πραγματικοί αριθμοί)»

Στη συνέχεια βέβαια η ίδια συνεχίζει «ααα! εγώ δεν το είχα καταλάβει ότι σε μια ακολουθία δεν μπορούμε να ενώσουμε τις τιμές τόρα το κατάλαβα !!» (εννοεί μέσα από την χρήση H/Y)

Επιθυμητό αποτέλεσμα κατά την διάρκεια της έρευνας είναι οι μαθητές να φτάσουν τελικά στο σημείο να δομήσουν τμήματα του ε - δ ορισμού του ορίου και στην συνέχεια να τα συνθέσουν ώστε να έχουμε τον αυστηρό ορισμό. Αρχικά αποκτούν μια διαισθητική έννοια της απειροελάχιστης ποσότητας του εμβადού του τετραγώνου

Οι ερωτήσεις των μαθητών μας οδηγούν να σκεφτούμε την αρχή της μετάβασης των μαθητών σε επίπεδο αυστηρότητας van Hiele. Σε κάποιο σημείο της έρευνας οδηγούμαστε να παρατηρήσουμε τα εξής:

«Από τις οποίες και μετά Η ερώτηση ήταν διατυπωμένη κατά τέτοιο τρόπο που δεν υπήρχε κάποιο νόημα. Η μαθήτρια εννοούσε- μήπως υπάρχει ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών που οι αντιστοιχίες τους στον άξονα των $\psi\psi'$ είναι 0; Οδηγήθηκε από το σχήμα και τις αναπαραστάσεις σε ένα σημαντικό τμήμα του αυστηρού ορισμού του ορίου ακολουθίας. Η ήταν η αρχή της μετάβασης σε ένα επίπεδο αυστηρότητας που όμως προέκυψε με την οικοδόμηση της έννοιας μέσα από το περιβάλλον του H/Y »

Το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου είναι ένα θέμα που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή μέσα από τη δραστηριότητα. Οι λόγοι που προκαλούν ιδιαίτερο φόβο στην αντιμετώπιση του συγκεκριμένου θέματος είναι οι:

❧ οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν το εσωτερικό του σχήματος (πως συνεχίζει με τις άπειρες υποδιαίρεσεις),

❧ δεν έχουν κάποια αποτελέσματα εμβადών (στην 30^η π.χ επανάληψη) ώστε να καταλάβουν το θέμα πρακτικά και

❧ το πιο σημαντικό η απόδειξη του τύπου επικαλείται φορμαλιστικές διαδικασίες υπολογισμού ορίων που ο μαθητής τυπικά μαθαίνει στην επόμενη τάξη .

Σε αντίθεση με αυτά τα συμπεράσματα από προηγούμενη εμπειρία που έχουμε καταλήξει από τα μαθήματα με το χαρτί και τον πίνακα , εδώ οδηγούμαστε στα εξής :

Στην έρευνα της αντίστοιχης τάξης έχουμε διαπιστώσει ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν το σχήμα πολύ καλά , έχουν αποτελέσματα εμβადών που τους δίνουν να καταλάβουν ότι το άθροισμα αυξάνεται με απειροελάχιστα (μπορούν να ζητήσουν την 30^η επανάληψη και να την έχουν στον πίνακα) . Το αποτέλεσμα που βλέπουν είναι ένας αριθμός που παραμένει σταθερός από έναν όρο και μετά . Έτσι αποκτούν διαισθητικά την έννοια του ορίου ως αποτέλεσμα του αθροίσματος των απείρων όρων της φθίνουσας (αριθμ. προόδου) ακολουθίας . Στην συγκεκριμένη έρευνα όπως διαπιστώσαμε οι μαθητές χρησιμοποίησαν και τις σημειώσεις τους να το επιβεβαιώσουν φορμαλιστικά .

Αυτό που δεν μπορούν αρχικά να καταλάβουν είναι το άπειρο σαν διαδικασία αθροιστική . Συγκεκριμένα σκέφτονται . Είναι άπειρο , άρα πολύ μεγάλο , πως ενώ προσθέτουμε άπειρα ποσά φτάνουμε να έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό . Στη συνέχεια καταλαβαίνουν ότι τα ποσά που προστίθενται είναι απειροελάχιστα . Η υπέρβαση αυτού του εμποδίου είναι μια διαδικασία που απαιτεί χρόνο και ίσως περισσότερες συναντήσεις και παραδείγματα .

Αντίθετα όταν οδηγούμαστε στη σελίδα που υπάρχει η εικόνα του ορισμού ακολουθίας που τείνει στο 0 οι μαθητές σε συνεργασία καταλαβαίνουν τα εξής :

❧ Πρέπει το ε να είναι μεγαλύτερο του 0

❧ Υπάρχει n_1 όπως το γράφουν τέτοιο ώστε να είναι για $N > n_1$ να έχουμε το όριο της ακολουθίας των εμβαδών που τείνουν στο 0 .

❧ **Ότι υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στον όρο n_1 της ακολουθίας και το ε**

❧ Ότι το L είναι το 0 στην συγκεκριμένη περίπτωση

❧ Υπάρχουν άπειροι όροι μεταξύ του $L + \varepsilon$, $L - \varepsilon$ και πεπερασμένοι εκτός

που είναι αρκετά κοντά στον αυστηρό ορισμό αφού περιέχονται σχεδόν όλα τα τμήματα του ορισμού . Δηλαδή το όριο των εμβαδών είναι το 0 τότε και μόνον τότε όταν συμβαίνει η απόλυτη τιμή της διαφοράς να είναι μικρότερη από το ε

6.5 Συνολικές παρατηρήσεις

Στα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας οι μετρήσεις είναι ζωντανές ψηφιακές αναπαραστάσεις που έχουν προκύψει από τις τιμές των αντικειμένων και τις σχέσεις γωνιών , τμημάτων , εμβαδών υπό την έννοια ότι αλλάζουν από κοινού με το σύρσιμο . Προσδιορίζουν τρία είδη πληροφοριών που οι μετρήσεις μπορούν να παρέχουν και οδηγούν προς τη θεωρητική σκέψη (Oliveiro and Robutti ,2001) Διχοτομικές πληροφορίες (για παράδειγμα αν μια ποσότητα είναι μεγαλύτερη από άλλη ή όχι), ποσοτικές πληροφορίες (π.χ το μέτρο μιας ποσότητας όσον αφορά μια μονάδα), και συγγενική χρήση των μετρήσεων (π.χ συνδέοντας τις μετρήσεις δυο ή περισσότερων μετρήσεων)

Η διαδικασία του animation παράγει τις αλλαγές των τιμών των πινάκων που επιτρέπει στους μαθητές να δουν τη δυναμική διαδικασία σε μια εικόνα και τους βοηθά να κατανοήσουν την έννοια του ορίου . Αυτό που οι μαθητές μπορούν να δουν στην οθόνη του υπολογιστή είναι ότι ένα αντικείμενο-fractal παρά τις αλλαγές θέσεων και τις αυξομειώσεις του μεγέθους του ,δίνει κάποια τιμή εμβαδού στον πίνακα που παραμένει σταθερή ενώ όλες οι υπόλοιπες αλλάζουν .

Έτσι οι μαθητές

«έπρεπε να αλληλεπιδράσουν με τη δυναμική γραφική παράσταση, για να έχουν τον έλεγχο της δυναμικής αναπαράστασης» (Kidron, Zelavi & Openhaim, 2001)

Η εξέλιξη της διαδικασίας συντελείται σε διαφορετικές σελίδες με σχηματικούς μετασχηματισμούς artefacts που μπορούν να ενεργοποιηθούν από τους μαθητές.

Στις δραστηριότητες κατασκευάστηκαν με την βοήθεια του λογισμικού γραφικές παραστάσεις με απευθείας αποτύπωση των σημείων . Σύμφωνα με τη Sfard, η «*γραφική παράσταση μιας συνάρτησης προσφέρει μια δομική αντίληψη.....*» (Sfard 1991, σελ.10).*Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα για δομική προσέγγιση θεωρείται ως ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας.* Όπως διαπιστώσαμε η διαδικασία της κατανόησης της γραφικής παράστασης είναι ένα από τα πιο δύσκολα και σημαντικά σημεία της έρευνας .

Το GSP με την διαδικασία της αποτύπωσης των τιμών της γραφικής παράστασης σε μια ακολουθία σημείων ενισχύει την επεξήγηση της προσεγγιστικής διαδικασίας.

Όπως αναφέρεται στο άρθρο της Robutti (2001) η έννοια του ορίου είναι δυνατόν να διδαχτεί είτε με προσεγγιστικό τρόπο ακολουθώντας κάποια διαισθητική μέθοδο ή με υπολογιστικό τρόπο (π.χ το Derive) στην οποία οι μαθητές βλέπουν την αριθμητική τιμή του ορίου. Στην δεύτερη περίπτωση αποκτούν το πλεονέκτημα να θεωρήσουν το όριο ως στατική αξία και να το δουν ως αντικείμενο, αλλά χάνουν ως προς την διαισθητική προσέγγιση (Monaghan, Sun & Tall, 1994) . Ο υπολογισμός του ορίου δεν γίνεται τυποποιημένα στις προτεινόμενες δραστηριότητες αλλά εμφανίζεται ως αποτέλεσμα της επαναληπτικής διαδικασίας .Έτσι οι μαθητές εξοικειώνονται με την διαισθητική μέθοδο , αλλά ταυτόχρονα ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας βλέπουν την αριθμητική αξία του ορίου .

Επομένως :

Η προτεινόμενη προσέγγιση οδηγεί τους μαθητές να θεωρήσουν το όριο ως αντικείμενο χωρίς να στερηθούν την αίσθηση της διαδικαστικής προσέγγισης .Έτσι όπως φαίνεται υπάρχει ένα γεφύρωμα των δυο τρόπων κατασκευής της έννοιας του ορίου .

Η έρευνα στην εξέλιξη της συνεχίζει με την ενσωμάτωση της γνωσιακής ανάλυσης για το άπειρο .**Το άπειρο δεν εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή αλλά εννοείται σαν κατάληξη μιας άπειρης διαδικασίας ενώ με την δυναμική αναπαράσταση του fractal μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα πραγματικά άπειρα ποσά ως αντικείμενα.**

Ένας άλλος τρόπος που ο μαθητής οδηγείται στην σύλληψη της έννοιας του ορίου είναι η χρήση των απειροελάχιστων .Οι (Milani & Baldino, 2002)υποστηρίζουν ότι «*αντί να περιμένουμε να προκύψουν τα απειροελάχιστα θα ήταν καλό να τα υποκινήσουμε εμείς*»

Οι ίδιοι ερευνητές θέτουν ερωτήματα μήπως η συνειδητοποίηση των απειροελάχιστων υποκινεί την μετάθεση του εμποδίου προς την κατανόηση των ορίων ή δημιουργεί νέα εμπόδια .

Με το zoom έχουμε την δυνατότητα να δείξουμε το **απείρως κοντά** και να χρησιμοποιήσουμε τα απειροελάχιστα .Έτσι μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει σε ένα πολύ μικρό διάστημα . Οι (Milani & Baldino, 2002) ισχυρίζονται ότι η ερευνητική διαδικασία οδηγεί τους μαθητές αυθόρμητα στις εικόνες της έννοιας που έχουν σχηματίσει για τα απειροελάχιστα . Όπως γράφει ο Kidron (2002). «*Η παραίτηση ότι οι άπειροι υπολογισμοί εκτελούνται αμέσως μπορεί να διευκολύνει τη μετάβαση από το συμβολικό χειρισμό σε ένα συμβολικό αντικείμενο*»

Στόχος της έρευνας ήταν να εξετάσει μέχρι ποιο σημείο υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των προσεγγίσεων από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις μέσα από το λογισμικό και πως μπορεί να αντιληφθεί ο μαθητής το άπειρο ποσό ως όριο-αντικείμενο μιας άπειρης διαδικασίας .

Η ανάλυση της διαδικασίας εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης, η περιγραφή της φύσης των οπτικών αναπαραστάσεων (visual representations), και ο ρόλος της διαίσθησης (intuition) και της φαντασίας (imagery) στη δημιουργία αυτών των αναπαραστάσεων, είναι – σύμφωνα με πολλούς ερευνητές - από τα πιο δύσκολα θέματα στα πλαίσια της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης .Αυτός είναι και ο λόγος που το «*εικονικό επίπεδο*» αποδίδεται συχνά και ως «*οπτικο-χωρικό επίπεδο*» («visuo-spatial»). (Κολέζα ,2003) Σε πρόσφατη δημοσίευσή τους, οι Pinto & Tall (2002, σελ.2), αναφέρουν σχετικά:

«Υπάρχουν μαθητές που χρησιμοποιούν μια εντελώς διαφορετική στρατηγική...χτίζουν με βάση τη φαντασία τους, δίνουν νόημα στον ορισμό κατασκευάζοντας μια εικόνα που

υποστηρίζει τους τυπικούς συλλογισμούς ...εξελίσσουν τη σκέψη τους εκλεπτύνοντας και επανακατασκευάζοντας.

την ήδη υπάρχουσα νοητική εικόνα μέχρι που να φτάσει σε μια μορφή που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της τυπικής θεωρίας».

Ο στατικός ε-δ ορισμός του ορίου- αντικειμένου είναι το τελευταίο βήμα της διαισθητικής διαδικασίας. Στο GSP αποκτά κίνηση και οι ποσότητες ε,N δεν είναι μεταβλητές που μπορεί να οδηγηθεί κάποιος μόνο με την φαντασία του στην κατανόηση τους

Οι δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν στα διάφορα σχολικά επίπεδα της έρευνας μπορούν να χαρακτηριστούν ως δραστηριότητες προ-λογισμού που είναι χρήσιμες να εισαγάγουν τους μαθητές στην έννοια της ακολουθίας και του ορίου . Ένα άτομο έχει κατασκευάσει μια μαθηματική έννοια ως νοητικό αντικείμενο, όταν έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την επεξεργασία ως μια ολότητα. Η εξέλιξη στην ανάπτυξη μιας μαθηματικής γνώσης δεν έρχεται με νέες κατασκευές που έχουν προκύψει ως βελτίωση των παλαιών , αλλά διαφέρουν σε πολυπλοκότητα αν και διατηρούν σημεία ομοιότητας με τις προηγούμενες . Αυτή η ιδέα σχετίζεται με την γνωστή διχοτόμηση του Piaget για την αφομοίωση και τη συμμόρφωση . Η εφαρμογή αυτής της θεωρίας αποτελεί βάση για τη σχεδίαση μιας διδασκαλίας, η οποία θα υποστηρίξει τη διαδικασία της στοχαστικής αφαίρεσης κατά την εκμάθηση ανώτερων μαθηματικών εννοιών

Αυτή η μελέτη εστιάζει στις απαντήσεις των σπουδαστών στα προβλήματα λαμβάνοντας υπόψη το σχολικό επίπεδο αλλά και διερευνάται η δυνατότητα κατανόησης συνθετότερων εννοιών και σε μικρότερες τάξεις .

Αναλύονται οι διαφορετικές στρατηγικές που εφαρμόζονται και στο τέλος ταξινομούνται οι απαντήσεις και τα συμπεράσματα των μαθητών .

Μέσα από τις διαδικασίες οι μαθητές και κάνοντας χρήση της **τεχνολογίας ελέγχουν τις στρατηγικές των υπολογισμών σαν εξέλιξη μιας διαδικασίας εξέτασης των υποθέσεων που έχουν κάνει**

Στην εξέλιξη της διαδικασίας χρησιμοποιείται και το Excel για να υπολογίσει το άθροισμα κάποιων σειρών και να επικυρώσει τις εικασίες ή τα αποτελέσματα που θέλουμε να καταλήξουμε και απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων.

Ο υπολογιστής δεν χρησιμοποιείται ως μέσο που μπορούμε να εικάσουμε και να παρατηρήσουμε αλλά και να αποδείξουμε με παραγωγικό συλλογισμό .Από την περιγραφή οι μαθητές οδηγούνται να αναπτύξουν ένα θεωρητικό τρόπο σκέψης αφού η διαδικασία όπως χιτίζεται σταδιακά τους οδηγεί στο να εξετάσουν περισσότερες παραμέτρους .**Το σημαντικό στην περίπτωση αυτή είναι να επιμεινουμε κατάλληλα σε ένα θέμα που ίσως είναι δύσκολο να εννοηθεί . Ο μαθητής πρέπει να παρατηρήσει, να εικάσει σε παραδείγματα που θα έχουν το ίδιο αποτέλεσμα . Έτσι θα διαπιστώσει την αλήθεια των σχέσεων μέσα από επαναλήψεις των ιδίων αποτελεσμάτων και συνεχείς συγκρούσεις που προέρχονται με τις προϋπάρχουσες γνώσεις .**

Το αποτέλεσμα της μάθησης έρχεται ως αποτέλεσμα γνωστικής σύγκρουσης .Οι μαθητές θέτουν ερωτήσεις ,αλλά κατασκευάζουν την γνώση μόνοι τους από τα προϋπάρχοντα σχήματα με γνωστικές συγκρούσεις .Όπως αναφέρει και η Mariotti (2001) **«κάθε ισχυρισμός οδηγεί στην θεωρητική του τεκμηρίωση και στον καθορισμό των ανάλογων σχέσεων »**

Ο J .Olive γράφει στο : *« Learning Geometry Intuitively with the aid of a new computer tool : The Geometer's Sketchpad »*

Τα πρότυπα προγράμματος σπουδών και αξιολόγησης για τα σχολικά μαθηματικά (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) (NCTM, 1989) συστήνουν ότι οι μαθητές στη στοιχειώδη και μέση εκπαίδευση πρέπει να μελετήσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις μέσω της πρακτικής εμπειρίας με τα σχήματα και τα patterns, ενσωματώνοντας την μαθηματική εμπειρία με τις εργασίες τους , και μέσω της χρήσης των γεωμετρικών προγραμμάτων στον υπολογιστή.

Τα Standards δίνουν έμφαση στο γεγονός ότι «ιδέες και διαισθήσεις για δι- τρι διαστάτα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους, οι αλληλεπιδράσεις από τα σχήματα και τα αποτελέσματα των αλλαγών των σχημάτων είναι σημαντικές πτυχές της αίσθησης του χώρου” (p. 48).

Αυτή η γεωμετρική εμπειρία είναι κρίσιμη για τους νέους σπουδαστές. Έρευνα βασισμένη στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του van Hiele (van Hiele, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1988;

Scally, 1990) έχει δείξει ότι οι μαθητές εισερχόμενοι στο Γυμνάσιο έχουν πολύ λίγη γνώση ή εμπειρία των γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων ; οι περισσότεροι λειτουργούν στο οπτικό επίπεδο γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με το μοντέλο του van Hiele.

Αυτοί οι σπουδαστές μπορούν να κάνουν κάτι περισσότερο από το αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα .Δεν αποτελεί έκπληξη λοιπόν , ότι τα αποτελέσματα της *Fourth National Assessment of Educational Progress (NAEP)* δείχνουν ότι λιγότερο από το ένα τρίτο των μαθητών 7^{ης} βαθμίδας δεν παίρνουν γεωμετρία , και οι γνώσεις τους στον προσδιορισμό των σχημάτων είναι πολύ φτωχές (*Lindquist, 1989*). Κατά την διάρκεια των τελευταίων μηνών έχει εξεταστεί ή ικανότητα των μαθητών στο *Department of Mathematics Education at the University of Georgia* με εξερεύνηση ενός νέου προγράμματος του *Geometer's Sketchpad* (*Jackiw, 1991*). Αυτό το λογισμικό περιβάλλον παρέχει στους μαθητές και τους δασκάλους την δυνατότητα να εξερευνήσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις διαισθητικά και επαγωγικά.. Η Δυναμική του φύση το κάνει και συναρπαστικό και προσιτό ακόμη και για στοιχειώδεις σπουδαστές.....

Η γεωμετρία είναι το πλέον κατάλληλο περιβάλλον για να αρχίσουμε την προσπάθειά μας για την βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης . Και αυτό γιατί μπορούμε ευκολότερα να δημιουργήσουμε ανοικτά περιβάλλοντα μάθησης . Το περιβάλλον μιας γεωμετρικής δραστηριότητας εκτός από τα εργαλεία περιέχει και γνώση . Όταν ο μαθητής εργάζεται σε ένα πρόβλημα , όπως για παράδειγμα αυτό που αφορά τα μέσα των τριών πλευρών ενός τριγώνου έχει μπροστά του έχει μπροστά του ένα περιβάλλον που έχει πολλές μικρές «μπουκιές » γνώσης (όπως θα έλεγε ο S.Papert) Ένα περιβάλλον γεωμετρικής δραστηριότητας περιλαμβάνει ασφαλώς και τους στόχους μάθησης που θέτει είτε ο εκπαιδευτικός , αφού αυτός επιλέγει το πρόβλημα στο πλαίσιο της διδασκαλίας του αλλά και ο μαθητής να ενσωματώσει δικούς του στόχους και δικές του προσδοκίες . Στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος αποφεύγεται η εμπειρική εξερεύνηση των γεωμετρικών συσχετίσεων επειδή οι κατασκευές με το μολύβι στο χαρτί, όσο και οι μετρήσεις με τα γεωμετρικά όργανα και τη χρήση άλλων μέσων, όπως, για παράδειγμα, διαφανούς ή τριγωνισμένου χαρτιού, είναι κουραστικές, χρονοβόρες και δεν παρέχουν μεγάλη ακρίβεια.

Η γεωμετρία ενσωματώνει την κουλτούρα όλης της ανθρωπότητας .Επέδρασε σε σημαντικό βαθμό στη επιστημονική σκέψη , την ιδεολογία και την παιδεία .Με ποιο τρόπο η διδασκαλία μπορεί να ενισχύσει την μάθηση της γεωμετρίας αποτελεσματικά .Όπως αναφέρει η Κολέζα ιδιαίτερα καθοριστικό είναι το πλαίσιο στο οποίο αποκτάται η γνώση . Ο δάσκαλος πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός στην επιλογή του περιβάλλοντος και των δραστηριοτήτων που επιλέγει . Και ακόμα η γνώση αποκτιέται μέσω κατασκευής . Όπως αναφέρει ο Papert : καλύτερη μάθηση δεν θα συντελεστεί με το να βρούμε καλύτερους τρόπους για τη διδασκαλία , αλλά με το να δώσουμε καλύτερες ευκαιρίες στους μαθητές για κατασκευές .

Όταν ο μαθητής καταφέρνει να λύσει ένα πρόβλημα , αυτός ο μαθητής οικοδομεί τελικά μια νέα γνώση , συνδέει έννοιες μεταξύ τους , χρησιμοποιεί ποικίλες αναπαραστάσεις , αξιολογεί τεχνικές επίλυσης . Βασίζόμενοι στα αποτελέσματα τόσων εμπειρικών ερευνών καλή επίδοση στα μαθηματικά δεν συνεπάγεται και υψηλού επιπέδου κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών . Οι μαθητές είναι γνωστό ότι αναπτύσσουν μεμονωμένες δεξιότητες , όσο αφορά την χρήση αλγορίθμων και δεν τα καταφέρνουν να κατανοήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις αφηρημένες έννοιες . (*M.Artigue, 1991*). Η τάση να αναπτύσσουν οι μαθητές επιφανειακές στρατηγικές είναι συνέπεια της γενικής αρωγής που παρέχεται στη θεσμοθετημένη εκπαίδευση και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του γνωστικού τομέα των μαθηματικών . Η γλώσσα , το περικείμενο και οι αναπαραστάσεις των παραδοσιακών διδακτικών εργαλείων δεν βοηθούν στην ανάπτυξη και περιγραφή των αφηρημένων εννοιών των μαθηματικών . Με βάση τη θεωρία της στοχαστικής αφαίρεσης του Piaget ο υπολογιστής θεωρήθηκε ένα γνωστικό, διδακτικό και κοινωνικό εργαλείο που βοηθά μαθητές (και τον καθηγητή) να εξωτερικεύσουν αφηρημένες διαδικασίες σκέψης. Η χρήση διαφορετικών εξωτερικών αναπαραστάσεων έχει ως στόχο να ωθήσει τους μαθητές να συλλογιστούν και να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους. Όπως αναφέρεται και στο βιβλίο «Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες

»των Vosniadou, Eric De Corte , Robert Glasserv , Heinz Mandl οι Erno Lehtinen, Sisko Repo γράφουν :

Η χρήση ενός προγράμματος σε υπολογιστή μπορεί να προωθήσει ουσιαστικά την κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και επίσης, σε κάποιο βαθμό, ανάμεσα στον καθηγητή και στους μαθητές. Ειδικότερα η μετάβαση με ευελιξία σε διάφορες μορφές αναπαραστάσεων βοηθά σε αυτό το είδος συνεργατικής σκέψης. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων πάνω στον υπολογιστή, δίνεται η δυνατότητα να εξωτερικευτεί η υπόθεση, καθώς και η διαδικασία της αφηρημένης σκέψης στα πλαίσια του κοινού συλλογισμού. Ωστόσο, αυτή η αλληλεπίδραση δεν βασίζεται κατά κύριο λόγο σε λεκτικές διατυπώσεις, αλλά στη μη λεκτική αλληλεπίδραση μέσω του υπολογιστή. Αυτό το είδος επικοινωνίας προφανώς διευκολύνει τη δόμηση αφηρημένων και σύνθετων μαθηματικών εννοιών.

Οι νέες τεχνολογίες στη εκπαίδευση δεν μπορούν παρά να αντιμετωπιστούν παρά σαν τμήμα της γενικότερης φιλοσοφίας που έχουμε για την εκπαίδευση και κατά προέκταση για την κοινωνία. Είναι σημαντικό να υπάρξει ένας διάλογος που θα ενδιαφερθεί για τις συνθήκες που επικρατούν στην εκπαίδευση και για τη φιλοσοφία και προσανατολισμό στη σύνδεση των βαθμίδων. Πολλοί εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν με δυσπιστία, άρνηση ή επιφύλαξη την εισαγωγή ηλεκτρονικού υπολογιστή σε τάξη. Καλό θα ήταν να απαντήσουμε στα ερωτήματα

- ✦ Τονώνεται το ενδιαφέρον του εκπαιδευτικού και των μαθητών όταν διαπραγματεύεται μια έννοια μέσα από δραστηριότητες στο περιβάλλον του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας και γενικότερα με την χρήση Η/Υ;
- ✦ Είναι οι υπολογιστές ένα μέσο που βοηθά στην ανάπτυξη εννοιών και νοημάτων και πόσο αποτελεσματικότεροι μπορούμε να γίνουμε σαν εκπαιδευτικοί ;
- ✦ Πως θα συνδυαστούν από τον διδάσκοντα παραδοσιακό μοντέλο και νέες τεχνολογίες ;
- ✦ Η χρήση Η/Υ βοηθά στην ανάπτυξη προβληματισμών και εικασιών ;
- ✦ Πως θα διαμορφωθεί η στάση εκπαιδευτικού και μαθητή στο νέο σύνθετο αλληλεπιδραστικό περιβάλλον ;
- ✦ Πως θα επιλυθούν τα προβλήματα διαχείρισης μιας τάξης κάτω από τις νέες συνθήκες ;
- ✦ Πως θα επιλέξει τα κατάλληλα προγράμματα ο κάθε εκπαιδευτικός μέσα από την πληθώρα της πληροφοριακής μάζας που εμφανίζεται στο διαδίκτυο ;

Θα παραθέσω τα συμπεράσματα και τις απόψεις μου παρακάτω σχετικά με το τι αποκόμισα από την πειραματική μελέτη μου , συμπεράσματα που χρειάζονται όμως πειραματική επαλήθευση σε μεγάλη κλίμακα :

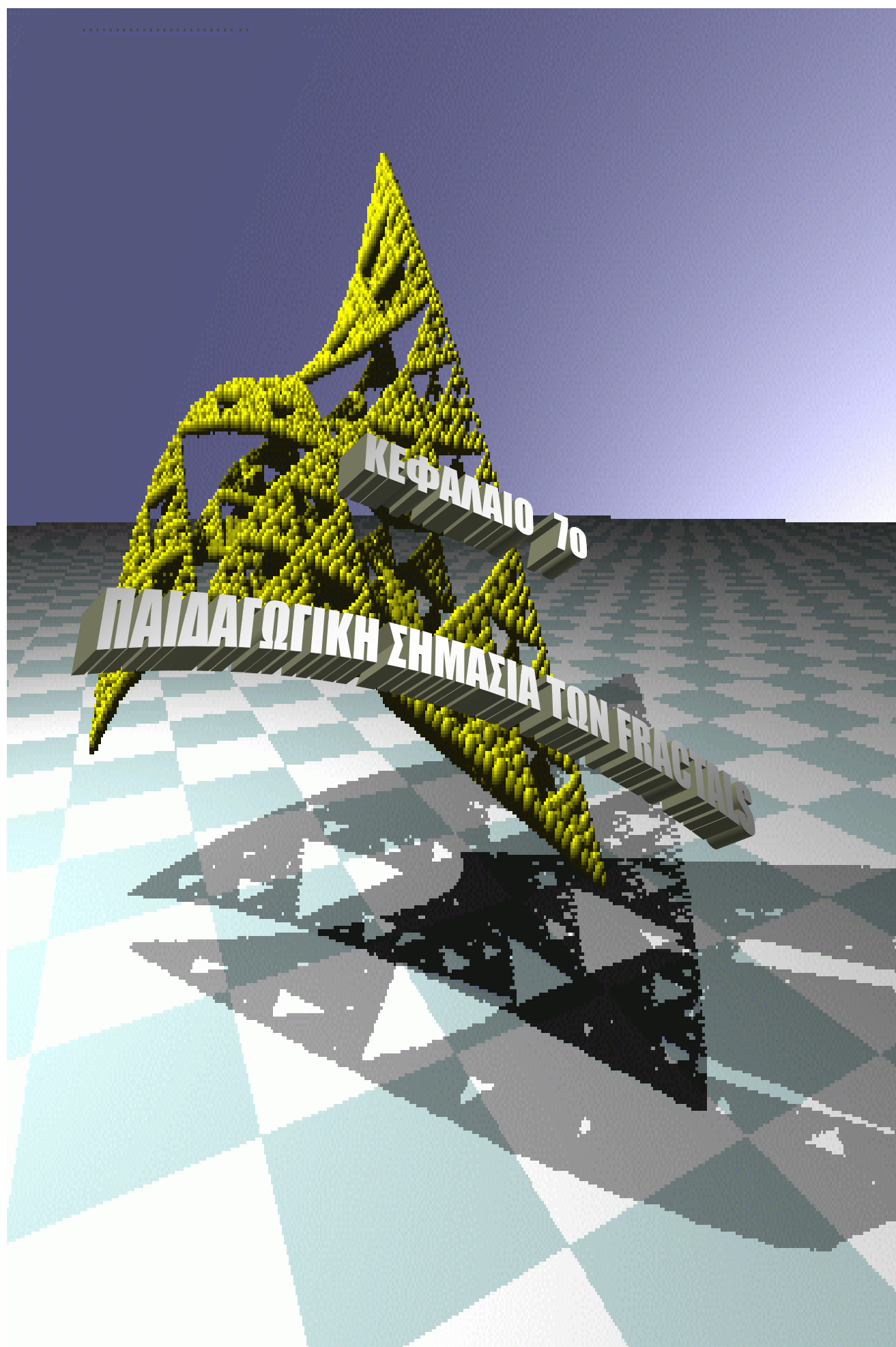
Ο υπολογιστής βοηθά τον μαθητή και τον εκπαιδευτικό να υπαναχωρήσει στην απόσπαση από την πραγματικότητα που πραγματοποιείται από την τυποποίηση και τον φορμαλισμό. Τον βοηθά να αντιμετωπίσει τα μαθηματικά κάτω από ένα πιο ρεαλιστικό πνεύμα. Βοηθά τον μαθητή να εξωτερικεύσει τις υποθέσεις και να εντάξει την αφηρημένη σκέψη στα πλαίσια του κοινού συλλογισμού. Η αλληλεπίδραση με την χρήση του υπολογιστή δεν βασίζεται κατά κύριο λόγο σε λεκτικές διατυπώσεις, αλλά στη μη λεκτική αλληλεπίδραση. Αυτό οδηγεί στην δόμηση αφηρημένων κι σύνθετων μαθηματικών εννοιών.

Όπως γράφουν οι Erno Lehtinen, Sisko Repo:

.....είναι ακόμα ανοιχτό το ζήτημα αν χρειαζόμαστε ακόμη καλύτερες μεθόδους για να βελτιώσουν οι μαθητές τις φραστικές τους διατυπώσεις κατά τη διαδικασία δόμησης της γνώσης.

Το μέσο επίπεδο κατανόησης των εννοιών μπορεί να βελτιωθεί αισθητά με τη συμμετοχή των μαθητών σε μια αλληλουχία δραστηριοτήτων που απαιτούν την κρίση τους και με την αλλαγή του τρόπου που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα, τα οποία δείχνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών των πειραματικών ομάδων ήταν σε θέση να πραγματοποιήσουν από μόνοι τους μια διαδικασία αφαίρεσης, όσον αφορά τις έννοιες που έμαθαν, σε νέα επίπεδα, είναι ευοίωνα. Έτσι, φαίνεται ότι είναι δυνατό αυτό το είδος σκέψης, το οποίο είναι χαρακτηριστικό των μαθηματικών, να αποκτηθεί αρκετά νωρίς, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Με βάση κάποιες παρατηρήσεις επί της διαδικασίας, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για τους περισσότερους από τους μαθητές, η διαδικασία δόμησης της γνώσης που οδηγεί σε

επαρκή κατανόηση παίρνει πολύ χρόνο. Είναι εμφανές ότι, κατά τη διάρκεια των μεγάλων χρονικών περιόδων χωρίς εξωτερικές ενδείξεις προόδου, οι μαθητές αντιμετώπιζαν μια προβληματική κατάσταση, η οποία τους προκαλούσε σύγχυση, που πήγαζε από την προσπάθειά τους να συνδυάσουν την οντολογικώς διαφορετική γνώση που μάθαιναν με προηγούμενες γνώσεις τους στα μαθηματικά. Μας φαίνεται ότι το περιβάλλον μάθησης, συμπεριλαμβανομένων των εξερευνητικών δραστηριοτήτων, του υπολογιστή ως αναπαραστασιακού εργαλείου και της έντονης κοινωνικής αλληλεπίδρασης, προσέφερε καλύτερες δυνατότητες για την αντιμετώπιση αυτής της ασυνέχειας των επιστημονικών γνώσεων απ' ό,τι η παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη. Τα αποτελέσματα τονίζουν επίσης την ανάγκη να δώσουμε έμφαση στην κατανόηση των εννοιών σε βάθος κατά την εκμάθηση πρακτικών υπολογιστικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές που κατανόησαν τις έννοιες σε υψηλό επίπεδο, επέδειξαν και μεγαλύτερη μονιμότητα στη σωστή εφαρμογή αλγορίθμων. Με βάση αυτό, μπορεί να υποτεθεί ότι ο επιπλέον χρόνος που θα χρειαστεί για τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μπορεί να αντισταθμιστεί από τη μειωμένη ανάγκη για επανειλημμένη εξάσκηση στην εφαρμογή των αλγορίθμων.



7.1 Λόγοι που στηρίζουν την ένταξη των fractals στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Εκπαίδευσης

Για να βελτιώσουμε τη μαθηματική εκπαίδευση στα σχολεία μας σήμερα νομίζω ότι πρέπει : να βρούμε τρόπους στους οποίους τα μαθηματικά να χρησιμοποιούνται ως εργαλεία σε δραστηριότητες με σημασία (από τη σκοπιά του μαθητή)

Κατά τη διάρκεια αυτής της δραστηριότητας , η τυποποίηση θα αναδύεται από δυναμικές αλληλεπιδράσεις με το περιεχόμενο , από απαντήσεις που προκύπτουν από μαθητές (με τη βοήθεια του καθηγητή) . Όλα αυτά μπορούν να συμβούν μόνο μέσα από το πλαίσιο μιας διδασκαλίας που δεν καταπνίγει τις δημιουργικές και ερευνητικές τάσεις των μαθητών με το να επιμένει στην εκτέλεση και εφαρμογή των κανόνων , και ιδιαίτερα που είναι απελευθερωμένη από τους περιορισμούς του διδακτικού συμβολαίου . (C. Hoyles (1995)

Είναι γεγονός ότι τα προγράμματα σπουδών σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης λόγω της συμπίεσης και του κορεσμού που έχουν υποστεί , δεν επιτρέπουν την προσθήκη νέων γνωστικών αντικειμένων .Η αποτυχία όμως των μαθητών σε θέματα που αφορούν την κατανόηση εννοιών της γεωμετρίας ή του απειροστικού λογισμού επιβάλλει την αναπροσαρμογή , αναθεώρηση και αναδόμησή τους .

Η γεωμετρία των fractals είναι το πλέον κατάλληλο περιβάλλον για να αρχίσουμε την προσπάθειά μας για την βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης . Και αυτό γιατί μπορούμε ευκολότερα να δημιουργήσουμε σε ανοικτά περιβάλλοντα μάθησης δραστηριότητες με τις οποίες οι μαθητές , ξεκινώντας από το Δημοτικό και φτάνοντας στην Γ ' Λυκείου , θα αναπτύξουν έννοιες από τον επαγωγικό συλλογισμό ,στον παραγωγικό, πειραματιζόμενοι . Τα fractals επιτρέπουν στους μαθητές να δουλέψουν με τρόπο χειροπιαστό σε μοντέλα με ελκυστικές οπτικές αναπαραστάσεις και να οδηγηθούν στην ανακάλυψη μαθηματικών εννοιών . Η εκπαιδευτική τους αξία έγκειται στο γεγονός ότι στοχεύουν να εξωθήσουν τους μαθητές να σκεφτούν γύρω από στοιχειώδη πράγματα , να συνδέσουν έννοιες , να προκαλέσουν , να επιφέρουν γνωστική σύγκρουση , να δομήσουν την γνώση . Αυτό δεν συμβαίνει με τα σχολικά μαθηματικά που πολλές φορές εκφυλίζονται σε μια χωρίς νόημα σειρά διαδικασιών φορμαλισμού και υπόγειων ρουτινών , που σκοπό έχουν μόνο να κάνουν καλούς λύτες χωρίς να ασχοληθούν με την κατανόηση σε βάθος των εννοιών .

Οι έννοιες των fractals παρέχουν ένα σχήμα με ιδιότητες που δεν έχουν τα απλά σχήματα και ταυτόχρονα είναι παράξενο και φαντασμαγορικό. Από τη έρευνα που έχει γίνει στα σχολεία ,σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να προσαρμόσουμε τμήματα από τα μαθηματικά που χρησιμοποιούμε για τα fractals ώστε να είναι κατάλληλα για τα σχολεία (αποτελεί και πρόταση των standards N.C.T.M) . Μερικά από τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται θα μπορούσαν να διδαχθούν και στην στοιχειώδη εκπαίδευση , ίσως και σε μικρότερη τάξη από την τάξη της ΣΤ Δημοτικού αφού περιέχουν έννοιες που οι μαθητές ήδη γνωρίζουν . Η διδασκαλία των fractal έχει επακόλουθο τον θαυμασμό , την έκπληξη , την ανάπτυξη τη φαντασίας , την περιέργεια ,στοιχεία που συνθέτουν ένα πολύ γόνιμο κλίμα για στήριξη και υποστήριξη της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας Με αυτόν τον τρόπο τους δίνεται η δυνατότητα να ξεφύγουν από τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας και ενασχόλησης με ασκήσεις ρουτίνας .

Κύριο κριτήριο είναι η συσχέτιση τους μέσα από το κατάλληλο λογισμικό, με έννοιες του απειροστικού λογισμού .Αυτό μπορεί να αρχίσει διαισθητικά στις μικρότερες τάξεις και να αποκτήσει μορφή απόδειξης στις μεγαλύτερες . Χρειάζεται βέβαια προσοχή όχι μόνο στο τι θα διδαχθεί αλλά και πως θα διδαχθεί .Οι έννοιες του απειροστικού λογισμού ,κρύβουν κίνηση πράγμα που καθιστά δύσκολη μέχρι μη εφικτή την διδασκαλία τους στον πίνακα κα στο χαρτί .Αυτό που είναι απαραίτητο είναι η χρήση κατάλληλων εφαρμογών μέσα σε ένα περιβάλλον λογισμικού που θα ενισχύσει τις αρχικές διαισθήσεις των μαθητών και θα κατασκευάσει τους όρους .

Το αντικείμενο ενός fractal είναι στη γένεση του ,ένα αντικείμενο περιβάλλοντος μιας γεωμετρικής δραστηριότητας που εκτός από εργαλεία περιέχει και γνώση . Όταν ο μαθητής εργάζεται σε ένα πρόβλημα , όπως για παράδειγμα αυτό που αφορά τα μέσα των τριών πλευρών ενός τριγώνου έχει μπροστά του ένα περιβάλλον που έχει πολλές μικρές «μπουκιές » γνώσης (όπως θα έλεγε ο S.Papert)

Το περιβάλλον των fractal στο οποίο ο μαθητής καταφέρνει να λύσει ένα πρόβλημα, και να οικοδομήσει τελικά μια νέα γνώση, συνδέει έννοιες μεταξύ τους που περιέχονται σε διάφορα σημεία του αναλυτικού προγράμματος, χρησιμοποιεί ποικίλες αναπαραστάσεις, αξιολογεί τεχνικές επίλυσης.

Διάφορες έρευνες δείχνουν ότι το εκπαιδευτικό σύστημα αφήνει στους μαθητές την ευθύνη να αναδιοργανώσουν μόνοι τους διάφορες έννοιες με αποτέλεσμα όταν η πλειοψηφία των μαθητών τελειώνει την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δεν είναι σε θέση να συνδέσει αυτές τις έννοιες. Έρευνες επίσης έδειξαν ότι όταν η διδασκαλία αναλαμβάνει αυτή την ευθύνη η αναδιοργάνωση των εννοιών επικρατεί αποτελεσματικά και σταθερά.

Η επίλυση και κατασκευή μαθηματικού προβλήματος και η διατύπωση υποθέσεων είναι πολύ σημαντικές δραστηριότητες των μαθηματικών (NCTM, 2000). Η σημασία αυτών των μαθηματικών δραστηριοτήτων τονίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του NCTM «The Principles and Standards for School Mathematics Document». Το αναλυτικό πρόγραμμα παροτρύνει επίσης τους μαθητές να κατασκευάζουν δικά τους ενδιαφέροντα και ελκυστικά προβλήματα βασισμένα σε μαθηματικές καταστάσεις και καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο. Επιπρόσθετα διατυπώνεται ότι οι μαθητές πρέπει να διατυπώνουν και διερευνούν μαθηματικές υποθέσεις, να γενικεύουν τα αποτελέσματά τους και να επεκτείνουν προβλήματα μέσω της διατύπωσης περαιτέρω ερωτήσεων.

Τα προβλήματα με fractals ανήκουν στην κατηγορία των πρωτότυπων προβλημάτων

Ο Polya (1957) προβαίνει σε μια σαφή και σκόπιμη διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα ρουτίνας και στα πρωτότυπα προβλήματα. Ενδεικτικά αναφέρει:

Όταν ένας δάσκαλος δίνει στους μαθητές του να λύνουν προβλήματα ρουτίνας σκοτώνει το ενδιαφέρον τους και παρεμποδίζει την νοητική τους ανάπτυξη. Αν όμως προκαλεί την περιέργειά τους δίνοντας τους προβλήματα ανάλογα με τις γνώσεις τους και τους βοηθά να λύσουν τα προβλήματα θέτοντας τους κατάλληλες ερωτήσεις, μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν αυτόνομη κριτική σκέψη.

7.2 Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε fractals -Ποιοι διδακτικοί στόχοι περιέχονται στην κατασκευή ενός fractal

Τα Fractals λόγω της πολυπλοκότητας του σχεδίου τους μοιάζουν δύσκολα να κατασκευαστούν. Πρόκειται όμως για πολύ απλές recursive διαδικασίες που επαναλαμβάνουν έναν αριθμό βημάτων.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μια εκπληκτική, φαντασμαγορική εικόνα, με χρώματα και γραφικά που προσελκύει μαθητές και δασκάλους.

Στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος η εμπειρική εξερεύνηση των γεωμετρικών συσχετίσεων είναι σχεδόν ανύπαρκτη επειδή οι κατασκευές με το μολύβι ή την κιμωλία, όσο και οι μετρήσεις με τα γεωμετρικά όργανα και τη χρήση άλλων μέσων, όπως, για παράδειγμα, διαφανούς ή τριγωνισμένου χαρτιού, είναι κουραστικές, απαιτούν πολύ χρόνο και δεν παρέχουν μεγάλη ακρίβεια.

Ένα Fractal κατασκευάζεται με την γλώσσα Logo (για παράδειγμα στο Microworlds Pro), στο περιβάλλον του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας για παράδειγμα Geometer's Sketchpad ή Cabri ή Euclidraw ή σε περιβάλλον γλώσσας προγραμματισμού για παράδειγμα Java με κατάλληλες εντολές (για παράδειγμα mathapplets).

Η γλώσσα Logo είναι ένα παιδαγωγικά σχεδιασμένο προγραμματιστικό περιβάλλον που έχει απεριόριστες δυνατότητες από την πλευρά της παιδαγωγικής αξιοποίησης του στην εκπαίδευση.

Χρησιμοποιώντας την γλώσσα προγραμματισμού Logo μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές μας την δυνατότητα να κατασκευάσουν fractal μέσω της αναδρομικής διαδικασίας. Οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν και να υλοποιήσουν τις σκέψεις τους με κατάλληλες εντολές που θα γράψουν και θα ζητήσουν να επαναλάβει η χελώνα απευθείας στην οθόνη του υπολογιστή.

Η κατασκευή ενός fractal μέσω του GSP4.03 είναι μια διαδικασία που γίνεται μέσω ενός αρχείου εντολών ή μέσω της διαδικασίας του transform-iteration από το μενού. Ο πρώτος τρόπος είναι επαναληπτικός και βήμα-βήμα ενώ ο δεύτερος αυτοματοποιεί την διαδικασία

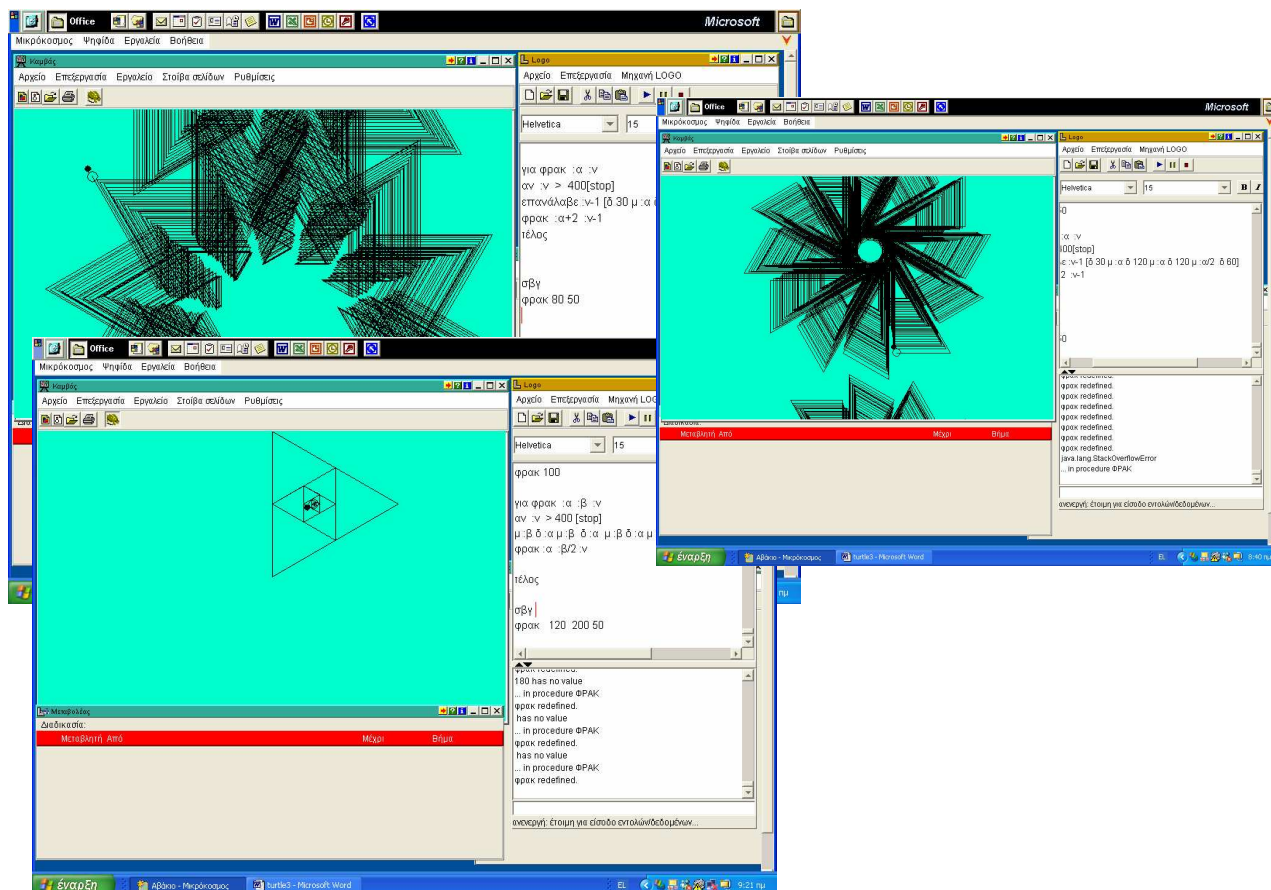
και δίνει την δυνατότητα του άμεσου αποτελέσματος στη οθόνη . Η συνένωση και των δυο μεθόδων, όπως περιγράφονται στο κεφάλαιο «Περιγραφή της μεθόδου» δίνει ένα αποτέλεσμα που είναι περιεκτικό σε έννοιες και υπολογιστικά αποτελέσματα . Οι συγκεκριμένες δραστηριότητες εισάγουν την έννοια της ακολουθίας αναδρομικά και διαισθητικά την έννοια του ορίου σε επίπεδο προσιτό για μαθητές .Η έννοια της αναδρομής είναι ιδιαίτερα σημαντική (αφού σ' αυτή στηρίζεται ο προγραμματισμός των H/Y).

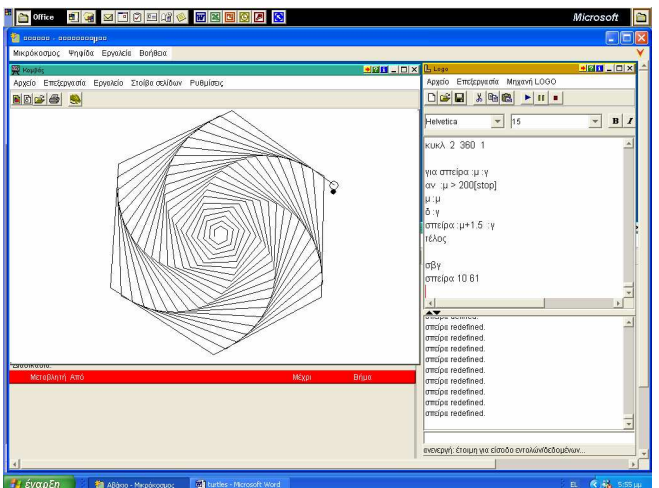
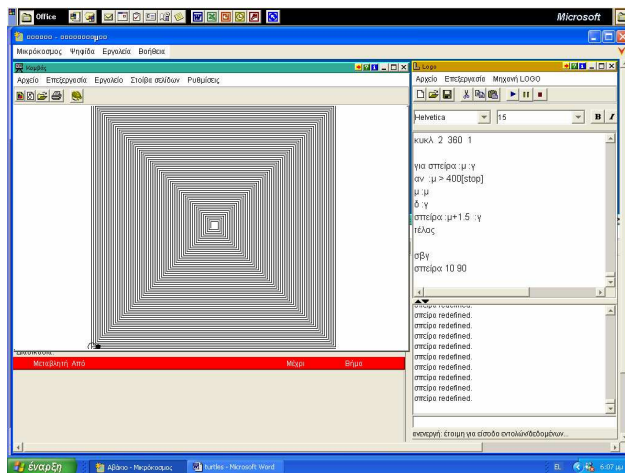
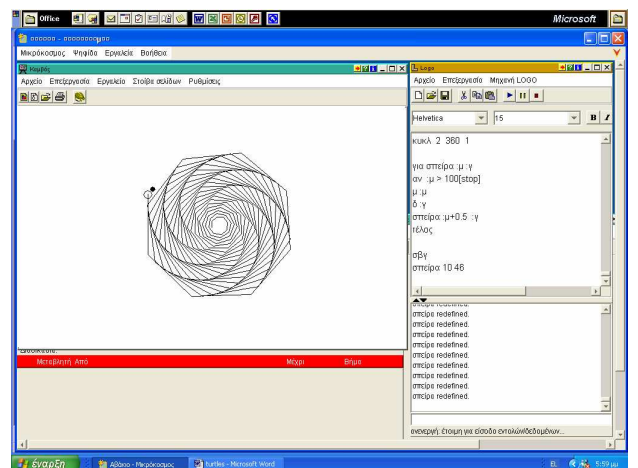
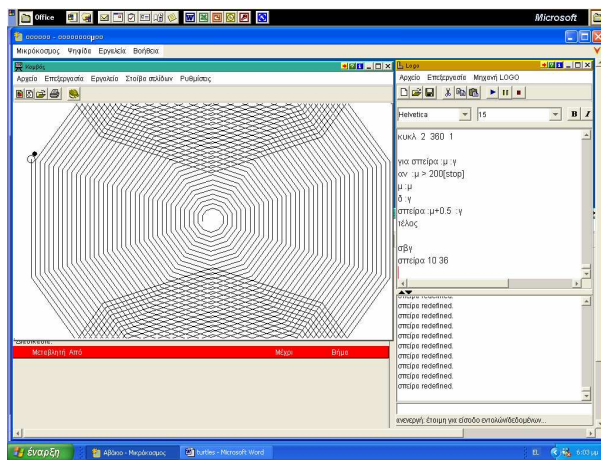
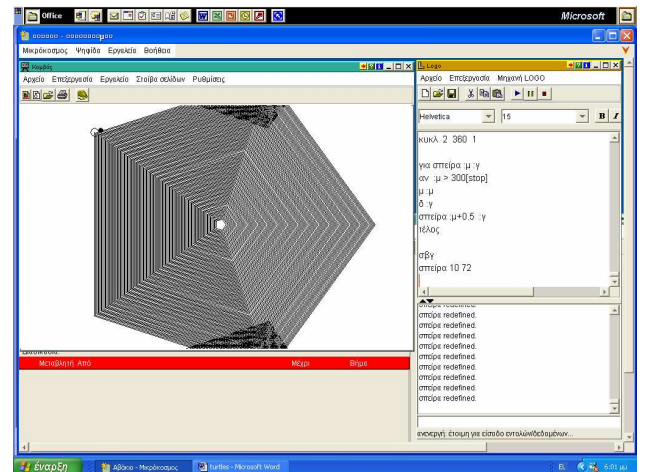
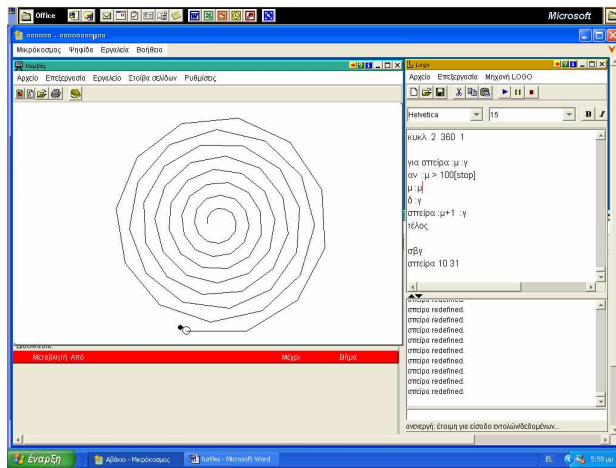
Από τις δυο μεθόδους που αναφέρθηκαν μπορούμε να πούμε τα εξής :

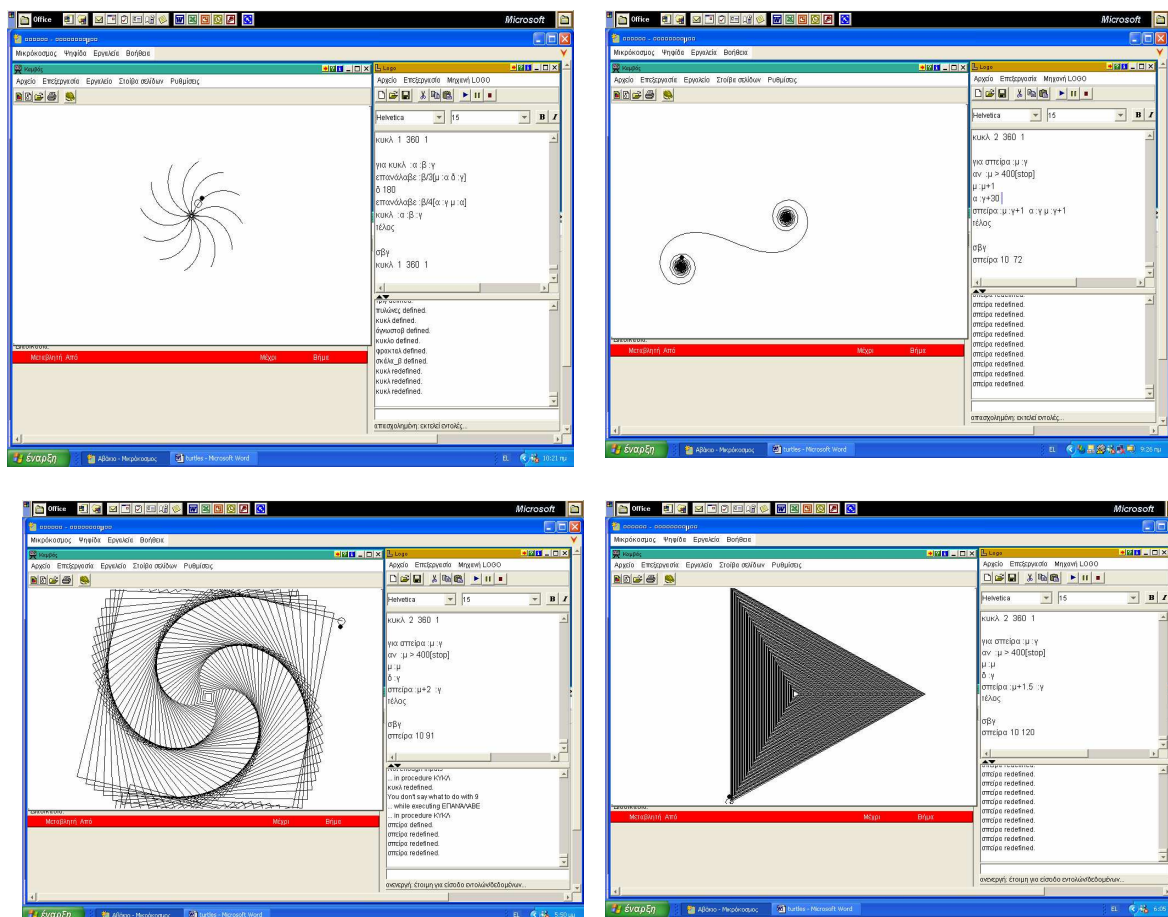
- ότι η επανάληψη απλών βημάτων μιας διαδικασίας οδηγεί στην παραγωγή μια πολύπλοκης δομής που μπορεί να προκύψει από αυτήν.
- η μελέτη της συμπεριφοράς των μαθηματικών αντικείμενων οδηγεί στην σύλληψη και γενίκευση των εννοιών
- η επανάκληση μιας διαδικασίας συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας ή οδηγεί στον σχηματισμό νέων εννοιών που γενικεύουν την διαδικασία

Η κατασκευή των fractal σε όλη την έκταση των υπάρχοντων αναλυτικών προγραμμάτων Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου, βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν λογικομαθηματικές ικανότητες ανώτερου επιπέδου Van Hiele από ότι μέσα από τα παραδοσιακά μαθηματικά. Ένα θέμα όπως τα fractal που μόνο λίγοι μπορούν να έχουν πρόσβαση γίνεται αντικείμενο παιχνιδιού στα χέρια των παιδιών.

Οι μαθητές εντυπωσιάζονται από τα εντυπωσιακά σε σχέδια και χρώματα artefacts που εμφανίζονται στην οθόνη τους .Αυτό ανοίγει νέους δρόμους στην εκμάθηση των εννοιών μέσω της κατάλληλης οπτικοποίησης τους με την βοήθεια των δυναμικών ή enactive αναπαραστάσεων τους .







Σχήματα :

Παραδείγματα αναδρομικών διαδικασιών σε γλώσσα Logo (όπως προτείνονται από την γράφουσα) που έχουν σκοπό την κατασκευή fractal ή σπειρών σε διάφορες μορφές

Κατά την διαδικασία κατασκευής των βημάτων οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά και αναπτύσσουν νοητικές ικανότητες όπως :

Ανάπτυξη της **οπτικό-χωρικής και κατασκευαστικής (τεχνικής) ικανότητας**, αφού μέσω της διαδικασίας επαναλαμβάνουν μια κατασκευή βήμα –βήμα, στην οποία όμως η επανάληψη των σημείων γίνεται κάτω από συγκεκριμένη σειρά Επομένως πρέπει να αναπτύξουν την ικανότητα κατασκευής ενός pattern που έχει σχέση με την κατασκευή και την τοποθέτηση στο επίπεδο.

Ανάπτυξη της **ικανότητας να εικάσουν** για την σωστή επιλογή των σημείων όταν πρόκειται για το GSP, της σωστής επιλογής των μεταβλητών όταν πρόκειται για τη γλώσσα Logo και την επιλογή του κατάλληλου σημείου στη δραστηριότητα που ζητάμε να γίνει η αναδρομική διαδικασία.

Ανάπτυξη της **ικανότητας να υπολογίσουν** τα αποτελέσματα των κατασκευών τους με κατάλληλες μετρήσεις που δίνονται μέσα από το μενού εντολών του λογισμικού είτε αυτό αφορά μήκη πλευρών και περιμέτρους είτε υπολογισμούς εμβαδών.

Ανάπτυξη της **ικανότητας να προβλέψουν** για τα αποτελέσματα των ενεργειών τους όσον αφορά την κατασκευή ή τις μετρήσεις.

Ανάπτυξη της **ικανότητας να οργανώσουν** τα αποτελέσματα των υπολογισμών τους αφού αυτά μπορούν να εμφανιστούν σε πίνακα στην οθόνη του υπολογιστή.

Ανάπτυξη **ικανότητας ελέγχου των βημάτων**, των υπολογισμών και συσχέτισης με το κατάλληλο σχήμα. Οι μαθητές ελέγχουν την σωστή πρόβλεψη είτε με τη εφαρμογή, είτε με την

Ανάπτυξη **αποδεικτικών διαδικασιών** που προκύπτει ως αποτέλεσμα λογικών ενεργειών.

Ανάπτυξη **λογικομαθηματικών ικανοτήτων** ως αποτελέσματα συσχετίσεων των εικόνων με τα υπολογιστικά patterns.

Όπως καταλαβαίνουμε ένας μαθητής επομένως με την ανάπτυξη όλων αυτών των ικανοτήτων εμπλέκεται στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης μέσα από την ανάπτυξη αυτών των νοητικών ικανοτήτων.

Εκτός των νοητικών δραστηριοτήτων οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν ικανότητες **φιλοσοφικού** περιεχομένου σχετικά με έννοιες όπως το άπειρο και το 0 που είναι δύσκολο να συλληφθούν όταν πρόκειται για μαθηματικά αντικείμενα που μπορούν να σχεδιαστούν ή κατασκευαστούν μόνο στο τετράδιο ή στον πίνακα.

Αναπτύσσουν **την φαντασία και τις καλλιτεχνικές τους ικανότητες** έτσι ένα μάθημα που μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε γκρι όπως ο Μεφιστοφελής αποκτά **χρώμα και καλαισθησία** όπως το χρώμα της ζωής.

Αναπτύσσουν **ικανότητες αισθησιοκινητικές** που έχουν σχέση με την κίνηση των αντικειμένων, όταν αυτή παράγεται από τις κατάλληλες εντολές μέσω του μενού εντολών ή του συρσίματος των κατασκευών (dragging).

Ανάπτυξη **κινήτρων** για διερεύνηση και δημιουργικότητα.

Ανάπτυξη **της διαίσθησης** που οφείλεται στην αλληλεπίδραση με τα artefacts οπτικές αναπαραστάσεις στην οθόνη του υπολογιστή

Ανάπτυξη **της αξιολόγησης** των αποτελεσμάτων

Ανάπτυξη **επαναληπτικών διαδικασιών και εσωτερίκευση των εννοιών** μέσα από την κατάλληλη χρήση αναπαραστάσεων

Ανάπτυξη **της διασύνδεσης** διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών

Ανάπτυξη της **διασύνδεσης των μαθηματικών με την φυσική** και με άλλες επιστήμες

Ανάπτυξη **αυτενέργειας** για τις κατασκευές

Ανάπτυξη **επαλήθευσης και γενίκευσης και επομένως**

ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών που έρχεται ως συνέπεια της σταδιακής οικοδόμησης της έννοιας περνώντας μέσα από τα στάδια ωρίμανσης της σκέψης του Van Hiele.

7.3 Ποια κεφάλαια μαθηματικών εμπλέκονται στην διαδικασία κατασκευής και υπολογισμού ενός Fractal αντικειμένου

Θα αναφερθούμε αρχικά στις μαθηματικές έννοιες που έχουν σχέση με την κατασκευή και την εξερεύνηση ενός fractal

A) γεωμετρικές γνώσεις που απαιτούνται για την κατασκευή του σχήματος, την υποδιαίρεση του, την επέκτασή του

Στις γεωμετρικές γνώσεις εντάσσονται τα παρακάτω

 διερεύνηση των τρόπων που οι σχέσεις διατηρούνται ή αλλάζουν καθώς ο αριθμός των πλευρών ή ο λόγος στον οποίον οι κορυφές του εγγεγραμμένου πολυγώνου διαιρεί τις πλευρές του αρχικού αλλάζει. Ακόμα συσχέτιση των λόγων των τμημάτων που σχηματίζονται και στη γενική και την ειδική περίπτωση του σχήματος.

 περιστροφές σχημάτων για τον έλεγχο ισοδυναμίας των εμβαδών και επεκτατικά την απόδειξη των τύπων εύρεσης των εμβαδών.

 επανάληψη ή ανακάλυψη πειραματική των θεωρημάτων των σχετικών με

1. πράξεις, υπολογισμούς ευθ. τμημάτων
2. συγκρίσεις υπολογισμούς, είδη γωνιών
3. έννοιες σχετικές με τον κύκλο, υπολογισμούς τόξων κ.α
4. συγκρίσεις τριγώνων, πολυγώνων
5. είδη, υπολογισμοί και στροφές γωνιών καθώς και βασικές ιδιότητες τους

6. υπολογισμοί μηκών τμημάτων ,περιμέτρων
7. είδη και ιδιότητες σχημάτων (τριγώνων , πολυγώνων)
8. ομοιότητες σχημάτων
9. ιδιότητες της συμμετρίας των σχημάτων ως προς άξονα και ως προς σημείο
10. ιδιότητες των βασικών τετραπλεύρων και του κέντρων του τριγώνου .
11. ιεραρχία τετραπλεύρων
12. ιδιότητες των αναλογιών για τον υπολογισμό των λόγων των τμημάτων
13. θεωρήματος που αναφέρεται στην παραλληλία των τμημάτων που προκύπτουν όταν ενώσουμε τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου και του αντιστρόφου του ,
14. θεώρημα Θαλή και αντιστρόφου
15. του Πυθαγορείου θεωρήματος ,
16. θεωρημάτων εγγεγραμμένων γωνιών ,
17. θεωρημάτων που αναφέρονται σε μήκη πλευρών και υψών κανονικών πολυγώνων
18. τον λόγο των εμβαδών σε σχέση με τον λόγο ομοιότητας των πλευρών

Δηλαδή όλη την ύλη της γεωμετρίας που αναφέρεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

B) από την πλευρά της άλγεβρας και του απειροστικού λογισμού

1. κλίμακες μετρήσεων ,
2. κλάσματα
3. δεκαδικοί αριθμοί και συσχέτιση των τριών μορφών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών
4. στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών
5. λόγοι , αναλογίες
6. υπολογισμούς αλγεβρικών παραστάσεων
7. ακολουθίες
8. γεωμετρική πρόοδος
9. δυνάμεις
10. εκθετικές συναρτήσεις
11. αλγόριθμους υπολογιστικούς
12. όρια
13. σειρές
14. υπολογισμός ορίου ακολουθίας
15. υπολογισμός ορίου σειράς
16. γραφικές παραστάσεις με την διαδικασία της αποπινακοποίησης – αποτύπωσης αποτελεσμάτων κ.α
17. θεωρίας προσέγγισης , θεωρία της συνέχειας
18. απειροελάχιστα , έννοια του απείρου και του 0 κ.α

7.4 Τι αναμένεται από την κατασκευή των fractal αντικειμένων στον υπολογιστή και τη χρησιμοποίηση σχετικών ανοικτών προβλημάτων

*«Όταν ήμουν παιδί , συχνά μισούσα την αριθμητική και τα μαθηματικά στο σχολείο .Σελίδες ασκήσεων , ανιαρές και πληκτικές Δεν ήταν διασκεδαστικές ή προκλητικές , ήταν απλώς μια αγγαρεία .Όποτε μπορούσα έβρισκα κάτι άλλο να ψυχαγωγηθώ .Καμιά φορά προσπαθούσα να βρω απάντηση σε κάποια σπαζοκεφαλιά »***William Thurston (βραβείο Φίλντς) καθηγητής Princeton**

Οι εμπειρικές προσωπικές διαπιστώσεις μας αλλά και τα αποτελέσματα πολλών εκπαιδευτικών ερευνών δεν αποτελούν τυχαία γεγονότα . Η επαγωγική προσέγγιση στην

μαθησιακή διαδικασία φαίνεται να κερδίζει όλο και περισσότερο έδαφος . Κι αυτό γιατί επιτρέπει στον μαθητή να αναπτύξει την ενόρασή του , να αναλάβει πρωτοβουλίες , να αναπτύξει την δημιουργική του φαντασία , την ικανότητα γενίκευσης , τον αναστοχασμό και τέλος την κριτική και ελεύθερη σκέψη

Όπως διαπιστώνουμε στα fractal εμπλέκονται οι νέες θεωρίες με τα παλαιά αντικείμενα της Ευκλείδειας γεωμετρίας και των εννοιών της άλγεβρας και του απειροστικού λογισμού . Ένας νέος τομέας , όπως είναι των fractal αντικειμένων είναι αναγκαίος για να ανανεώσει το πρόγραμμα σπουδών Είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι ο δάσκαλος των μαθηματικών μπορεί να κάνει συνδέσεις ιστορικές, καλλιτεχνικές με τα μαθηματικά, αναφορές σε σημαντικά θέματα των σύγχρονων κλάδων της υδροδυναμικής , της θεωρίας του χάους , της αστρονομίας , της μετεωρολογίας . Ένα αντικείμενο fractal λόγω της πολυπλοκότητας του σχήματος φαίνεται δύσκολο να κατασκευαστεί αλλά ο υπολογιστής καταφέρνει να απλουστεύσει τον τρόπο κατασκευής του .Αντικείμενα που υπάρχουν στην φύση μοιάζουν με τα fractal , έτσι ώστε ο μαθητής να αισθάνεται ότι μελετώντας μαθηματικά , μελετά την φύση και το περιβάλλον που η πολυπλοκότητα των κατασκευών του σε παραπέμπει σε μαθηματικές έννοιες κοντινές στα fractal . Η εφαρμογή τους στην διδακτική πραγματικότητα η ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία και η ενσωμάτωσή τους στο Αναλυτικό Πρόγραμμα αποτελεί επομένως ένα βασικό στόχο ώστε να ευθυγραμμιστούμε με τις τάσεις του προγράμματος που αντιστοιχούν σε σύγχρονα μοντέλα διδασκαλίας.

Κύριο κριτήριο η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίον τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ή η γλώσσες προγραμματισμού παρέχουν ευκαιρίες για κατασκευή νέων προβλημάτων . Η διερεύνηση των στόχων έγινε με την παραδοχή ότι το λογισμικό της δυναμικής γεωμετρίας συνιστά μέσο διαμεσολάβησης το οποίο μας βοηθά να κατανοήσουμε πως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαίδευση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών . Οι μαθητές σε ένα ανοικτό πρόβλημα μπορούν να υποθέσουν , να εικάσουν ότι κάποιες σχέσεις ισχύουν, να ελέγξουν την ορθότητα τους και να τις αποδείξουν στη συνέχεια .Η τυπική απόδειξη η δυνατότητα αντιστροφής του προβλήματος και η γενίκευση του είναι ένας από τους επόμενους στόχους . Στο παραδοσιακό μάθημα των Μαθηματικών τα προβλήματα και οι ασκήσεις είναι κλειστού τύπου . Η διαδικασία της εξερεύνησης και της ανακαλυπτικής προσέγγισης όμως δεν παρακινείται στις περιπτώσεις αυτές όπου ο μαθητής αισθάνεται εγκλωβισμένος στη θεωρητική φορμαλιστική πλευρά του προβλήματος . Προβλήματα διατυπωμένα όπως , «Να αποδείξετε ότι...», διευθετούν τον τρόπο σκέψης του μαθητή ,εμποδίζουν την απελευθέρωση δημιουργικών ικανοτήτων ,λειτουργούν σαν φρένο ικανότητας των μαθητών για απόδειξη. Έτσι δεν παρακινούνται οι διανοητικές λειτουργίες και υπονομεύεται η ικανότητα για απόδειξη .Μια ανοιχτή προβληματική κατάσταση στην οποία ο μαθητής δεν αφήνεται μόνος αλλά ο δάσκαλος είναι παρών για να ενεργεί όταν απαιτείται , θα μπορούσε να προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες για ενεργητική συμμετοχή στη διαδικασία μάθησης και να τους παρακινήσει να εμπλακούν σε δραστηριότητες . Τέτοιες δραστηριότητες είναι και οι σχετικές με τα fractals , οι οποίες όπως διαπιστώσαμε καλύπτουν όλο το φάσμα της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης . Η ιδέα αυτή βασίζεται στην υπόθεση ότι η απόδειξη ενός αποτελέσματος, προξενεί μεγαλύτερη αίσθηση αφοῦ

-  Είναι κάτι που δημιουργείται από τους ίδιους και δεν τους παρέχεται έτοιμο
-  Προκύπτει από εμπειρικές παρατηρήσεις και πειραματισμούς
-  Ευνοεί την δυναμική διερεύνηση μιας κατάστασης
-  Κατασκευάζει τα στοιχεία τα απαραίτητα για την απόδειξη

Αυτό βέβαια είναι και γενικότερο συμπέρασμα που αφορά την διαδικασία της λύσης ενός προβλήματος .Στόχος δεν είναι μόνο στο να παραχθεί το σωστό αποτέλεσμα, αλλά πώς να παραχθεί ένα οποιοδήποτε αποτέλεσμα. Το κίνητρο για απόδειξη, η οποία θα εξηγήσει για ποιο λόγο συνέβη το ένα ή το άλλο γεγονός ή αποτέλεσμα, καθίσταται έτσι ισχυρό. Και δεν υπάρχει τίποτε άλλο ισχυρότερο στην εκπαιδευτική διαδικασία από την δημιουργία κινήτρων

Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Η δυνατότητα ενσάρκωσης αυτών των ορισμών, δηλαδή η δυνατότητα

αναπαράστασης τους με τρόπο ώστε να γίνουν κατανοητοί μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά.

Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από τους μαθητές με έναν μάλλον μηχανιστικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα να προκύψει αυτή ως εικασία. Δηλαδή, μετά από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανόν να ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Η δημιουργία εικασιών απουσιάζει πλήρως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Δεν φαίνεται η διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψε η διατύπωση των προτάσεων και των θεωρημάτων. Με ποιο τρόπο όμως μπορεί να αναπτυχθεί μέσα στη τάξη ένας προβληματισμός που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας; Σε αυτό μπορεί να παίξουν σημαντικό ρόλο οι αναπαραστάσεις. Η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις. Για να μπορέσει όμως ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο, ιδιαίτερα δε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τον ενσάρκωμένο και τον διαδικασιοενοσιολογικό κόσμο σκέψης. Να εξασκήσει το μαθητή να χρησιμοποιεί και τους δύο κόσμους, να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τον ένα στον άλλο. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτόν που είναι πιο πρόσφορος για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από τη τυπική απόδειξη. Τα παραπάνω θα συντελέσουν στο να οικοδομήσει ο μαθητής μια πραγματικά μαθηματική σκέψη

7.5 Η βιβλιοθήκη των fractal στο Geometer SketchPad

Η παιδαγωγική σημασία της εξερεύνησης της

Η προσέγγιση που προτάθηκε μέσα από την δραστηριότητες είναι η επαγωγική Η παραγωγική μέθοδος στερεύει την φαντασία και δεν είναι η φυσική οδός μέσα από την οποία οι μαθητές μας θα κατακτήσουν τη μαθηματική γνώση. Η δραστηριότητα του αναστοχασμού κάποιου μαθητή πάνω στις νοητικές λειτουργίες του αρχίζει όταν έχει τη ευκαιρία να δράσει. Τότε αποκτά την ικανότητα να αφαιρέσει τα λειτουργικά σχήματα από τις αισθησιοκινητικές πράξεις. Για να

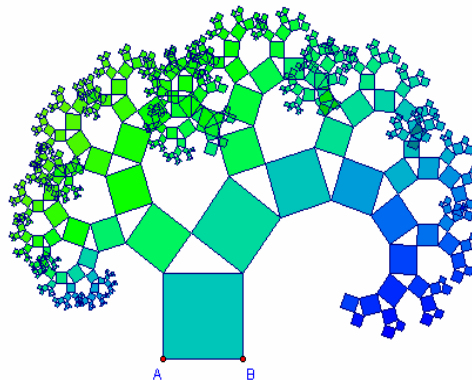
αποκτήσει ένας μαθητής ευκαιρίες δράσης απαιτείται αισθησιοκινητικό υλικό και καταστάσεις που θα εκδηλωθεί η δράση πάνω στο υλικό.

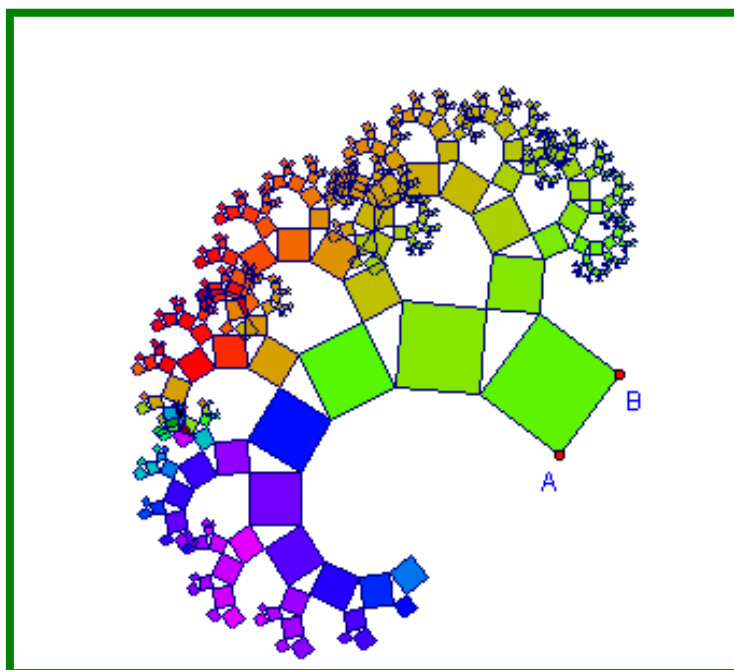
Έχουμε εγκαταστήσει το Geometer Sketchpad στα Προγράμματα του υπολογιστή μας. Για να επισκεφτούμε την έτοιμη βιβλιοθήκη των fractals ακολουθούμε τα εξής βήματα C:\Program Files\Sketchpad\Samples\Sketches\Geometry και στη συνέχεια το *Fractal Gallery.gsp* Θα ασχοληθούμε με μερικές σελίδες που η αισθητική τους προκαλεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον στους μαθητές λόγω της ομοιότητας τους με φυσικά αντικείμενα.

Το Πυθαγόρειο δέντρο είναι η πρώτη σελίδα του αρχείου της γκαλερί των Fractal, όπως παρουσιάζεται από το λογισμικό.

Πλούσιο όχι απλώς σε χρώματα αλλά και αλλαγές χρωμάτων παρέχει αισθησιοκινητικό υλικό και ευκαιρίες δράσης στους μαθητές. Ερωτήσεις που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εξερευνήσουν το αντικείμενο- fractal είναι

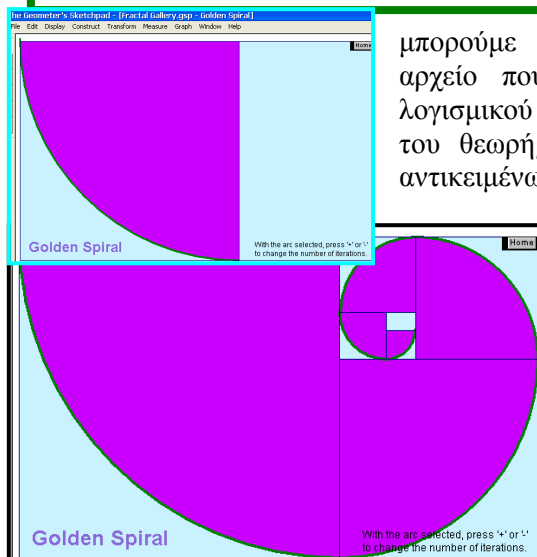
Pythagorean Tree





Τι νομίζετε ότι είναι η εικόνα που βλέπετε ; Ποια γεωμετρικά σχήματα παρατηρείτε στην εικόνα Τι σχέση έχουν μεταξύ τους Πως συνδέονται ; Γιατί και πως μετακινείται το δέντρο Υπάρχουν κάποιες ομοιότητες μεταξύ των κλάδων του δέντρου ; Πως πιστεύετε ότι σχηματίζονται οι κλάδοι ;.....κ.α

Οι μαθητές παρατηρούν τα τετράγωνα και τα τρίγωνα και ανακαλύπτουν ότι αυτό που σχηματίζεται είναι το πυθαγόρειο θεώρημα (αν οι μαθητές δεν γνωρίζουν το πυθαγόρειο θεώρημα

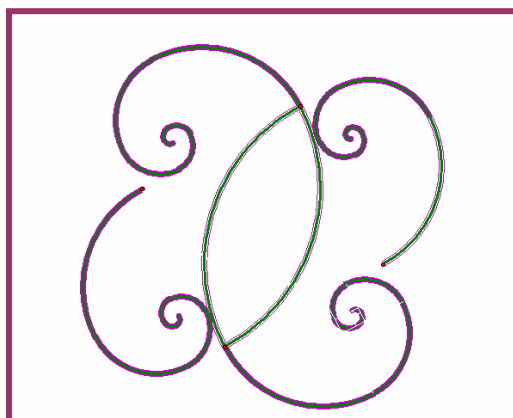


μπορούμε αρχικά να εξερευνήσουμε το συγκεκριμένο αρχείο που υπάρχει ανεξάρτητα στη βιβλιοθήκη του λογισμικού). Στην συνέχεια ανακαλύπτουν τις επαναλήψεις του θεωρήματος , το μέγεθος των επαναλαμβανόμενων αντικειμένων . Το αντικείμενο όπως παρατηρούμε στην εικόνα αριστερά , μπορεί να μεγαλώσει ή να μικρύνει όσο εμείς θέλουμε , μπορούμε να μετακινήσουμε τους κλάδους του , οι οποίοι εμφανίζονται και εξαφανίζονται περιοδικά Έχουμε την δυνατότητα ακόμα να αυξήσουμε ή μειώσουμε την ταχύτητα της κίνησης Επομένως έχουμε την δυνατότητα να συνδέσουμε το μάθημα των Fractals με αντίστοιχα κεφάλαια της φυσικής που εξετάζουν περιοδικά φαινόμενα , κίνηση κ.α Μια δεύτερη σελίδα που μπορούμε να

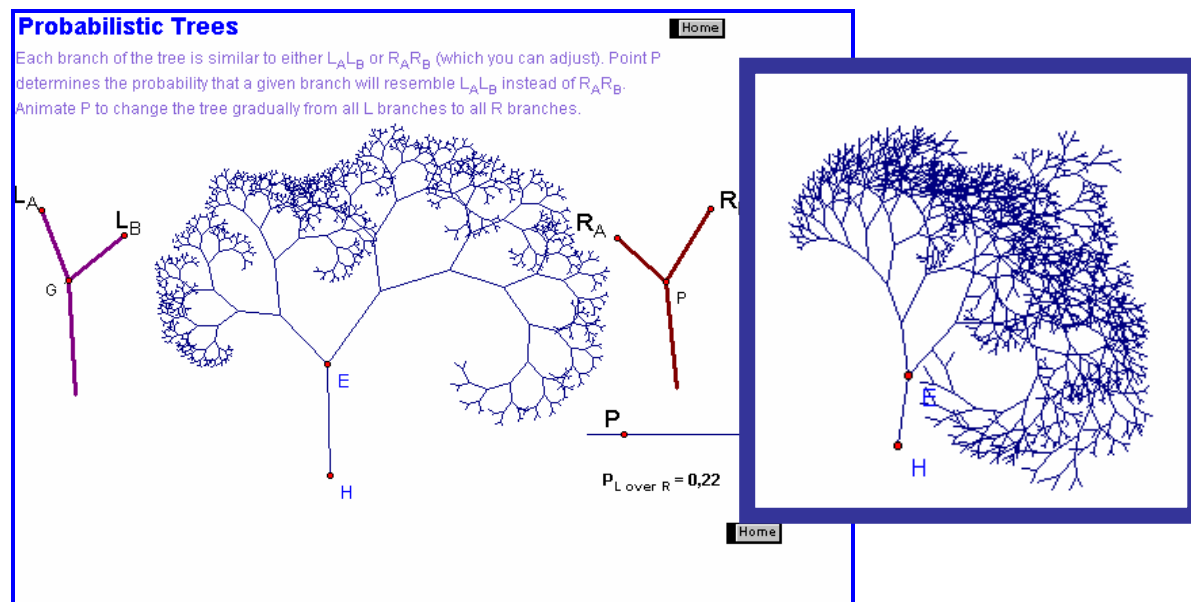
επισκεφτούμε με τους μαθητές μας είναι η σελίδα του **golden spiral** η της σπείρας που σχηματίζεται από τα χρυσά ορθογώνια στην οθόνη του υπολογιστή μας

όπως παρατηρούμε με την επιλογή του σχήματος και το (+) αυξάνει ο σχηματισμός των χρυσών ορθογώνιων ή με το (-) μειώνεται αντίστοιχα .

Το μοτίβο που υπάρχει δεξιά προέκυψε από επαναλήψεις της διαδικασίας της σπείρας του ορθογωνίου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δημιουργούμε ένα αρχείο εντολών με την αρχική διαδικασία και στην συνέχεια το επαναλαμβάνουμε συμμετρικά .

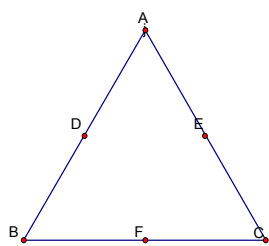


Μια ακόμα ενδιαφέρουσα σελίδα που προκαλεί πολύ μεγάλο ενδιαφέρον στους μαθητές είναι η σελίδα **probabilistic tree**



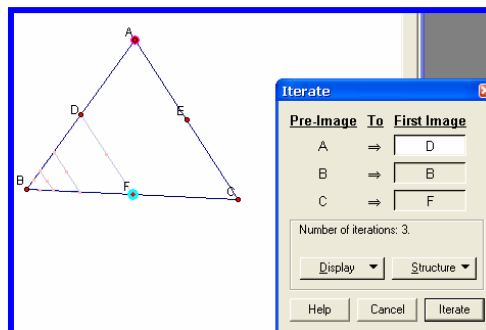
Οι μετακινήσεις των κλάδων του δέντρου μπορούν να προκύψουν από την μετακίνηση του σημείου P ή του σημείου G. Κάθε κλάδος του δέντρου είναι όμοιος είτε στον $L_A L_B$ ή στον $R_A R_B$. Το σημείο P που είναι στο ευθύγραμμο τμήμα καθορίζει την πιθανότητα με την οποία ένας κλάδος θα μοιάζει στον $L_A L_B$ αντί στον $R_A R_B$. Υπάρχουν ακόμα και οι σελίδες τρίγωνο του Sierpinski, Hilbert variation, Space filling curve 1,2. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τον τρόπο κατασκευής του Sierpinski gasket με τον τρόπο που προτείνεται από το Geometer Sketchpad. Δεν θα ασχοληθούμε με τις διαφορές που υπάρχουν σε σχέση με τον τρόπο που αναφέρεται στην περιγραφή της μεθόδου.

Στο GSP 4.03 προτείνεται η κατασκευή του Sierpinski τριγώνου (μέσα από το help) ως εξής: Είναι μια διαδικασία την οποία ένα τρίγωνο αντικαθίσταται από τρία μικρότερα εσωτερικά τρίγωνα, μετά αντικαθιστούμε τα τρία αυτά τρίγωνα με τρία ακόμα μικρότερα τρίγωνα και ούτω καθ' εξής. Κατασκευάζουμε αρχικά ένα τυχαίο τρίγωνο με ένα ευθύγραμμο τμήμα και στην συνέχεια τα μέσα των πλευρών του (επιλέγω όλες τις πλευρές και από το μενού construct –midpoints)



μέσα των πλευρών του.

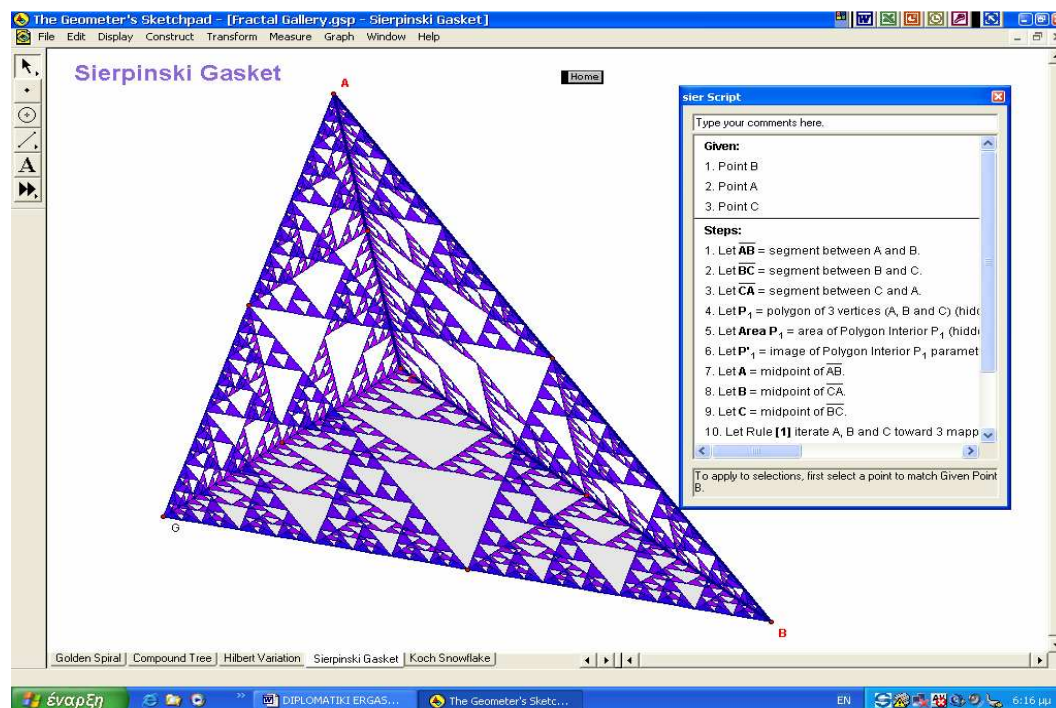
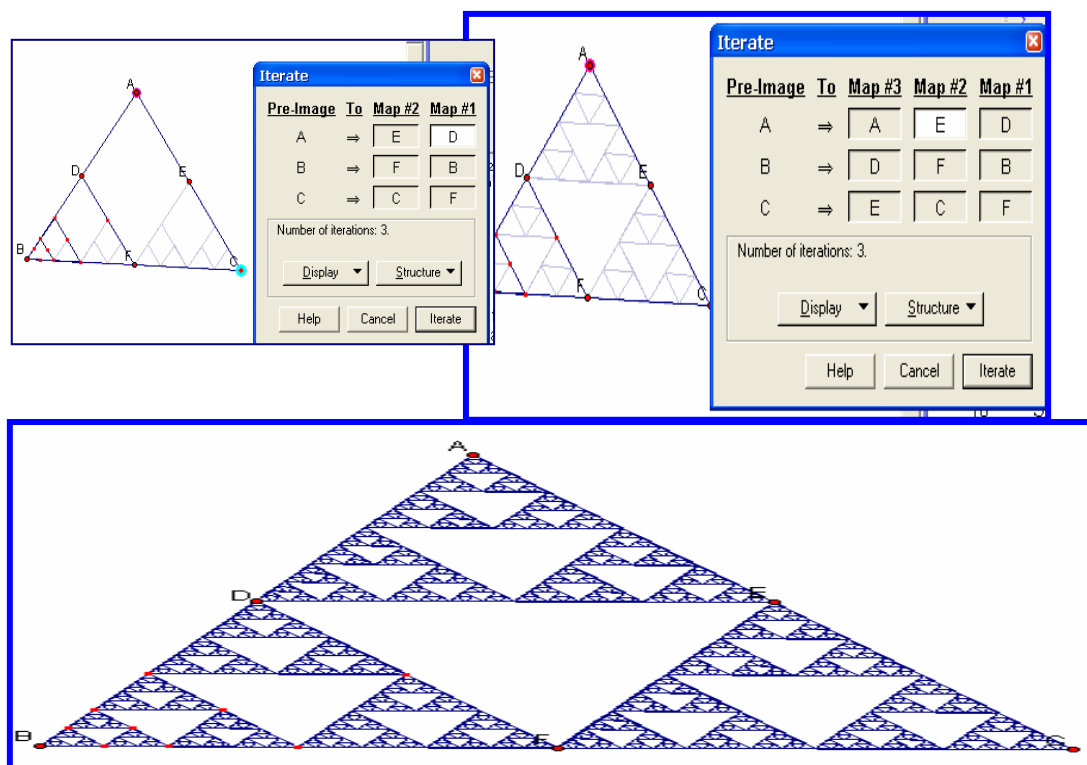
Ονομάζω τα σημεία των κορυφών του τριγώνου και τα



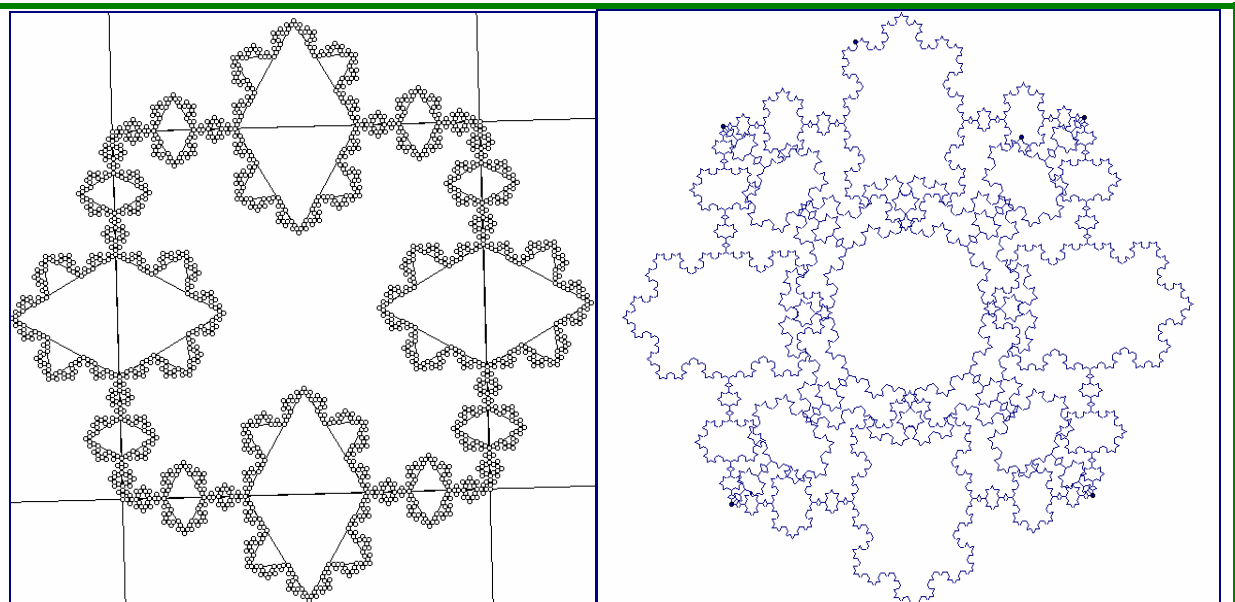
Στην συνέχεια επιλέγω τα σημεία A,B,C και από το μενού transform-iterate. Με την διαδικασία αυτή έχουμε αντιστοιχίσει τα αρχικό τρίγωνο με το τρίγωνο DBF

Χρησιμοποιώντας το Structure κατασκευάζουμε και ένα δεύτερο mapping των ίδιων σημείων. Και στη συνέχεια με την πρόσθεση και άλλου mapping

Στην εικόνα δεξιά βλέπουμε μια προ-εικόνα του τριγώνου του Sierpinski όπως έχει ήδη εμφανιστεί στην οθόνη μας. Αν επιλέξουμε το σχήμα και (+) το σχήμα αυξάνει τις υποδιαίρεσεις, ενώ αν επιλέξω το(-) τις μειώνει.

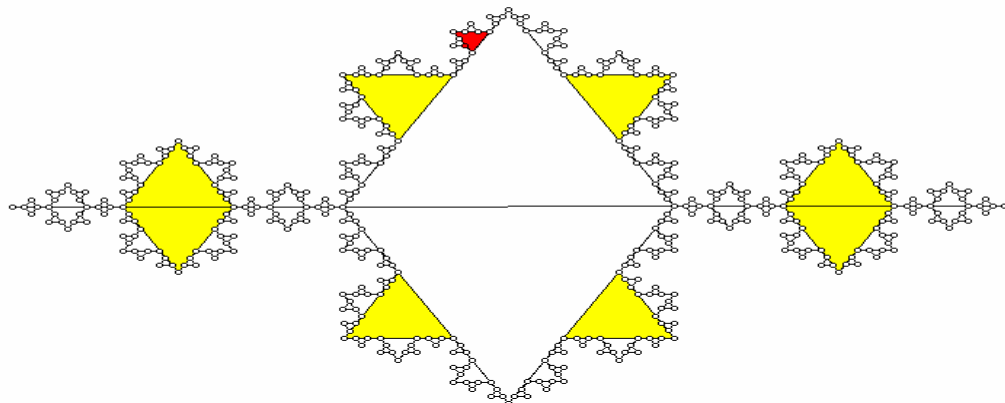


Κατασκευή (από την γράφουσα) μιας πυραμίδας και εφαρμογή στην κάθε έδρα της το script file «sier» που κατασκευάζουμε από την έτοιμη βιβλιοθήκη του λογισμικού. Στην επόμενη σελίδα διάφορες κατασκευές και δραστηριότητες με fractals

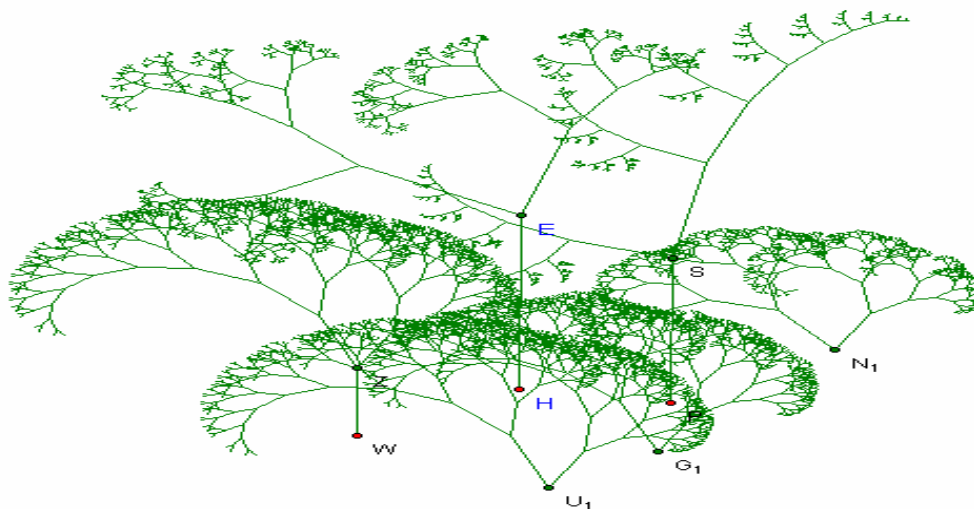


Κατασκευή σχήματος (διαφορετικά βήματα του ίδιου σχήματος) με πλήθος γεωμετρικών ιδιοτήτων με εφαρμογή της νιφάδας του Koch σε τετράγωνο

Παρατηρείστε το σχήμα και χρωματίστε με ίδιο χρώμα και άλλα τρίγωνα που νομίζετε ότι είναι ίσα με το κόκκινο τρίγωνο. Υπολογίστε στην συνέχεια τα εμβαδά τους. Τι παρατηρείτε. Τι σχέση έχουν με τα κύρινα τρίγωνα



Probabilistic Trees

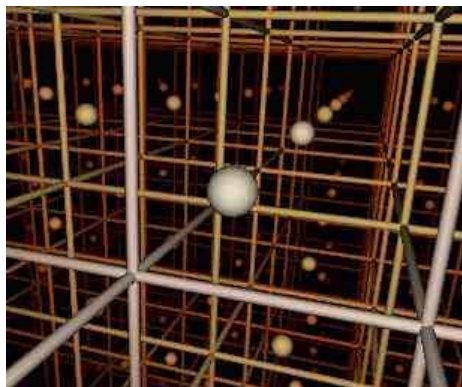


ΕΠΙΛΟΓΟΣ

"Philosophy is written in this grand book –I mean universe - which stands continuously open to our gaze, but which cannot be understood unless one first learns to comprehend the language in which it is written. It is written in the language of mathematics, and its characters are triangles, circles and other geometric figures without which it is humanly impossible to understand a single word of it; without these, one is wandering about in a dark labyrinth." - Galileo (1623)

" Η φιλοσοφία γράφεται σε αυτό το μεγάλο βιβλίο- εννοώ τον κόσμο- ο οποίος στέκεται συνεχώς ανοιχτός στο βλέμμα μας αλλά που δεν μπορεί να είναι κατανοητός εκτός αν κάποιος μάθει πρώτα να κατανοεί τη γλώσσα στην οποία γράφεται . Γράφεται στη γλώσσα των μαθηματικών, και οι χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα , και είναι ανθρώπινα αδύνατο να καταλάβει μια μεμονωμένη λέξη από αυτόν χωρίς αυτά: χωρίς αυτά κάποιος μοιάζει να περιπλανιέται σε έναν σκοτεινό λαβύρινθο "

Όπως γράφει ο Μαυρίκιος Μπρίκας η επιστήμη ανύψωνε τον άνθρωπο από έρμαιο των φυσικών φαινομένων εις κυρίαρχο τρόπον τινά αυτών . Οι Έλληνες διαισθανόμενοι το μεγαλείο του

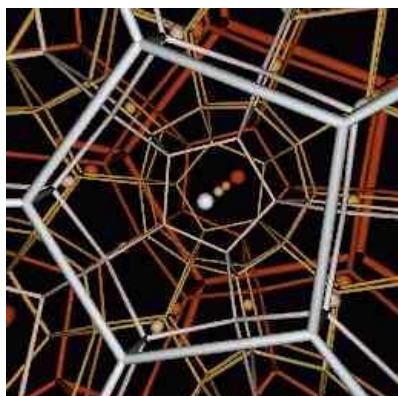


έργου τους , τόλμησαν να συνοψίσουν τις δυνατότητες με χαρακτηριστικές ρήσεις του Πυθαγόρα, του Πλάτωνα και του Αρχιμήδους **Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω και Δος μοι πα βω και κινω ταν γαν** .(Η γεωμετρική αντίληψη κυριαρχεί σε όλες τις εκδηλώσεις της δημιουργίας στο Σύμπαν)

Η γεωμετρική δομή της φύσης και το γεωμετρικό ένστικτο του ανθρώπου κατέστησαν τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην Ιδέα και την Μορφή . Οι άυλες ιδέες μέσα στο χώρο και τον χρόνο πραγματοποιούνται μέσα από την

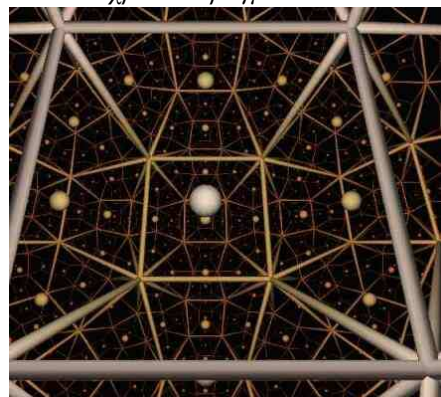
γεωμετρία και χωρίς τη θεωρητική γνώση της γεωμετρίας δεν μπορούμε να προχωρήσουμε βαθιά μέσα στη Τέχνη Όπως αναφέρει και ο Venturi στο *Storia della critica d'arte* χωρίς την επιστήμη της γεωμετρίας δεν μπορεί κάποιος να φτάσει στην τελειότητα στην Τέχνη . Η θεωρητική κληρονομιά των Οπτικών του Ευκλείδη

(300π.Χ) οδήγησε του Ιταλούς καλλιτέχνες στην Αναγεννησιακή Προοπτική και πρόσφερε το θεωρητικό πλαίσιο για έναν καινούργιο κλάδο της Γεωμετρίας την Προβολική Γεωμετρία . Ο Leonardo da Vinci (1452-1519) μελετητής των μαθηματικών παραφράζοντας την πλατωνική απαγόρευση της Ακαδημίας σημειώνει στο πίσω μέρος ενός πίνακα « μη



μαθηματικός να μην διαβάσει τα στοιχεία του έργου μου ». Εκείνο που θα άλλαζε την μορφή στη γεωμετρία είναι η εισαγωγή των απειροστών , πολύ πριν την δημιουργία του απειροστικού λογισμού , ο Desargues αρχίζει την εφαρμογή τους ως «σύνολα τόσο μικρά που τα δύο αντίθετα άκρα τους βρίσκονται ενωμένα μεταξύ τους »

Η αρμονική τετράδα γνωστή από τον Πάππο χρησιμοποιείται από τους Poncelet , Möbius (1790-1868) Steiner ως θεμελιώδες εργαλείο των γεωμετρίας των μετασχηματισμών . Η θεωρία των ομάδων όπως θεμελιώθηκε από τον Galois προσφέρει στον Klein (1849-1925) τα ακριβή κριτήρια για την ταξινόμηση των



γεωμετριών Το 1905 ο Einstein έχοντας το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας του Riemann και του Lorentz διατυπώνει την έννοια του χωρόχρονου στην θεωρία της σχετικότητας ενώ την ίδια εποχή στο Παρίσι γεννιέται η τέταρτη διάσταση με την κίνηση . Φανταστικούς χώρους δημιουργούν οι ζωγράφοι , φανταστικούς και οι μαθηματικοί όταν ανακαλύπτουν και συνειδητοποιούν και αφομοιώνουν την φράση του Cantor ότι « **η ουσία των μαθηματικών βρίσκεται στην ελευθέρια τους** »⁴

Εκεί που ο κόσμος παύει να είναι η σκηνή για τις προσωπικές ελπίδες και επιθυμίες , εκεί που εμείς σαν ελεύθερα όντα , τον παρατηρούμε με απορία , αναρωτιόμαστε για αυτόν και μελετάμε εκεί είναι η είσοδος στο βασίλειο της τέχνης και της επιστήμης .Εάν μεταφράσουμε αυτό που νιώσαμε και παρατηρήσαμε με τη γλώσσα της λογικής , τότε κάνουμε επιστήμη , αν το δείξουμε με μορφές των οποίων οι σχέσεις δεν είναι προσιτές στην ενσυνείδητη σκέψη αλλά αναγνωρίζονται με τη διαίσθηση ως μεστές νοήματος τότε κάνουμε τέχνη . Το κοινό στοιχείο και στην τέχνη και στην επιστήμη είναι η αφοσίωση σε κάτι που υπερβαίνει το προσωπικό , που κείται πέρα από την περιοχή της αυθαιρεσίας.

A.Einstein

⁴ τμήμα από τα ιστορικά στοιχεία του επιλόγου περιέχεται στο άρθρο της Χριστίνας Φίλη «Γεωμετρία και Τέχνη : Δύο παράλληλες αναζητήσεις»

οι εικόνες στον επίλογο κατασκευάστηκαν από τους Stuart Levy του Πανεπιστημίου Urbana-Champaign του Illinois, και Tamara Munzer του Πανεπιστημίου Stanford για το περιοδικό Scientific American και αναφέρονται στην ευκλείδεια , υπερβολική και σφαιρική γεωμετρία του σύμπαντος σε συσχέτιση με την πυκνότητα του

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ :

- Aebli, H. (1987).** Mental development: Construction in a cultural context. In B. Inhelder, D. Caprona, & A. Cornu-Wells (Eds.), *Piaget today* (pp. 217-232). Hove, England: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ainsworth, S.E. (1999).** A functional taxonomy of multiple representations. *Computers and Education*, 33(2/3), 131-152. ISSN 0360-1315.
- Alan F. Beardon.** *Iteration of Rational Functions*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- Arnheim, R. (1969).** *Visual thinking*. Berkeley & Los Angeles, CA: University of California Press.
- Artigue, M.:1998,** Teachers training as a key issue for the integration of computer technologies, Lewis, R. & Mendelson P. (eds.) *Proceedings of the IFIP TC3/WG3.3: Lessons from learning*. Amsterdam: North-Holland, 121-130.
- Artigue, M.:1998** *Teaching and learning elementary analysis :what can we learn from didactical research and curriculum evolution* (First Mediterranean Conference on Mathematics 1997)
- Artigue, M. (1991).** Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Aspinwall, L. N. (1995).** *The role of graphical representation and students' images in understanding the derivative in calculus: Critical case studies*. (Doctoral dissertation, The Florida state University, 1994).
- Balacheff, N. & Kaput, J.J.:1996,** Computer-Based Learning Environments in Mathematics, Bishop, A.J. et al., *International Handbook of mathematics education*, Kluwer, 469 - 501.
- Balacheff, N. & Sutherland, R.:1994,** Epistemological domain of validity of microworlds, the case of Logo and Cabri-géomètre, Lewis, R. & Mendelson P. (eds.) *Proceedings of the IFIP TC3/WG3.3:Lessons from learning*. Amsterdam: North-Holland, 137-150.
- Bauersfeld (Eds.),1994** *Theoretical perspectives on interaction in mathematics classroom* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Barnsley, M. F. and Rising, H.** [*Fractals Everywhere, 2nd ed.*](#) Boston, MA: Academic Press, 1993
- Barnsley F. Michael.** *Fractals Everywhere*. 2nd ed. Boston: Academic Press Professional, 1993.
- B. B. Mandelbrot,** ``How Long is the Coast of Great Britain, Statistical Self Similarity and Fractional Dimension,' ' *Science*, 155 (1967) 636-638.
- B. B. Mandelbrot.** *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W. H. Freeman, 1983.
- Bell,Swan &Taylor 1981** Choise of operation in verbal problems with decimal numbers ,Educational Studies in Mathematics 12,399-420
- Beth, E. W., & Piaget, J. (1966).** *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.
- Bloom, B.S. (1974)** (Ed.) *Taxonomy of Educational Objectives*. McKay, New York
- Borba, M., & Confrey, J. (1993).** *The role of teaching experiment: Students' construction of transformations in a multiple representational environment*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA
- Borba, M., De Souza, T., Fey, J. and Hudson, B. (Eds) 1997.** The role of technology in the mathematics classroom. *Proceedings of ICME 8: Working Group 16 - Secondary School Sub-group*. UNESP. State University of Sao Paulo, Brazil. [Online]
- Borwein, J. and Bailey, D.** "Pascal's Triangle." §2.1 in [*Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*](#). Natick, MA: A. K. Peters, pp. 94-95, 2003

- Boyer, C.B (1949)** The history of Calculus and its Conceptual Development, reprinted by Dover New York 1959
- Brian H. Kaye.** *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. New York: VCH Verlagsgesellschaft, 1989.
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997).** Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 37(4), 663-689.
- Brousseau, G 1983** *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques*
- Brousseau, G. (1997).** Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.
- Brousseau, G.: 1998,** *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage ed. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM
- Bruner, J. S.: 1960** *The process of education*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press
- Bruner, J. S.: 1964:** *The course of cognitive growth*. *American Psychologist*, 19, p1-15
- Bruner, J. S.: 1966,** *Towards a theory of instruction*, New York: Norton.
- Bruner, J. S.: 1966.** Towards a Disciplined Intuition. In *Relevance of Education*, 98-113, Penguin, 1974.
- Bruner, J. (1985).** Vygotsky: A historical and conceptual perspective. In J. Wertsch (Ed.). *Culture, communication, and cognition. Vygotskian perspective* (pp. 21-34). Cambridge: Cambridge University Press
- Bruner, J. (1986).** *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Carpenter & Moser 1984** *The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three*
- Cobb, P. (1995).** Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, in press.
- Cohen, L. and L. Manion. 2000.** *Research Methods in Education*. London: Routledge
- Cole, M. (1996).** *Cultural psychology*. Cambridge, Mass.: The Belknap Press of Harvard University Press
- Confrey, J. (1993).** «The role of technology in reconceptualizing functions and algebra». Becker, J., & Pence, B. (Eds.). *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, California, USA, pp. 47-74.
- Confrey, J. (1994)** *Splitting, similarity and the rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions*
- Confrey, J., Smith E. (1995).** Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions, *Journal for Research in Mathematics* 1, vol. 26. No. 1, 66-86.
- Cooney, J. (1999)** "Conceptualizing Teachers' Ways of Knowing"
- Cornu, B.: 1991,** Limits, In D. O. Tall (ed), *Advanced mathematical thinking*,
- Cottrill, J. et al.: 1996,** *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema*, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192. Dordrecht: Kluwer, 153-166.
- Davidson, N. (1990).** Small group cooperative learning in mathematics. In T.J. Cooney and C.R. Hirsh (eds), *Teaching and learning mathematics in 1990, NCTM Yearbook*, 52-61. Reston: NCTM
- Donaldson, M. (1978)** *The minds of children*. N.Y.: Norton.
- Dorfler, W.: 1993,** *Fluency in a discourse or manipulation of mental objects*, *Proceedings of PME 17*, Tsukuba, Japan, II, 145-152.

- Dörfler, W.:**1993, Computer use and view of the mind, Keitel, C. & Ruthven K. (eds.) *Learning from computers: Mathematics education and technology*, Springer- Verlag, 159 - 186.
- Douady, R. (1985).** The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability--Examples from elementary school teaching. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 33-52). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, OW&OC.
- Douady, R.:** 1987, Dialectique outil-objet et jeux de cadres, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7, 5-32.
- Dreyfus, T.:**1993, Didactic design and computer-based environments, Keitel & Ruthven (eds.) *Learning through computers: mathematics and educational technology*, Srpinger Verlag, Berlin, 101-130
- Dubinsky, E.:**1991, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Tall, D. (ed) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Accademic Publishers.
- Dubinsky, E & Lewin, P.:**1986, Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness, *Journal of Mathematical Behavior* 5,55-92
- Duval, R.:** 1993 Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee *Annales de Didactique et de sciences cognitives* 37-65
- Duval, R.:** 1995α, *Semiosis et Pensee Humaine:Registres semiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- Duval, R.:** 1995β, Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings, In R. Sutherland & J. Mason (eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Berlin: Springer, 142-157.
- Duval, R.:** 1998, Geometry from a Cognitive Point of View, In C. Mammana & V. Villani(eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.
- Ernest, P. (1991).** *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.
- Fischbein, E.:** 1978. Intuition and Mathematical Education. *Proc. 2nd Int.Conf. for the Psych. of Math. Educ.* 197-202.
- Fischbein, E., Tirosh, D. & Malamed, U.:** 1979. Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Proc. 3rd Int.Conf. for the Psych. of Maths. Educ.*, 67-79.
- Fischbein, E.:** 1973, 'Intuition, structure and heuristic methods in teaching Mathematics', in A.G. Howson (ed.) *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University press.
- Fischbein, E.:** 1987, 'Intuition in Science and Mathematics', D. Reidel Publishing Company *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 615-645.
- Fischbein, E.:** 1993, The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fisher, C., Dwyer, D. C., & Yocam, K., Eds. (1996).** *Education & technology:Reflections on computing in classrooms*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Furinghetti, F., Paola, D.:** 1988, 'Wrong beliefs and misunderstanding about basic concepts of calculus (age 16-19)', *Compte rendu de la CIEAEM* 39, Sherbrook 1987,173-177.
- Forman,E. A., Minick, N, & Stone, C.A. Eds. (1993).** *Context for learning: Sociocultural dynamics in children's development*. Oxford: Oxford University Press.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988).** The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*:Monograph Number 3.
- Foucalt, M. (1972).** *The archaeology of knowledge*. New York: Pantheon Books

- Glaserfeld, E. von** (1987). 'Constructivism', in Husen, T. and Postlethwaite, N. (Eds.)
- Glaserfeld, E. von** (1995). *Radical Constructivism*, Routledge/Falmer.
- Goldenberg, P.** (1999), Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4: Kluwer
- Gray, E.M. & Tall, D.O.:** 1994, Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal of Research in Mathematics Education*, 26, 2, 115-141.
- Greeno, G. J.:** 1983, Conceptual entities. In Genter & Stevens(eds), *Mental Models*, 227-252.
- Greeno, J. G., & Hall, R. P.** (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappa*, 78, 361-367.
- Grunetti L. & Rizza A .** (2003) :A lengthy process for the establishment of the concept of limit .*Proceedings of the third Conference of the European Group for research in mathematics education*
- Hadamard, J. S.:** 1945, *The Psychology of Invention in the Mathematics Field*, Princeton University Press, N.J. *International Encyclopedia of Education*, Supplement Vol 1, Oxford, Pergamon
- Hadamard, J.S.** (1949). The psychology of invention in the mathematics field. Princeton, N.J: Princeton University Press.
- Halford, G. S.** (1993). *Children's Understanding: The Development of Mental Models*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates
- Hurewicz and Wallman.** 1948 "Dimension Theory" Princeton University Press,.
- Hebb, D. O.:** 1972. *Textbook of Psychology*, 3rd edition, Saunders
- Heinze-Otto Peitgen, Dietmar Saupe,** ed. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- Hershkowitz, R. & Vinner:** 1983 *The role of critical and non critical attributes in the concept -image of geometrical concepts.*
- Hoffer, A.** 1981. Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*. 74(1), 11-18. [EJ 239315]
- Hoyles, C.:** 1993, Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation, Keitel, C. & Ruthven K., *Learning from computers: Mathematics Education and Technology*, NATO ASI Series, Springer-Verlag.
- Hoyles, C. & Noss, R.:** 1992, *Learning mathematics and Logo*, Cambridge Mass.: MIT Press
- Hoyles, C. & Noss, R.:** 1996, *Windows on mathematical meanings*, Kluwer Acc. Press.
- Hoyles C. & Healy, L.:** 1997, Unfolding meanings for reflective symmetry, *International Journal of computer for mathematical learning*, Vol. 2, 1, 27-59
- Hussey** (1991) : Aristotle on mathematical objects in *Peri Ton Mathematon*, ed .I. Mueller p.106&110
- Janvier, C.** (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates
- Jaworski, B.** (1994). *Investigating Mathematics Teaching*, Routledge/Falmer.
- Kant , I : 1934, Critique of pure reason, J.M.D.Meiklejohn, Dent, London
- Kaput, J. & Thompson, O.:** 1994, Technology in mathematics education: the first 25 years in JRME, *Journal for research in mathematics education*, 25 (6), 676 - 84
- Kaput, J.** (1993). The Representational Roles Of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. StraBer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

- Kaput, J.:**1991, Notations and representation as mediators of constructive processes, von Glasersfeld, E. (ed.) *Radical constructivism in mathematical education*,
- Kaput, J.:**1992, Technology and mathematics education, Grouws, D.A. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, NCTM, Macmillan Publishing Company.
- Karmiloff-Smith, A., & Inhelder, B. (1947-1975).** If you want to get ahead, get a theory. *Cognition*, 3. 195-212.
- Katona. G (1967)** *Organizing and memorizing : studies in the psychology of learning and teaching* .New York :Hafner(1940)
- Kidron, I., Zelavi, N. & Openhaim, E. (2001).** Teaching the limit concept in a CAS environment: Students' dynamic perceptions and reasoning, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 241-248. Utrecht, the Netherlands.
- Kidron, I. (2002).** Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments, in A. Cockburn and E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the Twenty Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 209-216, Norwich, UK.
- Kieran, C.:** *The development of algebraic thinking and symbolization*
- Kynigos, C. (1995).** Programming as a means of expressing and exploring ideas in directive educational system: three case studies. In diSessa, C. Hoyles, and I Noss (Eds.), *Computers and Exploratory Learning* (NATO ASI Series, 399-420 Berlin: Springer Verlag.
- Kynigos, C., Psacharis, G. 2003** "13 Year-olds' Meanings Around Intrinsic Curves With A Medium For Symbolic Expression And Dynamic Manipulation", in N. Pateman, B.Dougherty & J. Zilliox (Eds). *Proceedings of the Twenty Seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 165-172. Honolulu,USA.
- Kynigos, C.** The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Geometry
- Laborde, C.:**1993, The computer as part of the learning environment: the case of geometry, Keithel, C. & Ruthven, K., *Learning from computers: mathematics education and technology*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 48-67.
- Lakatos, I.:** 1978. Cauchy and the Continuum, *Mathematical Intelligencer* 1, 151-161.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000):** Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York: Basic Books.
- Lampert, M. (1990).** When the problem is not a question and the solution is not an answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27 (1), 29-63.
- M. Wertheimer**(1959) *Productive thinking*. New York: Horper & Row *Mathematiques* 7, 5-32.
- Mamona-Downs, J.:** 2001, 'Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence', *Educational studies in mathematics*, 48, 259-288.
- Mariotti M.A. & E. Fischbein,** (1997) Defining in classroom activities, *Ed.St.Math.*, 34,
- Mariotti M.A., Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., & Garuti R. (1997)** Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proc. of PME-XXI*, Lathi, pp. 180-95. *Mathematics Education*, 31(1), 89-112.
- Mariotti, M.A:**1997, Justifying and proving: figural and conceptual aspects, Hejny M. & Novotna J. (eds.) *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, Podebrady, Czech Republic.

- Mariotti, M.A. & Bartolini Bussi M.G.:1998**, From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment, *Proceedings of the 22nd PME Conference*, Stellenbosh, South Africa, I-180-95.
- Mariotti, M.A (2000)**. *Introduction To Proof: The Mediation Of a Dynamic Software*
- Mariotti, M.A. (2002)**. The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695-724). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- McKim, R. (1972)**. *Experiences in visual thinking*. Monterey, CA: Brooks/Cole.
- Milani, R. & Baldino, R. (2002)**. The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis, in A.Cockburn and E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the Twenty Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 345-352, Norwich, UK.
- Moreno, R., & Mayer, R. E. (1999)**. Multimedia supported metaphors for meaning making in mathematics. *Cognition and Instruction*, 17(3), 215-248.
- Moss & Case 1999** *Developing Children's Understanding of the rational Numbers*
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (1989)**. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (1991)**. *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- National Council of Teachers of Mathematics (2000)**. *Principals and standards for school mathematics*. Electronic version. www.standards.nctm.org
- Nemirovsky, R., Tiemey, C., Wright T. (1998)**. Body Motion and Graphing
- Nemirovsky, R., Kynigos, C., Yerushalmy, M., Robutti, O., Pratt, D. & Ferrara, F. (2004)**. *The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Mathematics: Ideas discussed at PME over the last 10 years, Proceedings of ICME 10*, Copenhagen, Denmark
- Ni 2001** *Semantic domains of rational numbers and the acquisition of number equivalence*
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996)**. *Windows on Mathematical Meanings*.
- Norman, D.A.:1993**, *Things that make us smart*, Addison-Wesley Pub. Com.
- O'Connor, M.C. (1998)**. Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. Lampert & M. Blunk (Eds.), *Talking Mathematics: Studies of Teaching and Learning in School* (pp. 17-55). NY: Cambridge University Press.
- Olive, J. (1991)** *Learning Geometry Intuitively with the Aid of a New Computer Tool: The Geometer's Sketchpad*
- Olive, J. (2001)**. Connecting partitioning and iterating: a path to improper fractions. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the Twenty Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 1-8, Utrecht, the Netherlands.
- Olive, J. (2002)**. The construction of commensurate fractions. In: A. Cockburn and E. Nardi (eds.) *Proceedings of the Twenty Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 1-8, Norwich, UK.
- Oliveiro F., Robutti, O. 2001** Measures in Cabri as bridge between perception and theory, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty Fifth Annual Conference of the International*

- Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 9-16. Utrecht, the Netherlands
- Palmer S. E. (1978).** Fundamental aspects of cognitive representation. In Rosch, E. & Lloyd, B. B. (Eds.), *Cognition and categorization* (pp.259-303). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.
- Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001).** The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, 40(2), 118-27.
- Papert S.:1980,** *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas* New York: Basic Books.
- Papert S.:1992,** *The children's machine*, New York: Basic Books
- Philippou G.N & Christou ,K(1994)** *Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions* .In J.P.Ponte & J.P.Matos (Eds .) , *Proceedings of the PME 18 (Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education)* Vol.IV, 33-40
- Piaget, J. (1976).** *The grasp of consciousness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J. (1978).** *Success and understanding*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. (1985).** *The equilibration of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J.: 1969,** *The mechanisms of perception*, New York, Basic Books.
- Piaget, J.: 1970,** *Genetic Epistemology*, W. W. Norton, New York.
- Piaget, J.: 1972,** *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1969).** *The psychology of the child*. New York: Basic Books.
- Poincaré, H.: 1913.** *Mathematical Creation*. In *Foundations of Science* New York: The Science Press.
- Polya ,G (1945).** *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press
- Polya ,G :1957,** *How to solve it* .(2nd ed.) New York : Doubleday
- Polya ,G :1954** *Mathematics and Plausible Reasoning Induction and Analogy in Mathmatics* Vol I : Princeton University Press pp83-84
- Porzio, D. (1999).** Effects of differing emphases in the use of multiple representations and technology on students' understanding of calculus concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(3), 1-29.
- Presmeg, N. C. (1986).** Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297- 311.
- Presmeg, N. C.: 1992,** Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high
Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics research on mathematics teaching and learning, NCTM, Macmillan Publishing Company.
- Rorty, R. (1979).** *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton, NJ: Princeton University Press
- Rosch, E., Mervis, C., Gray, W., Johnson, D. & Boyes-Braem, P.: 1978,** Basic objects in natural categories, *Cognitive Psychology*, 8, 382-439.
- Saussure, F. de (1986).** *Course in general linguistics* (C. Bally & A. Sechehayé, with A. Reidlinger, Eds.; R. Harris, Trans.). La Salle, IL: Open Court. (Original work published 1916)
- Schoenfeld, A. H.: 1986,** On having and using geometric knowledge, in J. Hierbert(eds), *Conceptual and Procedural Knowledge:The Case of Mathematics*, Erlbaum, 225-264.
- school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.

- Schoenfeld, A. (1996).** In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows the 'answer'? *For the learning of mathematics*, 16(3), 11-16.
- Sfard, A. (1991).** On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994).** The gains and the pitfalls of reification — the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sfard, A. (1994).** Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-55.
- Sfard, A. (1998).** On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Sfard, A.: 1992,** Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function, In G. Harel & E. Dubinsky(eds), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, Washington DC: MAA., 59-84
- Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P., & Mason, J. (1998).** Learning mathematics through conversation: is it as good as they say? A debate. *For the learning of mathematics*, 18(1),
- Sfard, A., (1998).** *Balancing the Unbalanceable: The NCTM Standards in the Light of Theories of Learning Mathematics*
- Sierpiska, A. (1994).** *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Sierpiska, A. & Lerman, S. (1996).** Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Sierpiska, A., Dreyfus, T. and Hillel, J. (1999).** Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, no. 1, pp. 7-40
- Sierpiska, A: 1985,** Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6. 1., 5-67.
- Sierpiska, A: 1987:** Humanities students and epistemological obstacles related to limits .*Educational studies in mathematics* ,18,371-397
- Skemp, R. R.: 1971.** *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin.
- Skemp, R. R.: 1976,** Relational understanding and instrumental understanding , *MathematicsTeacher*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R.: 1979.** Goals of Learning and Qualities of Understanding, *Proc. 3rd Int. Conf. for the Psych. of Maths. Educ.*, 197-202.
- Skemp, R. R.: 1979,** *Intelligence, Learning and Action*, London: Wiley.
- Swafford, J. O., & Langrall, C.W. (2000).** Grade-6 students' reinstruction use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in*
- Sweeney & Quinn 2000** *Concentration Connecting Fractions Decimals & Percents*
- Sweller(1993)** in Boulton -Lewis 1998: *Children's strategy use and interpretation of mathematical representations*
- Steinhaus, H. [Mathematical Snapshots, 3rd ed.](#)** New York: Dover, 1999.
- Tall, D. O.: 1979.** The Calculus of Leibniz - an Alternative Modern Approach, *Mathematical Intelligencer*, 2, 54-55.
- Tall, D.: 1980** *Mathematical intuition with special reference to limiting processes*
- Tall, D. O.: 1980a.** Looking at Graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *Mathematical Gazette*, (to appear).

- Tall, D. O.: 1980b.** Intuitive infinitesimals in the calculus, (Poster presented to ICME IV).
- Tall, D. O.: 1980c.** Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically. *Mathematical Education for Teachers*, (to appear).
- Tall, D. O.: 1980d.** The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Ed. St. in Math.*, (to appear).
- Tall, D. O. & Vinner, S.: 1980.** Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity (paper presented by first author to conference of Swedish Mathematicians, UHA, St. Andrew's, Scotland. March 1980).
- Tall, D. & Vinner, S.: 1981,** Concept image and concept definition in Mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D. et al. :2000** *Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking*
- Tall, D. (Ed.). (1991).** Advanced mathematical thinking. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Tall, D.: 1994,** *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics*, Plenary presentation, CIEAM, Toulouse, France
- Tall, D. (1995).** Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking
- Tall, D.: 1996,** 'Functions and Calculus', in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 289-325.
- Tall, D. O.: 1999,** Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel*, 1, 111-118.
- Tall, D. O. et al. : 2000,** What is the object of the encapsulation process?, *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 1-19.
- Tirosh, D. (1999),** Forms of Mathematical Knowledge: Learning and Teaching for Understanding, *Educational Studies in Mathematics* 38: 163-187, Kluwer Academic Publishers.
- Thomson & Walker 1996** *Connecting decimals and other mathematical Content*
- Valero, C. & Gomez, P. (1996).** Precalculus and graphic calculators: the influence on teacher's beliefs, in Puig, L. and Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 363-370, Valencia, Spain.
- Vance 1986** *Ordering decimals and fractions*
- Vergnaud, G. A. (1998).** Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematics Behavior*, vol. 17, no. 2, pp. 167-181.
- von Glasersfeld, E., Ed. (1991).** *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- von Glasersfeld, E., Ed. (1995).** *Radical Constructivism, A way of knowing and learning*. London: Falmer Press.
- Vygotsky, L.S. (1962).** *Thought and language*. Cambridge, Mass.: MIT Press
- Vygotsky, L. S. (1978).** *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. (1986).** *Thought and language* (A. Kozulin, Ed. and Trans.). Cambridge, MA: MIT Press.
- Vygotsky, L. S. (1987).** Thinking and speech. In R. W. Rieber, & A. C. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1, pp. 39-285). New York: Plenum Press.
- Van Hiele, P. M. (1986).** Structure and insight: A theory of mathematics education. New York: Academic Press.

- van Sommers, P.:** 1984, *Drawing and Cognition*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- Vinner, S.:** 1975. The Naive Platonic approach as a teaching strategy in arithmetic. *Ed. St. in Math.*, 339-350.
- Vinner, S.:** 1980. Concept image, concept definition and the notion of function (in preparation).
- Webb, N.M. (1991).** Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 366-389
- Webb, N.M. & Farivar, S. (1994).** Promoting helping behavior in cooperative small groups in middle school mathematics. *American Educational Research Journal*, 31, 369-395.
- Wheatley (1978, 1996).** *The Wheatley spatial ability test form B*. West Lafayette, IN: Purdue University.
- Whitehead, A. N. (1963).** *Science and the modern world*. New York: New American Library
- Wolfram, S.** *A New Kind of Science*. Champaign, IL: Wolfram Media, pp. 870 and 931-932, 2002.
- Young, J. Z.:** 1978. *Programs of the Brain*, OUP.
- Yerushalmy, M.** (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 431-466.
- Yerushalmy, M.** (1999), *Learning Big Ideas: Curriculum Reform and the Use of Technology*
- Zan R.:** 2001, 'Metacognizione e difficoltà in matematica', *La matematica e la sua didattica*, n. 2.
- Zan R.:** 2002, 'Verso una teoria per le difficoltà in matematica', *Seminario Naz Italiano*, Pisa.
- Στέλλα Βοσνιάδου, Erik De Corte, Robert Glaser και Heinz Mandl** (υπό έκδοση) : *Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες* - μετάφραση ορισμένων κεφαλαίων του βιβλίου με τίτλο "International Perspectives on the Design of Technology-Supported Learning Environments"
- Στέλλα Βοσνιάδου** : Η ψυχολογία των μαθηματικών
- Γαγάτσης Α. 2004** Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών (Τόμος Ι)
- Γαγάτσης Α. 2004** Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών
- Δ.Αναπολιτάνος** : Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών Εκδόσεις Νεφέλη
- Κ. Γαβρίλης** : Η ανάπτυξη της μάθησης κατά την διαπραγμάτευση μαθηματικών θεμάτων με αλληλεπίδραση στην οθόνη υπολογιστή από τη συλλογή «Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών και της πληροφορίας» του Α. Μπαρκάτσα
- M. Donaldson** : Η σκέψη των παιδιών
- Michel Henry** Διδακτική Μαθηματικών Έκδοση και επιμέλεια Σπύρου Παναγιώτης ,Αθήνα 1999
- Μ.Μπρίκας (1970)** :Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας
- Τ.Μπούνης 2004** : Ο θαυμαστός κόσμος των *Fractals* Εκδόσεις Leader books
- Ε. Κολέζα(2000)** : Γνωσιολογική κα Διδακτική Προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών *Leader books*
- Ε. Κολέζα(2003)** : Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών Πρακτικά 2^{ου} Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
- Χ .Κυνηγός** : Μαθηματική Εκπαίδευση
- Χ. Κυνηγός και Ε. Δημαράκη (2002)** : Νοητικά εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα (Εκδόσεις Καστανιώτη)
- Ε, Σταμάτης(1953)** :Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών (βιβλία V , VI, VII,VIII,IX (Εισαγωγή σ.7-22)
- Πατρώνης Τ. &Σπανός Δ. (2000)** : Σύγχρονες θεωρήσεις κα έρευνες στην μαθηματική παιδεία (Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού)

Πλάτωνος Πολιτεία 2002 μετάφραση Ν.Μ.Σκουτερόπουλος (Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ)
Φίλη Χ. (2000) : *Γεωμετρία και Τέχνη : Δύο παράλληλες αναζητήσεις*
Φιλίππου, Γ., Χρίστου Κ. : 1995, *Διδακτική των Μαθηματικών*, εκδ. Γ. Δαρδάνος
Δ. Χριστοπούλου : *Το πρόβλημα του τρόπου ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων κατά τον Αριστοτέλη .Ερμηνείες των Hussey ,Mignucci*
 Ευκλείδης Γ´, Τόμος 17, Τεύχος 53-54 , 2000

Ιστοσελίδες

<http://math.berkeley.edu/~harrison/research/publications>
<http://en.wikipedia.org/w/wiki.phtml?title=Template:Space&action=edit>
<http://mathworld.wolfram.com/MandelbrotSet.html>
<http://www.mrob.com/pub/muency.html>
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/mand-area.html>
<http://mathforum.org/advanced/robertd/mandelbrot.html>
<http://archive.comlab.ox.ac.uk/other/museums/computing/mandelbrothtml>
<http://mathforum.org/advanced/robertd/lsys2d.html>
<http://www.math.utah.edu/~alfeld/math/mandelbrot/mandelbrot.html>
<http://www.cs.unh.edu/~charpov/Programming/L-systems/>
<http://ejad.best.vwh.net/java/fractals/koch.shtml>
<http://library.wolfram.com/infocenter/Demos/4662/>
<http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/Fractals.html>
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/dimension.shtml
<http://sprott.physics.wisc.edu/fractals.htm>
<http://tqd.advanced.org/3493/noframes/fractal.html>
<http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0830631372/weisstein-20>
<http://www.math.vt.edu/people/hoggard/FracGeomReport/MADE5>
<http://CLASSES/YALE.EDU/FRACTALS/IMA/FB>
<http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals>
<http://www.apple.com/quicktime/resources/qt4/us/benefit>
<http://www.lab.epmhs.gr/gr/html/parousiaseis/fractals>
<http://tqd.advanced.org/3493/noframes/fractal.html>
<http://mathforum.org/sketchpad/gsp.activities/recursion.html>
<http://teacherlink.org/home.html>
<http://www.ies.co.jp/math/javalesson/exm4/exm4.html>
<http://www.shu.ac.uk/schools/ed/maths/icmewg16.htm>
<http://illuminations.nctm.org>
<http://www.katherine.dix@flinders.edu.au>
http://www.edfac.unimelb.edu.au/DSME/TAME/TAME_RESEARCH.html
<http://my.nctm.org/eresources>
<http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
<http://www.sumnum.org/phi.htm>
<http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/fracintro/>
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/spiral.html>
<http://library.advanced.org/16661/>
<http://www.math.odu.edu/~bogacki/citat/series/index.html>
http://www.calculusinmotion.com/contact_us.html
<http://www.cygnus-software.com/zoommovies/index.html>
<http://artis.imag.fr/Publications/1997/TZTV97/FIGURE1.gif>
<http://www.keypress.com>
<http://www.Ultra Fractal .com>
<http://spanky.triumf.ca/www.Fractint>
<http://www.stangrist.com/fibonacci.html>
<http://math.rice.edu/~lanius/fractals/>
<http://www.chaffey.org/fractals/>
http://www.maa.org/mathland/mathland_2_10.html

- <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/fractal.html>
<http://www.student.utwente.nl/~schol/gallery/>
<http://www.rialto.k12.ca.us/frisbie/fractals.html>
<http://mathforum.org/alejandre/workshops/fractal/fractal3.html>
<http://graphics.gardenweb.com/graphics/bullets/bull11logo.gif>
http://www.glyphs.com/art/fractals/what_is.html
<http://www.geocities.com/Athens/8231/fctlproject1.html>
http://www.marcopolosearch.org/MPSearch/SearchResults.asp?orgnid=2&log_type=1&hdnFilter=&hdnPerPage=15&txtSearchFor=FRACTALS&selUsing=all
 Devaney, R. L. and Keen, L. [Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics.](#) Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989.
 Devaney, R. L. [Complex Dynamical Systems: The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets.](#) Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
 Mandelbrot, B. B. [The Fractal Geometry of Nature.](#) New York: W. H. Freeman, 1983
 Massopust, P. R. [Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets.](#) San Diego, CA: Academic Press, 1994.
 Gardner, M. [The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American.](#) Chicago, IL: University of Chicago Press, p. 227, 1984.
 Gerald A. Edgar. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York: Springer-Verlag, 1990
 Harris, J. W. and Stocker, H. "Koch's Curve" and "Koch's Snowflake." §4.11.5-4.11.6 in [Handbook of Mathematics and Computational Science.](#) New York: Springer-Verlag, pp. 114-115, 1998.
 Pappas, T. "Fractals--Real or Imaginary." [The Joy of Mathematics.](#) San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, pp. 78-79, 1989.
 Peitgen, H.-O. and Richter, D. H. [The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems.](#) New York: Springer-Verlag, 1986.
 Peitgen, H.-O. and Saupe, D. (Eds.). [The Science of Fractal Images.](#) New York: Springer-Verlag, 1988.
 Peitgen, H.-O.; Jürgens, H.; and Saupe, D. [Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.](#) New York: Springer-Verlag, 1992.
 Peitgen, H.-O.; Jürgens, H.; and Saupe, D. [Fractals for the Classroom, Part 1: Introduction to Fractals and Chaos.](#) New York: Springer-Verlag, 1992.
 Pickover, C. A. (Ed.). [Fractal Horizons: The Future Use of Fractals.](#) New York: St. Martin's Press, 1996.
 Pickover, C. A. (Ed.). [The Pattern Book: Fractals, Art, and Nature.](#) World Scientific, 1995.
 Rietman, E. [Exploring the Geometry of Nature: Computer Modeling of Chaos, Fractals, Cellular Automata, and Neural Networks.](#) New York: McGraw-Hill, 1989
 Robert L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1986.
 Russ, J. C. [Fractal Surfaces.](#) New York: Plenum, 1994.
 Schroeder, M. [Fractals, Chaos, Power Law: Minutes from an Infinite Paradise.](#) New York: W. H. Freeman, 1991.



ПАРАРТНМА

ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΣΠΕΙΡΩΝ

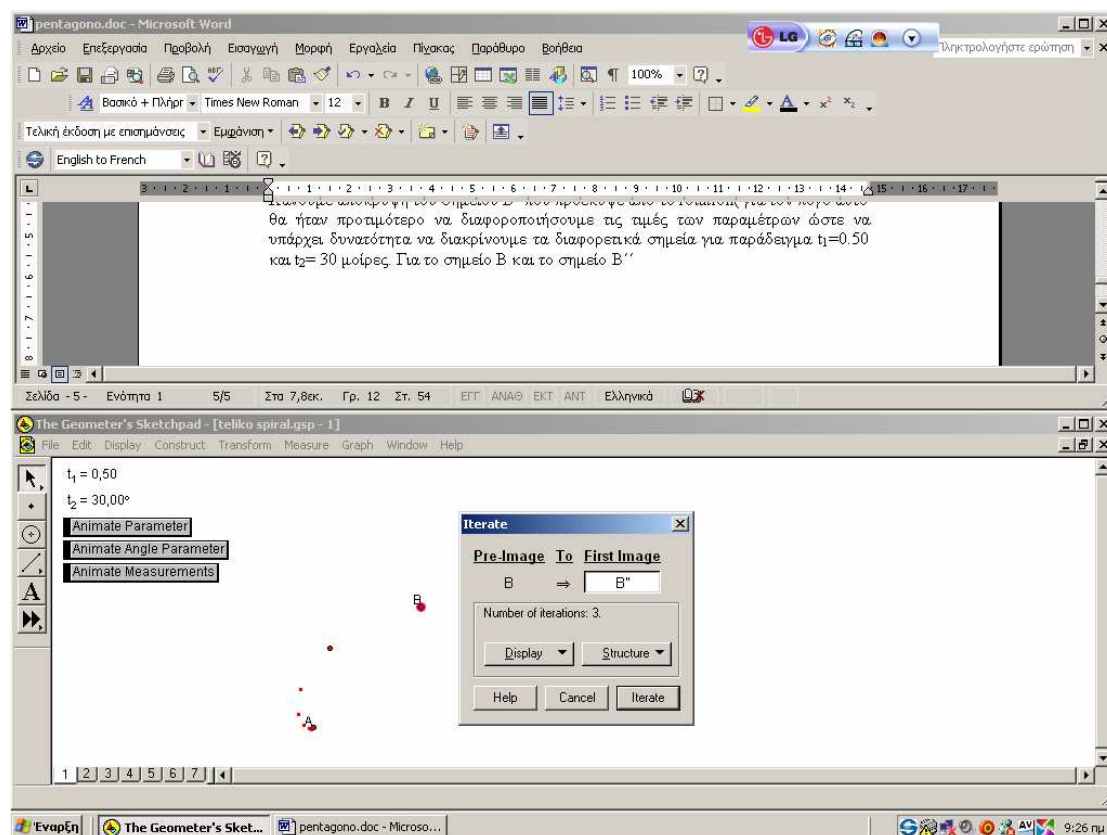
α. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευγθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτῆς ἰσοταχῶς περιενεγθεῖσα δοσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τῇ γραμμᾷ περιεγχομένη φέρηται τι σημεῖον ἰσοταχῶς αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τῆς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἑλικά γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

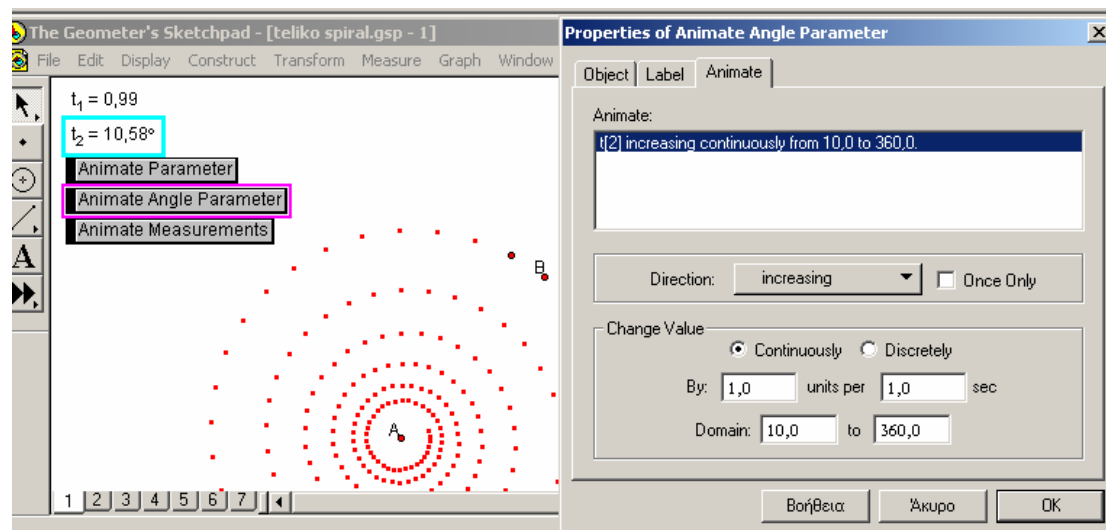
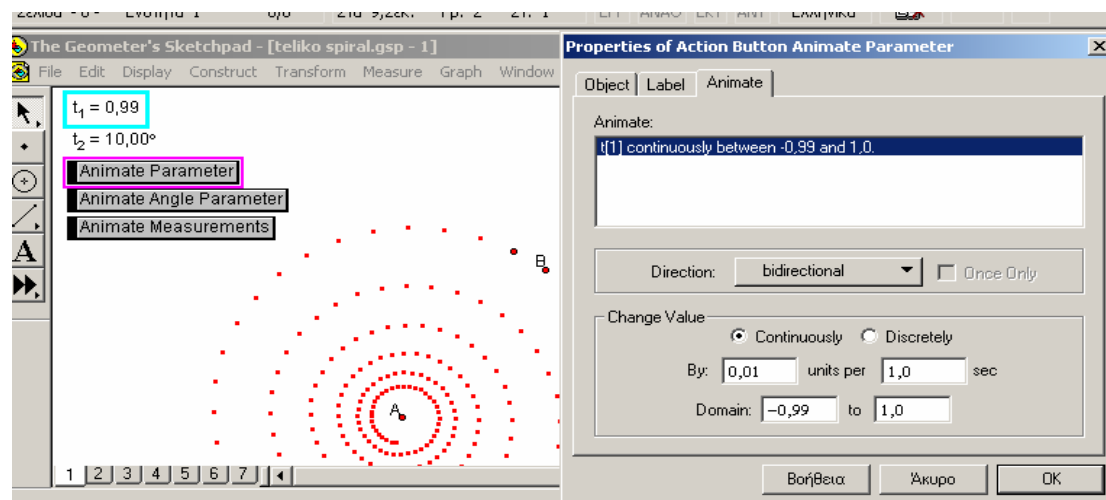
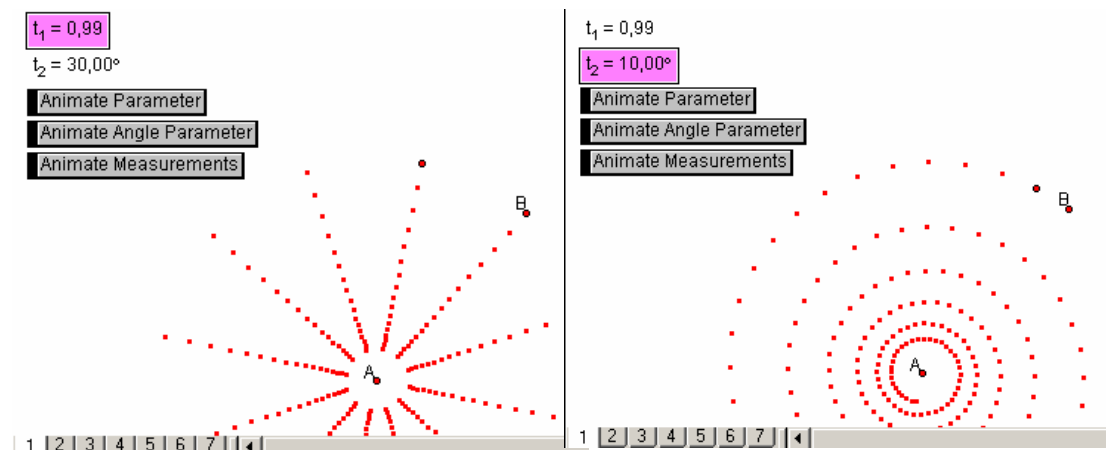
Εάν εις το επίπεδον αχθῇ ευθεῖα γραμμὴ και εν ω το ἐν ἄκρον αὐτῆς μένει ἀκίνητο ,αφοῦ περιστροφή αὐτὴ ἰσοταχῶς ἀποκατασταθῇ παλιν , ἐκεῖ οπου ἐξεκίνησεν , συγχρονῶς δε προς την περιστρεφόμενῃ γραμμῇ κινῆται σημεῖον ἐπ'εαυτῆς ἰσοταχῶς ἀρχισαν την κινήσιν ἀπὸ του ἀκινήτου ἄκρου , το σημεῖον θα γράψει εις το ἐπίπεδον ἑλικά (Ε.Σταμάτης ,Αρχιμήδους Ἀπαντα, σελ. 39)

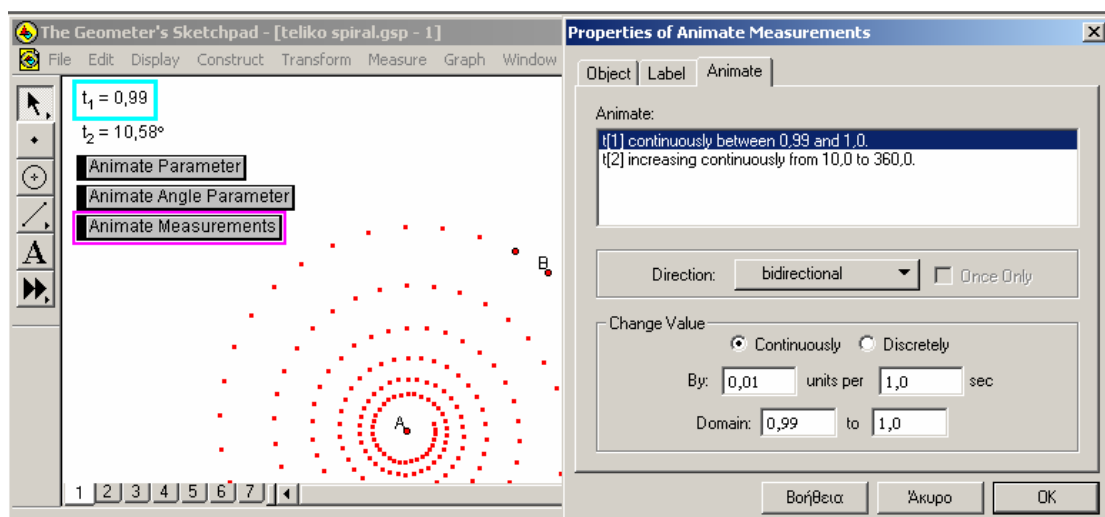
Σε μια σελίδα του Geometer's Sketchpad κατασκευάζουμε δυο σημεία A, B
Κατασκευάζουμε δύο παραμέτρους t_1 , t_2 με τιμές $t_1=0.99$ και $t_2= 10$ μοίρες από το μενού graph-new parameter .

Καθιστούμε το σημείο A mark center και κάνουμε στροφή του B κατὰ t_2 . Το νέο σημείο B' που προκύπτει κάνουμε dilation κατὰ την παράμετρο t_1 ὥστε να προκύψει ἓνα δεύτερο σημείο B'' .

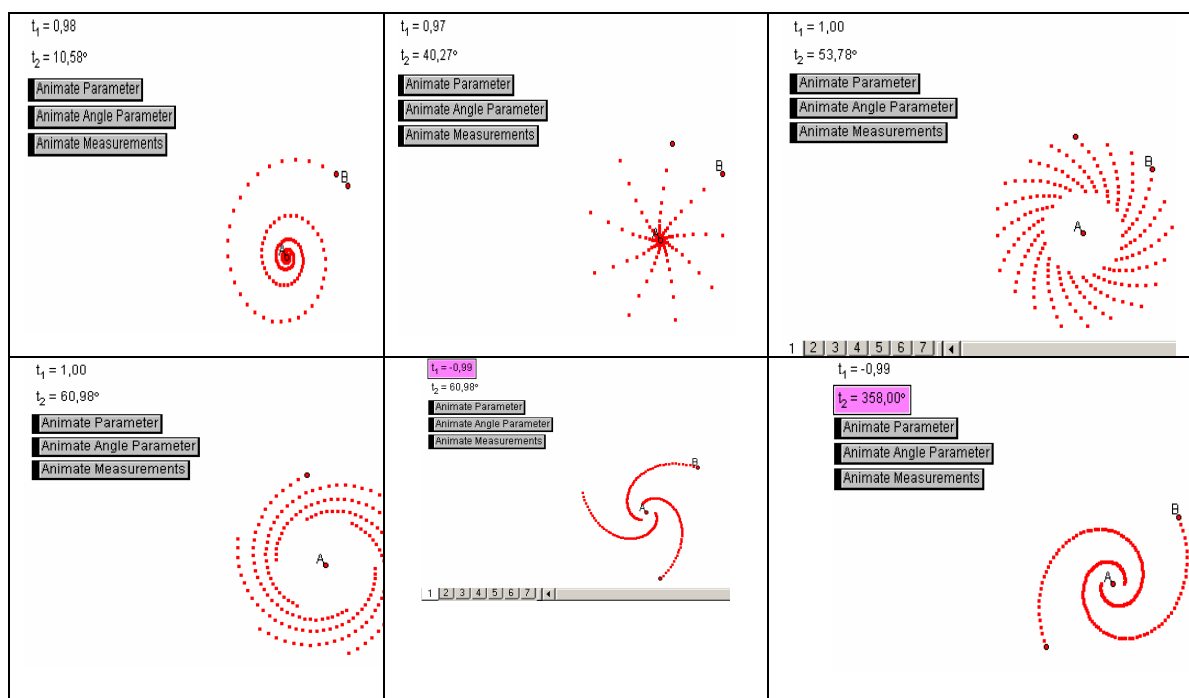
Κάνουμε ἀπόκρυψη του σημείου B' που προέκυψε ἀπὸ το rotation(για τον λόγο αὐτό θα ἦταν προτιμότερο να διαφοροποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων ὥστε να υπάρχει δυνατότητα να διακρίνουμε τα διαφορετικά σημεία για παράδειγμα $t_1=0.50$ και $t_2= 30$ μοίρες. Για το σημείο B και το σημείο B'' εφαρμόζουμε την ιδιότητα transform-iterate και αυξάνουμε τον αριθμό των επαναλήψεων στο 200 για παράδειγμα . Επαναφέρουμε τις αρχικές τιμές των παραμέτρων κάνοντας διπλό κλικ .



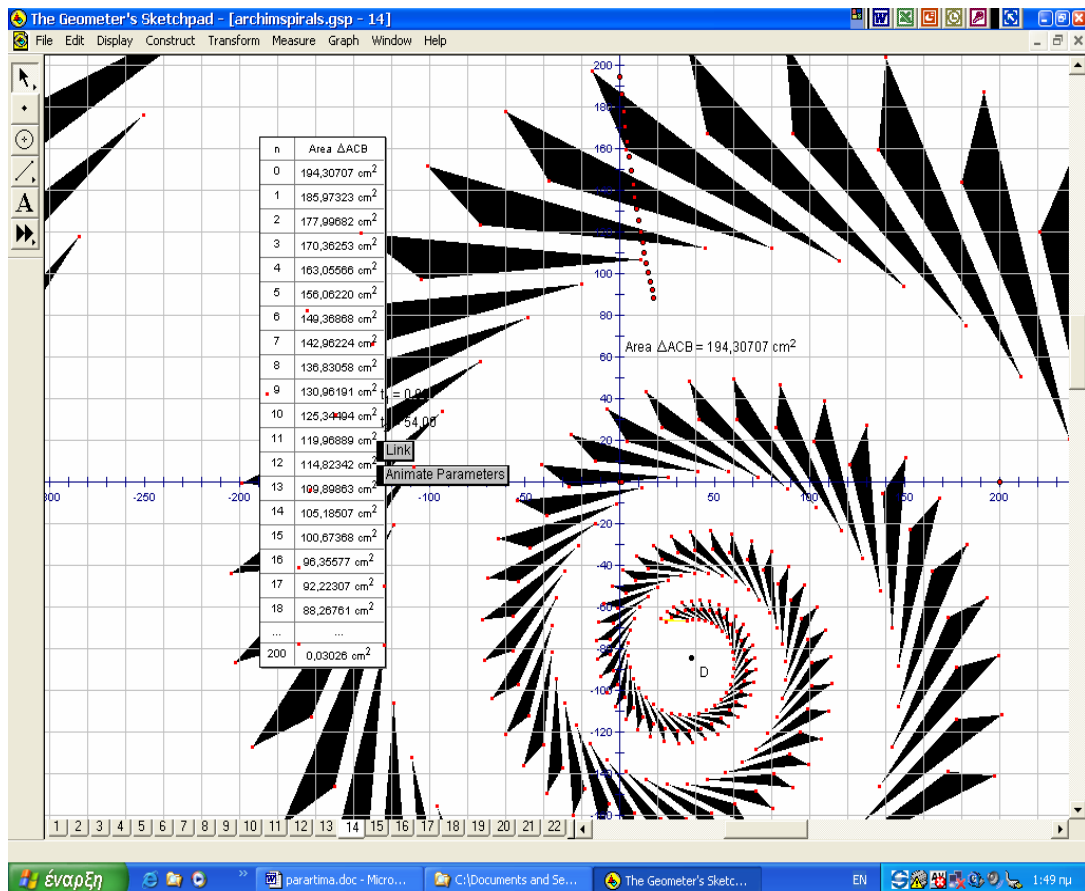
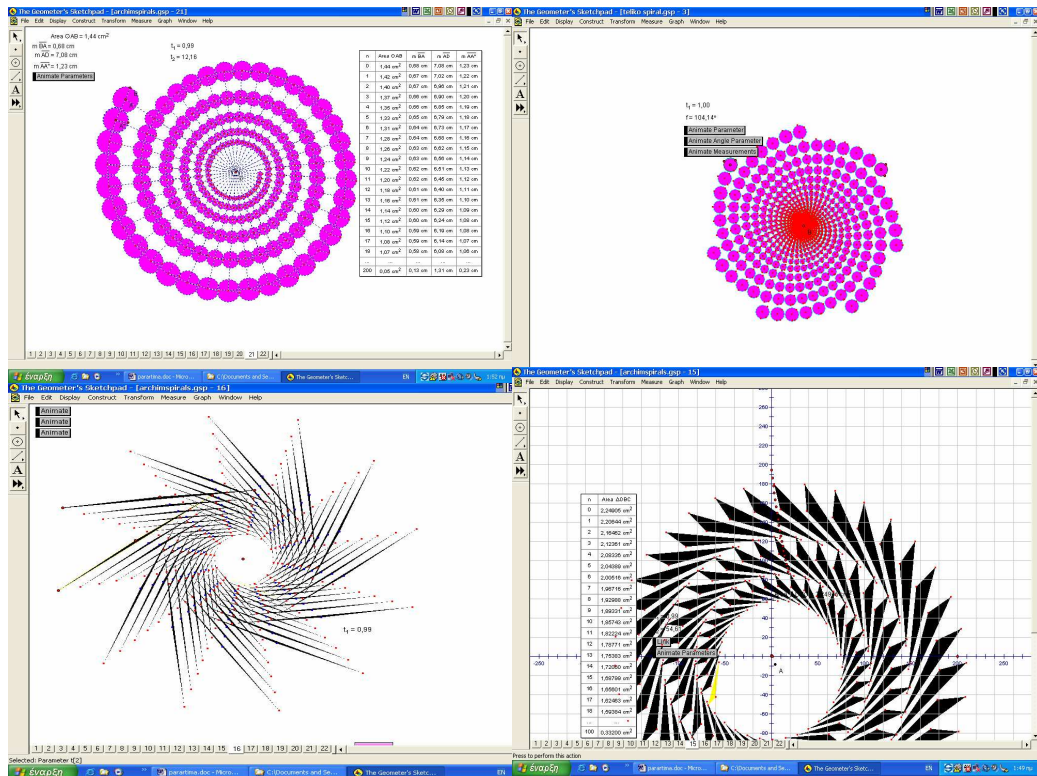


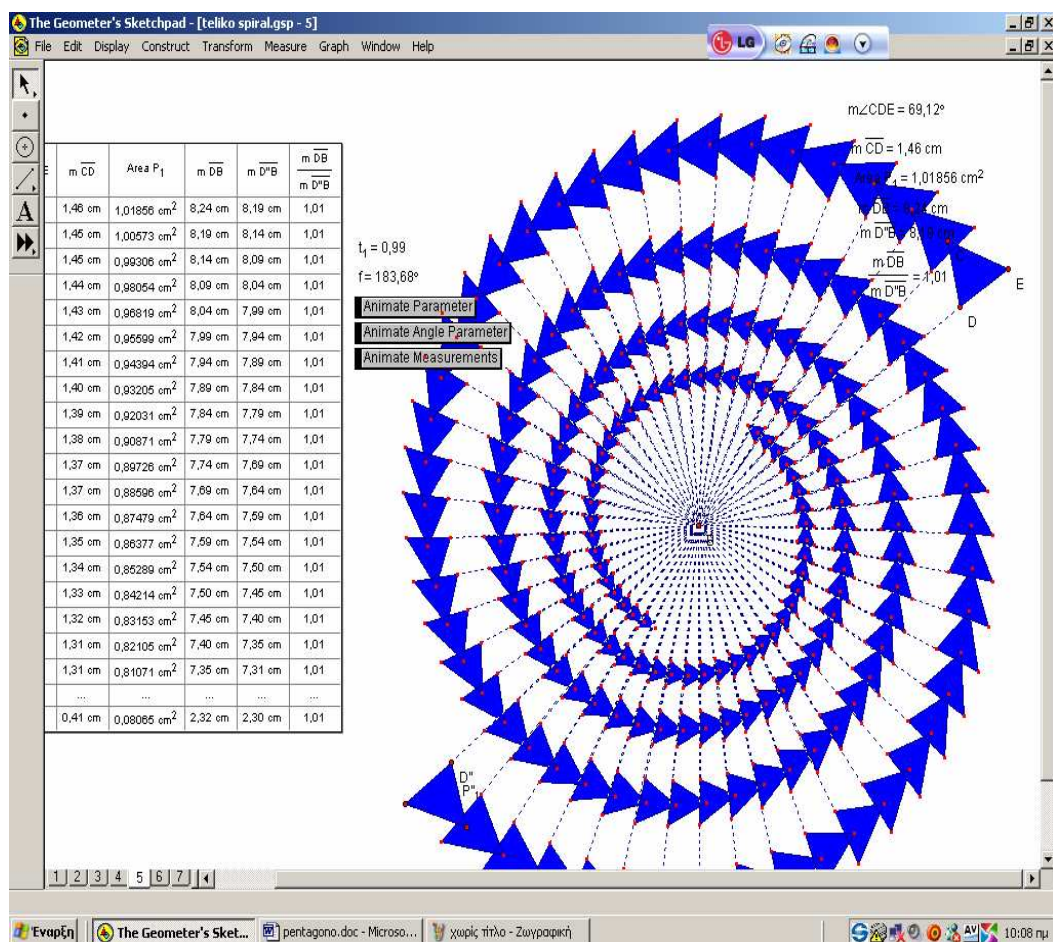
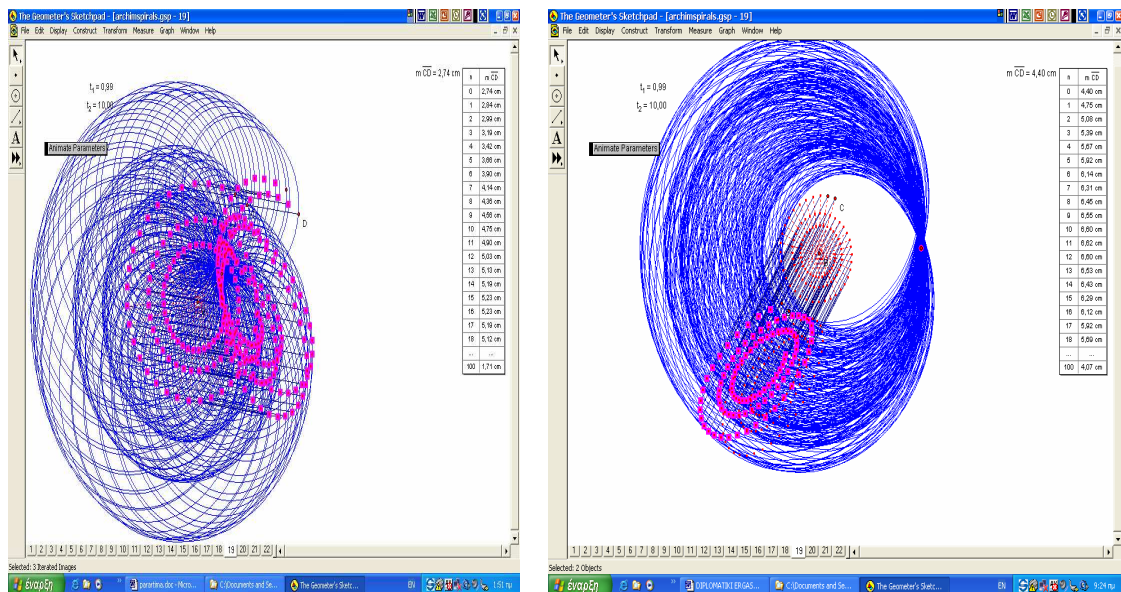


Ορίζουμε το animation των παραμέτρων με τον τρόπο που περιγράφεται μέσω των εικόνων και κάνουμε animation διαδοχικά στην κάθε μια παράμετρο και στην συνέχεια και στις δυο μαζί. Στα σχήματα στη συνέχεια βλέπουμε κάποιες εικόνες για αλλαγές των παραμέτρων με το χέρι.

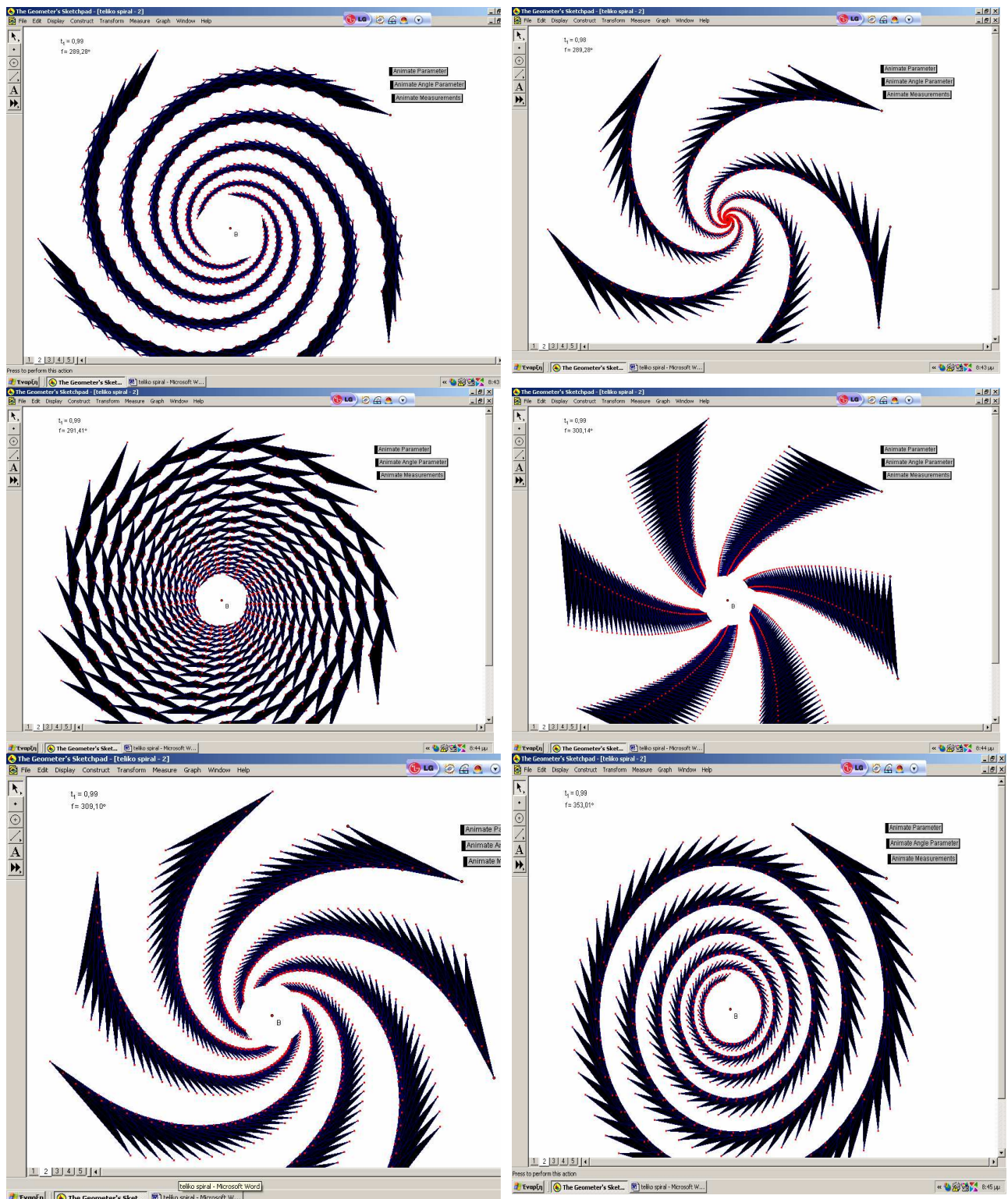


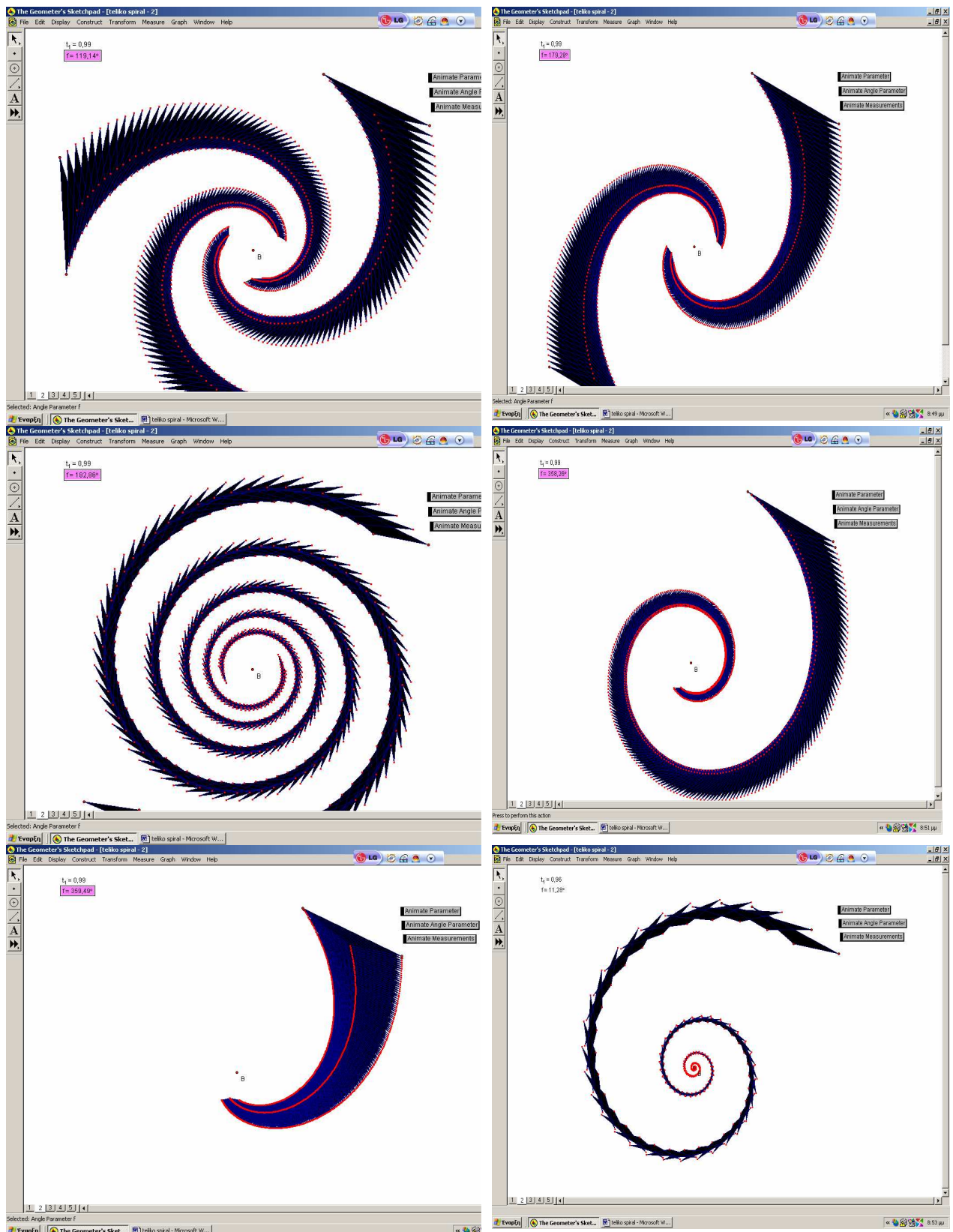
Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί με αντικατάσταση του αρχικού σημείου με ένα τρίγωνο ή κύκλο. Οι εικόνες που ακολουθούν στην συνέχεια, είναι στιγμιαίες απεικονίσεις που γίνονται με την βοήθεια του print screen, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων. Τα μαθηματικά αντικείμενα διατηρούν τις ιδιότητες των αντικειμένων της δυναμικής γεωμετρίας.

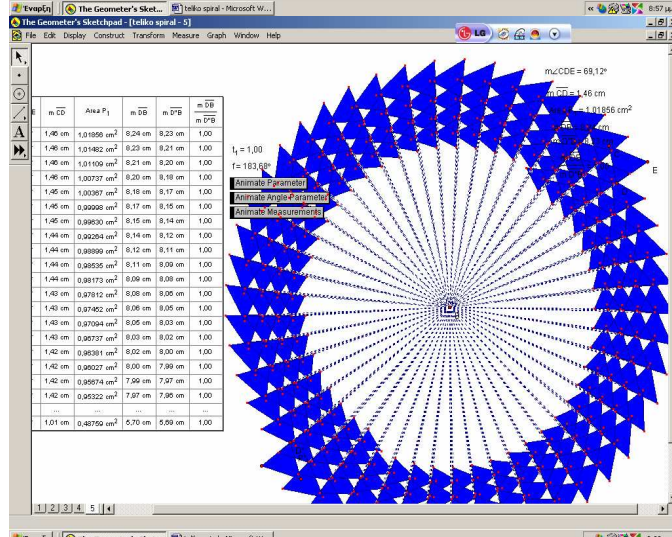
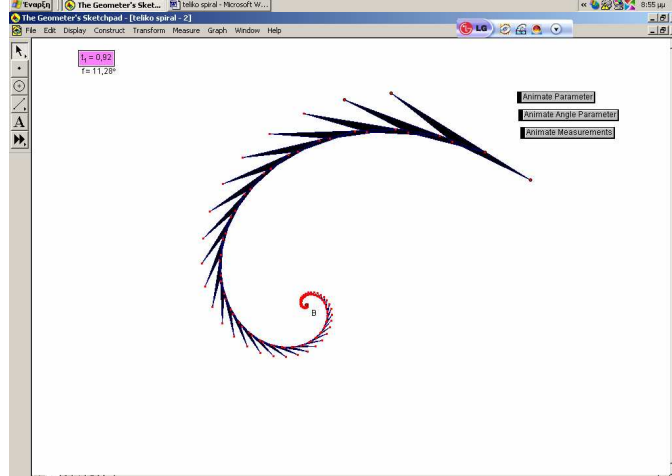
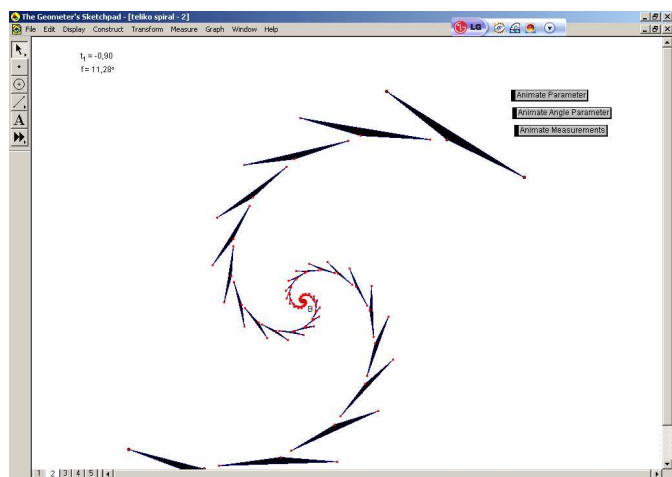


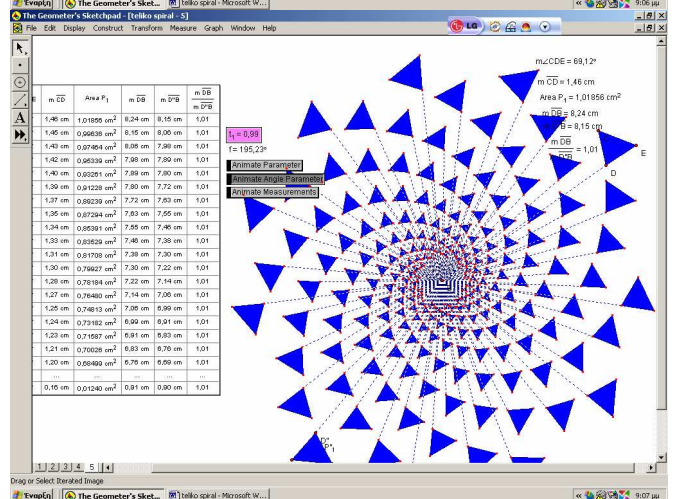
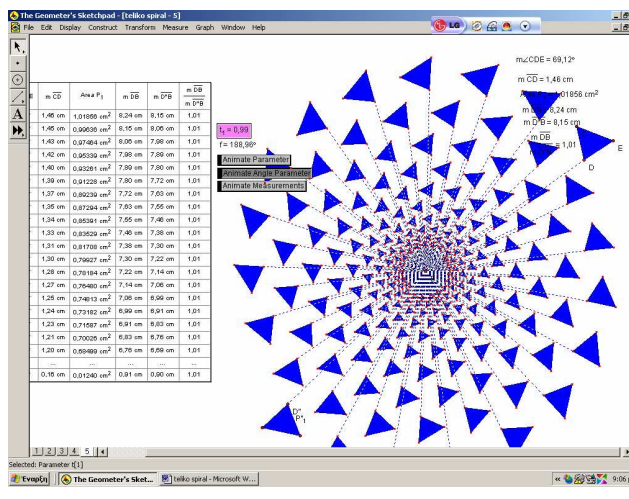
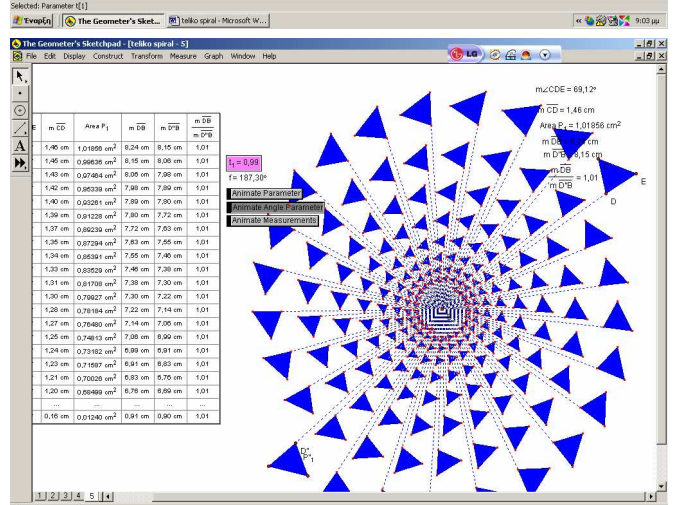
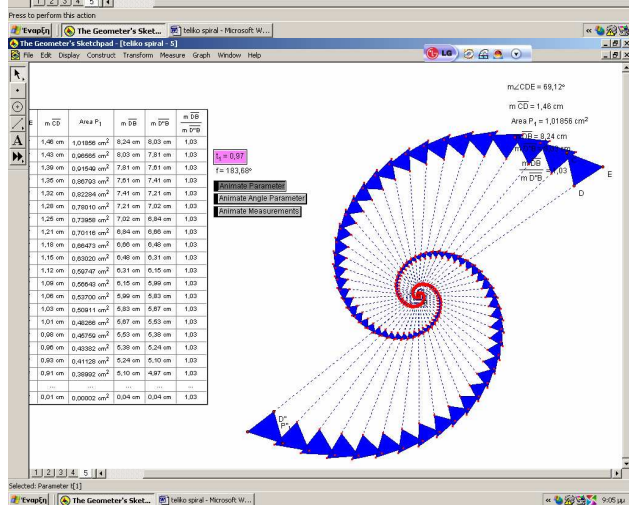
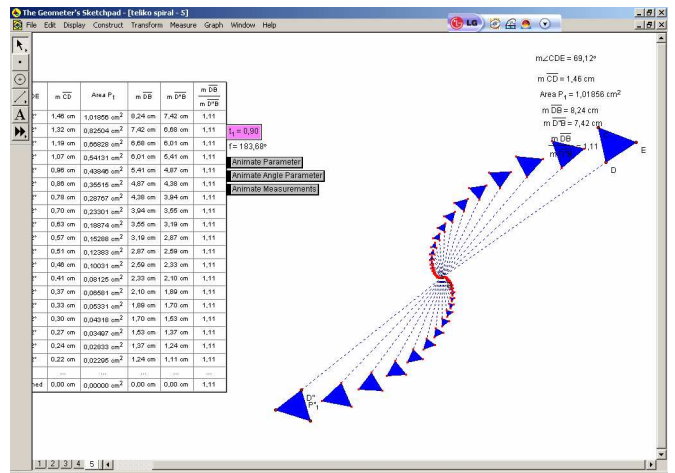
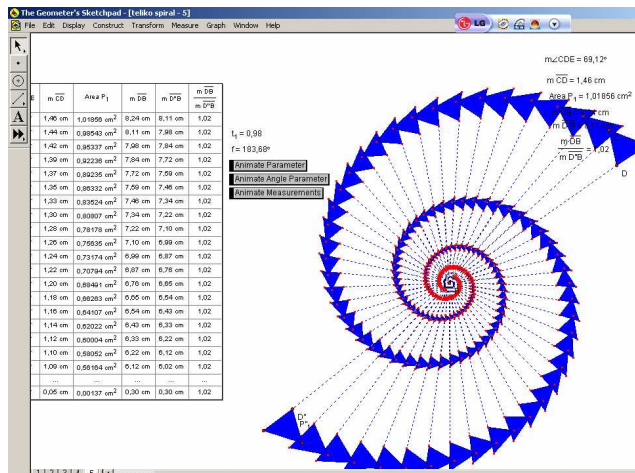


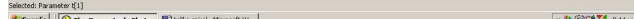
Στον πίνακα επάνω όπως παρατηρούμε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αλλά επαναλαμβάνουμε και μετρήσεις που μας οδηγούν να συμπεράνουμε σχετικά με τις αποστάσεις των αντικειμένων, τις σχέσεις των λόγων, τις σχέσεις των εμβαδών κ.α



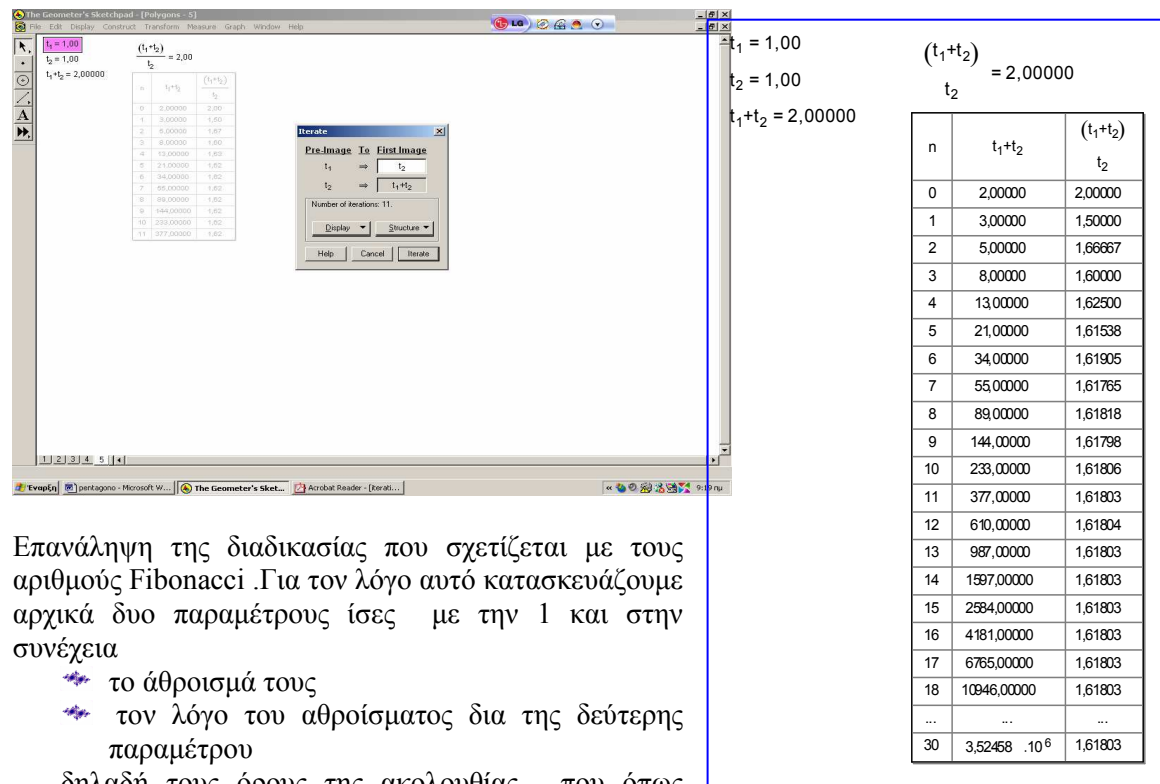








Fibonacci Iteration



$t_1 = 1,00$
 $t_2 = 1,00$
 $t_1 + t_2 = 2,00000$

$(t_1 + t_2) = 2,00000$
 t_2

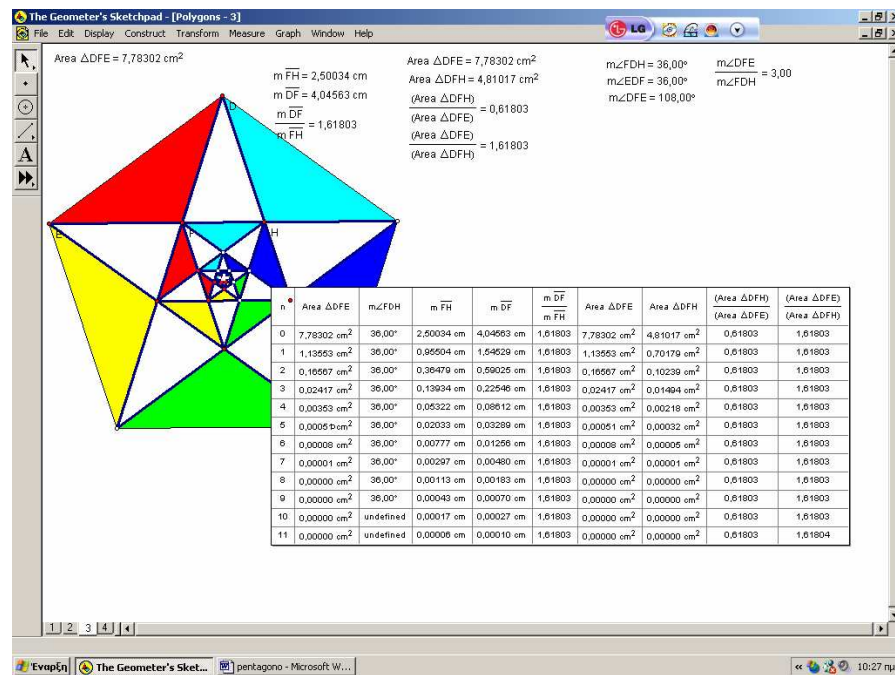
n	$t_1 + t_2$	$(t_1 + t_2)$ t_2
0	2,00000	2,00000
1	3,00000	1,50000
2	5,00000	1,66667
3	8,00000	1,60000
4	13,00000	1,62500
5	21,00000	1,61538
6	34,00000	1,61905
7	55,00000	1,61765
8	89,00000	1,61818
9	144,00000	1,61798
10	233,00000	1,61806
11	377,00000	1,61803
12	610,00000	1,61804
13	987,00000	1,61803
14	1597,00000	1,61803
15	2584,00000	1,61803
16	4181,00000	1,61803
17	6765,00000	1,61803
18	10946,00000	1,61803
...	...	...
30	3,52458 · 10 ⁶	1,61803

Επανάληψη της διαδικασίας που σχετίζεται με τους αριθμούς Fibonacci. Για τον λόγο αυτό κατασκευάζουμε αρχικά δυο παραμέτρους ίσες με την 1 και στην συνέχεια

- το άθροισμά τους
- τον λόγο του αθροίσματος δια της δεύτερης παραμέτρου

δηλαδή τους όρους της ακολουθίας, που όπως παρατηρούμε έχουν όριο τον αριθμό Φ , και στην συνέχεια κατασκευάζουμε την διαδικασία για ακολουθίες που έχουν όρια το Φ^3 , Φ^4 . Παρακάτω φαίνονται η όροι από την αντιγραφή στο Excel.

n	$t[1]+t[2]$	$((t[1]+t[2])/t[2])$	$((t[1]+t[2])/t[2])^3$	$((t[1]+t[2])/t[2])^4$
0	2	2	8	16
1	3	1,5	3,375	5,0625
2	5	1,66667	4,62963	7,71605
3	8	1,6	4,096	6,5536
4	13	1,625	4,29102	6,9729
5	21	1,61538	4,21529	6,80932
6	34	1,61905	4,24403	6,87129
7	55	1,61765	4,23303	6,84755
8	89	1,61818	4,23723	6,85661
9	144	1,61798	4,23562	6,85315
10	233	1,61806	4,23624	6,85447
11	377	1,61803	4,236	6,85396
12	610	1,61804	4,23609	6,85416
13	987	1,61803	4,23606	6,85408
14	1597	1,61803	4,23607	6,85411
15	2584	1,61803	4,23607	6,8541
16	4181	1,61803	4,23607	6,8541



Microsoft Excel - Βιβλίο1

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Δεδομένα Παράθυρο Βοήθεια

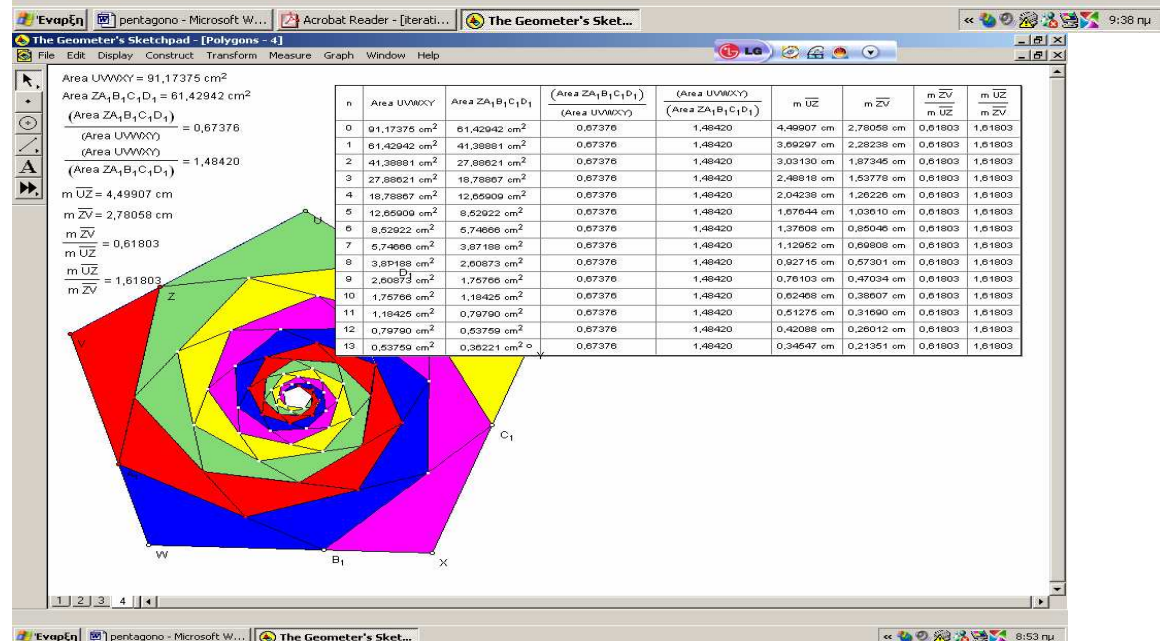
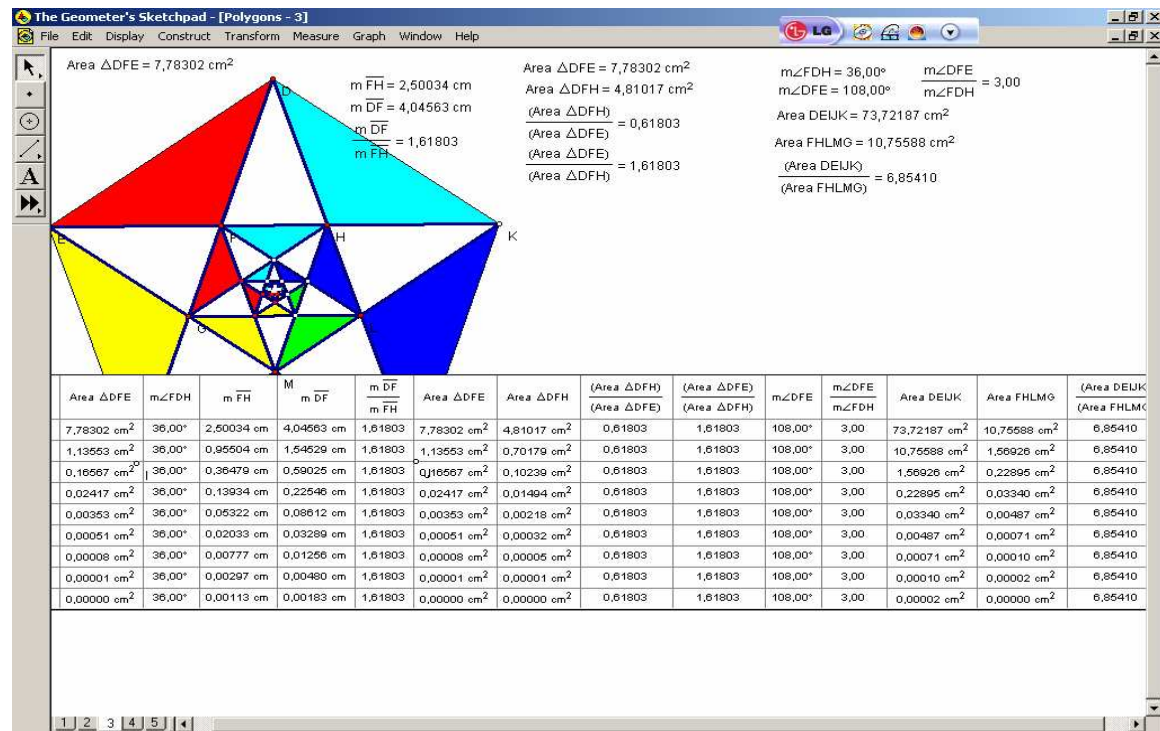
English to French

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	n	Area Triangle DFE	mAngle FDH	m FH	m DF	(m DF/m FH)	Area Triangle DFE	Area Triangle DFH	((Area Triangle DFH)/(Area Triangle DFE))	((Area Triangle DFE)/(Area Triangle DFH))
1										
2	0	7,78302	36	2,50034	4,04563	1,61803	7,78302	4,81017	0,61803	1,61803
3	1	1,13553	36	0,95504	1,54529	1,61803	1,13553	0,70179	0,61803	1,61803
4	2	0,16567	36	0,36479	0,59025	1,61803	0,16567	0,10239	0,61803	1,61803
5	3	0,02417	36	0,13934	0,22546	1,61803	0,02417	0,01494	0,61803	1,61803
6	4	0,00353	36	0,05322	0,08612	1,61803	0,00353	0,00218	0,61803	1,61803
7	5	0,00051	36	0,02033	0,03289	1,61803	0,00051	0,00032	0,61803	1,61803
8	6	0,00008	36	0,00777	0,01256	1,61803	0,00008	0,00005	0,61803	1,61803
9	7	0,00001	36	0,00297	0,00480	1,61803	0,00001	0,00001	0,61803	1,61803
10	8	0	36	0,00113	0,00183	1,61803	0	0	0,61803	1,61803
11	9	0	36	0,00043	0,00070	1,61803	0	0	0,61803	1,61803
12	10	0	undefined	0,00017	0,00027	1,61803	0	0	0,61803	1,61803
13	11	0	undefined	0,00006	0,00010	1,61803	0	0	0,61803	1,61804

Κατασκευή πενταγώνου από το αρχείο εντολών του σχήματος .

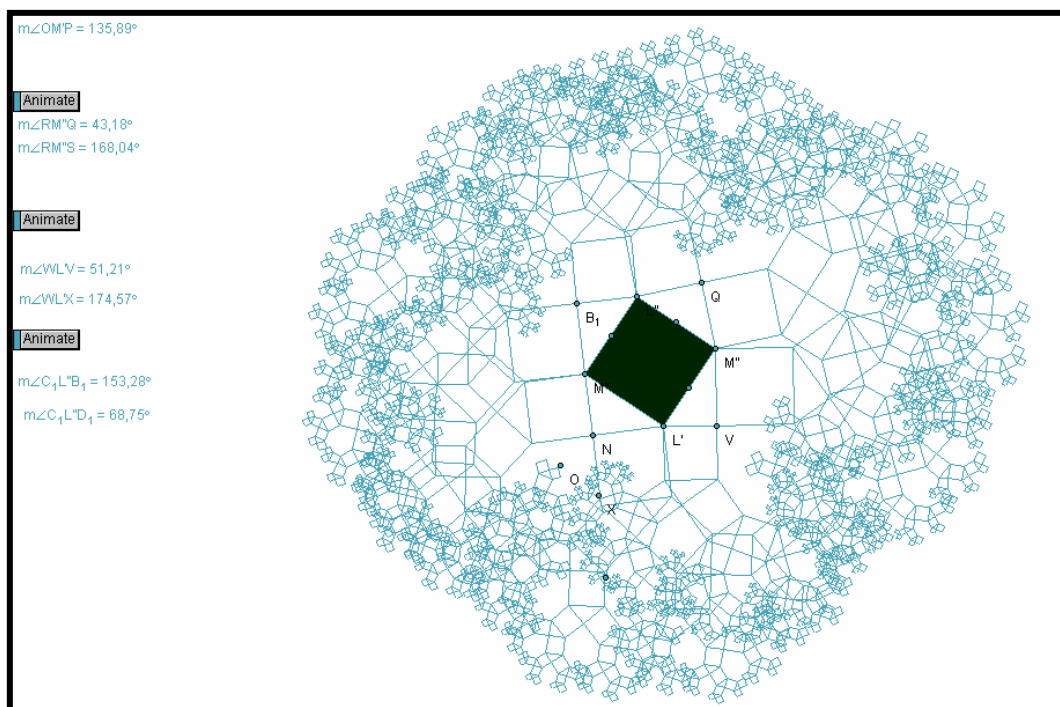
Κατασκευή των διαγωνίων του σχήματος και μετρήσεις των μηκών , εμβαδών και γωνιών και των σχέσεων μεταξύ τους . Παρατηρούμε από την αντιγραφή των στοιχείων στο Excel τις σχέσεις και την εμφάνιση του αριθμού Φ όχι μόνο στις σχέσεις των πλευρών των ισοσκελών , αλλά και στις σχέσεις των εμβαδών των ισοσκελών . Γενίκευση της διαδικασίας με iteration των δυο αρχικών κορυφών του σχήματος σε δυο τυχαίες κορυφές του 1^{ου} εσωτερικού πενταγώνου , καθώς και πινακοποίηση των μετρήσεων . ($\Phi = 1,61803$, $\Phi^2 = 2,61802, \dots$)

Παρατηρούμε ότι ο λόγος των εμβαδών των δυο πενταγόνων του αρχικού και του πρώτου εσωτερικού είναι ίσος με 6,8541 δηλαδή ίσος με τον ϕ^4 .

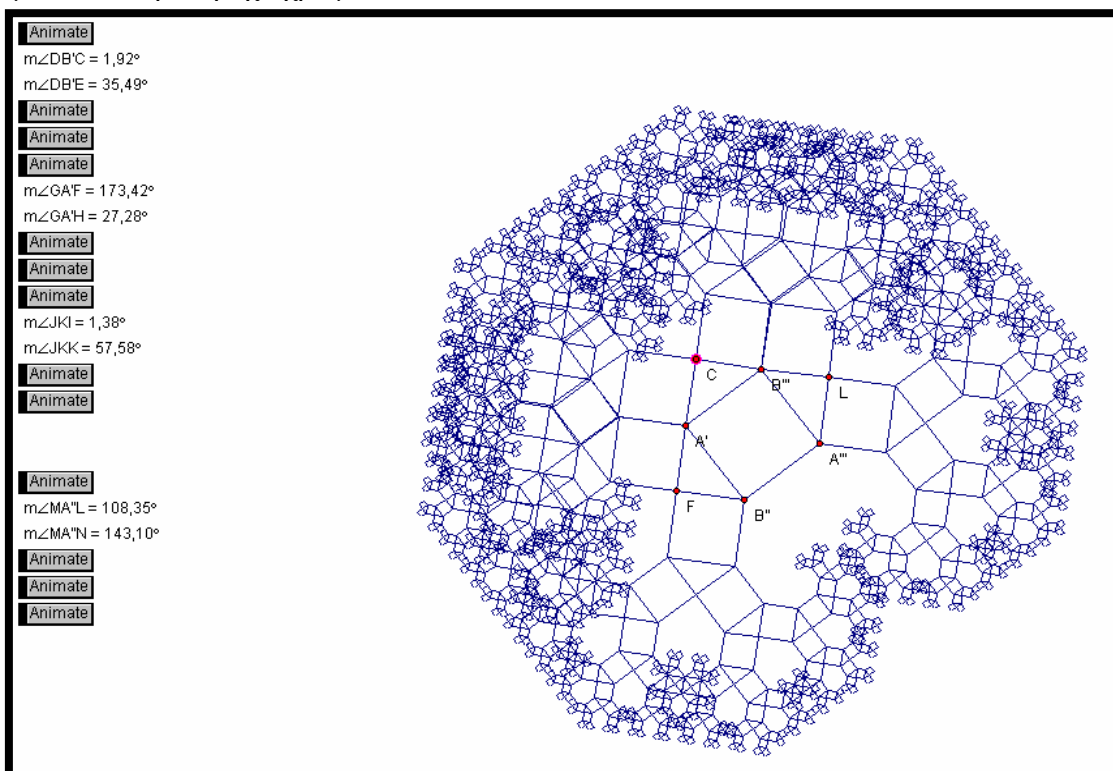


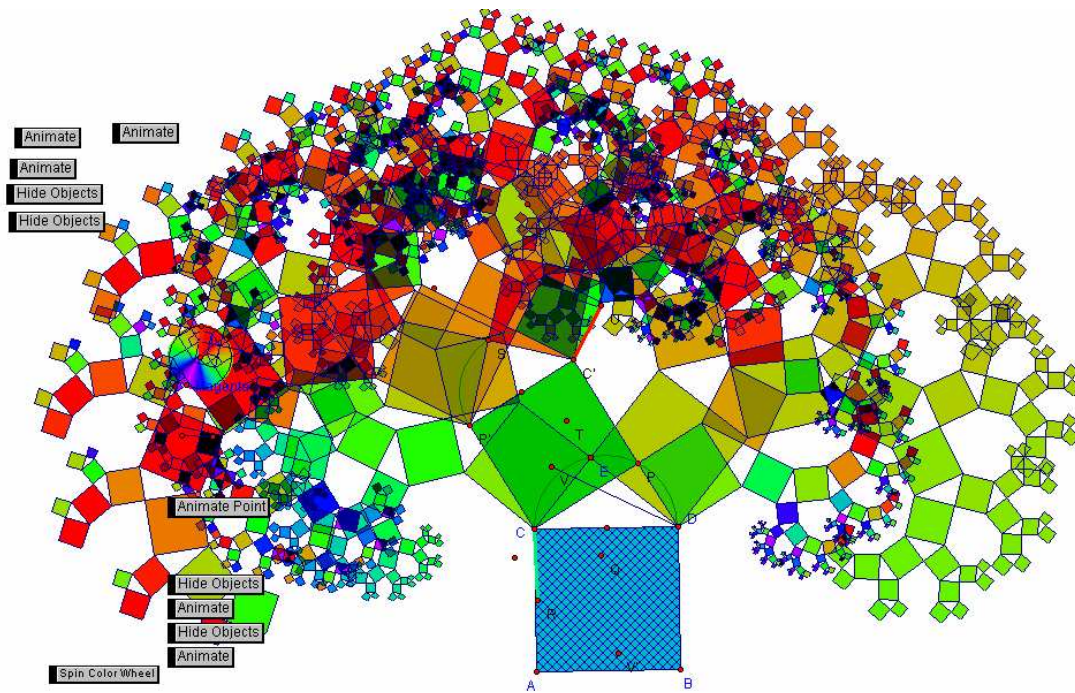
κατασκευή της σπείρας του Baravelle στο πεντάγωνο ως εξής :

Διαιρώ την κάθε πλευρά με την χρυσή αναλογία (κατασκευάζω τις διαγώνιες του σχήματος , και μεταφέρω την πλευρά του ισοσκελούς ως ακτίνα κύκλου στην πλευρά του πενταγώνου) και με την διαδικασία transform –iterate αντιστοιχώ τα δυο αρχικά σημεία των κορυφών σε δυο σημεία διαδοχικών πλευρών κατασκευασμένα με τον λόγο της χρυσής τομής όπως περιγράψαμε . Για να έχουμε το αποτέλεσμα που εμφανίζεται κατασκευάζουμε τα εσωτερικά των τριγώνων και τα χρωματίζουμε με διαφορετικά χρώματα .

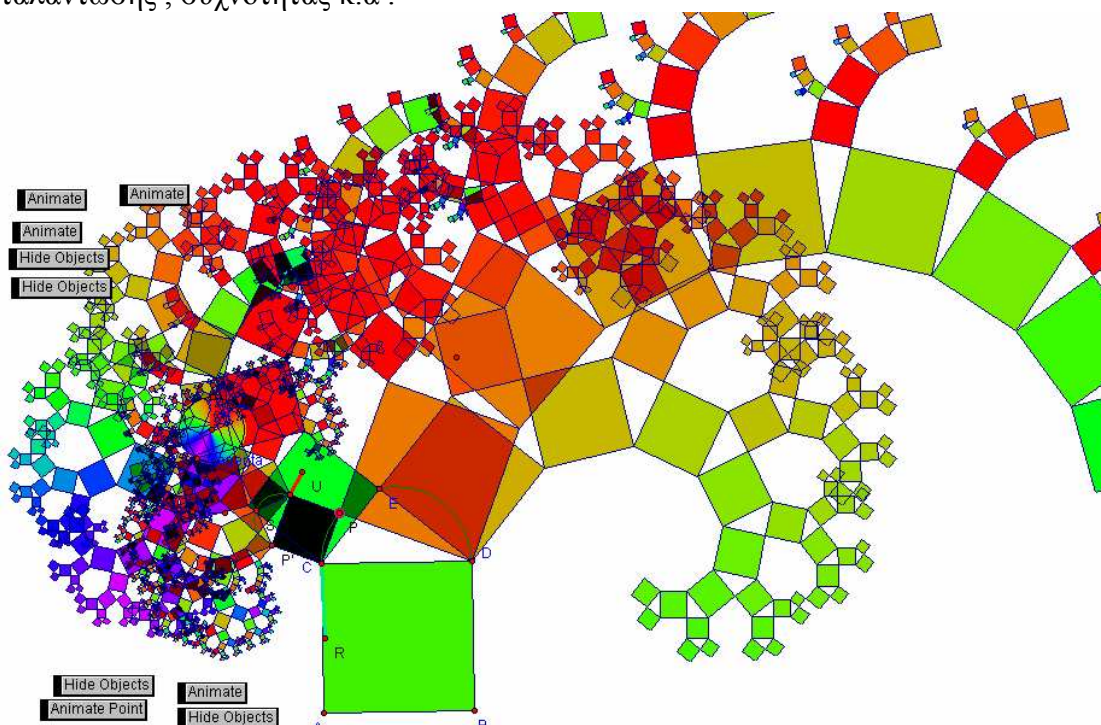


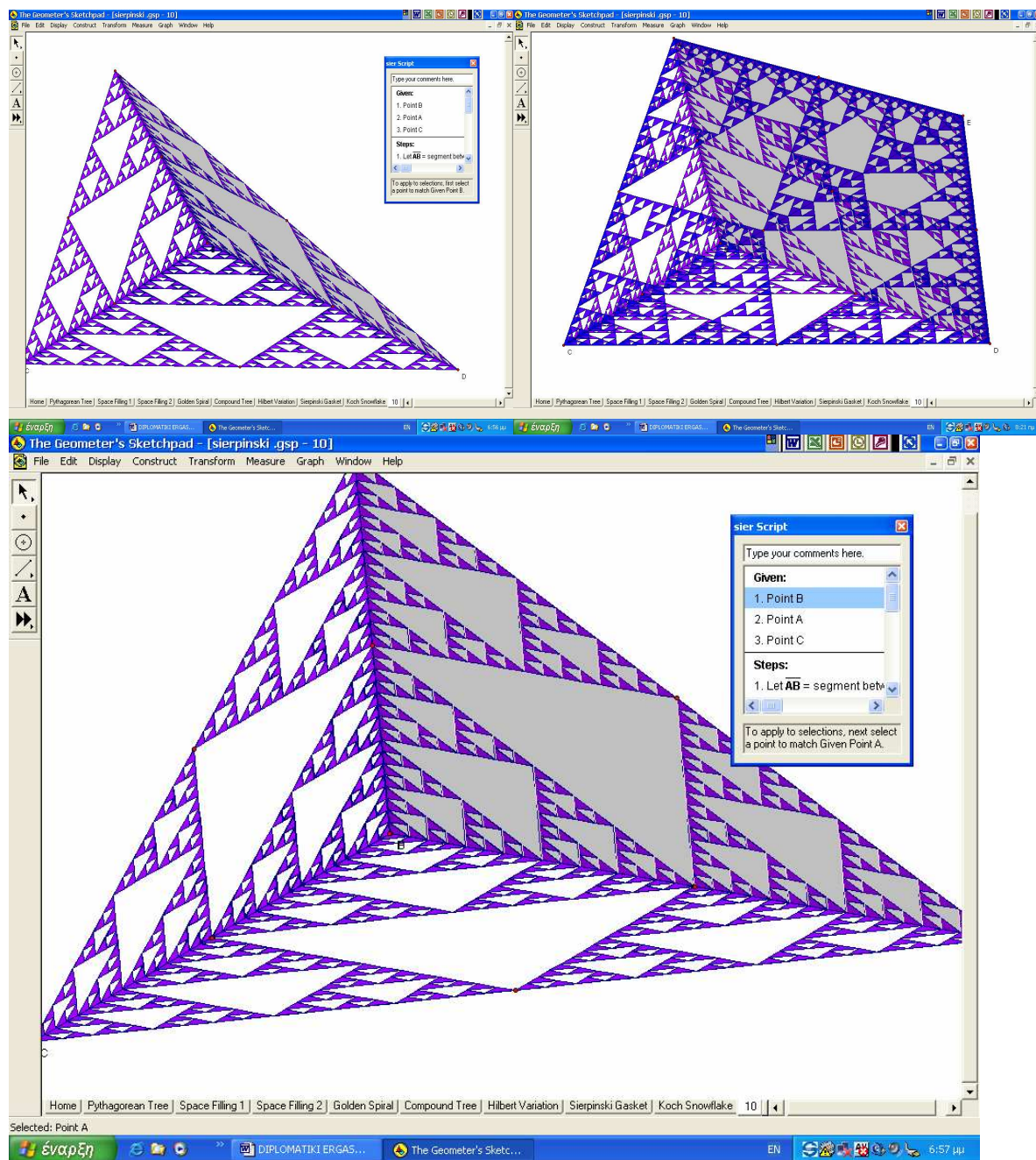
Επαναλαμβανόμενες κατασκευές του Πυθαγόρειου δένδρου με εφαρμογή μιας διαδικασίας ενός αρχείου εντολών, που κατασκευάζουμε από την σελίδα που υπάρχει στην βιβλιοθήκη του λογισμικού .Η επανάληψη της διαδικασίας γίνεται στις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου(ή στις τρεις στο κάτω σχήμα) .Οι κορυφές των ορθογωνίων τριγώνων που έχουν υποτείνουσα τις πλευρές του τετραγώνου συνδέονται με κατάλληλο action button (animation) .Στο εσωτερικό του σχήματος το τετράγωνο έχει την ιδιότητα να αναπαράγει αλλαγές χρωμάτων όπως έχει συνδεθεί με κατάλληλο τροχό χρωμάτων.



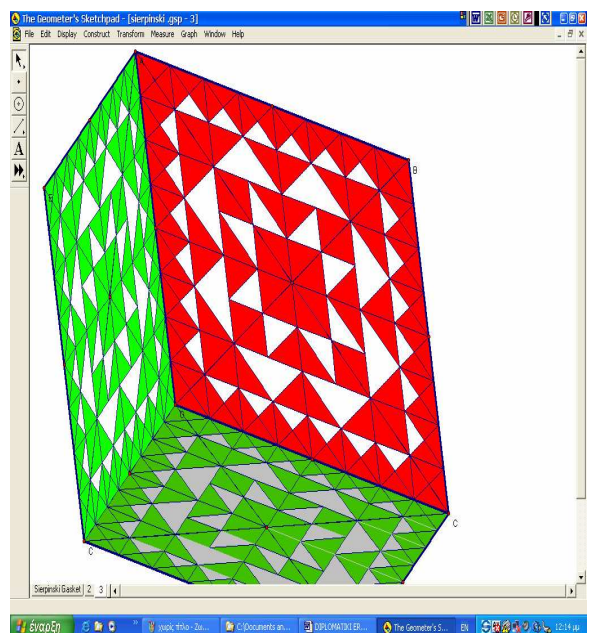
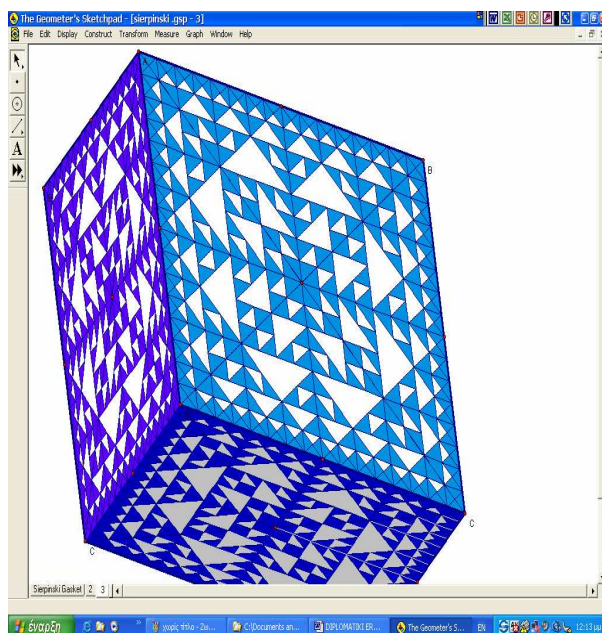
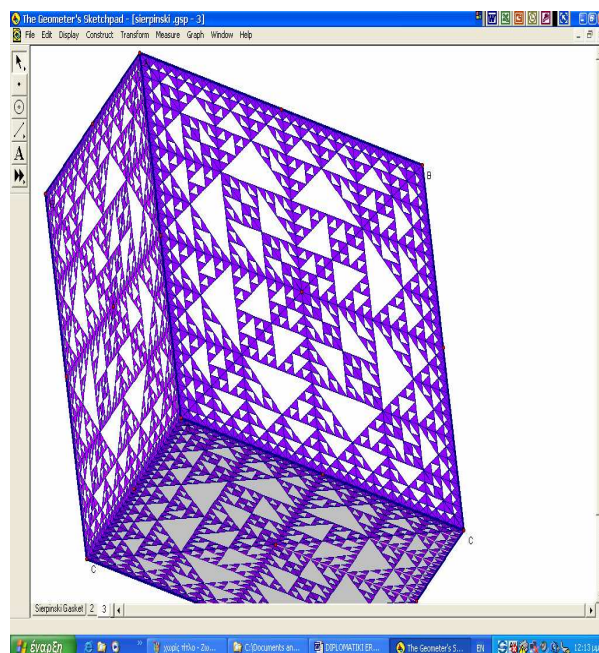
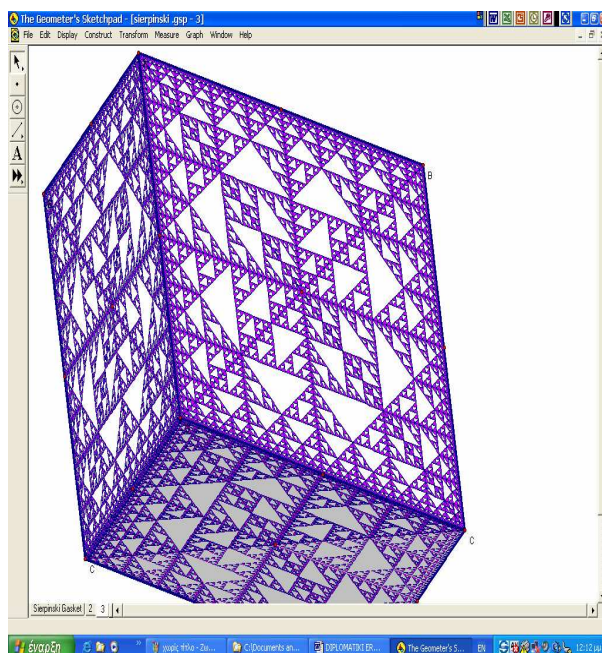


Ομοίως επανάληψη του αρχείου εντολών ,όπως και προηγουμένως στην ίδια πλευρά του τετραγώνου αλλά με διαφορετική κατεύθυνση. Η διαδικασία της κατασκευής είναι πολύ απλή. Η σύνδεση των κλάδων με τα action buttons δίνει κίνηση που επαναλαμβάνεται περιοδικά και επομένως μπορεί να συνδεθεί το μάθημα των μαθηματικών με αντίστοιχα κεφάλαια περιοδικών φαινομένων στη φυσική με σκοπό την κατασκευή των όρων της ταλάντωσης , συχνότητας κ.α .

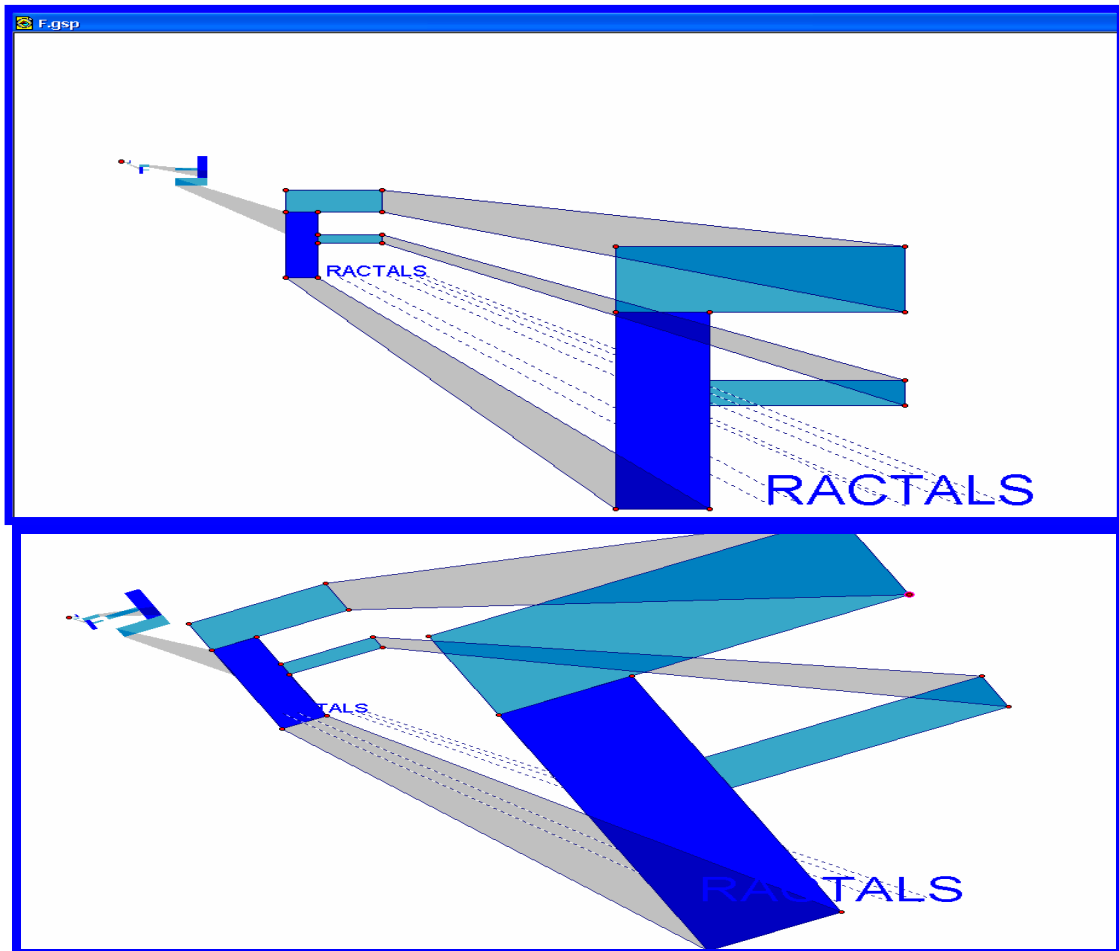




Κατασκευή πυραμίδας και εφαρμογή του script file του τριγώνου του Sierpinski στις έδρες της .Το αντικείμενο μπορεί να διερευνηθεί από τους μαθητές αφού έχει την δυνατότητα να περιστραφεί και να μετρηθεί .



Κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski στις έδρες ενός παραλληλεπιπέδου , στα τέσσερα τρίγωνα που έχουν βάσεις τις διαγώνιες κάθε έδρας του . Όλες οι εικόνες προέρχονται από το ίδιο αρχικό σχήμα με select all και (-) αν αρχίσουμε την διαδικασία από το πρώτο σχήμα αριστερά επάνω προς τα κάτω ή (+) αντίστροφα .Οι ιδιότητες της αυξομείωσης των σχημάτων με το select (+) ισχύουν και για τις προηγούμενες κατασκευές στις πυραμίδες .



Τα σχήματα που έχουν παρουσιαστεί στο παράρτημα είναι ένα τμήμα μιας προσπάθειας που μου πήρε αρκετό χρόνο για τον σχεδιασμό, αλλά η ομορφιά των αντικειμένων που κατασκευάζα ήταν ένα ισχυρό κίνητρο να συνεχίσω. Βεβαία το θέμα των fractals εξεταζόμενο από την παιδαγωγική του πλευρά δεν εξαντλείται εδώ. Είναι όμως σημαντικό να τονίσουμε ότι οφείλουμε να δείξουμε με κατάλληλες δραστηριότητες στους μαθητές μας την ομορφιά που κρύβουν τα Μαθηματικά. Γιατί μαθηματικά δεν είναι μόνο αλγόριθμοι. Η ομορφιά στα Μαθηματικά βρίσκεται αν παρατηρήσουμε την φύση και προσπαθήσουμε να την διερευνήσουμε και ερμηνεύσουμε, όπως μας έδειξαν τον δρόμο και δίδαξαν τα Μαθηματικά του Πυθαγόρα, του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη, του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη

The scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living. Of course, I do not here speak of that beauty which strikes the senses, the beauty of qualities and appearances; not that I undervalue such beauty, far from it, but it has nothing to do with science; I mean that profounder beauty which comes from the harmonious order of the parts and which a pure intelligence can grasp. This it is which gives body, a structure so to speak, to the iridescent appearances which flatter our senses, and without this support the beauty of these fugitive dreams would be only imperfect, because it would be vague and always fleeting.

Jules Henri Poincare

You may object that by speaking of simplicity and beauty I am introducing aesthetic criteria of truth, and I frankly admit that I am strongly attracted by the simplicity and beauty of the mathematical schemes which nature presents us. You must have felt this too: the almost frightening simplicity and wholeness of the relationship, which nature suddenly spreads out before us.

Heisenberg: communication to Einstein

Mathematics has beauties of its own -- a symmetry and proportion in its results, a lack of superfluity, an exact adaptation of means to ends, which is exceedingly remarkable and to be found only in the works of the greatest beauty. When this subject is properly ... presented, the mental emotion should be that of enjoyment of beauty, not that of repulsion from the ugly and the unpleasant.

J. W. A. Young, In H. Eves Mathematical Circles Squared, Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1972

It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music, perhaps greater; not because the pleasure it gives (although very pure) is comparable, either in intensity or in the number of people who feel it, to that of music, but because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect but true.

Bertrand Russell (1872-1970), Autobiography

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty -- a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.

Bertrand Russell (1872-1970), The Study of Mathematics

οἱ φάσκοντες οὐδὲν λέγειν τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας περὶ καλοῦ ἢ ἀγαθοῦ
 ψεύδονται. λέγουσι γὰρ καὶ δεικνύουσι μάλιστα οὐ γὰρ εἰ μὴ ὀνομάζουσι τὰ δ' ἔργα
 καὶ τοὺς λόγους δεικνύουσιν. οὐ λέγουσι περὶ αὐτῶν. τοῦ δὲ καλοῦ μέγιστα εἶδη
 τάξις καὶ συμμετρία καὶ τὸ ὁρισμένον. ἃ μάλιστα δεικνύουσιν αἱ μαθηματικαὶ
 ἐπιστήμαι. καὶ ἐπεὶ γε πολλῶν αἰτία φαίνεται ταῦτα (λέγω δ' οἷον ἡ τάξις καὶ τὸ
 ὁρισμένον). δῆλον ὅτι λέγοιεν ἂν καὶ τὴν τοιαύτην αἰτίαν τὴν ὡς τὸ καλὸν αἰτίαν
 τρόπον τινά. μᾶλλον δὲ γνωρίμας ἐν ἄλλοις περὶ αὐτῶν ἐροῦμεν. Περὶ μὲν οὖν
 τῶν μαθηματικῶν. ὅτι τε ὄντα ἐστὶ καὶ πῶς ὄντα. καὶ πῶς πρότερα καὶ πῶς οὐ
 πρότερα. τοσαῦτα εἰρήσθω περὶ δὲ τῶν ιδεῶν πρῶτον αὐτὴν τὴν κατὰ τὴν ιδεάν δόξαν
 ἐπισκεπτέον. μὴθὲν συνάκτοντας πρὸς τὴν τῶν ἀριθμῶν φύσιν. ἀλλ' ὡς ὑπέλαβον ἐξ
 ἀρχῆς οἱ πρῶτοι τὰς ιδέας φήσαντες εἶναι. συνέβη δ' ἡ περὶ τῶν εἰδῶν δόξα τοῖς
 εἰκοῦσι διὰ τὸ πεισθῆναι περὶ τῆς ἀληθείας τοῖς Ἡρακλειτείοις λόγοις ὡς πάντων
 τῶν αἰσθητῶν αἰεὶ ρεόντων. ὥστ' εἴπερ ἐπιστήμη τινὸς ἔσται καὶ φρόνησις. ἑτέρας δεῖν
 τινὰς φύσεις εἶναι παρὰ τὰς αἰσθητὰς μενούσας οὐ γὰρ εἶναι τῶν ρεόντων
 ἐπιστήμην.

Αριστοτέλους Μεταφυσικά , TLG 1078a line 30 -1078b line 16