ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διανύσματα: Επιστημολογική προσέγγιση και δυσκολίες κατανόησης από τους μαθητές»

Γεώργιος Παυλάκος

Επιβλέπων Καθηγητής
Παναγιώτης Γεώργιος

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα ……1

Πρόλογος ……...3

Εισαγωγής ……...4

1. Προς μια Γνωσιολογία των Μαθηματικών ……...5

1.1 Εισαγωγή ……5

1.2 Η ανάπτυξη της νόησης ……...……6

1.2.1 Το παράδειγμα των Ενσωματωμένων Μαθηματικών ……8

1.2.2 Η πρόταση της Sfard ……11

1.2.3 Το παράδειγμα των Tall και Gray ……12

2. Συνοπτική ιστορία του διανυσματικού λογισμό……16

2.1. Τα πρώτα ίχνη του διανύσματος……16

2.1.1. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου……...18

2.1.2. Προς μια γεωμετρία της θέσης……19

2.1.3. Η επίδραση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών..19

2.2. Τα πρώτα διανυσματικά συστήματα……21

2.2.1. Hamilton……...21

2.2.2. Grassmann……...23

2.2.3. Άλλα διανυσματικά συστήματα……24

2.3. Από τα quaternions στο διανυσματικό λογισμό……...26

2.4. Συμπεράσματα γνωσιολογικής φύσεως……...28

2.4.1. Είναι τελικά απαγωγική η δομή των μαθηματικών;……...28

2.4.2. Η ανάπτυξη των μαθηματικών υπακούει σε καθαρά ορθολογικά κριτήρια;

2.4.3. Αναπτύσσονται αθροιστικά;……..30

2.4.4. Μεταφυσική και Μαθηματικά……30

2.4.5. Κατά πόσο η αυστηρότητα, η απόδειξη και η βεβαιότητα στα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από το χρόνο;……...31

2.4.6. Η ψυχολογία της δημιουργίας……32

2.4.7. Ο μύθος της ευφυίας……...33

3. Η θέση του διανύσματος στο ελληνικό σχολείο……35

3.1. Η θέση του διανύσματος στα αναλυτικά προγράμματα……35

3.2. Διάφορες προσεγγίσεις της έννοιας του διανύσματος……36

3.3. Πως εισάγεται η έννοια του διανύσματος στα διδακτικά συγγράμματα;……..37

4. Παρουσίαση επιλεγμένων ερευνών……..40

4.1. Οι πρώτες έρευνες από τους Aguirre και Erickson……...40

4.2. Οι προσπάθειες των Graham, Berry και Rowlands……..41

4.3. Η συνεισφορά της Forster……42

4.4. Οι έρευνες των Δημητριάδου, Γαγάτση και Τζανάκη ……43

4.5. Η πρόταση των Watson, Spyrou και Tall……..45

5. Ο ρόλος της γωνίας στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος

5.1. Εισαγωγή……..47

5.2. Η έρευνά μας……..49

5.2.1. Ερευνητικές υποθέσεις……...49

5.2.2. Μεθοδολογία……...52

5.2.2.1. Παρουσίαση του ερωτηματολογίου……52

5.2.2.2. Οι μεταβλητές της έρευνας……52

5.2.2.3. Κριτήρια βαθμολόγησης……53

5.2.2.4. Στατιστικές τεχνικές……..54

5.3. Αποτελέσματα της έρευνας……..……55

5.3.1. Περιγραφική και ποιοτική ανάλυση……55

5.3.2. Στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση του R .Gras……61

5.3.2.1. Σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα……...61

5.3.2.2. Σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στα έργα……62

5.4. Συμπεράσματα……..64

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία γράφτηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος: *Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών*, του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Κύριος στόχος μου ήταν η εμπλοκή μου με την έρευνα σε θέματα σχετικά με τη Διδακτική των Μαθηματικών και η απόλαυση των πνευματικών ταξιδιών, που θα γίνονταν με τη βοήθεια έμπειρων Δασκάλων. Νομίζω πως τους πέτυχα και τους δυο.

Ιδιαίτερα θερμές ευχαριστίες οφείλω στον επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Παναγιώτη Σπύρου, που είναι ο εισηγητής της εργασίας αυτής, για την άριστη συνεργασία που είχαμε, για το ενδιαφέρον με το οποίο παρακολούθησε την προετοιμασία της και για τη συνεχή ενθάρρυνση και υποστήριξη που μου προσέφερε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον κ. Αθανάσιο Γαγάτση, καθηγητή του Πανεπιστημίου της Κύπρου, και τον κ. Διονύσιο Λάππα, αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, για την συνεργασία τους ως μέλη της επιτροπής και τις χρήσιμες υποδείξεις τους. Τέλος, θα πρέπει να ευχαριστήσω για τη σημαντική συμβολή τους στην υλοποίηση της έρευνας, τους συναδέλφους Χρήστο Μαυρίκιο, Γιώργο Κοσπεντάρη, Στέφανο Κεΐσογλου, Μιχάλη Στακιά και Χριστίνα Γαλανοπούλου.

Εισαγωγή

Μια από τις πιο δύσκολες, αλλά ταυτόχρονα πιο χρήσιμες, μαθηματικές έννοιες, είναι η έννοια του διανύσματος. Πηγή πολλών παρερμηνειών και γνωστικών συγκρούσεων, αφού είναι πολυδιάστατη και εμπλέκει πολλά επίπεδα κατασκευής της γνώσης, «ταλαιπωρεί» κάθε χρόνο την πλειονότητα των μαθητών.

Σε αυτήν μας την εργασία στοχεύουμε στην ανίχνευση και ανάδειξη, όσο αυτό είναι δυνατό στα πλαίσια μια διπλωματικής εργασίας, όλων των σχετικών, με την έννοια του διανύσματος, θεμάτων που απασχολούν τη σύγχρονη έρευνα στη διδακτική των επιστημών.

Πιο συσκεκριμένα, εργασία αυτή απαρτίζεται από 5 κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα σημαντικότερα κατά τη γνώμη μας επιστημολογικά παραδείγματα στα οποία στηριζόμαστε για να κατανοήσουμε και να αναλύσουμε τα φαινόμενα που επισυμβαίνουν κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών.

Στόχος του δεύτερου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των πρώτων βημάτων του διανυσματικού λογισμού και η ανάδειξη στοιχείων χρήσιμων για τη διδακτική των μαθηματικών.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική αναφορά στη θέση του διανύσματος στα αναλυτικά προγράμματα από το 1833 μέχρι σήμερα, εκτός των περιόδων της γερμανικής κατοχής και του εμφυλίου πολέμου, και στη συνέχεια γίνεται περιγραφή του τρόπου εισαγωγής της έννοιας του διανύσματος στα σύγχρονα ελληνικά σχολικά βιβλία.

Το τέταρτο κεφάλαιο ασχολείται με την ανάλυση επιλεγμένων ερευνών από τη διεθνή βιβλιογραφία, και τέλος

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη δική μας ερευνητική προσπάθεια, η οποία εξετάζει το ρόλο της γωνίας στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος.

1. Προς μια Γνωσιολογία των Μαθηματικών

Σημαντικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί η κατανόηση της σκέψης που εμπλέκεται όταν κάνουμε κι όταν μαθαίνουμε μαθηματικά. Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας μας, θα παρουσιάσουμε τα επιστημολογικά παραδείγματα στα οποία στηριζόμαστε για να κατανοήσουμε και να αναλύσουμε τα φαινόμενα που επισυμβαίνουν κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών.

1.1. Εισαγωγή

Τι ακριβώς όμως εννοούμε με τον όρο «Γνωσιολογία» και για ποιο λόγο μας ενδιαφέρει;

Η Γνωσιολογία μαζί με την Οντολογία αποτελούν του δυο κλάδους της Φιλοσοφία. Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με τον Ευτύχη Μπιτσάκη (Μπιτσάκης, 1986), το οντολογικό ερώτημα αφορά το είναι, δηλαδή τα γενικά χαρακτηριστικά και τους νόμους αυτού που υπάρχει, το **πώς** είναι η πραγματικότητα. Από την άλλη πλευρά, το γνωσιολογικό ερώτημα αφορά την ικανότητα της νόησης να γνωρίσει το είναι, το **τι** είναι η πραγματικότητα. Τα δυο ερωτήματα αν και είναι διαφορετικά, είναι αλληλένδετα: το ένα αποτελεί προϋπόθεση για το άλλο. Ουσιαστικά, αποτελούν όψεις ενός και μοναδικού προβλήματος, αυτού της σχέσης ανάμεσα στο είναι και τη νόηση. Αυτό είναι και το βασικό πρόβλημα της Φιλοσοφίας.

Γιατί όμως είναι σημαντικό να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα; Αυτό θα το κατανοήσουμε αν ξεκαθαρίσουμε πρώτα το τι είναι η Διδακτική των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Michel Henry (Henry, 1999) η Διδακτική των Μαθηματικών είναι η μελέτη των φαινομένων της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών. Όπως όμως φάνηκε από τα παραπάνω, η Γνωσιολογία είναι αυτή που ασχολείται με το φαινόμενο της νόησης και κατ' επέκταση με τη μάθηση. Οποιαδήποτε, λοιπόν, ερευνητική προσπάθεια στο χώρο της Διδακτικής είναι καταδικασμένη σε αποτυχία, αν δεν ενταχθεί μέσα στον γενικότερο χώρο της Γνωσιολογίας.

1.2. Η ανάπτυξη της νόησης

Ο άνθρωπος είναι ένα φυσικό ον που υπερβαίνει τη φυσική νομοτέλεια, συνειδητοποιώντας την ύπαρξη της φύσης και τη δική του ύπαρξη, θέτοντας σκοπούς και μετασχηματίζοντας συνειδητά τον κόσμο.

Όμως ο άνθρωπος δεν ήταν πάντα έλλογο ον. Στα κατώτερα στάδια της ανάπτυξής του δεν διέθετε εννοιακή σκέψη. Η νόηση αναπτύχθηκε βαθμιαία μέσα στην κοινωνική ζωή, με υλικό υπόβαθρο τον εγκέφαλο. Ορισμένες βιολογικές ιδιομορφίες και δυνατότητες του εγκεφάλου έκαναν δυνατή την πρώτη χρήση εργαλείων που παρείχε άμεσα η φύση και τις πρώτες στοιχειώδεις μορφές κοινωνικής ζωής. Από την άλλη πλευρά, η εργασία και η κοινωνική ζωή ανέπτυξαν τις δεξιότητες του ανθρώπου και τη νόησή του. Από το μυαλό στο χέρι και από το χέρι στο μυαλό. Αλλά ποιες ιδιότητες και δυνατότητες του εγκεφάλου αποτέλεσαν προϋπόθεση για την εννοιακή σκέψη;

Ο εγκέφαλος είναι μέρος του σώματος. Είναι ωστόσο μέρος προνομιούχο, που επικοινωνεί με το περιβάλλον με τη βοήθεια των αισθητηρίων και εξασφαλίζει τον κεντρικό έλεγχο και το συντονισμό της νευροκινητικής δραστηριότητας. Ο εγκέφαλος δέχεται από το περιβάλλον σήματα, με τη μορφή φυσικών αλληλεπιδράσεων (χρώματα, ήχους, οσμές κλπ.). Τα σήματα αυτά, μέσα από μια σειρά μετασχηματισμούς, εγγράφονται στον εγκέφαλο. Έτσι δημιουργούνται οι παραστάσεις και οι άλλες αισθητηριακές εντυπώσεις. Τα σήματα καταγράφονται, αναλύονται, φιλτράρονται, κωδικοποιούνται, ταξινομούνται, υφίστανται επεξεργασία, ολοκληρώνονται και αποτελούν την πρώτη ύλη της αίσθησης και της νόησης. Χάρη στην επικοινωνία και στην επεξεργασία των αισθητηριακών δεδομένων, ο εγκέφαλος αναγνωρίζει τα αντικείμενα, τις ομοιότητες και τις διαφορές τους, άρα την ποιότητα. Έτσι, προσανατολίζει τον οργανισμό στο χώρο, ελέγχει και συντονίζει τις κινήσεις του με βάση περίπλοκα «προγράμματα δράσης» που απαντούν σε καθορισμένα ερεθίσματα και δημιουργεί με την επεξεργασία των δεδομένων εσωτερικές αναπαραστάσεις του εξωτερικού κόσμου.

Αλλά η δημιουργία παραστάσεων, αντανακλαστικών και μηχανισμών νευροκινητικής δραστηριότητας δεν σημαίνει αυτόματα εμφάνιση της νόησης. Τέτοιους μηχανισμούς διαθέτουν και τα ζώα, τα οποία όμως δεν διαθέτουν εννοιακή σκέψη. Οι καθαυτό νοητικοί μηχανισμοί διαμορφώθηκαν μέσα στην κοινωνική ζωή

και ειδικά με την εργασία, τη χρήση και την κατασκευή εργαλείων. Η νόηση είναι κοινωνικό δημιούργημα και ταυτόχρονα οργανωτής και δημιουργός της κοινωνικής ζωής.

Τα τελευταία χρόνια, έχει γίνει ευρέως αποδεκτό, και στον ερευνητικό τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, ότι η μάθηση και η εφαρμογή των μαθηματικών δεν είναι καθαρώς διανοητικές δραστηριότητες, απομονωμένες από κοινωνικούς, πολιτιστικούς, και γενικού πλαισίου παράγοντες. Αντ' αυτού, έχει αναγνωριστεί ότι η μάθηση και η διδασκαλία πραγματοποιούνται, και πάντα πραγματοποιούνταν, μέσω της ένταξης σε κοινωνικά πλαίσια που όχι μόνο επηρεάζουν, αλλά ουσιαστικά καθορίζουν τα είδη γνώσης και εφαρμογής που κατασκευάζονται. Οι απόψεις που εστιάζουν στην κοινωνική και επηρεαζόμενη από το γενικό πλαίσιο φύση της γνώσης, και που καθιστούν την κατάσταση ένταξης προεξέχουσα στην ανάλυση της γνωστικής λειτουργίας, έχουν χαρακτηριστεί ως «ενταγμένες σε πλαίσιο» (situated). Η σφραγίδα αυτής της προσέγγισης είναι ότι εξετάζει τις διαδικασίες αλληλεπίδρασης ως βασικές και εξηγεί τις μεμονωμένες γνωστικές λειτουργίες και άλλες συμπεριφορές σε σχέση με τις συνεισφορές τους στα αλληλεπιδραστικά συστήματα. Έτσι η μάθηση δεν πραγματοποιείται με την παθητική απόκτηση ενός σώματος αντικειμενικής γνώσης του κόσμου, αλλά μάλλον μέσα από την εμπλοκή ολόκληρου του ατόμου σε μια δραστηριότητα μέσα και μαζί με τον κόσμο.

Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν δώσει πολλά σημαντικά αποτελέσματα, και έχουν βοηθήσει στο να προχωρήσει η ανάλυση της μάθησης πέρα από μια στενή εστίαση στις μεμονωμένες και «εσωτερικές» γνωστικές διαδικασίες. Παρόλα αυτά, θα υποστηρίζαμε ότι η φύση της ενταγμένης σε πλαίσιο μάθησης και γνωστικής λειτουργίας δεν μπορεί να κατανοηθεί πλήρως με την εξέταση μόνο των παραγόντων γενικού πλαισίου ή των κοινωνικών παραγόντων θεωρούμενων ως διαδικασιών μεταξύ ατόμων. Η σκέψη και η μάθηση είναι επίσης ένθετες σε βιολογικά και εμπειρικά πλαίσια, πλαίσια που έχουν διαμορφώσει, μ' έναν μη αυθαίρετο τρόπο, τους χαρακτηριστικούς μας τρόπους κατανόησης του κόσμου. Αυτοί οι χαρακτηριστικοί τρόποι κατανόησης, συζήτησης για τον κόσμο, και δράσης μέσα σ' αυτόν είναι κοινοί στους ανθρώπους δυνάμει του ότι είναι αλληλεπιδρώντα μέλη του ίδιου είδους, που συνυπάρχουν μέσα σ' ένα δεδομένο φυσικό μέσο.

Ας δούμε τώρα κάποια, ειδικά για το γνωστικό αντικείμενο «Μαθηματικά», θεωρητικά παραδείγματα σχετικά με την παραπάνω ανάλυση για το πώς επιτυγχάνεται η μάθηση και η κατανόηση.

1.2.1. Το παράδειγμα των Ενσωματωμένων Μαθηματικών

Η πρώιμη παραδοσιακή γνωστική επιστήμη, που εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1970, έντονα επηρεασμένη από την αντικειμενιστική παράδοση της αναλυτικής φιλοσοφίας και το λειτουργισμό, εστίαζε στη μάθηση ως μια διαδικασία μεμονωμένου συλλογισμού, που συχνά εξηγούνταν μέσω υπολογιστικών όρων. Ας σημειωθεί ότι σύμφωνα με τον αντικειμενισμό υπάρχουν υπερβατικές οντολογικές αλήθειες που είναι ανεξάρτητες από την ανθρώπινη κατανόηση ενώ ο λειτουργισμός υποστηρίζει ότι είναι δυνατό να μελετηθεί ο νους καθαρά από την άποψη των λειτουργιών που εκτελεί, χωρίς να εξετάζεται σοβαρά το πώς ο εγκέφαλος και το σώμα λειτουργούν πραγματικά. Έτσι οι ερευνητές της παραδοσιακής γνωστικής επιστήμης εκείνη την περίοδο υποστήριζαν ότι στην εξήγηση της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας, ήταν απαραίτητο (και επαρκές) να προϋποτεθεί ένα επίπεδο ανάλυσης εντελώς ξεχωριστό από το βιολογικό ή το νευρολογικό, αφ' ενός, και από το κοινωνιολογικό ή πολιτιστικό, αφ' ετέρου. Αυτό το ξεχωριστό επίπεδο ανάλυσης εστίασε στο άτομο ως επεξεργαστή πληροφοριών, και χαρακτήρισε το συλλογισμό ως το ευφυή χειρισμό αυθαίρετων συμβόλων. Υπό αυτή την άποψη, τα σύμβολα αποκτούν σημασία από το συσχετισμό τους με μια αντικειμενική πραγματικότητα, η οποία μοντελοποιείται στο νου από εσωτερικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν, σε μεγαλύτερους ή μικρότερους βαθμούς ακρίβειας, σ' εκείνη την εξωτερική πραγματικότητα. Αυτή η άποψη της γνωστικής λειτουργίας κατέστη (και εξακολουθεί να είναι) κυρίαρχη στη γνωστική ψυχολογία και συνακολούθως υιοθετήθηκε από κάποιους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναζητούσαν ένα παράδειγμα για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης.

Στα χρόνια όμως που ακολούθησαν καταδείχθηκε η αδυναμία αυτού του παραδείγματος να «σώσει τα φαινόμενα». Έτσι ήδη από τη δεκαετία του 1980, εμφανίστηκε μέσα στη γνωστική επιστήμη ένα πλήθος εναλλακτικών απόψεων, που προέρχονταν από διαφορετικές επιστήμες, αλλά είχαν την κοινή δέσμευση να διερευνήσουν τη γνωστική λειτουργία ως ένα φυσικά-ενσωματωμένο φαινόμενο, πραγματοποιούμενο μέσω μιας διαδικασίας συμπροσδιορισμού μεταξύ του οργανισμού και του μέσου στο οποίο αυτός υπάρχει. Αντί να προϋποθέτουν έναν παθητικό παρατηρητή που προσλαμβάνει μια προκαθορισμένη πραγματικότητα, αυτά τα παραδείγματα ισχυρίζονται ότι η πραγματικότητα κατασκευάζεται από τον

παρατηρητή, στη βάση μη αυθαίρετων πολιτισμικά καθορισμένων μορφών απόδοσης νοήματος που είναι τελικά θεμελιωμένες στη σωματική εμπειρία.

Σε αυτή την παράδοση ανήκει και το παράδειγμα των ενσωματωμένων (embodied) μαθηματικών (Lakoff και Núñez, 2000, Núñez κ.α., 1999) που αντιλαμβάνεται τα Μαθηματικά ως βασισμένες στο νου, ενσωματωμένες, ανθρώπινες μορφές κατανόησης. Οι βασικές μαθηματικές ιδέες παρουσιάζουν εντυπωσιακή σταθερότητα για εκατοντάδες, μερικές φορές για χιλιάδες, ετών. Για να συμβεί αυτό απαιτείται, αφ' ενός, ένα κοινό σύνολο νευρικών και σωματικών δομών με τις οποίες θα κατασκευαστούν οι μαθηματικές ιδέες. Αφ' ετέρου, απαιτείται αυτή η εννοιολογική κατασκευή να χρησιμοποιήσει τον πιο κοινό τόπο των καθημερινών εμπειριών, όπως η κίνηση, οι χωρικές σχέσεις, ο χειρισμός αντικειμένων, ο χώρος, και ο χρόνος. Αφού εμείς, τα ανθρώπινα όντα, είμαστε όλοι ζώντα φυσικά πλάσματα, που δρούμε στο ίδιο μέσο και μοιραζόμαστε μια βασική βιολογική κληρονομιά, έχουμε αμοιβαία την εμπειρία του κόσμου με θεμελιωδώς παρόμοιους τρόπους. Οι εννοιολογικές δομές που προκύπτουν στον ανθρώπινο νου για να κατανοηθούν οι σωματικές μας εμπειρίες, παρέχουν την πρώτη ύλη για την κατασκευή της κοινής επικοινωνίας μέσω της γλώσσας, και, συνακολούθως, την κοινή κατασκευή νοημάτων. Έτσι, από την πλευρά των ενσωματωμένων μαθηματικών βασικός στόχος της διδακτικής των μαθηματικών θεωρείται η εξέταση του πώς η ανθρώπινη δημιουργία των Μαθηματικών προκύπτει από την απόδοση νοήματος που δεν είναι αυθαίρετη, ακριβώς επειδή είναι σωματικά θεμελιωμένη.

Η θεωρία των ενσαρκωμένων μαθηματικών θέτει τους ακόλουθους ισχυρισμούς[1]:

1. Τα μαθηματικά είναι προϊόν των ανθρώπων. Χρησιμοποιούν τα πολύ περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας και σχηματίζονται από τη φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων, και των ενδιαφερόντων των ανθρώπινων κοινωνιών και πολιτισμών.
2. Τα τμήματα της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας που παράγουν τα ανώτερα μαθηματικά είναι φυσιολογικές γνωστικές ικανότητες των ενηλίκων – λόγου χάρη, η ικανότητα για την εννοιολογική μεταφορά. Τέτοιες γνωστικές ικανότητες είναι κοινές σε όλους τους ανθρώπους.

[1] Lakoff and Núñez σελ. 351, (μετάφραση του Κ. Γαβρά)

Ως τέτοια, η ικανότητα για μαθηματικά, ακόμη και για τα ανώτερα, είναι καθολική σε ανθρώπινο επίπεδο.

3. Η απλή απαρίθμηση είναι έμφυτη στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Όπως πολλά άλλα θηλαστικά, οι άνθρωποι μπορούν να αναγνωρίσουν άμεσα και με ακρίβεια το πλήθος κάποιων οντοτήτων ενός πολύ μικρού συνόλου. Τούτη είναι σαφώς μια ενσαρκωμένη ικανότητα.
4. Οι θεματικές περιοχές των μαθηματικών – αριθμητική, γεωμετρία, πιθανότητες, απειροστικός λογισμός, θεωρία συνόλων, συνδυαστική, θεωρία παιγνίων, τοπολογία, κλπ –προκύπτουν από ανθρώπινα ενδιαφέροντα και δραστηριότητες: λόγου χάρη, την απαρίθμηση και τη μέτρηση, την αρχιτεκτονική, το χαρτοπαίγνιο, την κίνηση και άλλες μεταβολές, τη συγκέντρωση, το χειρισμό γραπτών συμβόλων, τα παιχνίδια, την επιμήκυνση και το λύγισμα αντικειμένων. Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά είναι θεμελιωδώς ένα ανθρώπινο εγχείρημα που προκύπτει από βασικές ανθρώπινες δραστηριότητες.
5. Η μαθηματική πτυχή αυτών των ενδιαφερόντων είναι η ακρίβεια – ακριβή αθροίσματα, μετρήσεις, γωνίες, εκτιμήσεις, ρυθμοί μεταβολής, κατηγοριοποιήσεις, πράξεις, κοκ. Η ακρίβεια καθίσταται εφικτή επειδή οι άνθρωποι μπορούν να πραγματοποιούν πολύ σαφείς και ακριβείς διακρίσεις μεταξύ αντικειμένων και κατηγοριών υπό συγκεκριμένες συνθήκες και μπορούν να σταθεροποιήσουν στο νου τους και να θυμηθούν με συνέπεια αφηρημένες οντότητες όπως οι αριθμοί και τα σχήματα.
6. Η ακρίβεια ενισχύεται σημαντικά από την ανθρώπινη ικανότητα του συμβολισμού. Μπορούν να επινοηθούν σύμβολα για την παράσταση μαθηματικών ιδεών, οντοτήτων, πράξεων και σχέσεων. Τα σύμβολα επιτρέπουν επίσης ακριβείς και με δυνατότητα επανάληψης υπολογισμούς.
7. Η εννοιολογική μεταφορά είναι ένας νευρικά ενσαρκωμένος θεμελιώδης γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τη συμπερασματολογική δομή μιας περιοχής ώστε να εκτελέσουμε συλλογισμούς για μια άλλη. Επιτρέπει στους μαθηματικούς να μεταφέρουν σε μια περιοχή των μαθηματικών τις ιδέες και τις μεθόδους ακριβούς υπολογισμού μιας άλλης περιοχής.

8. Μόλις εδραιωθούν μέσα σε μια κοινότητα μαθηματικών, τα μαθηματικά συμπεράσματα και οι υπολογισμοί για μια δεδομένη θεματική περιοχή τείνουν να μη μεταβάλλονται ούτε χρονικά ούτε χωρικά ούτε πολιτισμικά. Η σταθερότητα των ενσαρκωμένων μαθηματικών είναι μια συνέπεια του γεγονότος ότι όλοι οι φυσιολογικοί άνθρωποι έχουν τις ίδιες σχετικές πτυχές εγκεφαλικής και σωματικής δομής και τις ίδιες σχετικές σχέσεις με το περιβάλλον που εισέρχονται στα μαθηματικά.
9. Τα μαθηματικά δεν είναι μονολιθικά στη γενική θεματική περιοχή τους. Δεν υπάρχει *η* γεωμετρία, *η* θεωρία συνόλων ή *η* τυπική λογική. Αντίθετα, υπάρχουν αμοιβαία ασυνεπείς εκδοχές γεωμετρίας, θεωρίας συνόλων, λογικής κοκ. Κάθε εκδοχή σχηματίζει μια διακεκριμένη και εσωτερικά συνεπή θεματική περιοχή.
10. Τα μαθηματικά είναι αποτελεσματικά στο χαρακτηρισμό και την πραγματοποίηση προβλέψεων για ορισμένες πτυχές του πραγματικού κόσμου όπως τον βιώνουμε. Έχουμε εξελιχθεί έτσι ώστε η καθημερινή γνωστική μας λειτουργία να μπορεί, γενικά, να εναρμονιστεί με τον κόσμο όπως τον βιώνουμε. Τα μαθηματικά είναι μια συστηματική επέκταση των μηχανισμών της καθημερινής γνωστικής λειτουργίας. Οποιαδήποτε εναρμόνιση των μαθηματικών με τον κόσμο διαμεσολαβείται και καθίσταται εφικτή από τις ανθρώπινες γνωστικές ικανότητες. Κάθε τέτοια «εναρμόνιση» εμφανίζεται στον ανθρώπινο νου, όπου γνωρίζουμε και τον κόσμο και τα μαθηματικά.

1.2.2. Η πρόταση της Sfard

Η θεωρία της Anna Sfard (Sfard, 1991) για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης υποστηρίζει ότι η κατανόηση των νέων εννοιών πραγματοποιείται σε τρία στάδια: την *εσωτερικοποίηση* (interiorisation), τη *συμπύκνωση* (condensation) και την *αφαίρεση* (reification). Για το πέρασμα από το ένα στάδιο στο άλλο η Sfard (1991) αναφέρει:

πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που εκτελείται στα ήδη γνωστά (μαθηματικά) αντικείμενα, έπειτα πρέπει να προκύψει η ιδέα της μετατροπής αυτής της διαδικασίας σε αυτόνομη οντότητα, και τελικά πρέπει να αποκτηθεί η δυνατότητα να θεωρηθεί αυτή η νέα οντότητα ως ολοκληρωμένο, με τη μορφή αντικειμένου σύνολο. (σελ. 18)

Αναλυτικότερα έχουμε:

- Στο στάδιο της εσωτερικοποίησης μια νέα έννοια την βλέπουμε από την άποψη των διαδικασιών ή των πράξεων, δηλαδή έχουμε μια λειτουργική μόνο άποψη της έννοιας.
- Στο στάδιο συμπύκνωσης, αντιλαμβανόμαστε τις διαδικασίες που οδηγούν σε μια νέα έννοια ή σε ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο όλο και περισσότερο ολιστικά. Έτσι αναπτύσσεται μια δομική άποψη της έννοιας.
- Στο στάδιο της αφαίρεσης, η νέα έννοια μπορεί να γίνει αντιληπτή χωριστά από τις διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν για να την παραγάγουν, έτσι ώστε να φαίνεται δομικά και ταυτόχρονα ως αυθύπαρκτη οντότητα. Επίσης, σε αυτό το στάδιο «μπορούν να εκτελεσθούν διαδικασίες που να έχουν ως δεδομένο το αντικείμενο που μόλις δημιουργήθηκε» (Sfard, 1991, σελ. 20).

Ας σημειωθεί όμως, πως η Sfard (1991) τονίζει ότι τα παραπάνω στάδια δεν πρέπει να τα δούμε ως ένα ιεραρχημένο σχήμα τριών σταδίων. Μια τέτοια ιεράρχηση θα υπονοούσε ότι ένα στάδιο δεν μπορεί να επιτευχθεί αν πρώτα δεν περνάγαμε από όλα τα προηγούμενα, κάτι που δεν είναι αληθές. Η κατανόηση είναι πολυπλοκότερο φαινόμενο και δεν είναι λίγες οι φορές που αντιλαμβανόμαστε πρώτα τη δομή μιας μαθηματικής έννοιας και μετά κατανοούμε τις διάφορες διαδικασίες και πράξεις, που την χαρακτηρίζουν.

1.2.3. Το παράδειγμα των Tall και Gray

Οι Gray και Tall (Gray & Tall, 1994) αναφέρονται στην μαθηματική κατανόηση με όρους διαδικασιών και αποτελεσμάτων ή αντικειμένων. Δίνουν μεγάλη σημασία στον δυϊσμό (duality) μεταξύ της διαδικασίας (process) και της έννοια

(concept) στα μαθηματικά, και ειδικότερα στη χρησιμοποίηση του ίδιου συμβολισμού για την αναπαράσταση τόσο της διαδικασίας (όπως η πρόσθεση δύο αριθμών 3+2), όσο και του αποτελέσματος της διαδικασίας (το άθροισμα 3+2). Η ασάφεια του συμβολισμού επιτρέπει στον μαθηματικό να κινείται με ευελιξία μεταξύ της διαδικασίας της εκτέλεσης ενός μαθηματικού έργου και του χειρισμού της έννοιας που είναι κομμάτι ενός μεγαλύτερου νοητικού σχήματος. Τελικά, υποθέτουν πως για να είναι κάποιος επιτυχημένος στα Μαθηματικά θα πρέπει να χρησιμοποιεί μια διανοητική δομή που είναι ένα αμάλγαμα της διαδικασίας και της έννοιας την οποία ονομάζουν procept (**pro**cess- con**cept**).

Στηριγμένοι στα παραπάνω ορίζουν δυο βασικά είδη σκέψης:

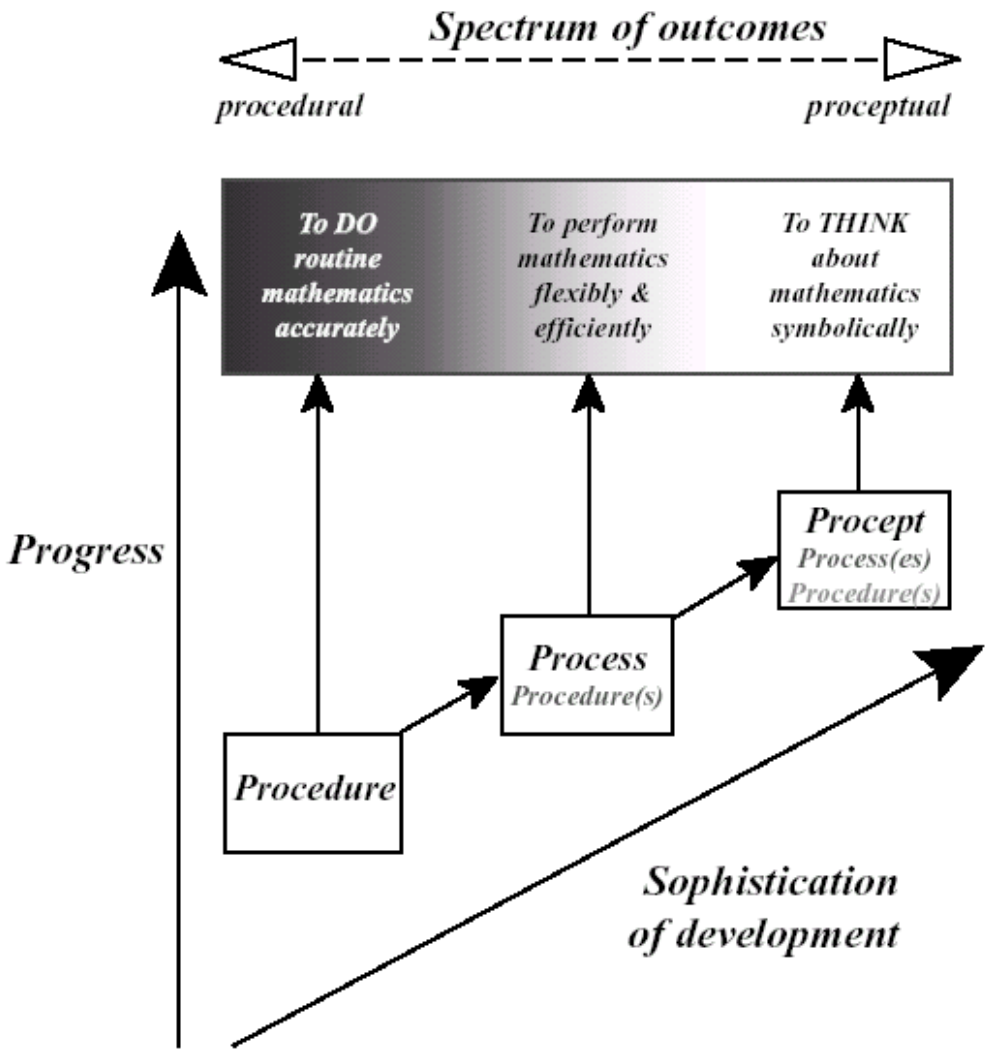
1. *Η διαδικαστική (procedural) σκέψη* χαρακτηρίζεται από την εστίαση στη διαδικασία και τα σωματικά ή σχεδόν-σωματικά στηρίγματα που την υποστηρίζουν. Τα περιορισμένα όρια αυτού του τύπου σκέψης οφείλονται στην περιορισμένη άποψη που το παιδί έχει για το συμβολισμό: οι αριθμοί χρησιμοποιούνται μόνο ως συγκεκριμένες οντότητες, τις οποίες οι μαθητές χειρίζονται κατευθείαν στη διαδικασία της μέτρησης. Η έμφαση στη διαδικασία μειώνει την προσοχή στη σχέση μεταξύ των δεδομένων και των αποτελεσμάτων, και συχνά οδηγεί σε ιδιοσυγκρασιακές επεκτάσεις της διαδικασίας της μέτρησης, οι οποίες μπορεί να μην γενικεύονται.
2. *Η proceptual σκέψη* που χαρακτηρίζεται από τη δυνατότητα της συμπίεσης σταδίων στο χειρισμό συμβόλων μέχρι στο σημείο όπου τα σύμβολα αντιμετωπίζονται ως αντικείμενα που μπορούν να αποσυντεθούν και επανασυντεθούν με ευέλικτους τρόπους.

Τα παραπάνω, όμως, συμπληρώνονται και με ένα τρίτο είδος σκέψης:

3. *Η τυπική (formal) σκέψη*, η οποία εστιάζει στις ίδιες της ιδιότητες σε αξιωματική μορφή, ώστε να κτίσει τις τυπικές μαθηματικές θεωρίες των προχωρημένων μαθηματικών.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε τη διαφορά του αγγλικού όρου *procedure* (διαδικασία) με τον οποίο εννοούμε έναν βήμα προς βήμα αλγόριθμο, κατά την εκτέλεση του οποίου το άτομο πρέπει να έχει ολοκληρώσει κάποιο βήμα πριν πάει στο επόμενο, από τον όρο *process* (διαδικασία) η οποία

συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες διαδικασίες (procedures), οι οποίες έχουν το ίδιο συνολικό αποτέλεσμα, αντιμετωπιστούν ως ένα σύνολο, χωρίς να είναι απαραίτητη η αναφορά σε κάθε ένα από τα βήματα ξεχωριστά ή σε κάθε μια από τις διαδικασίες (procedures). Γνωρίζοντας αυτά, μπορούμε να καταλάβουμε το παρακάτω διάγραμμα (Tall et al., 2001) που σχηματοποιεί την γνωστική ανάπτυξη από την διαδικαστική στην proceptual σκέψη:



Τέλος, για την καλύτερη περιγραφή των φαινομένων, ορίστηκαν από τον Tall Tall (Tall, 2004) και τους συνεργάτες του οι τρεις κόσμοι των Μαθηματικών:

- Ο *ενσωματωμένος (embodied) κόσμος* είναι ένας κόσμος των αισθήσεων. Αντλεί την σιγουριά για την αλήθεια από το ότι τα πράγματα συμπεριφέρονται προβλέψιμα με έναν αναμενόμενο τρόπο. Για παράδειγμα, να διάνυσμα έχει μέγεθος και κατεύθυνση. Η

πρόσθεση των διανυσμάτων γίνεται με την τοποθέτηση της ουράς του δεύτερου διανύσματος μετά από τη μύτη του πρώτου, δηλαδή κάνοντάς τα διαδοχικά. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική κάτι που το βλέπουμε γεωμετρικά.

- Ο *proceptual κόσμος* είναι ένας κόσμος του υπολογισμού και του χειρισμός. Οι προτάσεις είναι αληθινές επειδή εκφράζονται μέσα από τα σύμβολα και μπορούν να ελεγχθούν με υπολογισμούς ή κατάλληλους χειρισμούς. Έτσι, τα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες. Η πρόσθεση των διανυσμάτων γίνεται με την πρόσθεση των συντεταγμένων. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική επειδή η πρόσθεση των συντεταγμένων είναι αντιμεταθετική.
- Ο *τυπικός (formal) κόσμος* είναι ένας κόσμος των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρήματα. Οι προτάσεις είναι αληθινές επειδή μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα και τους ορισμούς από την τυπική απαγωγή. Τα διανύσματα είναι στοιχεία ενός τυπικού συστήματος που ονομάζεται διανυσματικός χώρος (δεν χρειάζονται πλέον να έχουν μέγεθος ή κατεύθυνση!). Η πρόσθεση των διανυσμάτων είναι μέρος του ορισμού του διανυσματικού χώρου. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική επειδή αυτό είναι, επίσης, μέρος του ορισμού.

2. Συνοπτική ιστορία του διανυσματικού λογισμού

Η ιστορική πορεία μιας έννοιας ενδέχεται να μας προμηθεύσει ιδέες για το ποιο θα μπορούμε να είναι το πλέον κατάλληλο τυπικό παράδειγμα που θα αποτελέσει πυρήνα γύρω από τον οποίο θα δομηθεί μια δραστηριότητα μέσω της οποίας ο μαθητής θα εμπλακεί με την έννοια. Δηλαδή, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει πιθανούς τρόπους εισαγωγής ενός μαθηματικού αντικειμένου κατά ένα φυσικό τρόπο (Κεΐσογλου και Σπύρου, 2003, Πάσχος, 2003).

Ακόμη προσανατολίζει το δάσκαλο στη δουλειά του. Είναι ένα καλό όχημα για συλλογισμούς πάνω στη γνώση και στα εκπαιδευτικά προβλήματα, για δουλειά πάνω στις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά. Αφού οι μαθητές, σε διάφορα επίπεδα, βρίσκουν μαθησιακά εμπόδια τα οποία είναι ίδια με εκείνα των μαθηματικών του παρελθόντος, η ιστορία των μαθηματικών εφοδιάζει την τάξη με δασκάλους, που έχουν ένα ισχυρό εργαλείο πρόβλεψης ψυχολογικών προβλημάτων στη μάθηση των μαθηματικών.

Εξάλλου η αντίληψή μας για την γενικότερη φύση της μαθηματικής επιστήμης και την εξέλιξή της μέσα στην ιστορική πορεία είναι βέβαιο ότι επηρεάζει άμεσα την διδακτική άποψη σχετικά με την εξελικτική διαμόρφωση της μαθηματικής γνώσης και τον τρόπο μαθηματικού σκέπτεσθαι σε κάθε άτομο.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των πρώτων βημάτων του διανυσματικού λογισμού και η ανάδειξη στοιχείων χρήσιμων για τη διδακτική των μαθηματικών.

2.1. Τα πρώτα ίχνη του διανύσματος

Στην προσπάθεια μας αναζήτησης των «ριζών» του διανυσματικού λογισμού προσκρούσαμε σε σημαντικά εμπόδια. Σε ποια ιστορική περίοδο θα τις αναζητήσουμε; Αλλά και σε ποιο μαθηματικό χώρο θα ψάξουμε για την έννοια του διανύσματος; Στην άλγεβρα, την γεωμετρία ή μήπως τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό; Εξάλλου δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και το ρόλο του διανύσματος στη μηχανική.

Ένα καλό σημείο εκκίνησης για αυτήν την προς τα πίσω πορεία, θα είναι η διασαφήνιση της έννοιας του διανύσματος. Σύμφωνα με τους Moon και Spencer[2] μπορούμε να δούμε το διάνυσμα από δυο πλευρές: την αλγεβρική και την γεωμετρική.

1. **Η αλγεβρική φύση των διανυσμάτων**

   Το διάνυσμα ανήκει στην οικογένεια των holors ή hypernumbers, ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες της άλγεβρας. Αυτοί οι hypernumbers είναι μαθηματικές οντότητες κατασκευασμένες από πολλά ανεξάρτητα στοιχεία. Για παράδειγμα:

   - Στο χώρο των δύο διαστάσεων: οι μιγαδικοί αριθμοί z* = (x,y) = x+iy.
   - Στο χώρο των τριών διαστάσεων, ένα διάνυσμα έχει την μορφή:

     $$u^i = (u^1, u^2, u^3),$$

     όπου οι αριθμοί u^1, u^2, u^3 καλούνται συντεταγμένες του διανύσματος, και γεωμετρικά αναπαριστούν αποστάσεις πάνω στους άξονες.
   - Σε ένα ν-διάστατο χώρο, ένα διάνυσμα είναι της μορφής:

     $$u^i = (u^1, u^2, ..., u^\nu)$$

2. **Η γεωμετρική φύση των διανυσμάτων**

   Σαν προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα το διάνυσμα είναι μια γεωμετρική οντότητα ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων (οι αριθμοί που αναπαριστούν το διάνυσμα αλλάζουν, αλλά η οντότητα διάνυσμα παραμένει η ίδια). Για αυτό το λόγο, ίσως η σημαντικότερη ιδιότητα του διανύσματος είναι το αμετάβλητο της γεωμετρικής του αναπαράστασης κάτω από έναν μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

Τα παραπάνω μπορεί να μας φανούν πολύ χρήσιμα αν αναλογιστούμε πως μέχρι τα τέλη του 17^{ου} αιώνα περίπου, υπάρχουν δυο μαθηματικές παραδόσεις, δυο ρεύματα μαθηματικής σκέψης και διαδικασίας. Η πρώτη, η **μαθηματικό-αριθμητική** παράδοση, προέρχεται από τη εποχή των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και περιλαμβάνει την προοδευτική διεύρυνση της έννοιας του αριθμού. Έτσι κατά τη διάρκεια των ετών η έννοια του αριθμού έχει επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει από τους φυσικούς αριθμούς, τους αρνητικούς, τα κλάσματα μέχρι τους πληθάριθμους του Cantor και τα quaternions του Hamilton. Όσον αφορά τη δεύτερη, τη **γεωμετρικό-φυσική**, πηγάζει από την ανάγκη του ανθρώπου να αναπαραστήσει

[2] βλ. Demetriadou & Gagatsis (19..), σελ. 372-373

κάποια φυσικά μεγέθη όπως μήκος, εμβαδόν, όγκος, ταχύτητα κλπ., με τον πιο άμεσο και διαισθητικό τρόπο. Έτσι η φυσική πραγματικότητα αναπαρίσταται από μαθηματικά εργαλεία όπως τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ας επιστρέψουμε όμως στην προσπάθειά μας αναζήτησης της προέλευσης του διανυσματικού λογισμού. Αν θελήσουμε να διερευνήσουμε την αλγεβρική του φύση θα πρέπει να ψάξουμε μετά τον 16^{ο} αιώνα, αφού αυτή την περίοδο έχουμε την εισαγωγή της κατάλληλης γλώσσας στην άλγεβρα (από το Viete), και τη χρησιμοποίηση συστημάτων συντεταγμένων (από τους Descartes και Fermat). Αντίθετα τα ίχνη του διανύσματος στη γεωμετρικο-φυσική παράδοση τα βρίσκουμε ήδη στην αρχαία Ελλάδα.

2.1.1. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου

Μια από τις βασικότερες ιδέες του διανυσματικού λογισμού είναι ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων. Ήταν γνωστός τουλάχιστον από την εποχή του Αριστοτέλη (300 π.Χ.), ο οποίος τον χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, δυο δυνάμεων. Ακόμη χρησιμοποιήθηκε για τη σύνθεση ταχυτήτων και από άλλους Έλληνες συγγραφείς[3] όπως τον Αρχιμήδη (250 π.Χ.) και τον Ήρωνα (100 μ.Χ.). Ακόμα το συναντάμε σε πολλά γραπτά έργα του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα, των Simon Stevin of Bruges, Galileo Galilei και Isaac Newton, αλλά και του 18^{ου} αιώνα από τους Gauss, Argand, Oersted, Ampere και Faraday.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε πως οι παραπάνω συγγραφείς δεν φαίνεται να γνώριζαν την έννοια του διανύσματος ή της πρόσθεσης διανυσμάτων. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου ήταν για αυτούς ένα εργαλείο που τους βοηθούσε στην κατασκευή διαγράμματος, με το οποίο γινόταν εύκολος ο υπολογισμός της συνισταμένης δυο φυσικών οντοτήτων. Έτσι, η συνεισφορά του στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού ήταν μόνο έμμεση, αλλά όχι ασήμαντη, αφού είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι των διανυσμάτων στη φυσική.

[3] βλ. Crowe (1985) σελ. 2

2.1.2. Προς μια γεωμετρία της θέσης

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) το 1679 σε ένα γράμμα του στον Christian Huygens, που όμως δημοσιεύτηκε μόλις το 1833, πρότεινε τη δημιουργία ενός συστήματος γεωμετρικών οντοτήτων που θα παριστάνονταν συμβολικά με χαρακτήρες και θα υπάκουαν στις πράξεις και τους κανόνες της άλγεβρας. Οραματίστηκε έναν λογισμό με τον οποίο θα εκφραζόταν η θέση, η γωνία και η κίνηση όπως ακριβώς με την άλγεβρα εκφράζεται το μέγεθος.

Δυστυχώς, στο σύστημα που πρότεινε δεν κατάφερε να ορίσει πράξεις μεταξύ των γεωμετρικών οντοτήτων και επιπλέον απέτυχε να δει τα AB και BA ως δυο διαφορετικές οντότητες. Αν και η απόπειρα του Leibniz προσέγγισε την έννοια του διανύσματος δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ο δημιουργός της.

2.1.3. Η επίδραση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

Το ενδιαφέρον μας για του μιγαδικούς αριθμούς έγκειται σε δυο αιτίες. Καταρχάς δεν πρέπει να ξεχνάμε πως οι μιγαδικοί είναι ένα διδιάστατο διανυσματικό σύστημα. Επιπλέον, όπως θα δούμε αργότερα, ο Hamilton κατασκεύασε τα quaternions σε μια προσπάθειά του για επέκταση των μιγαδικών στις τρεις διαστάσεις.

Μέχρι το 1831, τουλάχιστον πέντε άτομα οι Wessel, Gauss, Argard, Warren και Mourey, δημοσίευσαν εργασίες τους σχετικά με την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών, ενώ δυο ακόμα ο Wallis και ο Buée έφτασαν πολύ κοντά. Ας σημειωθεί, πως μέχρι τότε δεν γίνονταν ευρέως αποδεκτοί και ονομάζονταν: χίμαιρες, γελοίοι, παράλογοι, φανταστικοί, ψευδείς, πνευματικά βασανιστήρια, ενώ ο ίδιος ο Leibniz τους αποκαλεί “αμφίβια μεταξύ ύπαρξης και μη ύπαρξης”.

Θα αναφέρουμε εδώ συνοπτικά κάποια ενδιαφέροντα σημεία από τη πορεία «νομιμοποίησης» των μιγαδικών αριθμών. Ο John Wallis (1616-1703) ήταν ο πρώτος που επιχείρησε να τους κατασκευάσει γεωμετρικά. Αν και απέτυχε, αξίζει να σημειωθεί ότι είναι δική του η ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών με σημεία στο επίπεδο. Το επόμενο βήμα θα γίνει από το Caspar Wessel (1745-1818), του οποίου ο

βασικός στόχος ήταν να εκφράσει την κατεύθυνση οποιασδήποτε ευθείας γραμμής με αναλυτικό τρόπο. Σημαντικά σημεία του έργου του ήταν η εισαγωγή του άξονα των φανταστικών αριθμών, ο ορισμός πράξεων μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων και ο συνυπολογισμός της κατεύθυνσης των ευθειών γραμμών. Παρόμοιες ήταν και οι ιδέες του Argard, ο οποίος εισήγαγε τον όρο προσανατολισμένη γραμμή ή γραμμή κατεύθυνσης, με μόνη διαφορά ότι αντιμετώπισε τους μιγαδικούς περισσότερο αλγεβρικά. Τελικά το μιγαδικό επίπεδο, όπως το ξέρουμε σήμερα, το οφείλουμε στο Jean Robert Gauss (1768-1822). Αν και το σύστημα του ήταν ανάλογο με αυτό των προαναφερθέντων, η φήμη του ως μαθηματικός έπαιξε τον κύριο λόγο στην επικράτηση των ιδεών του. Αντιμετώπισε όμως τους μιγαδικούς ως μετατοπίσεις: θεώρησε τον α + β i ως μετατόπιση α μονάδων κατά μια καθορισμένη κατεύθυνση που ακολουθείται από μετατόπιση β μονάδων κατά την κατακόρυφη στην προηγούμενη κατεύθυνση. Επιπλέον σε αντίθεση με τους προηγούμενους, προτίμησε να αναπαραστήσει τους μιγαδικούς με σημεία στο επίπεδο και όχι με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα.

Μέχρι τώρα τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιήθηκαν σαν εργαλεία για την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Από το σημείο όμως αυτό και έπειτα οι όροι αντιστράφηκαν. Με την νομιμοποίηση των μιγαδικών και τον ορισμό πράξεων, μπορούσαν τώρα οι μιγαδικοί να παίξουν το ρόλο αναπαράστασης για τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και επιπλέον να χρησιμοποιηθούν για να οριστούν πράξεις μεταξύ αυτών των τμημάτων. Δημιουργήθηκε δηλαδή ένας διανυσματικός λογισμός του επιπέδου.

Τι γίνεται όμως με τον τρισδιάστατο χώρο; Η κατασκευή ενός ανάλογου λογισμού για το χώρο ήταν η επόμενη πρόκληση για την μαθηματική κοινότητα. Πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να το επιτύχουν, αλλά τελικά ήταν ο Hamilton αυτός του οποίου οι προσπάθειες απέδωσαν καρπούς.

2.2. Τα πρώτα διανυσματικά συστήματα.

Στις αρχές του 19ου αιώνα ήταν πια επιτακτική η ανάγκη για ένα διανυσματικό λογισμό, που με τη βοήθειά του θα μπορούσαν να εκφραστούν οι φυσικοί νόμοι και να ελεγχθεί η καθολικότητά τους. Σημαντικό ρόλο σε αυτό διαδραμάτισε το έργο του William Rowan Hamilton (1805-1865).

2.2.1. Hamilton

Ο Hamilton από μικρή ηλικία έδειξε πως η δίψα του για μάθηση ήταν ακόρεστη. Σαν έφηβος μιλάει και γράφει 13 γλώσσες ενώ ήδη πριν ασχοληθεί εντατικά με τα μαθηματικά είχε διακριθεί στην οπτική και τη μηχανική.

Το 1837 παρουσίασε μια άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών, στην οποία παρίστανε τους μιγαδικούς α + β i με τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β). Πλέον οι πράξεις των μιγαδικών ορίζονται απόλυτα αλγεβρικά ως εξής:

$$(\alpha,\beta) \pm (\gamma,\delta) = (\alpha \pm \gamma, \beta \pm \delta)$$

$$(\alpha,\beta) \cdot (\gamma,\delta) = (\alpha\gamma-\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma)$$

$$\frac{(\alpha,\beta)}{(\gamma,\delta)} = \left(\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}, \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)$$

Με τα διατεταγμένα ζεύγη κατάφερε να «εξαφανίσει» τους φανταστικούς, κάτι που ήταν μεγάλο επίτευγμα αφού απελευθέρωσε τους μιγαδικούς από το μυστικισμό που τους περιέβαλλε. Παρατηρούμε, εξάλλου, πως οι παραπάνω πράξεις ικανοποιούν την προσαιτεριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα και ότι με τη βοήθεια του Hamilton οι μιγαδικοί και τα διανύσματα απαλλάσσονται από τη γεωμετρική ερμηνεία.

Όπως ήταν αναμενόμενο ο Hamilton έθεσε το ερώτημα της ύπαρξης αντίστοιχης τρισδιάστατης άλγεβρας. Ουσιαστικά, επιζητούσε τριάδες, οι οποίες να ικανοποιούν την προσαιτεριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα, αν οριστούν οι τέσσερις πράξεις όπως και στα ζεύγη.

Η πράξη της πρόσθεσης δεν παρουσίαζε καμία δυσκολία αλλά για δέκα χρόνια τον ταλαιπωρούσε ο πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων. Τελικά, το 1843,

συνειδητοποίησε πως οι δυσκολίες που συναντούσε θα εξαφανίζονταν αν αντί για τριάδες χρησιμοποιούσε τετράδες και αν εγκατέλειπε την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Το αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία των quaternions (τετράνια) τα οποία ήταν τετράδες αριθμών της μορφής:

$$(w,x,y,z) \qquad \text{ή} \qquad q = w + i\,x + j\,y + k\,z$$

όπου w, x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί και i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα που βρίσκονται πάνω στους άξονες x, y και z αντίστοιχα. Ακόμα, τα i, j, k ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$ij = k \qquad jk = i \qquad ki = j$$

$$ji = -k \qquad kj = -i \qquad ik = -j$$

$$ii = jj = kk = -1$$

Επίσης, ονόμασε το w βαθμωτό μέρος (scalar part) ενώ το υπόλοιπο διανυσματικό μέρος (vector part). Ο Hamilton ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τους όρους βαθμωτό και διάνυσμα με τη σημερινό μαθηματικό τους νόημα[4].

Στη συνέχεια παίρνοντας δυο quaternions της μορφής $q = i\,x + j\,y + k\,z$ και $q' = i\,x' + j\,y' + k\,z'$ όρισε τα: $Sqq' = -(xx' + yy' + zz')$

και $Vqq' = i\,(yz' - zy') + j\,(zx' - xz') + k\,(xy' - yx')$

Αυτός ο χωρισμός του πραγματικού μέρους Sqq' του γινομένου qq' από το διανυσματικό Vqq' αντιστοιχεί στο σημερινό εξωτερικό γινόμενο και στο αντίθετο του εσωτερικού γινομένου. Ακόμη απέδειξε πολλά θεωρήματα του γνωστού μας διανυσματικού λογισμού όπως το: $Sqq' = 0$ όταν τα q και q΄ είναι παράλληλα.

Τα τελευταία είκοσι δυο χρόνια της ζωής του τα αφιέρωσε σχεδόν αποκλειστικά στην επεξεργασία των quaternions, περιλαμβανομένων των εφαρμογών τους στη δυναμική, στην αστρονομία και την κυματική θεωρία του φωτός.

Σήμερα, είναι σαφές ότι δεν ήταν αυτή η συγκεκριμένη μορφή άλγεβρας που ήταν σημαντική, αλλά η ανακάλυψη της τεράστιας ελευθερίας των μαθηματικών να κατασκευάσουν άλγεβρες που δεν χρειάζεται να ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτουν οι νόμοι της συνήθης αριθμητικής.

[4] βλ. Crowe σελ. 32

2.2.2. Grassmann

Ήδη από το 1840, τρία χρόνια πριν το Hamilton, ο Herman Günther Grassmann (1809-1877) σε μια εργασία του με τίτλο: *Theorie der ebbe und flut*, είχε αναπτύξει το πρώτο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης του χώρου. Η θεωρία του εκδόθηκε βελτιωμένη το 1844 με τίτλο: *Ausdehnungslehre*, ένα χρόνο μετά την αναγγελία του Hamilton για την ανακάλυψη των quaternions, αλλά παρέμεινε άγνωστη έως και την επανέκδοσή της το 1862. Όμως ακόμα και τότε ο μυστικιστικός, πολύπλοκος και αφηρημένος τρόπος παρουσίασης του έργου του συντέλεσε στο να μην έχει άμεσο αντίκτυπο στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού.

Το έργο του Ausdehnungslehre ή λογισμός της επέκτασης (calculus of extension) προσανατολιζόταν προς τη ν-διάστατη γεωμετρία και υπό μια έννοια αποτελεί μια μη-Ευκλείδεια γεωμετρία. Η βασική του ιδέα ήταν ένας τύπος hypernumber (υπεραριθμού) με ν όρους που ονόμασε «επεκτεταμένη ποσότητα» (extensive magnitude) και ήταν της μορφής $x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + ... + x_\nu\varepsilon_\nu$ όπου τα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί και τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ πρωταρχικές μονάδες. Οι ν διαστάσεις του έδωσαν τη δυνατότητα σε εργασία του το 1855 με τίτλο «Sur les différents genres de multiplication» να ορίσει συνολικά 16 διαφορετικά είδη διανυσματικού γινομένου.

Ειδικά για ν = 3 έχουμε μια άλγεβρα διανυσμάτων του χώρου. Αν πάρουμε δυο hypernumbers $\alpha = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3$ και $\beta = \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \beta_3\varepsilon_3$ όπου τα α_i, β_i είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ε_i αποτελούν ένα δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων τότε:

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2)\varepsilon_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3)\varepsilon_3$$

ενώ για το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο όρισε

$$\alpha \setminus \beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \text{ και}$$

$$[\alpha\beta] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\varepsilon_2\varepsilon_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[\varepsilon_3\varepsilon_1] + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\varepsilon_1\varepsilon_2] \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου $\varepsilon_i \setminus \varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_i \setminus \varepsilon_j = 0$ για i≠j και $[\varepsilon_i\varepsilon_j] = -[\varepsilon_j\varepsilon_i]$, $[\varepsilon_i\varepsilon_i] = 0$ για i, j∈{1, 2, 3}.

Όπως παρατηρούμε το εσωτερικό γινόμενο του Grassmann μεταξύ δυο υπεραριθμών ισούται με το αντίθετο του βαθμωτού μέρους του γινομένου δυο quaternions του Hamilton. Όσον αφορά το εξωτερικό γινόμενο, αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε

το $[\varepsilon_2\varepsilon_3]$ με ε_1 θα διαπιστώσουμε πως είναι ακριβώς το ίδιο και στις δυο περιπτώσεις.

Επιπλέον, πρώτος ο Grassmann, εισήγαγε την έννοια της γραμμικής εξάρτησης κ hypernumbers, κάτι που τον βοήθησε στο να ορίσει τη διάσταση του χώρου, ως τον μεγαλύτερο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων hypernumbers. Στην έκδοση του 1862 όρισε τη μετρική $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2}$ όπου $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ είναι μια επεκτεταμένη ποσότητα, με αποτέλεσμα να μετατρέψει το χώρο σε Ευκλείδειο.

Αν και η θεωρία του Grassmann βρίσκεται πιο κοντά στη σύγχρονη θεωρία των διανυσματικών χώρων και η μεθοδολογία του είναι το πρώτο βήμα για την μελέτη των αλγεβρικών δομών, δεν εκτιμήθηκε στην εποχή του, όπως προείπαμε στην αρχή της παραγράφου. Αντίθετα μεγάλο μέρος του έργου του κατασκευάστηκε εκ νέου από άλλους.

2.2.3. Άλλα διανυσματικά συστήματα

Εκτός από το Hamilton και το Grassmann τουλάχιστον άλλοι πέντε μαθηματικοί, οι August Ferdinad Möbius, Giusto Bellavitis, Adhémar Barré (ή Comte de Saint-Venant), Augustin Caushy και Reverend Matthew O' Brien, ερευνούσαν για διανυσματικά συστήματα. Τα έργα τους είτε είχαν μικρή επίδραση στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού είτε δεν είχαν καμία άμεση συμβολή. Η παρουσίασή τους, όμως, θα συνεισφέρει στην εξαγωγή χρήσιμων γνωσιολογικών συμπερασμάτων για την γένεση και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

Ας αρχίσουμε, λοιπόν, από το Möbius (1790-1868), ο οποίος κατασκεύασε ένα μαθηματικό σύστημα, το βαρυκεντρικό λογισμό (barycentric calculus), όμοιο σε αρκετά σημεία με το διανυσματικό λογισμό. Με σύστημά του, ήθελε να αντιμετωπίσει τις γεωμετρικές οντότητες, που ήταν σημεία, ευθέως και από πλεονεκτική θέση. Η πρόσθεση ορίστηκε με τέτοιον τρόπο ώστε να λαμβάνεται υπόψη τόσο το μέγεθος όσο και η θέση. Η θεωρία του εκδόθηκε το 1827 στο Leipzing, όπου ήταν και καθηγητής. Μέχρι το τέλος της ζωής του ασχολήθηκε με αυτήν, βελτιώνοντάς την, κυρίως ύστερα από την επαφή του με το Grassmann.

Ο Bellavitis (1803-1880) ήταν Ιταλός μαθηματικός και δημιουργός του λογισμού των ισοδυναμιών (equipollences). Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, δυο ευθείες

καλούνται ισοδύναμες (equipollent) αν είναι ίσες, παράλληλες και έχουν και την ίδια φορά. Οι οντότητες που περιγράφει ο Bellavitis συμπεριφέρονται γεωμετρικά ισοδύναμα με του μιγαδικούς αριθμούς, τους οποίους όμως δεν αναγνώριζε ως αλγεβρικές οντότητες. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως μαζί με τη θεωρία του έδωσε πολλές εφαρμογές της μεθόδου του σε προβλήματα από τα μαθηματικά και τη φυσική, κάτι που έκανε τόσο ο Hamilton όσο και ο Grassmann. Τελικά, το σύστημά του δεν είχε καμία απήχηση, ύστερα και από την αποτυχία του να το επεκτείνει στον τρισδιάστατο χώρο.

Ας περάσουμε στο Saint-Venant (1797-1886) που ήταν Γάλλος μηχανικός γνωστός από την ερευνά του για την ελαστικότητα. Όρισε τη διανυσματική πρόσθεση, αφαίρεση, διαφόριση καθώς και τον πολλαπλασιασμό όμοια με το σημερινό εξωτερικό γινόμενο. Αν και είχε επαφές με τους Caushy και Grassmann, η επιρροή που άσκησε στη μαθηματική κοινότητα, ήταν πολύ μικρή.

Το 1853 ο Caushy (1789-1857) εξέδωσε μια εργασία του με τίτλο: *Sur les clefs algébriques*, η οποία περιείχε μεθόδους για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σε αυτήν εισήγαγε δυο οντότητες τις i και j που ονόμασε αλγεβρικά κλειδιά και για τις οποίες ίσχυε $i \cdot j = j \cdot i = 0$ και $i \cdot j = -j \cdot i$. Όπως παρατηρούμε, τα κλειδιά του Caushy είναι αλγεβρικά ισοδύναμα με τα επεκτεταμένα μεγέθη του Grassmann, όσον αφορά το εξωτερικό γινόμενο. Αυτό ανάγκασε τον δεύτερο να ζητήσει από τη Γαλλική Ακαδημία το 1854 την αναγνώριση της πατρότητας της παραπάνω ανακάλυψης, αν και τελικά η ακαδημία δεν κατέληξε σε κάποια απόφαση.

Τέλος, ο O' Brien (1814-1855) καθηγητής στο King's College, ασχολήθηκε με τη διανυσματική ανάλυση κυρίως τα τελευταία δέκα χρόνια της ζωής του. το σύστημά που πρότεινε έχει πολλά κοινά με το σημερινό διανυσματικό λογισμό, αλλά η μη κατανόηση από τον ίδιο της προσεταιριστικής ιδιότητας του στέρησε τον τίτλο του «πατέρα της διανυσματικής ανάλυσης».

2.3. Από τα quaternions στο διανυσματικό λογισμό

Όπως, ήδη έχουμε τονίσει, ήταν το σύστημα το Hamilton που διαδραμάτισε το σημαντικότερο ρόλο στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού και οδήγησε στη δημιουργία της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης.

Ανάμεσα στους πιο ένθερμους υποστηρικτές των quaternions του Hamilton, ήταν ο Άγγλος Peter Guthrie Tait (1831-1901). Έγραψε πολλά βιβλία και άρθρα, στα οποία έδωσε έμφαση στις εφαρμογές των quaternions στη φυσική. Το έργο του: *Elementary Treatise on Quaternions*, που δημοσιεύτηκε το 1867, έχει πολλές ομοιότητες με τη σύγχρονη διανυσματική ανάλυση.

Ένας ακόμη από τους πρώτους υπερμάχους των quaternions ήταν ο Benjamin Peirce (1809-1880), ο οποίος προσπάθησε περισσότερο από οποιονδήποτε για την προώθηση τους στην Αμερική. Αν και δεν ανέπτυξε περαιτέρω το σύστημα του Hamilton, η σπουδαία συνεισφορά του στις γραμμικές προσεταιριστικές άλγεβρες είναι σίγουρο πως συνδέεται στενά με τα quaternions.

Όμως, το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για τα quaternions προκλήθηκε κυρίως ύστερα από τη δημοσίευση του βιβλίου: *Treatise on Electricity and Magnetism* το 1873, από τον James Clerk Maxwell (1831-1879). Όπως τονίζει στην εισαγωγή του βιβλίου του, ήθελε να αποφύγει τελείως τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων, και να επικεντρώσει την προσοχή κατευθείαν σε ένα σημείο του χώρου αντί στις τρεις συντεταγμένες, και στο μέγεθος και την κατεύθυνση της δύναμης αντί στις τρεις συνιστώσες της. Μαζί με τον Tait, είχαν μελετήσει το σύστημα του Hamilton, ενώ αντίθετα το έργο του Grassmann δεν το είχε δει ποτέ. Αναφέρεται συχνά στα quaternions, αλλά διαχωρίζει το βαθμωτό από το διανυσματικό μέρος και τα χειρίζεται σα διαφορετικές οντότητες. Ο Maxwell έδειξε καθαρά ότι τα διανύσματα ήταν το κατεξοχήν εργαλείο της φυσικής και όχι απλώς μια μέθοδος συντομογραφίας.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούμε και στον William Kingdom Clifford (1845-1879), ο οποίος ήταν από τους λίγους μαθηματικούς που γνώριζαν και το σύστημα του Hamilton και αυτό του Grassmann. Το έργο του μπορεί να θεωρηθεί μεταβατικό από τα quaternions προς τη διανυσματική ανάλυση, αλλά δεν επηρέασε άμεσα την εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού εξαιτίας κυρίως του πρόωρου θανάτου του.

Δυο φυσικοί, στις αρχές της δεκαετίας του 1880, ο Αμερικάνος Josiah Willard Gibbs (1839-1903) και ο Άγγλος Oliver Heaviside (1850-1925), ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και επηρεασμένοι από το Maxwell δημιούργησαν τη διανυσματική ανάλυση όπως τη γνωρίζουμε σήμερα. Διαπίστωσαν πως η πλήρης άλγεβρα των quaternions δεν ήταν απαραίτητη στις εφαρμογές της φυσικής, αλλά αρκούσε το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων. Εξάλλου, στον Gibbs οφείλουμε το σημερινό συμβολισμό $\alpha.\beta$ και $\alpha \times \beta$.

Ας σημειωθεί εδώ, πως ξεχώρισαν το βαθμωτό μέρος των quaternions από το διανυσματικό. Έτσι, γι' αυτούς διάνυσμα v είναι:

$$v = ai + bj + ck$$

όπου i, j, k, είναι τα μοναδιαία διανύσματα πάνω στους άξονες x, y, z, αντίστοιχα και οι πραγματικοί αριθμοί α, b, c είναι οι συνιστώσες του διανύσματος.

Επιπλέον, ο Gibbs μετέτρεψε το σύστημα αξόνων σε ορθοκανονικό σύστημα και πρότεινε για τη γεωμετρική αναπαράσταση του διανύσματος το γνωστό μας «βέλος». Από την άλλη πλευρά, το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του έργου του Heaviside ήταν μίξη των διανυσματικών με καρτεσιανές μεθόδους. Το έργο του τελευταίου, επηρέασε περισσότερο την επιστημονική κοινότητα επειδή συνδύασε τα διανύσματα με τον ηλεκτρισμό.

Το έργο των Gibbs και Heaviside ήταν η αιτία για την πυροδότηση πολύ έντονων διαμαχών μεταξύ των επιστημόνων που υποστήριζαν τα διανύσματα και αυτών που υποστήριζαν τα quaternions. Είναι χαρακτηριστικό ότι από το 1890 έως το 1894 γράφτηκαν 36 άρθρα σε 8 κορυφαία επιστημονικά περιοδικά. Τελικά, μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα η διανυσματική ανάλυση επικράτησε σαν εργαλείο για την ανάπτυξη της γεωμετρίας και της θεωρητικής φυσικής.

Σήμερα, χρησιμοποιούμε κυρίως την ανάλυση των τανυστών, η οποία είναι γενίκευση του διανυσματικού λογισμού, και περιέχει το διάνυσμα σαν ειδική περίπτωση.

2.4. Συμπεράσματα γνωσιολογικής φύσεως

Όπως έχουμε ήδη τονίσει η παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης του διανυσματικού λογισμού είχε ως βασικό στόχο την εξαγωγή χρήσιμων παρατηρήσεων για τη διδακτική των μαθηματικών. Αν και δεν μπόρεσε να μας προμηθεύσει με κάποιο τρόπο εισαγωγής στο μαθηματικό αντικείμενο διάνυσμα κατά ένα φυσικό τρόπο ή στο εντοπισμό κάποιων επιστημολογικών εμποδίων, εντούτοις είναι πλούσια σε γνωσιολογικά στοιχεία για την γένεση και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

2.4.1. Είναι τελικά απαγωγική η δομή των μαθηματικών;

Αν ζητηθεί η κατασκευή μιας λίστας με τα κυριότερα χαρακτηριστικά των μαθηματικών, σίγουρα η αυστηρά απαγωγική τους δομή θα είναι ένα από βασικότερα. Ίσως, μάλιστα, για κάποιους αυτή να είναι και η μεγάλη διαφορά των μαθηματικών από τις φυσικές επιστήμες.

Τότε, όμως, πως θα δικαιολογούνταν οι τρεις αιώνες που χρειάστηκαν για την «νομιμοποίηση» των μιγαδικών αριθμών; Και πως ήταν δυνατόν, να αποδεχτούν με ζητωκραυγές τόσο τη γεωμετρική τους δικαιολόγηση, όσο και την αλγεβρική τους; Δυο διαφορετικές δικαιολογήσεις δεν ήταν πάρα πολλές; Αλλά και στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού συναντήσαμε ένα γεγονός που εγείρει ερωτήματα. Όπως είδαμε, η σύγχρονη διανυσματική ανάλυση προέκυψε όταν οι Gibbs και Heaviside απαρνήθηκαν τμήματα του συστήματος των quaternions του Hamilton, με κριτήρια όμως που επιβλήθηκαν από πρακτικούς λόγους και όχι από απαγωγικές απαιτήσεις.

Τα παραπάνω, σίγουρα, δεν αποδεικνύουν κάτι, αλλά κάνουν και τον πιο δύσπιστο να αναρωτιέται μήπως τελικά έχουμε υπερεκτιμήσει την απαγωγική δομή των μαθηματικών.

2.4.2. Η ανάπτυξη των μαθηματικών υπακούει σε καθαρά ορθολογικά κριτήρια;

Αν ίσχυε η παραπάνω άποψη θα έπρεπε το μοναδικό κριτήριο για την αποδοχή νέων εννοιών να είναι το αν προκύπτουν απαγωγικά από το σώμα της μέχρι τότε αποδεκτής μαθηματικής γνώσης. Αντίθετα όμως, η φήμη του Hamilton έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην αποδοχή του συστήματός του έναντι αυτού του Grassmann, ο οποίος ήταν ένας άγνωστος καθηγητής λυκείου χωρίς δημοσιεύσεις. Είναι χαρακτηριστικό πως ο τελευταίος υπέγραψε το *Ausdehnungslehre* (1843) ως

Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin

ενώ ο Hamilton υπέγραψε το *Lectures on Quaternions* (1853) ως

> SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., M. R. I. A., FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES; OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN; CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN; OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY; THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES; ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN; AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.[5]

Εξάλλου όπως παρατηρεί ο Crowe[6] την ίδια τύχη με το Grassmann είχαν και οι Lobachevsky και Bolyai, των οποίων οι δημοσιεύσεις παρέμειναν στην αφάνεια μέχρι τη δημοσίευση επιστολών του διάσημου Gauss, οι οποίες ώθησαν τη μαθηματική κοινότητα να ενδιαφερθεί για τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες

[5] Crowe σελ. 19
[6] Gillies σελ.18

2.4.3. Αναπτύσσονται αθροιστικά;

Υποστηρίζεται, συχνά, ότι μια από τις διαφορές των μαθηματικών από τις φυσικές επιστήμες είναι πως αυτά αναπτύσσονται αθροιστικά, και δίνεται σαν παράδειγμα η συνύπαρξη της Ευκλείδειας με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Όμως, όπως διαπιστώσαμε, κατά την εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού παρατηρήθηκε μια βαθμιαία μείωση της χρήσης των quaternions, ενώ παράλληλα αυξανόταν ο αριθμός των επιστημόνων που χρησιμοποιούσαν τα διανύσματα. Αυτή η παρακμή τους συστήματος των quaternions οδήγησε τελικά στην εγκατάλειψη τους σχεδόν από όλη τη μαθηματική κοινότητα. Μπορεί επίσημα να μην έχουν απορριφθεί, αλλά η ολοκληρωτική επικράτηση του διανυσματικού λογισμού είναι πια αδιαμφισβήτητη.

2.4.4. Μεταφυσική και Μαθηματικά.

Αν και στη πλειονότητά τους οι μαθηματικοί είναι βέβαιοι πως τα μαθηματικά είναι απαλλαγμένα από τη μεταφυσική και γενικότερα από ιδέες ανεξάρτητες από το περιεχόμενό τους, μια έρευνα σε βάθος ίσως αποκαλύψει μια εντελώς διαφορετική πραγματικότητα.

Ας αρχίσουμε με το Hamilton, ο οποίος επηρεασμένος και από τον Kant οδηγήθηκε στο αξιοσημείωτο συμπέρασμα πως αφού η γεωμετρία είναι η επιστήμη του χώρου, και αφού ο χρόνος και ο χώρος είναι «καθαρές αισθητηριακές μορφές της διαίσθησης», επομένως τα υπόλοιπα μαθηματικά θα πρέπει να ανήκουν στο χρόνο. Είναι αλήθεια ότι η μια διάσταση του χρόνου ταιριάζει με το μονοδιάστατο αριθμητικό σύστημα, κάτι που ίσως παρέσυρε και το Hamilton. Πάντως οι μεταφυσικές αιτιολογήσεις με τις οποίες προμήθευσε το σύστημά του, δε διαχωρίστηκαν από το υπόλοιπο μαθηματικό περιεχόμενο, τουλάχιστον από τον ίδιο.

Από την άλλη πλευρά η αντιμετώπιση της γνώσης, από το Grassmann, ως σύνολο, το οποίο περιλαμβάνει ερωτήματα τόσο για τις βάσεις όσο και τη μορφή της γνώσης ταιριάζει περισσότερο με τις απόψεις του Leibniz. Εξάλλου και οι δυο

είχαν σαν κύριο στόχο την κατασκευή ενός βολικού λογισμού ή μιας τέχνης χειρισμού συμβόλων με καθορισμένους κανόνες και την παραγωγή αληθών προτάσεων για τα πράγματα που αντιπροσωπεύουν τα σύμβολα. Κεντρικό τους ενδιαφέρον ήταν η επινόηση ενός λογισμού που να χρησιμοποιεί τόσο την ανάλυση όσο και τη σύνθεση, και ο οποίος να εφαρμόζεται απευθείας στις γεωμετρικές οντότητες.[7] Ακόμη, ο Grassmann επηρεασμένος από την αποκαλούμενη «συνδυαστική σχολή» των Γερμανών μαθηματικών στις αρχές του 19ου αιώνα, όρισε τα μαθηματικά ως την επιστήμη των μορφών, τονίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε αυτήν την άποψη και εκείνη που θεωρεί τα μαθηματικά ως επιστήμη των μεγεθών. Έτσι για παράδειγμα, οι βασικές έννοιες της επιστήμης της μορφή, ισότητα και συνδυασμός, διαδραμάτισαν κυρίαρχο ρόλο στο έργο του.[8]

Τόσο στη θεωρία του Hamilton όσο και του Grassmann, το φιλοσοφικό κάλυμμα, με το οποίο τις έντυσαν, αποτέλεσε τροχοπέδη για την εξέλιξη και αναγνώριση των μαθηματικών τους εννοιών. Όμως οι ίδιοι θεωρούσαν τις μεταφυσικές τους ιδέες αναπόσπαστα δεμένες με την υπόλοιπη θεωρία τους σε τέτοιο βαθμό που μέχρι το τέλος της ζωής τους πάσχιζαν για την εδραίωσή τους.

2.4.5. Κατά πόσο η αυστηρότητα, η απόδειξη και η βεβαιότητα στα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από το χρόνο;

Τόσο η εξέλιξη των μιγαδικών αριθμών όσο και των υπόλοιπων υπεραριθμών (hypernumber), σημαδεύτηκε από τη σταδιακή αλλαγή των κριτηρίων αυστηρότητας για το αν μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικές οντότητες. Και αυτό το στοιχείο δεν είναι το μοναδικό, όπως υποστηρίζεται από τον Crowe (1992)[9], που μας προμηθεύει η ιστορία των μαθηματικών για το ότι χαρακτηριστικά των μαθηματικών όπως η αυστηρότητα, η απόδειξη και η βεβαιότητα υπόκεινται σε συνεχή αλλαγή.

---

[7] Πληρέστερη και αναλυτικότερη παρουσίαση στο Otte (1989)
[8] Τόσο στο Boyer σελ. 655 όσο και στο Crowe σελ. 54-77 φαίνεται το πόσο σημαντικό ρόλο έπαιξαν οι φιλοσοφικές ιδέες του στην ανάπτυξη του συστήματός του.
[9] Gillies (1992) σελ. 15-19

Εδώ θα ήταν χρήσιμο να παραθέσουμε τα λόγια του Morris Kline (1993, σελ. 89) :

> Μπορούμε να πούμε χωρίς κίνδυνο να πέσουμε έξω, ότι καμία απόδειξη που δόθηκε τουλάχιστον μέχρι τα 1800, σε οποιονδήποτε κλάδο των μαθηματικών, εκτός ενδεχομένως από τη θεωρία αριθμών, δεν θα μπορούσε να κριθεί επαρκής με τα πρότυπα του 1900. Τα πρότυπα του 1900 πάλι δεν είναι αποδεκτά σήμερα.

, που είναι χαρακτηριστικά του γεγονότος πως η αυστηρότητα, με την οποία παρουσιάζονται τα μαθηματικά αντικείμενα στα διάφορα εγχειρίδια ή σχολικά βιβλία, είναι καθυστερημένο απόκτημα στην ιστορική εξέλιξη των αντίστοιχων αντικειμένων. Αυτό δε θα πρέπει να το ξεχνάει ο εκπαιδευτικός. Είναι πολύ σημαντικό να δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στην εξοικείωση με τις έννοιες και τη διαισθητική τους κατανόηση, και όχι στην αυστηρότητα, η οποία εξάλλου θα «επιβληθεί» με το πέρασμα των ετών.

2.4.6. Η ψυχολογία της δημιουργίας

Συχνά συμβαίνει να επινοούμε τις καλύτερες ιδέες μας όταν δεν ασχολούμαστε τυπικά με ένα θέμα, κατά τη διάρκεια ενός περιπάτου, μετά από ένα καλό γεύμα ή και κάποια νύχτα που έχουμε αϋπνία[10]. Τη στιγμή αυτή της γένεσης μιας ιδέας, της δημιουργίας, συμβαίνει ένα μικρό θαύμα «η ψυχή φλέγεται» όπως έλεγε ο Μότσαρτ. Η΄ σύμφωνα με το βιολόγο Nicolle «Μέσα στη λάμψη μιας αστραπής, το μέχρι εκείνη τη στιγμή σκοτεινό πρόβλημα … λούζεται στο φως»[11].

Μια τέτοια στιγμή αιφνίδιας φώτισης χαρακτηρίζει και ο Hamilton την επινόηση των quaternions. Μια μέρα του 1843 , καθώς περπατούσε με τη γυναίκα του κατά μήκος του Royal Canal, «… ένα υπόγειο ρεύμα της σκέψης πήγαινε στο μυαλό μου, το οποίο έδωσε επιτέλους ένα αποτέλεσμα, περί του οποίου δεν είναι υπερβολικό να πω ότι αισθάνθηκα αμέσως τη σημασία. Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα

[10] Hadamard (1991)
[11] ibid σελ. 31

φάνηκε να κλείνει: και ένας σπινθήρας έλαμψε εμπρός,… »[12], όπως το διηγείται ο ίδιος στο γιο του.

2.4.7. Ο μύθος της ευφυίας

Πόσες φορές έχουν ειπωθεί άραγε οι φράσεις : είναι χαζός μαθητής, δεν «παίρνει» τα γράμματα! Αν και το μεγαλύτερο τμήμα, τουλάχιστον, των ερευνητών στο χώρο της διδακτικής, κατακρίνουν αυτές τις απόψεις, η συντριπτική πλειονότητα των εκπαιδευτικών λίγο ως πολύ χρησιμοποιούν «μεταφυσικές» θεωρίες περί ταλέντων για την περιγραφή των φαινομένων. Οι πιο μετριοπαθείς από αυτούς υποστηρίζουν πως ναι μεν όλοι οι μαθητές είναι ικανοί να κατανοήσουν τα μαθηματικά του λυκείου ή και του πανεπιστημίου, αλλά μια πολύ μικρή μειονότητα ανθρώπων έχουν το χάρισμα, ταλέντο να δημιουργήσουν στο χώρο των μαθηματικών. Τελικά, όμως, αυτές οι θεωρήσεις σώζουν τα φαινόμενα;

Όπως διαπιστώσαμε ο Hamilton ήταν ένα παιδί που θα μπορούσε να το χαρακτηρίσει κάποιος χαρισματικό ή ταλαντούχο. Ήδη σε ηλικία δεκατριών ετών γνώριζε σε κάποιο βαθμό δεκατρείς γλώσσες, στα δεκάξι του εντόπισε ένα λάθος στη *Mécanique Céleste* του Laplace, ενώ πριν ακόμα τελειώσει τις σπουδές του διορίστηκε Βασιλικός Αστρονόμος της Ιρλανδίας, διευθυντής του Αστεροσκοπείου Dunsink και καθηγητής Αστρονομίας στο πανεπιστήμιο του Dublin. Από την άλλη πλευρά όμως, ο Grassmann ακολούθησε μια εντελώς διαφορετική διαδρομή. Τόσο στα πρώτα χρόνια των σπουδών του όσο και κατά τη διάρκεια των πανεπιστημιακών του σπουδών, στη φιλοσοφία και θεολογία, δεν έδειξε καμία ιδιαίτερη πνευματική ικανότητα, ούτε πρωτοτυπία σκέψης. Είναι χαρακτηριστικό πως ο πατέρας του, καθηγητής λυκείου στις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά, δήλωνε πως θα ήταν ευχαριστημένος αν ο γιος του γινόταν κηπουρός ή τεχνίτης. Εύλογα γεννάται το ερώτημα πως ο «ατάλαντος» Grassmann κατάφερε να δημιουργήσει ένα σύστημα εξίσου καλό ή και καλύτερο από αυτό που κατασκεύασε μια ιδιοφυία σα το Hamilton; Μήπως το φαινόμενο

[12] …an under-current of thought was going in my mind, which gave at last a result, whereof it is not to much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close: and a spark flashed forth,… (Crowe σελ. 29)

της δημιουργίας είναι πολυπλοκότερο από αυτό που αντιλαμβάνονται οι υποστηριχτές των θεωριών περί «ταλέντων»;

Πιο αποκαλυπτικός είναι όμως ο Papert, ο οποίος χαρακτηρίζει τις θεωρίες για τα ταλέντα ως «μορφωτικές τοξίνες», οι οποίες μολύνουν την εικόνα του μαθητή, που σχηματίζουν οι άνθρωποι για τους εαυτούς τους. Όλα είναι κανονισμένα ώστε να αποδώσουν τα παιδιά τις πρώτες τους αποτυχίες ή δυσάρεστες εμπειρίες στη μάθηση, στις ανικανότητές τους. Σαν αποτέλεσμα τα παιδιά αντιλαμβάνονται την αποτυχία ως παραπομπή τους στην ομάδα των «χαζών ανθρώπων», ή πιο συχνά, στην ομάδα των ανθρώπων που είναι «χαζοί στο χ» (όπου ο άγνωστος χ είναι συχνά τα μαθηματικά). Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, τα παιδιά θα ορίζουν τους εαυτούς τους με τους περιορισμούς τους και αυτός ο ορισμός θα εδραιώνεται και θα ενισχύεται σ' όλη τους τη ζωή.[13]

Ίσως το σημαντικότερο μήνυμα που θα μπορούσε να βγει από τα παραπάνω είναι πως όλοι έχουν δικαίωμα στη δημιουργία, αρκεί να το διεκδικήσουν.

[13] Papert σελ. 22,23,62,64

3. Η θέση του διανύσματος στο ελληνικό σχολείο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε πρώτα-πρώτα να παρουσιάσουμε συνοπτικά τη θέση του διανύσματος στα αναλυτικά προγράμματα από το 1833 μέχρι σήμερα, εκτός των περιόδων της γερμανικής κατοχής και του εμφυλίου πολέμου, και στη συνέχεια να περιγράψουμε τον τρόπο εισαγωγής της έννοιας του διανύσματος που ακολουθείται από τα σύγχρονα ελληνικά σχολικά βιβλία.

3.1. Η θέση του διανύσματος στα αναλυτικά προγράμματα[14]

Από το πρώτο αναλυτικό πρόγραμμα του 1833 μέχρι αυτό του 1966, με το οποίο τα διανύσματα καθιερώνονται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, τα διανύσματα δεν περιλαμβάνονται στην διδακτέα ύλη. Μόνη εξαίρεση αποτελεί το αναλυτικό πρόγραμμα του 1922, το οποίο ανέφερε τα διανύσματα για τις ανάγκες της Τριγωνομετρίας στο Λύκειο.

Από το 1966 μέχρι σήμερα έχουν εκδοθεί τέσσερις διαφορετικές σειρές σχολικών βιβλίων μαθηματικών και σε κάθε μια από τις οποίες επιφυλασσόταν διαφορετική προσέγγιση στην έννοια του διανύσματος.

Καταρχάς, την περίοδο 1967-1969, η Ελλάδα ακολούθησε τη μεταρρυθμιστική κίνηση των «αυστηρών» μοντέρνων Μαθηματικών. Εθνικές αντιδράσεις εναντίον της αντι-Ευκλείδεια κίνησης είχαν ως αποτέλεσμα από το ένα μέρος την εκλογή αυστηρής, αξιωματικής θεμελίωσης και φορμαλισμού του Hilbert, και από το άλλο μέρος την εισαγωγή ενός αξιοσημείωτα νέου υλικού από την διανυσματική ανάλυση και από τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Τα διανύσματα εισάγονται και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου καθώς και στο Λύκειο, για την μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών και των πραγματικών αριθμών. Τα εφαρμοστά και ελεύθερα διανύσματα ορίζονται βάσει της έννοιας των κλάσεων ισοδυναμίας.

Από το 1969 έως το 1977 περάσαμε στη φάση των μετριασμένων μοντέρνων Μαθηματικών, με κύριο χαρακτηριστικό την απλοποίηση της μορφής και την

[14] Γαγάτσης & Δημητριάδου (1995) και Βαϊνάς (2000)

απουσία οποιουδήποτε αξιώματος. Έτσι, έννοιες όπως αυτές των ίσων και ελεύθερων διανυσμάτων δίνεται με ένα απλό τρόπο, ενώ ο όρος «κλάση ισοδυναμίας» δεν αναφέρεται. Παραδείγματα από τη Φυσική (κίνηση αυτοκινήτου) χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή των νέων εννοιών. Ακόμη, το διάνυσμα χρησιμοποιείται για την μελέτη των ρητών αριθμών.

Στο τέλος της δεκαετίας του εβδομήντα (1977-1988) μια νέα μεταρρύθμιση έλαβε χώρα στα Ελληνικά σχολικά Μαθηματικά, η οποία ήταν στο πνεύμα των νέων Μαθηματικών και έγιναν σοβαρές προσπάθειες για να απελευθερωθούν τα σχολικά Μαθηματικά από την παράδοση. Αξίζει να σημειωθεί το ευρύτερο άνοιγμα σε θέματα εκτός Μαθηματικών. Έτσι, για παράδειγμα από την Γεωμετρία, Φυσική, Ιστορία και την καθημερινή ζωή χρησιμοποιούνται για την μελέτη των διανυσμάτων. Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για την μελέτη των ακεραίων και των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο.

Περί το 1987 άρχισε μια καινούρια φάση για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση με μια φανερή απομάκρυνση από τις αρχές των νέων Μαθηματικών. Τα νέα βιβλία έχουν απαλλαχθεί από την υπερβολική χρήση της θεωρίας και τον υπερβολικό συμβολισμό. Δίνεται έμφαση στη σύνδεση των Μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες και την καθημερινή ζωή. Όροι όπως εφαρμοστό διάνυσμα, κλάση ισοδυναμίας και ιδιότητες ισότητας παραλείπονται. Αντί αυτών, εισάγονται οι συντεταγμένες του διανύσματος.

3.2. Διάφορες προσεγγίσεις της έννοιας του διανύσματος

Αλλά τι είναι διάνυσμα; Φαίνεται ότι δεν υπάρχει μοναδική απάντηση σε αυτήν την ερώτηση. Έτσι, συναντάμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις ορισμού της έννοιας του διανύσματος:

- φυσική: τα διανύσματα είναι έννοιες οι οποίες α) έχουν μέτρο και κατεύθυνση και β) προστίθενται σύμφωνα με τον κανόνα των μετατοπίσεων (Δαπόντες & Κασσέτας, 1999),
- γεωμετρική: το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα , δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα (Αδαμόπουλος κ.α., 2003),

- αναλυτική: κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ … και θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος (x,y) (Αδαμόπουλος & αλ., 2003),
- αξιωματική: διανύσματα ονομάζονται οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης, ή τα στοιχεία διανυσματικού χώρου (Μποζαπαλίδης, 1994),
- σχετική με την κίνηση: ως μια παράλληλη μεταφορά όλου του χώρου, ή μια κλάση ισοδύναμων μετατοπίσεων (Marjoram[15]).

Επίσης αναφέρονται[16] ειδικοί τύποι διανυσμάτων όσον αφορά τα χαρακτηριστικά τα οποία είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό τους:

- Το ολισθαίνον διάνυσμα είναι ένα μέγεθος στο οποίο η ευθεία ενέργειας, όπως επίσης το μέτρο και η κατεύθυνση πρέπει να προσδιορίζονται.
- Το εφαρμοστό διάνυσμα είναι ένα ειδικό διάνυσμα που τοποθετείται σε ένα σημείο.
- Το ελεύθερο διάνυσμα είναι μια ποσότητα που προσδιορίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο και την κατεύθυνση.

3.3. Πως εισάγεται η έννοια του διανύσματος στα διδακτικά συγγράμματα;

Το μόνο σχολικό σύγγραμμα του Γυμνασίου όπου τα διανύσματα διδάσκονται σαν αυτοδύναμη ενότητα, είναι τα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης (Αλιμπινίσης κ.α., 1989). Χρησιμοποιούνται παραδείγματα από τη Φυσική για την εισαγωγή των εννοιών που σχετίζονται με το διάνυσμα και για την παρουσίαση ιδιοτήτων και πράξεων με διανύσματα. Ακόμη, γίνεται διάκριση ανάμεσα στα αριθμητικά και διανυσματικά μεγέθη. Αλλά εδώ πρέπει να τονιστεί πως το συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι εκτός ύλης, με αποτέλεσμα να μην διαδραματίζει κάποιο ρόλο στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

[15] στο Γαγάτσης & Δημητριάδου, 1995
[16] στο ίδιο

Ουσιαστικά η πρώτη επαφή των μαθητών με την μαθηματική έννοια «διάνυσμα» γίνεται στην Β΄ Λυκείου. Εισάγεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, και δεν γίνεται καμία αναφορά στα ελεύθερα ή στα εφαρμοστά. Όμως, με την εισαγωγή της έννοιας της ισότητας των διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα παραμένει «αναλλοίωτο» αν μετακινηθεί παράλληλα προς την αρχική του θέση. Έτσι, κάθε διάνυσμα του χώρου είναι ίσο με ένα μοναδικό διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο Ο (σημείο αναφοράς).

Ως γωνία δυο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ ορίζεται η κυρτή γωνία $A\hat{O}B$. Επομένως, αν θ = $A\hat{O}B$, τότε $0 \le \theta \le \pi$. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, η επιλογή αυτή διευκολύνει το διανυσματικό λογισμό και δεν επιβαρύνει τους μαθητές με νέο συμβολισμό.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανυσμάτων με αριθμό, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Όσον αφορά τη τριγωνική ανισότητα $\left\| \vec{\alpha} \right| - \left| \vec{\beta} \right\| \le \left| \vec{\alpha} + \vec{\beta} \right| \le \left| \vec{\alpha} \right| + \left| \vec{\beta} \right|$ τονίζεται ότι η αριστερή ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα, ενώ η δεξιά ισότητα όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δυο διανυσμάτων: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, όταν $\vec{\beta} \ne \vec{0}$, χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος ένα διάνυσμα συμβολίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του και έτσι διευκολύνεται ο λογισμός των διανυσμάτων. Με αφορμή την απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, εισάγεται ο συμβολισμός $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί και για την έκφραση του εμβαδού τριγώνου.

Τέλος, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων και αποδεικνύονται οι βασικές του ιδιότητες. Το εσωτερικό γινόμενο αποτελεί τη σημαντικότερη ενότητα

του κεφαλαίου των διανυσμάτων και αυτό φαίνεται από την ποικιλία των εφαρμογών του. Οι διάφορες εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου, επιτρέπουν τον υπολογισμό του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας δυο διανυσμάτων, καθώς και τη ευκολότερη απόδειξη πολλών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Συνοπτικά, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου που περιέχει το διανυσματικό λογισμό, επιδιώκεται:

- Να εξοικειωθούν οι μαθητές με το λογισμό των διανυσμάτων, ώστε να ανταποκρίνονται επιτυχώς στις απαιτήσεις άλλων κλάδων που χρησιμοποιούν διανύσματα (Κινηματική, Ηλεκτρισμός κτλ.)
- Να προσεγγίσουν οι μαθητές γεωμετρικά θέματα μέσω των διανυσμάτων, μια προσέγγιση που σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει τη μελέτη και την εξαγωγή των συμπερασμάτων.
- Να μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα διανύσματα στη μελέτη θεμάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των μιγαδικών αριθμών.

4. Παρουσίαση επιλεγμένων ερευνών

Η έννοια του διανύσματος είναι πολυδιάστατη και εμπλέκει πολλά επίπεδα κατασκευής της γνώσης. Αυτά σε συνδυασμό με τα πολλά πλαίσια εμφάνισή της – αλγεβρικό, γεωμετρικό και φυσικό, δημιουργούν πολλά προβλήματα τόσο στην διδασκαλία της όσο και στην κατανόησή της.

Στην έρευνα για τα διανύσματα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση υπάρχουν πολύ λίγες αναφορές στην ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης από την πλευρά των μαθηματικών. Κυρίως συναντάμε την έννοια του διανύσματος σε εργασίες σχετικές με τη μηχανική.

4.1. Οι πρώτες έρευνες από τους Aguirre και Erickson

Οι Jose Aguirre και Gaalen Erickson (1984) ερευνούν την κατανόηση του διανύσματος στο πλαίσιο της φυσικής και αντιμετωπίζουν τις ιδέες των μαθητών στις οποίες η μαθηματική έννοια εμπλέκεται με φυσικές έννοιες, όπως η θέση, η μετατόπιση και η ταχύτητα. Προτείνουν *ότι "οι δάσκαλοι θα μπορούσαν [...] να χτίσουν επάνω στις διαισθήσεις των σπουδαστών (που αναπτύσσονται μέσω της καθημερινής εμπειρίας) συσχετίζοντας αυτές τις διαισθήσεις με τα πιο τυπικά πλαίσια προβλήματος στην επιστημονική περιοχή."* (σελ. 440). Όπου με τον όρο διαισθήσεις εννοούν τις αντιλήψεις των μαθητών για τον φυσικό κόσμο πριν την τυπική διδασκαλία.

Εντούτοις τα δίκτυα των διανυσματικών εννοιών που παράγουν μετά από την έρευνα τους δεν παρουσιάζουν οποιαδήποτε ένδειξη της μαθηματικής έννοιας του διανύσματος. Κατά την άποψή τους το διάνυσμα συνδυάζεται με τα διανυσματικά μεγέθη, τα οποία είναι δυσκολότερο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές παρά την εμπειρία που έχουν από αυτά στη ζωή τους, όπως φαίνεται και από τις απόμενες έρευνες.

4.2. Οι προσπάθειες των Graham, Berry και Rowlands

Στην ίδια κατεύθυνση κινήθηκαν και οι Ted Graham, John Berry και Stuart Rowlands, οι οποίοι μελέτησαν την έννοια του διανύσματος μέσα από την κατανόηση των διανυσματικών μεγεθών της μηχανικής.

Αρχικά (Graham & Berry, 1990) θέλησαν να ερευνήσουν το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις έννοιες της Μηχανικής, πριν ακόμα τις διδαχθούν σε σχολικά μάθημα φυσικής ή μαθηματικών, δηλαδή προσπάθησαν να εντοπίσουν τις διαισθητικές τους ιδέες και τυχόν παρανοήσεις τους. Στους στόχους τους συμπεριλαμβανόταν και η βοήθεια στους καθηγητές των μαθηματικών, αφού θα αποκαλυπτόταν το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών τους. Έτσι θα μπορούσαν να καθοδηγήσουν τους μαθητές στην ουσιαστική μάθηση, εκτοπίζοντας τις προηγούμενες λανθασμένες τους ιδέες.

Στη συνέχεια της ερευνάς τους (Graham & Berry, 1991), προσπάθησαν να αναπτύξουν στρατηγικές διδασκαλίας με τις οποίες θα μπορούσαν να διορθώσουν τις παρανοήσεις των μαθητών στις έννοιες της μηχανικής ώστε να μην μεταφερθούν αυτές αργότερα στο μάθημα των μαθηματικών. Ας σημειωθεί εδώ πως στο αναλυτικό πρόγραμμα της Αγγλίας η μηχανική επιτελούσε εισαγωγικό και υποβοηθητικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλήματος, τουλάχιστον το διάστημα που γινόταν η έρευνα.

Ακολούθησαν αρκετά άρθρα (Graham & Berry, 1992, Graham & Berry, 1993, Graham & Berry, 1996, Graham & Berry, 1997, Rowlands, Graham & Berry, 1998) με στόχο τον προσδιορισμό των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές, δίνοντας προοδευτικά όλο και περισσότερη έμφαση στην κατασκευή μοντέλων για το πώς αναπτύσσεται η κατανόηση των εννοιών. Αντιμετώπισαν όμως κάθε διανυσματικό μέγεθος μεμονωμένα, χωρίς να προσπαθούν να εντοπίσουν τα κοινά τους στοιχεία, τα κοινά τους προβλήματα στην κατανόηση και τελικά την κοινή τους μαθηματική δομή. Κατά την άποψή τους το διάνυσμα συνδυάζεται με τα διανυσματικά μεγέθη, τα οποία είναι δυσκολότερο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές παρά την εμπειρία που έχουν από αυτά στη ζωή τους. Οι Rowlands, Graham & Berry (1999) παρατήρησαν ότι «*οι διάφορες προσπάθειες για την ταξινόμηση των εννοιολογικών κατασκευών των σπουδαστών ήταν μη επιτυχημένες[...]. Μια ταξινόμηση τους μπορεί να είναι αδύνατη επειδή οι εκτιμήσεις των παρερμηνειών απαιτούν να λάβουμε υπόψη*

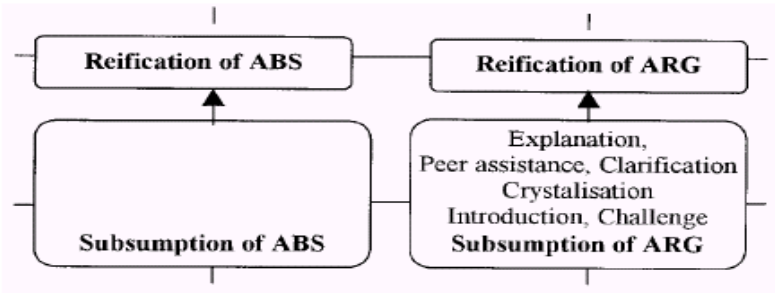
το συγκεκριμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο η παρερμηνεία εμφανίζεται [...] και πώς η παρερμηνεία συνδέεται με τις άλλες μορφές συλλογισμού» (σελ. 247). Η βασικότερη αιτία που μπορεί να παραγάγει πολλές παρανοήσεις είναι ξεχασμένη, και αυτή είναι η μη σαφής μαθηματική γνώση του διανύσματος.

4.3. Η συνεισφορά της Forster

Οι Patricia Forster και Peter Taylor προσπάθησαν να ερευνήσουν την εξέλιξη της κατανόησης της έννοιας του διανύσματος από τους μαθητές. Ενδιαφέρθηκαν για το μαθηματικό περιεχόμενο της έννοιας, αλλά η εισαγωγή στο διάνυσμα έγινε μέσα από έργα που αφορούσαν πραγματικές καταστάσεις και με τη διαμεσολάβηση υπολογιστών τσέπης με γραφικά (graphics calculators).

Για να μπορέσουν να μελετήσουν την ανάπτυξη της γνώσης βασίστηκαν τόσο στις κατηγορίες της μαθηματικής κατανόησης των Gray και Tall (1994), όσο και στις θεωρίες των Hiebert και Carpenter (1992), Sfard (1991). Ειδικότερα ενδιαφέρθηκαν να εντοπίσουν πότε ο μαθητής, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, χρησιμοποιεί τις συμβολικές εκφράσεις διαδικαστικά και πότε ως αντικείμενα.

Δυστυχώς, κατά τη γνώμη μας, οι ερευνητές «χάνονται» στην παρουσίαση παρατηρήσεων, που αφορούν τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, τους υπολογιστές τσέπης με γραφικά, τον αναστοχασμό, την ανάπτυξη της γνώσης, χωρίς να εμβαθύνουν στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος. Παρόλα αυτά, η ερευνά τους παρουσιάζει για μας ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού συνδυάζοντας τη θεωρία των δικτύων των Hiebert και Carpenter και τη θεωρία των σταδίων της Sfard, διαχώρισαν το μέτρο του διανύσματος από την κατεύθυνσή του, προτείνοντας (Forster και Taylor, 2000) το παρακάτω σχήμα:



Όπως βλέπουμε θεώρησαν το μέτρο (ABS) ως έναν κόμβο του δικτύου και τη κατεύθυνση (ARG) ως άλλο, οι οποίοι βέβαια συνδέονται μεταξύ τους. Εδώ ίσως να πρέπει να σημειώσουμε πως αυτός ο διαχωρισμός σχεδόν «επιβλήθηκε» από τη χρήση των υπολογιστών τσέπης με γραφικά, αφού ο υπολογισμός του μέτρου ενός διανύσματος γίνεται με διαφορετικό τρόπο (με τη συνάρτηση ABS) από τον υπολογισμό της γωνίας (με τη συνάρτηση ARG).

4.4. Οι έρευνες των Δημητριάδου, Γαγάτση και Τζανάκη

Οι αντιλήψεις των μαθητών για το διάνυσμα, ως μαθηματικό αντικείμενο και εργαλείο, αποτέλεσαν το πεδίο συστηματικής έρευνας από τους Ελένη Δημητριάδου, Αθανάσιο Γαγάτση και Κωνσταντίνο Τζανάκη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η καταγραφή των προβλημάτων και των παρανοήσεων (Γαγάτσης & Δημητριάδου, 1995, Δημητριάδου & Γαγάτσης, 199?, Δημητριάδου & Τζανάκης, 2003, Demetriadou & Tzanakis, 2003) που προκύπτουν από τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών. Συνοπτικά τους μαθητές δυσκολεύει:

1. Η έννοια της φοράς του διανύσματος. Οι περισσότεροι μαθητές συγχέουν το μαθηματικό της περιεχόμενο με αντιλήψεις και σημασίες από την καθημερινή ζωή και τη Φυσική. Έτσι δεν αναγνωρίζουν τη φορά ως κύριο χαρακτηριστικό του διανύσματος και την αγνοούν στους συλλογισμούς τους.
2. Η έννοια της διεύθυνσης, η οποία όμως φαίνεται να προκαλεί λιγότερα προβλήματα και με ασθενέστερη ένταση. Κυρίως παρουσιάστηκε σύγχυση μεταξύ διεύθυνσης και φοράς, έννοιες που οι μαθητές δεν μπορούσαν να διαχωρίσουν εύκολα, κάτι που αποτέλεσε πηγή πολλών λαθών.
3. Ο χειρισμός του συμβολισμού των διανυσμάτων όταν χρησιμοποιούνται κεφαλαία γράμματα (εφαρμοστά διανύσματα) σε αντίθεση με τα μικρά (ελεύθερα διανύσματα). Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι τα κεφαλαία γράμματα ενσωματώνουν και τη φορά των διανυσμάτων. Εκεί που εμφανίστηκαν τα μεγαλύτερα προβλήματα ήταν στο συμβολισμό των οριζοντίων διανυσμάτων με φορά από δεξιά προς

τα αριστερά, άθροισμα μη συγγραμμικών διανυσμάτων, αφαίρεση και σύγκριση διανυσμάτων.

4. Η χρήση του όρου «αντίθετος». Αυτός ο όρος χρησιμοποιείται στον προφορικό λόγο με διαφορετική σημασία, σε διαφορετικές περιστάσεις, συνδέεται δηλαδή με προηγούμενες καθημερινές εμπειρίες. Επομένως, πρόκειται για μια αυθόρμητη έννοια η οποία δεν έχει αναπτυχθεί σε σημείο που να διαφοροποιηθεί επαρκώς από το παρελθόν και να μετατραπεί σε επιστημονική. Σε τέτοιες περιπτώσεις η λέξη σημαίνει διαφορετικός ή άνισος ακόμη και όταν οι σχέσεις δεν είναι δυαδικές και χρησιμοποιείται για τη διάκριση διανυσμάτων διαφορετικής φοράς ή διεύθυνσης και σε μεμονωμένες περιπτώσεις διαφορετικού μέτρου.
5. Το τρισυπόστατο, συγκεκριμένο μέτρο, φορά και διεύθυνση, της έννοιας. Συνήθως επικρατεί το μέτρο με αποτέλεσμα το διάνυσμα να αντιμετωπίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα.
6. Η πρόσθεση διανυσμάτων. Πολλές φορές οι μαθητές θεωρούν πως το μέτρο του αθροίσματος δυο μη συγγραμμικών διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των δυο επί μέρους μέτρων. Αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με τη χρήση των συμβόλων «+», «-», και «=» τα οποία για λόγους οικονομίας της σκέψης και για να υπενθυμίζεται πως οι διανυσματικές πράξεις γενικεύουν τις αριθμητικές πράξεις είναι τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική και την άλγεβρα, αλλά που τώρα έχουν ένα διαφορετικό, πιο γενικό νόημα. Επίσης, πολλά είναι και τα λάθη που γίνονται κατά την εφαρμογή του κανόνα του τριγώνου και του κανόνα του παραλληλογράμμου. Αρκετοί μαθητές δημιουργούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας δικούς τους κανόνες, παραλλαγές, ή απλουστεύσεις του τυπικού κανόνα, τους οποίους θεωρούν πιο απλούς και κατανοητούς.

Επίσης, σε μια πρωτότυπη έρευνα (Gagatsis & Demetriadou, 2001) οι Α. Γαγάτσης και Ε. Δημητριάδου ασχολήθηκαν με τη σύγκριση των διανυσματικών μεθόδων σε σχέση με τις μεθόδους της κλασσικής γεωμετρίας, όσον αφορά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η ανάλυση των γραπτών των μαθητών κατέδειξε πως οι μαθητές προτιμούν τις μεθόδους της Ευκλείδειας γεωμετρίας και

μάλιστα κάνουν λιγότερα λάθη όταν τις χρησιμοποιούν, σε σχέση με τις διανυσματικές μεθόδους.

Τέλος, ένα σημαντικότατο στοιχείο προέκυψε από τη συγκριτική μελέτη των προβλημάτων διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του διανύσματος στην ελληνική και την κυπριακή δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Γαγάτσης και Δημητριάδου, 1995). Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι Έλληνες μαθητές πρώτα γνωρίζουν το διάνυσμα μέσα από τα μαθήματα της Φυσικής. Αντίθετα, η κατάσταση στην Κύπρο είναι καλύτερη, αφού η έννοια του διανύσματος εισάγεται στα Μαθηματικά (Β΄ Γυμνασίου) ένα χρόνο πριν οι μαθητές ακούσουν για τα διανυσματικά μεγέθη στη Φυσική (Γ΄ Γυμνασίου). Αυτός είναι ίσως ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο οι Κύπριοι μαθητές έκαναν λιγότερα λάθη από τους μαθητές των ελληνικών σχολείων. Μια μη-σαφή, ελλιπή και μονομερή αντίληψη για τη μαθηματική ιδέα του διανύσματος, που μπορεί να δώσει το μάθημα της Φυσικής, δεν είναι διαθέσιμη σε οποιαδήποτε αφαίρεση, επειδή δεν στρέφεται στις συγκεκριμένες ιδιότητες της καθαρής μαθηματικής έννοιας του διανύσματος.

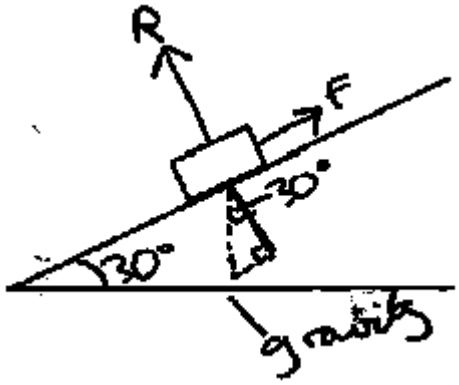
4.5. Η πρόταση των Watson, Spyrou και Tall

Στην ερευνά τους οι Anna Watson, Panayotis Spyrou και David Tall (Watson, 2002, Watson κ.α., 2002) εξετάζουν τη σχέση μεταξύ του αντιληπτικού κόσμου της ενσωμάτωσης και του εννοιολογικού κόσμου του μαθηματικού συμβολισμού, ειδικότερα σχετικά με την έννοια του διανύσματος. Δείχνουν ότι ο ενσωματωμένος κόσμος έχει ποικίλες διαφορετικές έννοιες εξαρτώμενες από το πλαίσιο στο οποίο η έννοια εμφανίζεται και εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο αυτές συνδέονται με το μαθηματικό συμβολισμό. Η εκμάθηση των διανυσμάτων τοποθετείται στη τομή της θεωρίας ενσωματωμένων μαθηματικών σχετικά με τα φυσικά φαινόμενα, και της διαδικασίας-αντικειμένου συμπύκνωσης των δράσεων ως μαθηματικές έννοιες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πορίσματά τους, που αφορούν την πρόσθεση διανυσμάτων. Από την έρευνα φαίνεται πως ο κανόνας του παραλληλογράμμου και ο κανόνας του τριγώνου ναι μεν είναι από μαθηματική άποψη ισοδύναμοι, αλλά *δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι*, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές τους συναντούν για πρώτη φορά. Αναλυτικότερα διαπίστωσαν ότι αντιλήψεις των

μαθητών για τις δυνάμεις που ενεργούν στα σώματά τους, τους αναγκάζουν να αισθανθούν το συνδυασμό δύο δυνάμεων ως ενιαία δύναμη ενδιάμεσα των δυο αρχικών. Το τράβηγμα προς τα εμπρός ενός ατόμου ύστερα από την επίδραση δυο δυνάμεων στα χέρια του, το αναγκάζει να κινηθεί σε μια προς τα μπρος κατεύθυνση που αντιπροσωπεύει το συνδυασμό των δύο δυνάμεων. Αυτό οδηγεί στη φυσική ερμηνεία της διανυσματικής πρόσθεσης με τη χρησιμοποίηση του κανόνα του παραλληλογράμμου. Από την άλλη πλευρά, όταν ο μαθητής συναντήσει τα διανύσματα στο πλαίσιο των διαδοχικών μετατοπίσεων, τότε οδηγείται φυσικότερα στη σύνθεση των διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τον κανόνα τριγώνων.

Αυτές όμως οι λεπτές διαφορές στην κατανόηση του διανυσματικού λογισμού πολλές φορές οδηγούν σε λάθη, όπως κατά τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να αναλύσουν τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο κάποιοι μαθητές έδωσαν την παρακάτω απάντηση:



Οι μαθητές ανέλυσαν τη δύναμη, που οφείλεται στη βαρύτητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τριγώνου. Αυτό όμως οδήγησε στην εντύπωση ότι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης της βαρύτητας (gravity) δεν ενεργεί στο σώμα, αφού είναι μακριά του.

Συνοπτικά, η ενσωμάτωση του διανύσματος ως ταξίδι οδηγεί φυσικότερα στη χρήση του κανόνα του τριγώνου, ενώ η ενσωμάτωση του διανύσματος ως δύναμη οδηγεί φυσικότερα στον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αυτό μπορεί να οδηγήσει πολλούς μαθητές, που βρίσκονται στα πρώτα στάδια μάθησης, σε σημαντικές παρερμηνείες, ειδικά στη Μηχανική. Επομένως η ενσωμάτωση έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες, που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή.

5. Ο ρόλος της γωνίας στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος

5.1. Εισαγωγή

Η έννοια του διανύσματος είναι πολυδιάστατη και εμπλέκει πολλά επίπεδα κατασκευής της γνώσης. Αυτά σε συνδυασμό με τα πολλά πλαίσια εμφάνισή της – αλγεβρικό, γεωμετρικό και φυσικό, δημιουργούν πολλά προβλήματα τόσο στην διδασκαλία της, όσο και στην κατανόησή της.

Στην έρευνα για τα διανύσματα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση υπάρχουν πολύ λίγες αναφορές στην ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης από την πλευρά των μαθηματικών. Κυρίως συναντάμε την έννοια του διανύσματος σε εργασίες στο πεδίο των φυσικών επιστημών, π.χ. σχετικές με τη μηχανική (Aguirre & Erickson,1984, Graham & Berry, 1990, 1991, 1992, 1993, 1996, 1997, Rowlands, Graham & Berry, 1998), χωρίς όμως να ερευνώνται αποκλειστικά τα διανυσματικά. Αντιμετώπισαν όμως κάθε διανυσματικό μέγεθος μεμονωμένα και δεν προσπάθησαν να εντοπίσουν τα κοινά τους στοιχεία, τα κοινά τους προβλήματα στην κατανόηση και τελικά την κοινή τους μαθηματική δομή.

Τα τελευταία χρόνια, όμως, έγιναν ενδιαφέρουσες προσπάθειες για μια συστηματική έρευνα της έννοιας του διανύσματος στην μαθηματική εκπαίδευση (Forster,2000, Forster και Taylor 2000, Γαγάτσης & Δημητριάδου, 1995, 2001, Δημητριάδου & Τζανάκης, 2003, Watson, 2002, Watson, Spyrou &Tall., 2002). Πιο συγκεκριμένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο διαχωρισμός, κατά την εκτέλεση της έρευνας, του μέτρου του διανύσματος από την κατεύθυνσή του, που έγινε από την Forster, αν και τα αποτελέσματά της δεν μας έδωσαν κάποιο σημαντικό στοιχείο. Πιο ολοκληρωμένη και συστηματική ήταν η έρευνα των Α. Γαγάτση, Ε. Δημητριάδου και Κ. Τζανάκη, η οποία είναι πλούσια σε διαπιστώσεις σχετικά με τη διδασκαλία και την μάθηση του διανυσματικού λογισμού. Για παράδειγμα παρουσιάζονται στοιχεία, που συνηγορούν, υπέρ της άποψης πως μια μη-σαφή, ελλιπή και μονομερή αντίληψη για τη μαθηματική ιδέα του διανύσματος, που μπορεί να δώσει το μάθημα της Φυσικής, δεν είναι διαθέσιμη σε οποιαδήποτε αφαίρεση, επειδή δεν στρέφεται στις συγκεκριμένες ιδιότητες της καθαρής μαθηματικής έννοιας του διανύσματος.

Τέλος, στην ερευνά τους οι A. Watson, P. Spyrou και D. Tall εξετάζουν τη σχέση μεταξύ του αντιληπτικού κόσμου της ενσωμάτωσης και του εννοιολογικού κόσμου του μαθηματικού συμβολισμού, ειδικότερα σχετικά με την έννοια του διανύσματος. Φαίνεται ότι η ενσωμάτωση του διανύσματος ως ταξίδι οδηγεί φυσικότερα στη χρήση του κανόνα του τριγώνου, ενώ η ενσωμάτωση του διανύσματος ως δύναμη οδηγεί φυσικότερα στον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αυτό μπορεί να οδηγήσει πολλούς μαθητές, που βρίσκονται στα πρώτα στάδια μάθησης, σε σημαντικές παρερμηνείες, ειδικά στη Μηχανική.

Αυτή η αναγωγή των προβλημάτων σε εμπειρίες και δράσεις από την καθημερινή ζωή, την οποία κάνει η τελευταία έρευνα, αποτέλεσε την αφορμή για την δικιά μας ερευνητική προσπάθεια. Η μέχρι τώρα έρευνα στη διδακτική των επιστημών έχει δείξει πως οι μαθητές έχουν μια δέσμη ιδεών σχετικά με την επιστημονική γνώση ήδη πριν από την επίσημη διδασκαλία στο σχολείο, πολλές από τις οποίες είναι λανθασμένες. Σε αυτό το πλαίσιο έγιναν πολλές έρευνες με στόχο την εύρεση, καταγραφή και κατηγοριοποίηση αυτών των παρανοήσεων και εσφαλμένων αντιλήψεων, ώστε να διορθωθούν ύστερα από την κατάλληλη διδασκαλία. Οι ερευνητές έδωσαν κάποιες αιτίες για τα προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αλλά η σταθερότητα των παρανοήσεων ακόμη και μετά τη διδασκαλία, είναι δηλωτικό στοιχείο του γεγονότος πως ακόμα δεν έχουμε φτάσει στην καρδιά του προβλήματος. Ίσως, τελικά, αυτό που λείπει να είναι η σε βάθος ανάλυση των γνωστικών λίθων που είναι απαραίτητοι για την κατασκευή της μαθηματικής έννοιας του διανύσματος, καθώς και του τρόπου που συνδυάζονται αυτοί οι λίθοι. Πιστεύουμε στην αποτελεσματικότητα του εγχειρήματός μας, επειδή η σκέψη και η μάθηση είναι ένθετες σε βιολογικά και εμπειρικά πλαίσια, πλαίσια που έχουν διαμορφώσει, μ' έναν μη αυθαίρετο τρόπο, τους χαρακτηριστικούς μας τρόπους κατανόησης του κόσμου. Αυτοί οι χαρακτηριστικοί τρόποι κατανόησης, συζήτησης για τον κόσμο, και δράσης μέσα σ' αυτόν είναι κοινοί στους ανθρώπους δυνάμει του ότι είναι αλληλεπιδρώντα μέλη του ίδιου είδους, που συνυπάρχουν μέσα σ' ένα δεδομένο φυσικό μέσο.

5.2. Η έρευνά μας

5.2.1. Ερευνητικές υποθέσεις

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο το διάνυσμα εισάγεται, στο σχολικό βιβλίο, ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το ευθύγραμμο τμήμα ως αρχική ιδέα του μεγέθους και η σύνδεσή του με τους αριθμούς και το χειρισμός των αριθμών υπάρχει στα στοιχεία του Ευκλείδη, όπου ο αριθμός αντιπροσωπεύεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα και όλες οι πράξεις στους αριθμούς αντιπροσωπεύονται από τις πράξεις στα ευθύγραμμα τμήματα.

Σε αυτό το σημείο, όμως, μπορούμε να κάνουμε την παρατήρηση πως η ιδέα του ταξιδιού προηγείται αυτής του τμήματος[17]. Το ταξίδι έχει την έναρξη και το τέλος του και εν πάση περιπτώσει όταν επισημαίνω ένα τμήμα, πρέπει να αρχίσω από ένα σημείο. Υπάρχουν πολλές πιθανές διαδικασίες για να επισημάνουν ένα ταξίδι από το Α στο Β. Μπορούμε να πάμε από το Α στο Β, αλλά μπορούμε να κάνουμε το ταξίδι ΑΒ μέσω ενός άλλου σημείου Σ, δηλαδή μπορούμε να κάνουμε πρώτα το ταξίδι ΑΣ και μετά το ΣΒ. Αυτές οι δύο διαφορετικές διαδικασίες είναι ισοδύναμες ως προς το αποτέλεσμά τους. Συνοψίζονται σε μια διαδικασία που παράγει το ταξίδι που αρχίζει στο Α και που τελειώνει στο Β, το οποίο ας συμβολίσουμε ΑΒ. Εναλλακτικά μπορώ να επισημάνω ένα ταξίδι που αρχίζει από ένα τυχαίο σημείο και να του δώσω το όνομα «Α» και να τελειώνει σε ένα σημείο το οποίο ονομάζω «Β». Το σύνολο τέτοιων ισοδύναμων διαδικασιών αποτελεί τη διαδικασία που «συμπυκνώνει» το συγκεκριμένο αντικείμενο – ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν έχει στον εγκέφαλό μου μια απομονωμένη θέση ως πλατωνικό άκαμπτο αντικείμενο, αλλά αντιπροσωπεύει μια οντότητα, που έχω κατασκευάσει ως αποτέλεσμα της δράσης μου στον κόσμο.

Στο μυαλό μου μπορώ να ενεργήσω με πολλές διαδικασίες δοκιμάζοντας τους διαφορετικούς συνδυασμούς για να εκτελέσω ταξίδια του τύπου ΑΒ. Μπορώ να επεκτείνω το ταξίδι ΑΒ με ΒΓ. Μπορώ να κατασκευάσω τη γωνία ΑΒΓ να είναι μεταξύ 0° και 360° μοίρες, όπως έχω αποφασίσει για τους κανόνες της λογιστικής

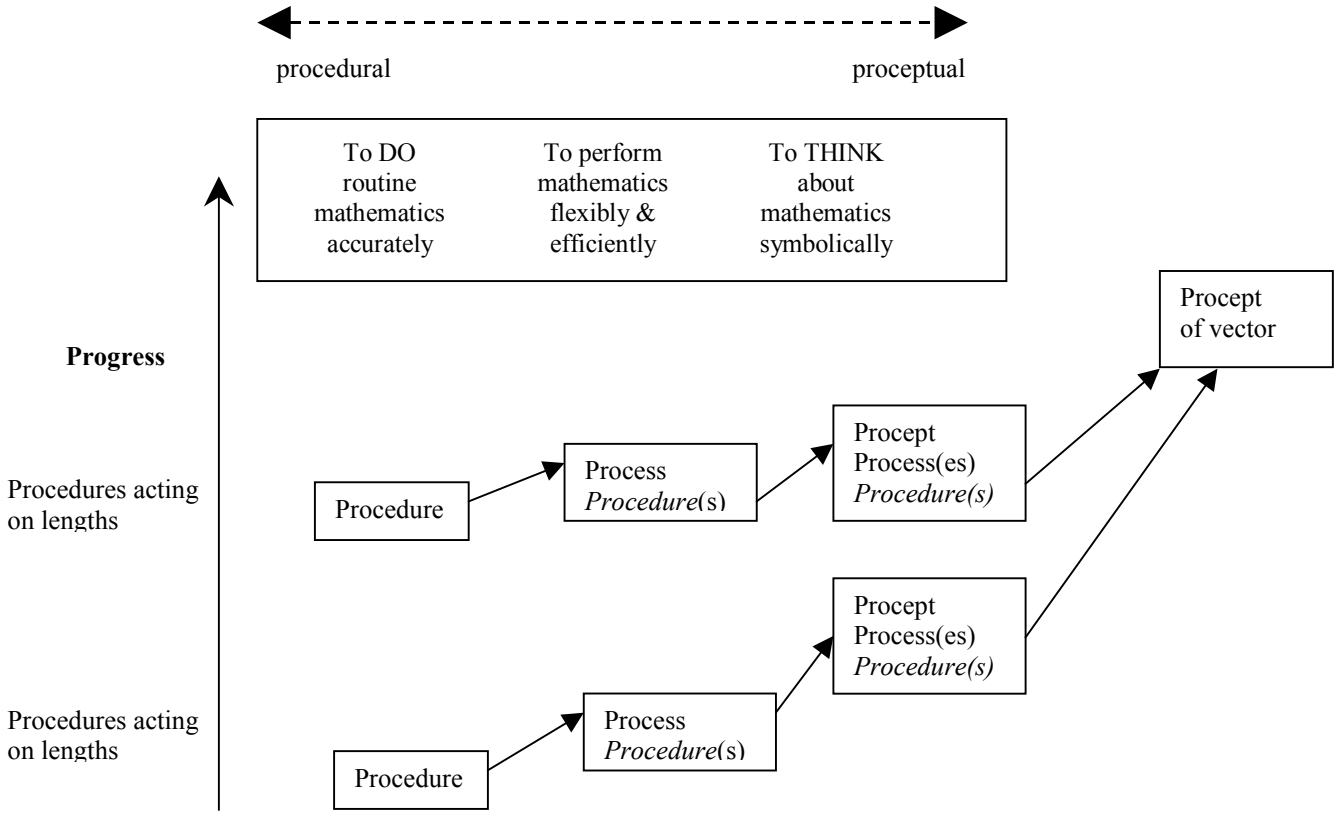
[17] Ο Piaget (1966, σελ. 157) περιγράφει την κατανόηση της απόστασης χρησιμοποιώντας την ιδέα του ταξιδιού του παιδιού από το Α στο Β ως ΑΒ.

των γωνιών. Μπορώ να συνεχίσω από τις 360° σε 400° ή 3x360° κ.λ.π. Ακόμη μπορώ να παρατηρήσω την ισοδυναμία μεταξύ των γωνιών 30° και 360°+ 30°.

Όλες αυτές οι πιθανές διαδικασίες δίνονται με την κατανόηση της έννοιας του διανύσματος και είναι κρυμμένες κάτω από το σύμβολο AB με ένα βέλος. Καταλαβαίνουμε το διάνυσμα σαν μια έννοια που προέρχεται από τη δράση και η οποία έχει ενσωματώσει τις πιθανές ενέργειες που μπορούμε να κάνουμε στα ευθύγραμμα τμήματα και στις γωνίες.

Συνυπολογίζοντας τα παραπάνω μαζί με το παράδειγμα των Gray και Tall, μπορούμε να υποθέσουμε πως κατά την κατανόηση του διανύσματος και σε ένα πρώτο επίπεδο έχουμε την procept ενός ταξιδιού, που συμπυκνώνει όλες τις πιθανές ενέργειες κατά τη διαδρομή του ταξιδιού, με τις οποίες καταλαβαίνω την έννοια ενός ταξιδιού με ένα σταθερό μήκος, κατεύθυνση και αφετηρία. Σε ένα δεύτερο επίπεδο η έννοια του ταξιδιού αποτελεί ένα αντικείμενο κάτω από την πιθανή αφαίρεση (reification) μου με την έννοια της Sfard (1991). Τώρα μπορούμε να δούμε ένα σύνολο διανυσμάτων, στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε την πράξη της πρόσθεσης με πολλές διαφορετικές διαδικασίες και μπορούμε κατασκευάσουμε την προσθετική ομάδα διανυσμάτων. Η πρόσθεση των διανυσμάτων χρειάζεται το νόμο του παραλληλογράμμου, πράξεις με τις γωνίες και όλες τις έννοιες που χρησιμοποιούμε στην τριγωνομετρία. Οι τριγωνομετρικές έννοιες και οι πράξεις με αυτές είναι μια άλλη procept που πρέπει να συμπυκνωθεί στο άθροισμα των διανυσμάτων. Έτσι τροποποιώντας το διάγραμμα των Tall κ.α. (2001) παίρνουμε το διάγραμμα[18]:

[18] Πρόταση του κ. Π. Σπύρου



Μέσα σε αυτό το πλαίσιο υποθέτουμε πως παρανοήσεις όπως οι:

- Το άθροισμα δυο διανυσμάτων είναι πάντα μεγαλύτερο από αυτά τα διανύσματα.
- Το μέτρο του αθροίσματος δυο μη συγγραμμικών διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των δυο επί μέρους μέτρων.
- Η γωνία δυο αντίρροπων διανυσμάτων είναι μηδέν.

καθώς και οι παρερμηνείες σχετικά με τη φορά, τη διεύθυνση, τα αντίθετα διανύσματα κ.τ.λ., οφείλονται και στη μη σαφή και ελλιπή κατανόηση της έννοιας της γωνίας, έννοια που προκαλεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές, όπως φαίνεται από σχετικές έρευνες (Fischbein, 1999, Mitchelmore & White, 2000, Τζανάκης,199).

Συνοψίζοντας, η έννοια της γωνία αποτελεί τον ένα από τους δυο βασικούς γνωστικούς λίθους με τους οποίους κατασκευάζεται η έννοια του διανύσματος. Παίρνοντας αυτό υπόψη, προσπαθήσαμε με την παρούσα εργασία να διερευνήσουμε και να αναδείξουμε τις πιθανές συνδέσεις της έννοιας της γωνία με την έννοια του διανύσματος.

5.2.2. Μεθοδολογία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2004. Συμμετείχαν 100 μαθητές της Β΄ τάξης 7 Λυκείων της Αθήνας και της επαρχίας. Μοιράστηκε στα παιδιά ένα ερωτηματολόγιο (παράρτημα 1), το οποίο έπρεπε να απαντήσουν κατά τη διάρκεια μισής ώρας.

5.2.2.1. Παρουσίαση του ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο μας αποτελείται από τριών ειδών έργα. Πιο συγκεκριμένα:

- Το πρώτο έργο έχει σα στόχο να ελέγξει το αν οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τα διάφορα είδη γωνιών, αν τις αναγνωρίζουν και κατά πόσο τις επιβάλλουν στις εικόνες, που τους παρουσιάζουμε. Ακόμη, θα διαπιστώσουμε και θα εντοπίσουμε τυχόν συνδέσεις μεταξύ γωνιών και των υπόλοιπων έργων που σχετίζονται με τα διανύσματα.
- Το τρίτο έργο είναι το μόνο που δεν αφορά άμεσα τη γωνία. Έτσι θα χρησιμεύσει για να βεβαιωθούμε για το αν τα συμπεράσματα που θα βγάλουμε από τα υπόλοιπα έργα οφείλονται όντως στην εισαγωγή της γωνίας ή είναι αποτέλεσμα γενικότερης άγνοιας των διανυσμάτων και του λογισμού τους.
- Στα υπόλοιπα έργα η γωνία δυο διανυσμάτων διαδραματίζει κεντρικό ρόλο, και συνδέεται κυρίως με το άθροισμά τους. Με αυτά θέλουμε να διερευνήσουμε πιθανές παρανοήσεις που προέρχονται από αυτή τη σύνδεση.

5.2.2.2. Οι μεταβλητές της έρευνας

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις μεταβλητές που ορίστηκαν για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνάς μας.

Ria	Αναγνώριση οξείας (acute) γωνίας στην i εικόνα
Rir	Αναγνώριση ορθής (right) γωνίας στην i εικόνα
Rio	Αναγνώριση αμβλείας (obtuse) γωνίας στην i εικόνα
Ris	Αναγνώριση ευθείας (straight) γωνίας στην i εικόνα
V2	2° έργο
V3a	3° έργο, α υποερώτημα
V3b	3° έργο, β υποερώτημα
V3c	3° έργο, γ υποερώτημα
V4	4° έργο
V5	5° έργο
V6	6° έργο
V6p	Προσπάθεια αντιμετώπισης του $6^{ου}$ έργου με τον κανόνα του παραλληλογράμμου
V6t	Προσπάθεια αντιμετώπισης του $6^{ου}$ έργου με τον κανόνα του τριγώνου
V7	7° έργο

5.2.2.3. Κριτήρια βαθμολόγησης

Οι μεταβλητές που αφορούν την αναγνώριση γωνίας παίρνουν την τιμή 1 αν αναγνωρίστηκε η γωνία στην αντίστοιχη εικόνα ή 0 αν αυτό δεν συνέβη. Οι μεταβλητές που αφορούν τα υπόλοιπα έργα, εκτός από τη V5, παίρνουν την τιμή 1 αν απαντήθηκαν σωστά τα αντίστοιχα έργα και 0 αν απαντήθηκαν λανθασμένα ή δεν δόθηκε απάντηση. Ειδικά η V5 πήρε την τιμή 1 αν στην δικαιολόγηση αναφέρθηκε η ύπαρξη της αμβλείας, 0,66 αν δόθηκε άλλη σωστή αιτιολόγηση, 0,33 αν η απάντηση ήταν σωστή αλλά δεν υπήρχε δικαιολόγηση και 0 αν απαντήθηκε λανθασμένα ή δεν δόθηκε απάντηση. Τέλος, οι μεταβλητές V6p και V6t βαθμολογήθηκαν με 1 αν έγινε προσπάθεια απάντησης με χρήση του αντίστοιχου κανόνα και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

5.2.2.4. Στατιστικές τεχνικές

Πέρα από την περιγραφική και ποιοτική επεξεργασία των δεδομένων μας, εφαρμόστηκε και το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του Gras. Με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος CHIC, η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων κατέληξε σε δύο διαγράμματα:

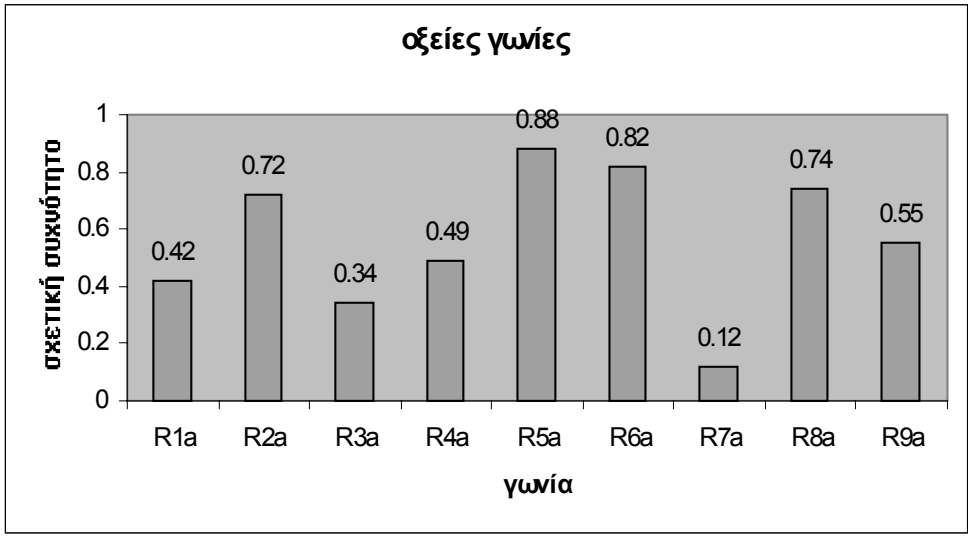
1. Διάγραμμα Ομοιότητας (Similarity Tree), στο οποίο οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που παρουσιάζουν.
2. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Implicative Tree), στο οποίο φαίνονται οι συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές.

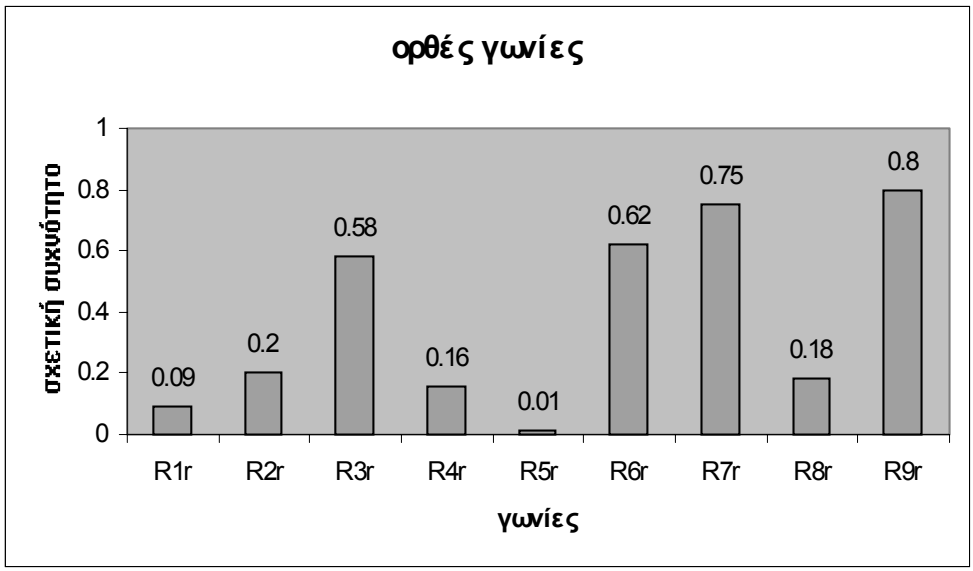
5.3. Αποτελέσματα της έρευνας

5.3.1. Περιγραφική και ποιοτική ανάλυση

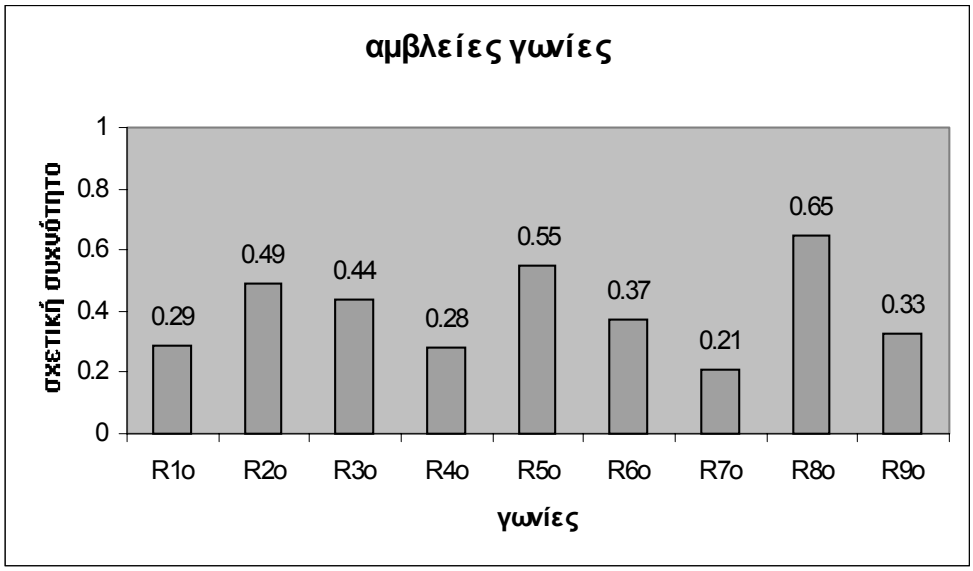
Στα πλαίσια της περιγραφικής ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ομάδα των μαθητών, που συμμετείχαν στην έρευνα. Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται τα ποσοστά αναγνώρισης των οξειών, ορθών, αμβλειών και ευθειών γωνιών αντίστοιχα, για κάθε μια από τις εικόνες που δόθηκαν στους μαθητές.

Διάγραμμα 1

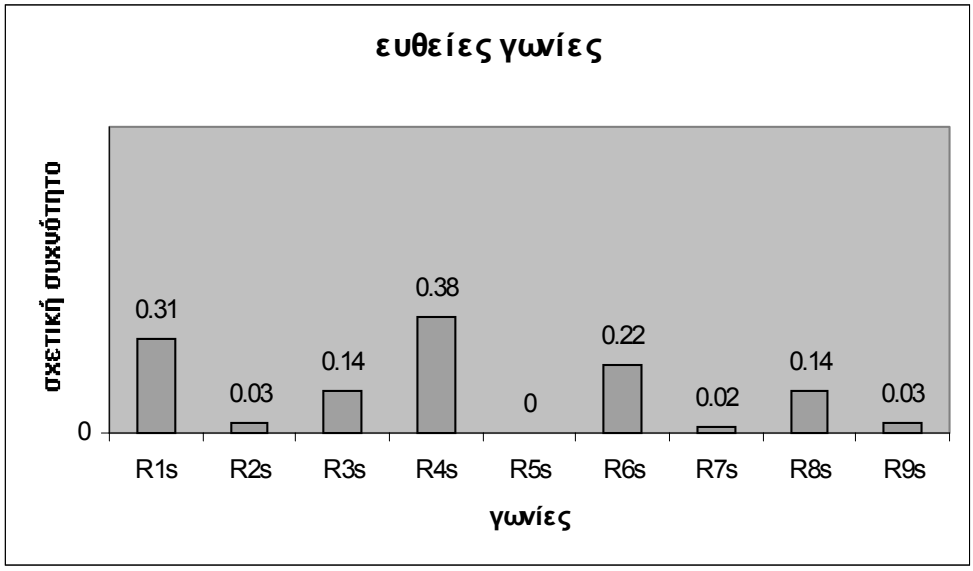




Διάγραμμα 2



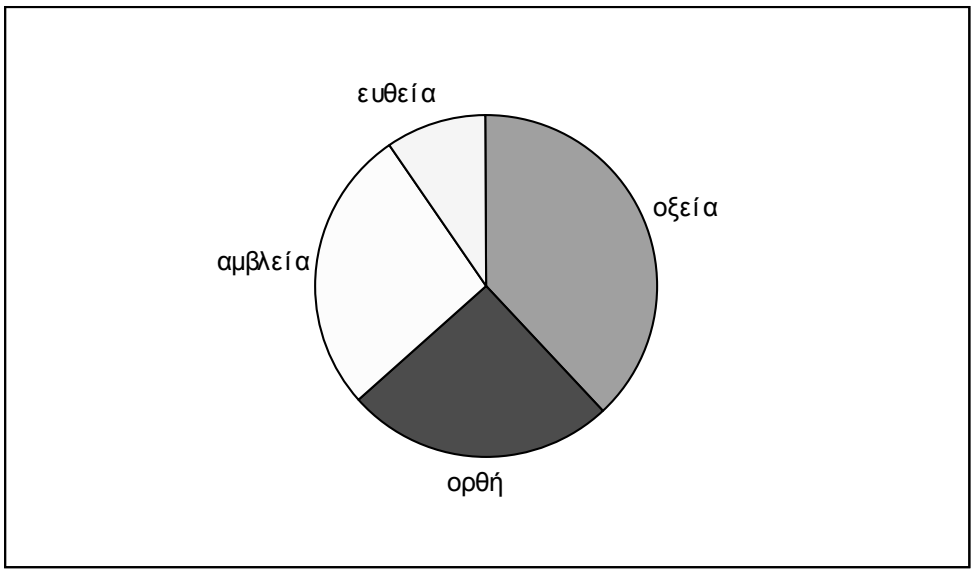
Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 4

Φαίνεται ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν, όπως φαίνεται και από το κυκλικό διάγραμμα, πιο εύκολα τις οξείες, έπειτα τις ορθές και τις αμβλείες, και τέλος τις ευθείες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι δεν υπήρξε παιδί το οποίο να αναγνωρίσει τη μηδενική ή την πλήρη γωνία, παρόλο την μεγάλη ηλικία τους (17 χρονών) και τη συνακόλουθη μαθηματική τους ωριμότητα.

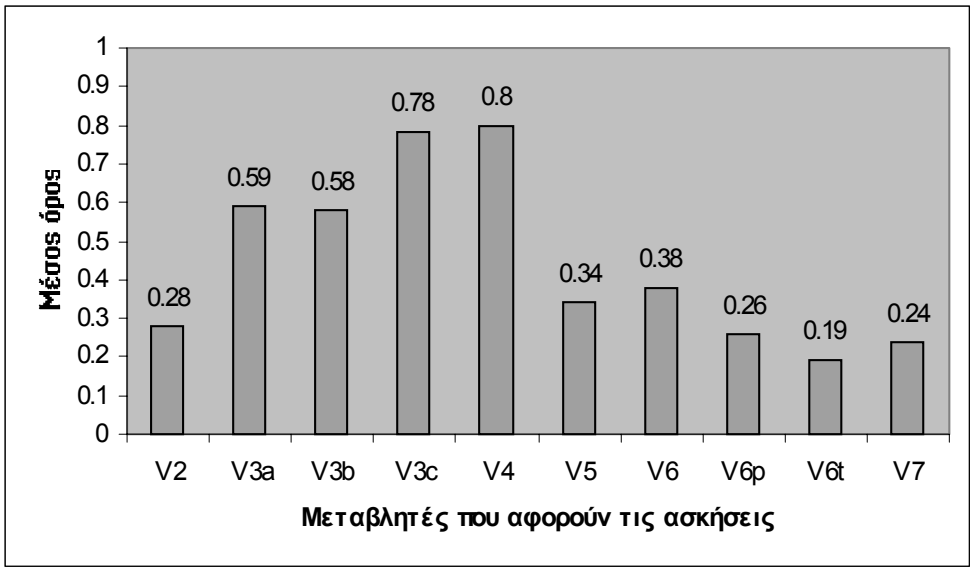
Αυτό θα μπορούσε να εξηγηθεί από το ότι ιδιαίτερα η οξεία γωνία αποτελεί πρωτοτυπικό είδος γωνίας (prototype). Εξάλλου, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς πως τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών κυριαρχούνται από οξείες με αμέσως επόμενα είδη γωνιών τις ορθές και τις αμβλείες. Το τελευταίο πιθανότητα να έχει επιπτώσεις και στη γνωστική ανάπτυξη της έννοιας της γωνίας από τα παιδιά.



Κυκλικό διάγραμμα για την αναγνώριση των γωνιών στο σύνολο των εικόνων

Ας περάσουμε τώρα στο παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο φαίνεται ο μέσος όρος κάθε μεταβλητής, που αφορά τα υπόλοιπα έργα

Διάγραμμα 5

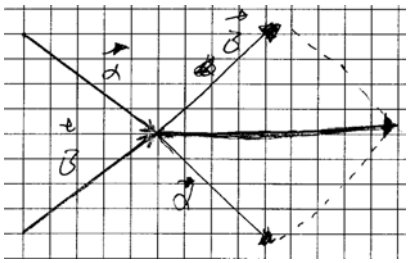


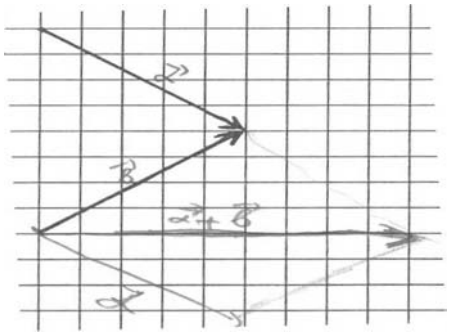
Όπως παρατηρούμε η πιο εύκολη άσκηση είναι η $4^{η}$, κάτι που μπορεί να οφείλεται στο ότι η σωστή απάντηση προϋποθέτει γνώση της βασικής θεωρίας και δεν απαιτεί κάποιο πολύπλοκο συλλογισμό.

Ακολουθεί το γ υποερώτημα της $3^{ης}$ *άσκησης* με 78% και τα α, β με 59% και 58% αντίστοιχα. Είναι εδώ αναγκαίο να εξηγηθεί το γιατί τα δυο πρώτα υποερωτήματα παρουσίασαν τόσο μικρότερα ποσοστά επιτυχίας από το τρίτο. Ιδιαίτερα το α, δηλ. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, φαίνεται να είναι ακριβώς το ίδιο με το γ, δηλ. $-\overrightarrow{\text{ΟΔ}} = \overrightarrow{\text{ΟΓ}}$. Η ειδοποιός διαφορά είναι πως η ύπαρξη του συμβόλου "–" στην εκφώνηση του 3γ ωθεί τον μαθητή να μετατρέψει το $-\overrightarrow{\text{ΟΔ}}$ σε $\overrightarrow{\Delta\text{Ο}}$ και έπειτα να το αντιστοιχίσει με το $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$. Αντίθετα στα 3α και 3β, για να απαντηθούν σωστά, πρέπει ο μαθητής να διερευνήσει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς, κάτι που απαιτεί επιπλέον γνωστική προσπάθεια. Συμπερασματικά, ναι μεν τα δυο υποερωτήματα είναι μαθηματικά ισοδύναμα, αλλά δεν είναι γνωστικά.

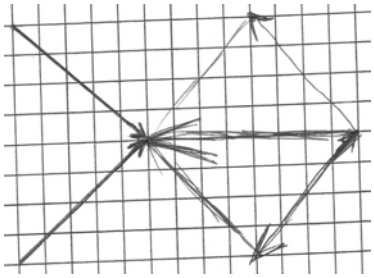
Η *άσκηση 6* είναι η επόμενη με 38% ποσοστό επιτυχίας. Κάποιοι μαθητές θεώρησαν πως τα διανύσματα είναι αντίθετα, αλλά τη μεγαλύτερη δυσκολία αντιμετώπισαν στον προσδιορισμό της γωνίας των δυο διανυσμάτων. Γι' αυτό αν και δεν συμφώνησαν πως το άθροισμα των διανυσμάτων είναι $\vec{0}$, εντούτοις έκαναν πολλά λάθη στην προσπάθεια σχεδιασμού του αθροίσματος.

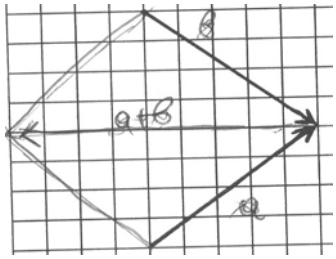
Αυτοί που επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν τον κανόνα του παραλληλογράμμου έδωσαν απαντήσεις όπως οι :

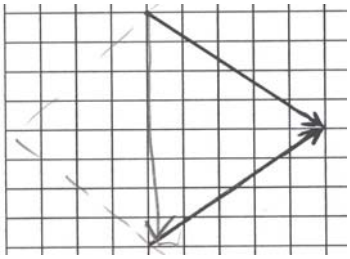




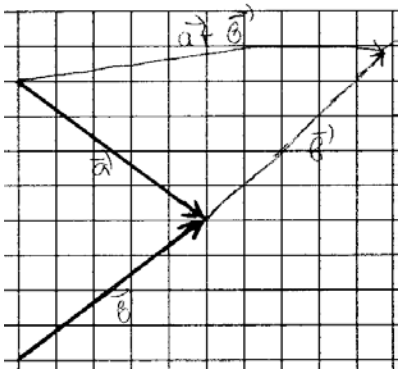
και τις λανθασμένες

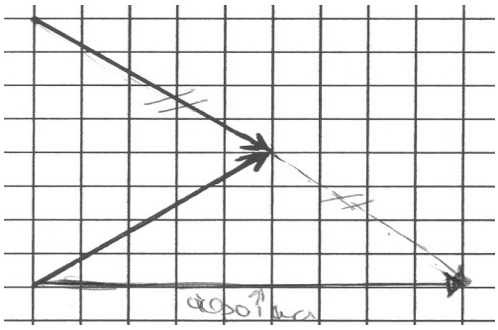






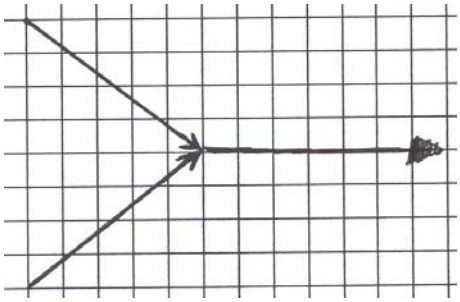
Από την άλλη πλευρά όσοι θέλησαν να υπολογίσουν το άθροισμα με τον κανόνα του τριγώνου έδωσαν απαντήσεις όπως :





Πολλοί από τους μαθητές που προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν αυτόν τον κανόνα για τον υπολογισμό του αθροίσματος απέτυχαν, γιατί δεν μπορούσαν να καταλάβουν τη μαθηματικό περιεχόμενο του έργου. Εξέφραζαν τη θέλησή τους να τα μετατρέψουν σε διαδοχικά, αλλά δεν κατάφερναν να την υλοποιήσουν. Ουσιαστικά, αποτύγχαναν να εφαρμόσουν μια διαδικασία που είχαν μάθει, κάτι που μπορεί να οφείλεται στη πρωτοτυπία του έργου, το οποίο απαιτούσε κάτι παραπάνω από την απλή εφαρμογή ενός αλγόριθμου. Ήταν απαραίτητη η κατανόηση της μαθηματικής δομής του έργου.

Τέλος, δυο μαθητές, που μοιάζει να χρησιμοποίησαν την διαίσθησή τους, έδωσαν την απάντηση :



Ίσως αυτοί οι μαθητές να αντιλήφθηκαν τα δυο διανύσματα σα δυνάμεις και να σχεδίασαν το διάνυσμα της δύναμης που επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με τα δυο αρχικά. Πάντως επειδή, δεν έδειξαν ότι γνωρίζουν το μαθηματικό περιεχόμενο, εκλάβαμε την απάντησή τους ως λανθασμένη.

Το ποσοστό 34% που αντιστοιχεί στην *5η άσκηση* δεν αντιπροσωπεύει τις σωστές απαντήσεις, οι οποίες έφτασαν το 49%. Η πλειονότητα των μαθητών που απάντησαν σωστά δεν δικαιολόγησαν την απάντησή τους ή έδωσαν αιτιολογήσεις όπως :

«*Σωστό. Έφερε παραλλήλους για να προσθέσει*»,

«*Δεν έχει κάνει λάθος. Όταν προσθέτουμε διανύσματα, δεν προσθέτουμε τα μέτρα*»,

«*Είναι σωστό από τον κανόνα του παραλληλογράμμου*».

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσπάθεια ενός παιδιού να δικαιολογήσει αυτό που έβλεπε: «*Έχει κάνει λάθος, έχει μακρύνει τα διανύσματα* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *και έχει μικρύνει το διάνυσμα* $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$*, που έπρεπε να είναι πιο μακρύ από τα άλλα δυο*». Αυτός ο μαθητής δείχνει να μην εμπιστεύεται τις αισθήσεις του. Μη μπορώντας, με μαθηματικό τρόπο να δικαιολογήσει το αποτέλεσμα, προσπάθησε να βρει κάποιο τρόπο ώστε να αποφύγει την επερχόμενη γνωστική σύγκρουση.

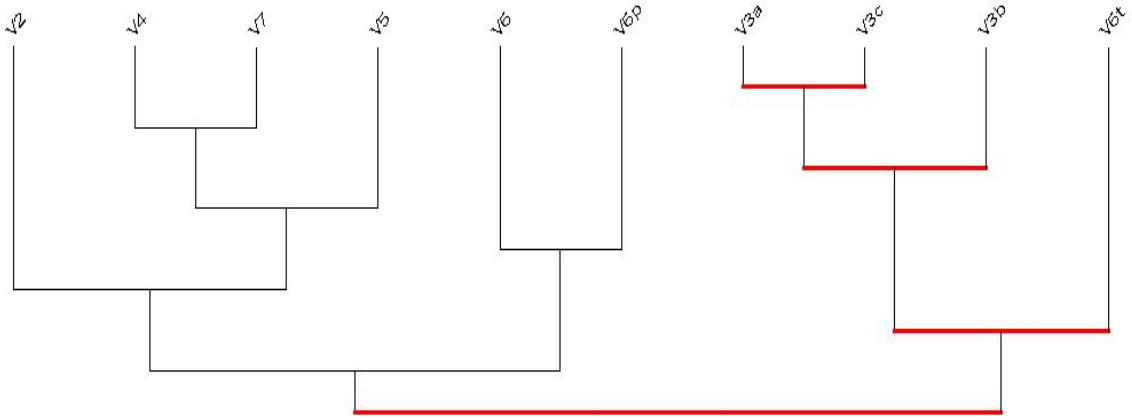
Στη *2η άσκηση* οι μαθητές αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες. Από αυτό σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της προηγούμενης φάνηκε πως οι μαθητές δεν μπορούν να κάνουν υποθέσεις για το άθροισμα δυο διανυσμάτων, όταν αλλάζει η γωνία μεταξύ τους. Εδώ είναι σημαντικό να τονιστεί πως ένα χρόνο πριν έχουν μάθει στο μάθημα της Φυσική πως μόνο όταν η γωνία είναι 0° ισχύει $F_{o\lambda} = F_1 + F_2$. Όμως, όπως ήδη έχουμε αναλύσει, για να είναι διαθέσιμη για αφαίρεση η έννοια του διανύσματος, θα πρέπει να παρουσιαστεί η μαθηματική της δομή, κάτι που προφανώς δεν γίνεται στο μάθημα της Φυσικής.

Τέλος, η *7η άσκηση* απαιτούσε από τους μαθητές να έχουν κατανοήσει καλά τόσο τα προηγούμενα όσο και την έννοια του ελεύθερου διανύσματος και της παράλληλης μεταφορά του. Έτσι, δεν μας εξέπληξε το ότι παρουσίασε το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας.

5.3.2. Στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση του R .Gras

5.3.2.1. Σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα

Το Διάγραμμα Ομοιότητας (Διάγραμμα 6) παρουσιάζει τις ομαδοποιήσεις έργων ανάλογα με τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους. Στο παρακάτω διάγραμμα υπάρχουν μόνο οι μεταβλητές που αφορούν έργα, τα οποία σχετίζονται με τα διανύσματα. Όπως παρατηρούμε, σχηματίζονται δυο κύριες ομάδες ομοιότητας, οι οποίες σχετίζονται μεταξύ τους σε επίπεδο 99%.



Διάγραμμα 7

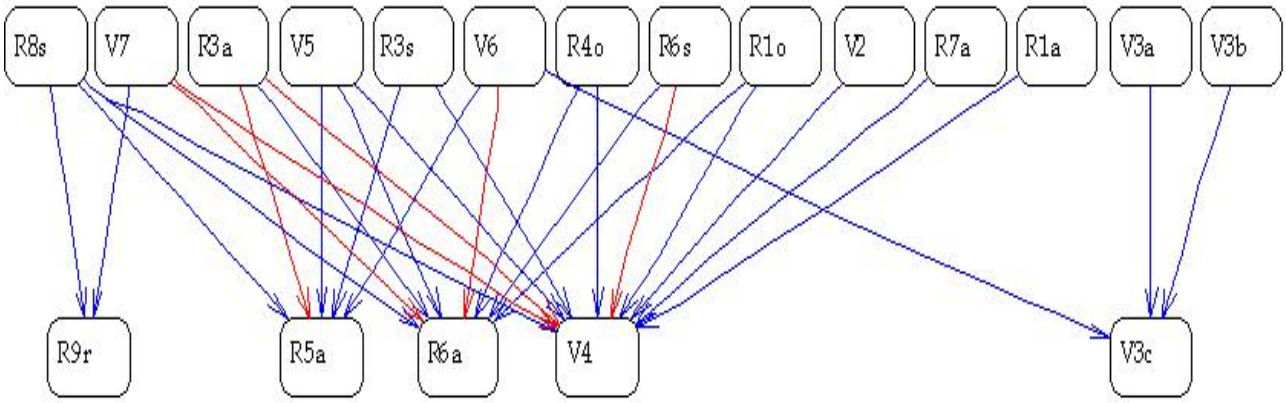
Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές V2, V4, V5, V6, V6p, και V7. Πρόκειται για μεταβλητές που αφορούν έργα στα οποία η γωνία δυο διανυσμάτων παίζει τον βασικό ρόλο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι υποομάδες που περιλαμβάνουν τις μεταβλητές (V4, V7) και (V6, V6p). Η πρώτη υποομάδα σχετίζει έργα που αφορούν την ευθεία γωνία. Η δεύτερη υποομάδα είναι ακόμα πιο ενδιαφέρουσα αφού συνδέει τη σωστή αντιμετώπιση του 6^{ου} έργου με την προσπάθεια χρησιμοποίησης του κανόνα του παραλληλογράμμου. Το φαινόμενο αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι όσοι προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έπρεπε να εντοπίσουν την γωνία των δυο διανυσμάτων κάτι που τους ωθούσε στο να ξεπεράσουν το πρόβλημα του πρωτότυπου του έργου και να κατανοήσουν τη μαθηματική του δομή. Έτσι, ήταν πιο πιθανό να επιτύχουν σε σχέση με αυτούς που θέλησαν να εφαρμόσουν τον κανόνα

του τριγώνου, στον οποίο δεν απαιτείται προσδιορισμός της γωνία των διανυσμάτων, παρά μόνο η μετατροπή τους σε διαδοχικά, δηλαδή η εφαρμογή μιας διαδικασίας.

Η δεύτερη ομάδα ομοιότητας περιλαμβάνει τις μεταβλητές V3a, V3b, V3c καιV6t, οι οποίες δεν σχετίζονται άμεσα με τον προσδιορισμό κάποιας γωνίας. Όλες οι συνδέσεις μεταξύ αυτών των μεταβλητών είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο 99%. Το ότι τα υποερωτήματα που αφορούν την άσκηση 3 παρουσιάζουν ομοιότητα ως προς τον τρόπο αντιμετώπισής τους, και ιδιαίτερα η ομαδοποίηση των 3a και 3c που απλά επαληθεύει την μαθηματική τους ομοιότητα, ίσως να μην αποτελεί έκπληξη, αλλά παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξηγήσουμε την σύνδεσή τους με την V6t. Όπως προαναφέραμε ο κανόνας του τριγώνου δεν απαιτεί τον εντοπισμό της γωνία των δυο διανυσμάτων και αυτό πρέπει να είναι το κλειδί για αυτήν την ομοιότητα των έργων. Πολλοί μαθητές εξέφραζαν την θέλησή τους να μετατρέψουν τα διανύσματα σε διαδοχικά αλλά μη μπορώντας να κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο του έργου αποτύγχαναν.

5.3.2.2. Σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στα έργα

Το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 7) δείχνει μόνο τις συνεπαγωγές που προέκυψαν ανάμεσα στις μεταβλητές που αφορούν αναγνώριση γωνιών και στα έργα που σχετίζονται με τα διανύσματα. Τα βέλη με κόκκινο χρώμα αφορούν συνεπαγωγές σημαντικές σε επίπεδο 99% ενώ τα μπλε σε επίπεδο 95%.



Διάγραμμα 7

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συνεπαγωγικές σχέσεις (R8s $\rightarrow$ V4), (R3s $\rightarrow$ V4), (R6s $\rightarrow$ V4). Ας σημειωθεί εδώ στην ανάλυση που κάναμε δεν συμμετείχαν οι μεταβλητές R2s, R5s, R7s και R9s λόγω του πολύ χαμηλού τους μέσου όρου. Επομένως είναι πραγματικά εκπληκτικό το ότι οι τρεις από τις πέντε μεταβλητές, που συμμετέχουν στην έρευνα, και αφορούν αναγνώριση ευθείας γωνίας συνδέονται με το έργο το οποίο αφορά τον προσδιορισμό της γωνίας των αντίθετων διανυσμάτων και μάλιστα η συνεπαγωγή (R6s $\rightarrow$ V4) είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο 99%. Εδώ, ίσως θα μπορούσαμε να κάνουμε και μια άλλη σύνδεση, αν και παρακινδυνευμένη. Η 6^{η} εικόνα του ερωτηματολογίου:

Figure 2

παρουσιάζει ομοιότητα με την αναπαράσταση των αντίθετων διανυσμάτων, με τα οποία ασχολείται το 4^{ο} έργο:

Τέλος, η συνεπαγωγή (V7 $\rightarrow$ V4) συνδέει δυο έργα που σχετίζονται με τα αντίθετα διανύσματα, με την V4 να είναι ο δεύτερος όρος της συνεπαγωγής γιατί το 4^{ο} έργο έχει λιγότερες γνωστικές απαιτήσεις σε σχέση με το 7^{ο} έργο.

5.4. Συμπεράσματα

Γενικά, από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας προέκυψαν σημαντικές ενδείξεις υπέρ της άποψης πως πολλές παρερμηνείες σχετικά με την πρόσθετη των διανυσμάτων δεν οφείλονται για παράδειγμα απλά στο ότι οι μαθητές έχοντας συνηθίσει στο χειρισμό των πραγματικών αριθμών, αποτυγχάνουν να συνειδητοποιήσουν ότι τα διανύσματα είναι διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα με τη δική τους πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Σε αυτού του είδους την επιχειρηματολογία παραγνωρίζεται ο ρόλος της γωνίας στις γνωστικές διεργασίες που αφορούν τα διανύσματα, τον οποίο και προσπαθήσαμε να αναδείξουμε στην έρευνά μας.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα έργα που σχετίζονται άμεσα με κάποια γωνία διαφορετικά από αυτά στα οποία ο ρόλος της γωνίας είναι μόνο έμμεσος. Επίσης, προέκυψαν συνεπαγωγικές συνδέσεις μεταξύ μεταβλητών που συνδέουν την αναγνώριση ευθειών γωνιών και έργων που εμπλέκουν την ευθεία γωνία, ακόμα και σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Από την άλλη πλευρά ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι συνεπαγωγές μεταξύ μεταβλητών που αφορούν έργα τα οποία εμπλέκουν το ίδιο είδος γωνίας.

Επιπλέον, θα ήταν χρήσιμο να τονίσουμε τα χαμηλά ποσοστά αναγνώρισης είδη γωνιών όπως οι ευθείες και οι αμβλείες καθώς και την μη αναγνώριση της μηδενικής ή της πλήρης γωνίας. Δεν πρέπει να είναι τυχαίο το γεγονός ότι στα έργα που εμπλέκονται αυτά τα είδη γωνιών, οι μαθητές συναντούν τις μεγαλύτερες δυσκολίες και κάνουν πολλά λάθη.

Θα είναι ενδιαφέρον να διερευνηθούν παρόμοια ερωτήματα και σε μαθητές μικρότερης ηλικίας τόσο μέσα σε ένα μαθηματικό περιβάλλον όσο και μέσα στο πλαίσιο της Φυσικής. Αυτό όμως που πρέπει να τονιστεί, είναι πως οποιαδήποτε ερευνητική προσπάθεια θα πρέπει να εστιάζει στην μαθηματική δομή του διανύσματος, για να μη χαθεί στο λαβύρινθο των διανυσματικών μεγεθών

Θα ήταν, τέλος, πολύ ενδιαφέρον να γίνει μια πιο αναλυτική μελέτη του ρόλου της γωνία στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του διανύσματος. Θα πρέπει να περιλαμβάνει πειραματική διδασκαλία της διδακτικής ενότητας των διανυσμάτων, με τη σχεδίαση και χρήση κατάλληλων έργων, τα οποία θα βοηθήσουν

τα παιδιά στην ανάδειξη του μαθηματικού περιεχομένου του μεγέθους, της γωνίας και στην συμπύκνωσή τους σε ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο το διάνυσμα.

Αρθρογραφία

Aguirre, J. & Erickson G. (1984). Students' conceptions about the vector characteristics of three physics, *Journal of Research in Science Teaching*, **21**, 5, 439-457.

Beilin, H. (1988). Commentary. *Human Development*, **31**, 225-241.

Berry, J. & Graham, T. (1991). Using concept questions in teaching mechanics. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **22**, 5, 749-757.

Chapman, M. & Linderberger, U. (1988). Functions, Operations, and Decalage in the Development of Transitivity, *Developmental Psychology*, **24**, 4, 542-551.

Davidson, P. M. (1988). Piaget's Category-Theoretic Interpretation of Cognitive Development: A Neglected Contribution. *Human Development*, **31**, 225-241.

Davidson, P. M. (1992). Genevan Contributions to Characterizing the Age 4 Transition. *Human Development*, **35**, 165-171.

Demetriadou, H. & Tzanakis, C. (2003). Understanding basic vector concepts: Some results of a teaching approach for students aged 15. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, ed. A. Gagatsis & S. Papastavridis, Hellenic Mathematical Society & Cyprus Mathematical Society, Athens, pp. 665-673.

Demetriadou, H. & Gagatsis, A. (????) On the history of the concept of vector and its introduction in elementary geometry textbooks, in Gagatsis, A. & Rogers, L. (ed.), Didactics and history of mathematic.

Δημητριάδου, Ε. & Γαγάτσης, Α. (1995). Προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του διανύσματος στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στο Γαγάτσης (εκδ.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών*, Erasmys ICP-93-G-2011/11, Θεσσαλονίκη.

Δημητριάδου, Ε. & Τζανάκης, Κ. (2003). Οι δυσκολίες κατανόησης της γλώσσας του διανυσματικού λογισμού από μαθητές Γ΄ γυμνασίου. Πρακτικά του 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1**, 2, 1-16.

Forster, P. (2000). Process and Object Interpretations of Vector Magnitude Mediated by Use of Graphics Calculator. *Mathematics Education Research Journal*, **12**, 3, 269-285.

Forster, P. & Taylor, P. (2000). A multiple-perspective analysis of learning in the presence of technology. *Educational Studies in Mathematics*, **42**, 35-59.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, **38**, 11-50.

Γαγάτσης, Α. & Δημητριάδου, Ε. (1995). Προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του διανύσματος στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. στο Α. Γαγάτσης (εκδ.) *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (Θεσσαλονίκη: Erasmys ICP-94-G-2011/11).

Gagatsis, A. & Demetriadou, H. (2001). Classical versus vector geometry in problem solving. An empirical research among Greek secondary pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32, 1, 105-125.

Graham, T. & Berry, J. (1990). Sixth Form Students Intuitive Understanding of Mechanics Concepts: Part 1. *Teaching Mathematics and its Applications*, **9**, 2, 82-90.

Graham, T. & Berry, J. (1992). Sixth-Form Students' Intuitive Understanding of Mechanics Concepts: Part 2. *Teaching Mathematics and its Applications*, **11**, 3, 106-111.

Graham, T. & Berry, J. (1993). Students' intuitive understanding of gravity. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 24, 3, 473-478.

Graham, T. & Berry, J. (1996). A hierarchical model of the development of student understanding of momentum. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **18**, 1, 75-89.

Graham, T. & Berry, J. (1997). A hierarchical model of the development of student understanding of force. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **28**, 6, 839-853.

Graham, T. & Sharp, J. (1999). An investigation into Able Students' Understanding of Motion Graphs. *Teaching Mathematics and its Applications*, **18**, 3, 128-135.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 115-141.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings of PME 25*.

Gray, E & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Norwich, UK), 1, 115–120.

Harel, G, & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **11**, 1, 38-42.

Ioannou, I. & Gagatsis, A. (2003). Study on the role of representations in the understanding of vectors. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, in A. Gagatsis & S. Papastavridis (ed), Hellenic Mathematical Society & Cyprus Mathematical Society, Athens, pp. 187-195.

Κεΐσογλου, Σ. και Σπύρου, Π. (2003) Η μαθηματικοποίηση της μορφής. Το παράδειγμα τη ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων. Μελέτη που παρουσιάστηκε στο 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Αθήνα.

Kitchen, A., Savage, M. & Williams, J. (1997). The Continuing Relevance of Mechanics in A-Level Mathematics. *Teaching Mathematics and its Applications*, **16**, 4, 165-170.

Mitchelmore, M. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics* **41:** 209–238.

Núñez, R. E., Edwards, L. D. and Matos, J. F. (1999) Embodied Cognition As Grounding For Situatedness And Context In Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, **39**, 45-65

Otte, M. (1989). The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz. *Historia Mathematica*, **16**, 1-35.

Rowlands, S., Graham, T. & Berry, J. (1998). Identifying stumbling blocks in the development of student understanding of moments of forces. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **29**, 4, 511-531.

Sierpinska, A., Hiller, J. & Dreyfus, T. (????). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Vectors

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hiller, J. (????). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations.

Τζανάκης, Κ. (1993). Η διδασκαλία της μέτρησης γωνιών, μήκους περιφέρειας και εμβαδού κύκλου στο Δημοτικό Σχολείο. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, **71**: 65-70.

Tall, D. (1997), Metaphorical objects in advanced mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **2**: 61 –65.

Tall, D. O., Thomas M. O. J, Davis, G., Gray, E. M., Simpson, A. P. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, **18**, 2, 223-241.

Tall, D. O., Gray, E M., Ali, M. B., Crowley, L. R. F., DeMarois, P., McGowen, M. C., Pitta, D., Pinto, M. M. F., Thomas, M., & Yusof, Y. b. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81–104.

Tall D. (2004), Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, (υπό έκδοση).

Watson, A., Spyrou, P. & Tall, D. (2002). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1**, 2, 73-97.

Watson, A., (2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 369–376. Norwich: UK.

Wenderoth, P. & White, D. (1979). Angle-matching illusions and perceived line orientation. Perception, 8, 565-575.

Βιβλιογραφία

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2003) *Μαθηματικά για την Β΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου. Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. & Σβέρκος, Α. (1989) *Μαθηματικά της Γ΄Γυμνασίου*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη.

Arons, A. B. (1992). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*. μετ. Α. Δ. Βαλαδάκης, Αθήνα: Τροχαλία.

Βαϊνάς, Κ. (1998). *Η ερώτηση ως μέσο αγωγής της σκέψης*. Αθήνα: Gutenberg.

Βαϊνάς, Κ. (2000). *Ανάλυση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα*. Αθήνα: Γρηγόρη.

Βοσνιάδου, Σ. (ed.) (1999). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Bachelard, G.(1998). *Το νέο επιστημονικό πνεύμα*. Γ. Φαρακλας, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Bell, E. (1965). *Οι μαθηματικοί*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Bourdieu, P. (2000). *Πρακτικοί Λόγοι : για τη θεωρία της δράσης*. Αθήνα: Πλέθρον.

Bourdieu, P. (2001). *Μάθημα πάνω στο μάθημα*. μετ. Ν. Αγκαβανάκης, Αθήνα: Καρδαμίτσα.

Bourdieu, P. (2002). *Η διάκριση, Κοινωνική κριτική της καλαισθητικής κρίσης*. Αθήνα: Πατάκη.

Boyer, C. B. & Merzbach, Uta C. (1997). *Η ιστορία των μαθηματικών*. μετ. Β. Κουσουλάκου, Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικού.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών*. μετ. Α. Φερεντίνου-Νικολοπούλου, Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικού.

Γαγάτσης, Α. & Δημητριάδου, Ε. (1995). Προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του διανύσματος στην Ελλάδα. στο Α. Γαγάτσης (επιμ.), *Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία – Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: ART of TEXT.

Γιανναράς, Χ. (1994). *Σχεδίασμα εισαγωγής στη φιλοσοφία*. Αθήνα: Δόμος.

Γιαννούλης, Ν. (1993). *Διδακτική Μεθοδολογία*. Αθήνα.

Cemen, P.(1989). *Το άγχος για τα Μαθηματικά*, μετ. Ν. Παίζης, Αθήνα: Παρουσία.

Changeux, J. P. & Connes, Al. (1992). *Τα Μαθηματικά και ο Εγκέφαλος*, Αθήνα: Κάτοπτρο.

Crowe, M. J. (1985). *A history of vector analysis : the evolution of the idea of a vectorial system*. United States of America: Dover Publications.

Cyrulnik, B. (1991). *Η γέννηση του νοήματος*. μετ. Γ. Κυριακόπουλος και Δ. Καλοχριστιανάκης, Αθήνα: Κάτοπτρο.

Gillies, D. (ed.) (1992). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press..

Goleman, D. (1998) *Η συναισθηματική νοημοσύνη. Γιατί το «EQ» είναι πιο σημαντικό από το «IQ»*, μετ. Ά. Παπασταύρου, Αθήνα: ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Guthrie, W. (1984). *Οι Έλληνες φιλόσοφοι*. μετ. Α. Η. Σακελλαρίου. Αθήνα: Παπαδήμα.

Guthrie, W. (1991). *Σωκράτης*. μετ. Τ. Νικολαίδης, Αθήνα: ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΗΣ

Δαπόντες, Ν. & Κασσέτας, Α.Ι. (1999) *Φυσική για την Α΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. μετ. Γ. Αναστασιάδης, Αθήνα: Τροχαλία.

Descartes (1976). *Λόγος περί της μεθόδου*. μετ. Χ. Χρηστίδη, Αθήνα: Παπαζήση.

Donaldson, M. (2001). *Η Σκέψη των Παιδιών*. μετ. Α. Καλογιαννίδου & Α. Αρχοντίδου, Αθήνα: Gutenberg.

Edelman, G. M. (1992). *Αιθέρας Θεϊκός, Λαμπερή Φωτιά*. μετ. Π. Τασιόπουλος & Α. Μάμαλης, Αθήνα: Κάτροπτο.

Eves, H. (1983). *Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών*. Αθήνα: Τροχαλία.

Ζαρκαδάκης, Γ. (2001). *Το Μυστήριο Του Νου. Πως ο εγκέφαλος εγείρει τη συνείδηση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Zeki, S. (1999). *Εσωτερική Όραση. Μια εξερεύνηση της τέχνης και του εγκεφάλου*. μετ. Θ. Ντινόπουλος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Hardy, G. H. (1993). *Η Απολογία ενός Μαθηματικού*. μετ. Δ. Καραγιαννάκης & Μ. Λάμπρου, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Hadamard, J. (1995). *Η Ψυχολογία της Επινόησης στα Μαθηματικά*. μετ. Σ. Ζαχαρίου, Αθήνα: Κάτοπτρο.

Heisenberg, W. (1995). *Σκέψεις για την εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική*. μετ. Θ. Γραμμένος, Αθήνα: Π. Τραυλός.

Hilbert, D. (1995). *Θεμέλια της Γεωμετρίας*. Αθήνα: Τροχαλία.

Hughes, M. (1999). *Τα Παιδιά και η Έννοια των Αριθμών*. μετ. Μ. Σταφυλίδου, Αθήνα: Gutenberg.

Hunziker, E. & Mazzola, G. (1995). *Η Νευρωνική Ζούγκλα.* μετ. Ε. Μάρεχαρτ, Αθήνα: Π. Τραυλός – Ε. Κωσταράκη.

Husserl, E. (1998) The origins of Geometry (p. 353-378), in *the Crisis of the European Sciences and Transcendental Phenomenology*, Northestern University Press.

Καλομητσίνης, Σ. (1996). *Μεθοδολογία για ασκήσεις και προβλήματα* Μαθηματικών. Αθήνα: Σμίλη.

Καστοριάδης, Κ. (2000). *Η άνοδος της ασημαντότητας*. Αθήνα: Ύψιλον.

Καστοριάδης, Κ. (2001). *Διάλογοι*. Αθήνα: Ύψιλον.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κολιάδης, Ε. (1996). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη*. Αθήνα.

Katz, V. J. (1993) *A History of Mathematics: An Introduction*. United States of America: HarperCollins College Publishers.

Kline, M. (1993). *Γιατί δεν μπορεί να προσθέσει ο Γιάννης; Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών*. μετ. Τομανάς, Θεσσαλονίκη: ΒΑΝΙΑΣ

Kunh, T. S. (1962). *Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων*. Γ. Γεωργακόπουλος και Β. Κάλφας, Αθήνα: Σύγχρονα Θέματα.

Λαμπίρη-Δημάκη, Ι. & Παναγιωτόπουλος, Ν. (επιμ.) (1995). *Pierre Bourdieu, Κοινωνιολογία της Παιδείας, 10 Ανακοινώσεις*. Αθήνα: Δελφίνι και Καρδαμίτσα.

Lang, S. (1985). *Μαθηματικές Συναντήσεις. Με μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.* μετ. Α. Μουζακίτης, Αθήνα: Κάτροπτο.

Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις & Ανασκευές. Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης*. Αθήνα: Τροχαλία.

Lakoff, G. and Núñez, R. E. (2000) *Where Mathematics Comes From: how the embodied mind brings mathematics into being*. United States of America: Basic Books.

Liungman, C. (1987). *Ο Μύθος της Ευφυΐας*. μετ. Δ. Κούρτοβικ, Αθήνα: Αίολος.

Μπιτσάκη, Ε. (1986). *Τι είναι φιλοσοφία*. Αθήνα: σύγχρονη εποχή.

Μπιτσάκης, Ε. (1996). *Είναι και Γίγνεσθαι: Προβλήματα Διαλεκτικής της Φύσης*. Αθήνα: ΣΤΑΧΥ.

Μποζαπαλίδης, Σ. Μ. (1994). Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα. Θεσσαλονίκη

Maor, E. (1998). *Τριγωνομετρικά Λουκούμια*. μετ. Τ. Μιχαηλίδης, Αθήνα: Κάτροπτο.

Nagel, E. – Newman, J. (1991). *Το Θεώρημα του Gödel*. μετ. Ν. Γιαννακόπουλος, Αθήνα: Τροχαλία.

Van Der Waerden, B. L. (2000), *Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*. μετ. Γ. Χριστιανίδης, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Παναγιωτόπουλος, Ν. (επιμ.) (1999). *Πιερ Μπουρντιέ, Κείμενα Κοινωνιολογίας*. Αθήνα: Στάχυ.

Πλάτων (1991). *Συμπόσιον*. Αθήνα: Κάκτος.

Πλάτων (1992). *Απολογία Σωκράτους*. Αθήνα: Κάκτος.

Papert, S. (1991). *Νοητικές Θύελλες*. Αθήνα: Οδυσσέας.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1956) *The child's conception of space*. London: Routledge.

Piaget, J. (1979). *Το μέλλον της εκπαίδευσης*. μετ. Α. Κάντας, Αθήνα: Υποδομή.

Politzer, G. (1982). *Στοιχειώδεις αρχές της φιλοσοφίας*. μετ. Γ. Γεωργαντζή. Αθήνα: Δωρικός.

Polkinghorne, J. (1997). *Επιστήμη ή Θεός*. μετ. Θ. Γραμμένος, Αθήνα: Π. Τραυλός – Ε. Κωσταράκη

Polya, G. (19..). *Πώς να το λύσω*. μετ. Λ. Σιαδήμας. Αθήνα: Σπηλιώτη.

Posamentier, A. and Stepelman, J. (1999) *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units*. New Jersey: Prentice-Hall.

Rybnikov, K. (1986). *Εισαγωγή στη Μεθοδολογία των Μαθηματικών*. μετ. Κ. Γ. Φιλιππίδης. Θεσσαλονίκη: ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΑ.

Σόλομον, Ρ. & Χίγκινς, Κ. (1997). *Μια σύντομη ιστορία της φιλοσοφίας*. Αθήνα: φιλίστωρ.

Searle, J. (1984). *Νους, Εγκέφαλος και Επιστήμη*. μετ. Κ. Χατζηκυριακού, Ηράκλειο: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ.

Siety, A. (2003) *Μαθηματικά: Ο αγαπημένος μου φόβος*. μετ. Α. Τζαμουράνη. Αθήνα: Σαββάλας.

Streefland, L. (1991). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. μετ. Ε. Κολέζα, Αθήνα: Leader Books.

Τζάνη, Μ. (1998). *Θέματα κοινωνιολογίας της παιδείας*. Αθήνα: Γρηγόρης.

Tiles, M. (1993). *Μπασελάρ-Επιστήμη και Αντικειμενικότητα*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Τουμάσης, Μ. (2000). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας. Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ατραπός.

Feyerabend, P. (1975). *Ενάντια στη Μέθοδο : για μια αναρχική θεωρία της γνώσης*. Αθήνα: Σύγχρονα Θέματα.

Feyerabend, P. (1987). *Αποχαιρετισμός στον Λόγο*. μετ. Π. Μπορλάκης, Αθήνα: ΕΚΚΡΕΜΕΣ.

Flato, M. (1990). *Η Ισχύς των Μαθηματικών*. μετ. Τ. Κυπριανίδης, Αθήνα: Κάτοπτρο.

Warburton, N. (1992). Φιλοσοφία. *Τα βασικά ζητήματα*. μετ. Β. Χατζοπούλου, Αθήνα: Περίπλους

Weatherburn, C. E., (1963) *Elementary Vector Analysis: with application to geometry and mechanics*. London: G. Bell and Sons.

Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*. μετ. Δ. Ψυχογυιός. Αθήνα: Π. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΟΣ Α.Ε.