ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η έννοια της εξαντικειμενίκευσης στη δόμηση μιας διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος: Μια εμπειρική μελέτη

ΠΕΤΕΙΝΑΡΑ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

Δ 200818

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 21/03/2012 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Παναγιώτης Σπύρου (επιβλέπων Καθηγητής)	Επίκουρος Καθηγητής	…….
2) Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος	Διδάκτωρ Διδακτικής Μαθηματικών	……
3) Διονύσιος Λάππας	Αναπληρωτής Καθηγητής	……

Στη μνήμη των γονιών μου

&

στην αδελφή μου Χαρά

για τη συμπαράσταση και υπομονή

που έδειξε σε όλη τη διάρκεια

των σπουδών μου

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Παναγιώτη Σπύρου για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές, τις χρήσιμες υποδείξεις του και τη βοήθειά του σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της, αλλά και στη διάρκεια των σπουδών μου.

- Τον δόκτορα κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο του οποίου η συμβολή ήταν πολύτιμη τόσο στο σχεδιασμό όσο και στην εκτέλεση της έρευνας πάνω στην οποία στηρίχτηκε η διπλωματική μου εργασία. Η ερευνητική του εμπειρία και οι γνώσεις του στη στατιστική ανάλυση με βοήθησαν σημαντικά στην ανάλυση της δικής μου εμπειρικής μελέτης. Τον ευχαριστώ για τη στενή παρακολούθηση και καθοδήγησή του σε όλα τα στάδια αυτής της διπλωματικής εργασίας.

- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δ. Λάππα που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

- Τους συναδέλφους καθηγητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης κα Ρ. Γαβριήλογλου και κ. Α. Βλάχο που χωρίς τη βοήθειά τους δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη έρευνα.

ΠΕΤΕΙΝΑΡΑ Γ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

ΑΘΗΝΑ ΜΑΡΤΙΟΣ 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ v
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ viii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΕΙΚΟΝΩΝ ix
ΠΕΡΙΛΗΨΗ ..... - 1 -
ABSTRACT ..... - 1 -
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ..... - 2 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : Ιστορικά στοιχεία ..... - 4 -
1.1 Αναφορά στις πρώτες Γεωμετρικές θεωρίες ..... - 4 -
1.1.1 Η πινακίδα «YBC 7289» ..... - 5 -
1.1.2 Η πινακίδα Plimpton ..... - 6 -
1.1.3 Ο πάπυρος του Rhind ..... - 7 -
1.2 Οι πρώτες προσπάθειες συστηματοποίησης της Γεωμετρίας ..... - 8 -
1.2.1 Πυθαγόρειοι & πυθαγόρεια σχολή ..... - 9 -
1.2.2 Πυθαγόρειες τριάδες ..... - 14 -
1.3 Η συστηματοποίηση της γνώσης ..... - 16 -
1.4 Η Πρόταση Ι47 των Στοιχείων του Ευκλείδη ..... - 18 -
1.4.1 Η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου ..... - 19 -
1.5 Κύρια σημεία του 1^{ου} κεφαλαίου ..... - 20 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Θεωρητικό & διδακτικό πλαίσιο ..... - 21 -
Α΄ ΜΕΡΟΣ ..... - 21 -
2.1 Ο όρος objectification (εξαντικειμενίκευση) ..... - 21 -
2.2 Ο Radford και οι αναπαραστάσεις ..... - 22 -
2.3 Ο Duval και οι αναπαραστάσεις ..... - 24 -
2.4 Σύγκριση των θεωριών Duval και Radford ..... - 25 -
2.5 Η υποκειμενική κατασκευή των ιδεατοτήτων: Εξαντικειμενίκευση ..... - 27 -
2.6 Ιστορία και εξαντικειμενίκευση ..... - 28 -
2.7 Βαρύτητα και ανθρώπινο σώμα ..... - 29 -
2.8 Σύνδεση ιστορικότητας και ενσωμάτωσης στη γεωμετρία ..... - 29 -
Β΄ ΜΕΡΟΣ ..... - 31 -
2.9 Φαινομενολογικές ιδέες στη διδακτική των μαθηματικών ..... - 31 -
2.10 Γενίκευση ..... - 33 -
2.11 Αφαίρεση ..... - 34 -
2.12 Πρότυπα ..... - 36 -
2.12.1 Το σημείο, η ευθεία γραμμή και το επίπεδο ..... - 37 -
2.12.2 Η γωνία - ένα σύνθετο πρότυπο ..... - 38 -
2.12.3 Το τρίγωνο - Γεωμετρικές κανονικότητες ..... - 39 -
2.12.4 Από τα αρχέτυπα αποτελέσματα σε μια λογική θεωρία ..... - 40 -
2.12.5 Η περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος ..... - 41 -
2.13 Μαθηματική και αναστοχαστική δράση ..... - 43 -
2.14 Κύρια σημεία του 2^{ου} κεφαλαίου ..... - 44 -
2.14.1 Α΄ Μέρος ..... - 44 -

2.14.2 Β΄ Μέρος ..... - 45 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Μεθοδολογία ..... - 46 -
3.1 Ερευνητικό ερώτημα ..... - 46 -
3.2 Γενικές μεθοδολογικές αποφάσεις ..... - 46 -
3.3 Ειδικές μεθοδολογικές αποφάσεις ..... - 47 -
3.4 Η διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος στη Β΄ Γυμνασίου ..... - 49 -
3.5 Προϋπάρχουσες έρευνες - Πιλοτική έρευνα ..... - 50 -
3.6 Μεθοδολογικό σχέδιο της έρευνας ..... - 53 -
3.7 Εργαλεία ..... - 54 -
3.7.1 Τετράγωνοι αριθμοί (φύλλο εργασίας) ..... - 54 -
3.7.2 Διδασκαλία (χειραπτικά υλικά, φύλλο εργασίας) ..... - 55 -
3.7.2.1 1^{η} ενότητα (νήμα της στάθμης, ξύλινες ράβδοι, φύλλο εργασίας) ..... - 56 -
3.7.2.2 2^{η} ενότητα (ξυλάκια, φύλλο εργασίας) ..... - 56 -
3.7.2.3 3^{η} ενότητα (φύλλο εργασίας) ..... - 57 -
3.7.3 Αξιολόγηση (Ερωτηματολόγιο αξιολόγησης) ..... - 59 -
3.7.3.1 1^{η} ομάδα ερωτήσεων ..... - 59 -
3.7.3.2 2^{η} ομάδα ερωτήσεων ..... - 60 -
3.7.3.3 3^{η} ομάδα ερωτήσεων ..... - 60 -
3.7.3.4 4^{η} ομάδα ερωτήσεων ..... - 61 -
3.7.3.5 5^{η} ομάδα ερωτήσεων ..... - 61 -
3.7.4 Συνεντεύξεις (φύλλα δραστηριοτήτων, βέργες) ..... - 62 -
3.7.4.1 1^{η} δραστηριότητα (διερευνητική άσκηση) ..... - 62 -
3.7.4.2 2^{η} δραστηριότητα (διερευνητική άσκηση) ..... - 63 -
3.7.4.3 3^{η} & 4^{η} δραστηριότητα (βέργες) ..... - 63 -
3.8 Κύρια έρευνα ..... - 64 -
3.8.1 Τετράγωνοι αριθμοί ..... - 65 -
3.8.2 Διδασκαλία ..... - 66 -
3.8.2.1 1^{η} ενότητα (ποιοτική αναγνώριση της καθετότητας) ..... - 67 -
3.8.2.2 2^{η} ενότητα (ποσοτικοποίηση των σχέσεων της 1^{ης} ενότητας) ..... - 69 -
3.8.2.3 3^{η} ενότητα (κανόνας παραγωγής τριάδων) ..... - 69 -
3.8.3 Αξιολόγηση ..... - 70 -
3.8.4 Συνεντεύξεις ..... - 71 -
3.9 Μέθοδος ανάλυσης της έρευνας ..... - 73 -
3.9.1 Διδασκαλία ..... - 73 -
3.9.2 Αξιολόγηση ..... - 74 -
3.9.3 4^{η} φάση - Συνεντεύξεις ..... - 75 -
3.10 Κύρια σημεία του 3^{ου} κεφαλαίου ..... - 76 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Αποτελέσματα ..... - 77 -
4.1 Διδασκαλία ..... - 77 -
4.2 Αξιολόγηση ..... - 89 -
4.3 Συνεντεύξεις ..... - 94 -
4.3.1 1^{η} δραστηριότητα ..... - 94 -
Ομάδα Α ..... - 94 -

Ομάδα Β ..... - 96 -
Ομάδα Γ ..... - 97 -
4.3.2 2η δραστηριότητα ..... - 99 -
Ομάδα Α ..... - 99 -
Ομάδα Β ..... - 102 -
Ομάδα Γ ..... - 105 -
4.3.3 3η δραστηριότητα ..... - 107 -
Ομάδα Α ..... - 107 -
Ομάδα Β ..... - 109 -
Ομάδα Γ ..... - 111 -
4.3.4 4η δραστηριότητα ..... - 114 -
Ομάδα Α ..... - 114 -
Ομάδα Β ..... - 116 -
Ομάδα Γ ..... - 119 -
4.4 Κύρια σημεία του 4ου κεφαλαίου ..... - 121 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : Συζήτηση & συμπεράσματα ..... - 122 -
5.1 Συζήτηση ..... - 122 -
5.2 Συμπερασματικά σχόλια ..... - 130 -
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ..... - 132 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ ..... - 136 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α **..... - 137 -**
Σχηματικοί αριθμοί ..... - 137 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β **..... - 138 -**
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ..... - 138 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ **..... - 142 -**
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ..... - 142 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ **..... - 144 -**
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ..... - 144 -
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η ..... - 144 -
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η ..... - 145 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε **..... - 146 -**
ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΣΤ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ..... - 146 -
ΤΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ..... - 146 -
ΤΟ ΤΜΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ..... - 147 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ **..... - 148 -**
ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ..... - 148 -
1η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ (ΟΜΑΔΑ Α - τμήμα παρέμβασης) ..... - 148 -
5η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ (ΟΜΑΔΑ Β - τμήμα ελέγχου) ..... - 154 -

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 3. 1: Οι προηγούμενες έρευνες ..... - 51 -
Πίνακας 3. 2: Μεθοδολογικό σχέδιο της έρευνας ..... - 53 -
Πίνακας 3. 3: Ερωτήσεις διερεύνησης της απάντησης κλιμακούμενες ..... - 64 -
Πίνακας 3. 4: Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ..... - 64 -
Πίνακας 4. 1: Οι απαντήσεις στην 2η ερώτηση ..... - 89 -
Πίνακας 4. 2: Οι απαντήσεις στην 10η ερώτηση ..... - 90 -
Πίνακας 4. 3: Οι απαντήσεις στη 12η ερώτηση ..... - 90 -
Πίνακας 4. 4: Οι απαντήσεις στην 11η ερώτηση ..... - 92 -
Πίνακας 4. 5: Συγκρίσεις με τον έλεγχο Mann Whitney ..... - 93 -

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Σχ.1. 1: Η πινακίδα «YBC 7289» ..... - 5 -
Σχ.1. 2: Η πινακίδα Plimpton 322 ..... - 6 -
Σχ.1. 3: Ο πάπυρος του Rhind ..... - 7 -
Σχ.1. 4: Ο σχηματισμός των περιττών και άρτιων με γνώμονες. ..... - 10 -
Σχ.1. 5: Οι τριγωνικοί αριθμοί ..... - 10 -
Σχ.1. 6: Οι τετράγωνοι αριθμοί ..... - 10 -
Σχ.1. 7: Οι πενταγωνικοί αριθμοί ..... - 11 -
Σχ.1. 8: Το τριπλούν τρίγωνο ..... - 12 -
Σχ.1. 9: Το σχήμα στην απόδειξη που εικάζεται των Πυθαγορείων ..... - 17 -
Σχ.1. 10: Η Πρόταση Ι47 και η απόδειξή της. ..... - 18 -
Σχ.1. 11: Σελ. 183-184 του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου ..... - 19 -
Σχ.3. 1: Τα σχήματα του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 127) ..... - 49 -
Σχ.3. 2: Η 1η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας που αφορά τους σχηματικούς αριθμούς ..... - 54 -
Σχ.3. 3: Η 2η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας που αφορά τους σχηματικούς αριθμούς ..... - 55 -
Σχ.3. 4: Το βαρίδι κρεμασμένο από το νήμα πάνω από την επιφάνεια του χρωματισμένου υγρού ..... - 55 -
Σχ.3. 5: Οι χρωματισμένες ράβδοι σε 3, 4 και 5 κομμάτια. ..... - 55 -
Σχ.3. 6: Οι 2 πρώτες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας ..... - 56 -
Σχ.3. 7: Τα ξυλάκια που μοιράσαμε στους μαθητές ..... - 57 -
Σχ.3. 8: Η 3η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας και το σχήμα στο οποίο θα δοκιμάσουν τις τριάδες που προτείνουν. ..... - 57 -
Σχ.3. 9: Η 4η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας ..... - 58 -
Σχ.3. 10: Οι δύο τελευταίες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας ..... - 59 -
Σχ.3. 11: 1η ομάδα ερωτήσεων ..... - 59 -
Σχ.3. 12: 2η ομάδα ερωτήσεων ..... - 60 -
Σχ.3. 13: 3η ομάδα ερωτήσεων ..... - 60 -
Σχ.3. 14: 4η ομάδα ερωτήσεων ..... - 61 -
Σχ.3. 15: 5η ομάδα ερωτήσεων ..... - 61 -
Σχ.3. 16: Η 1η δραστηριότητα που δόθηκε στις συνεντεύξεις ..... - 62 -
Σχ.3. 17: Η 2η δραστηριότητα που δόθηκε στις συνεντεύξεις ..... - 63 -
Σχ.3. 18: Οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνα με ξυλάκια στα θρανία τους. - 68 -
Σχ.4. 12: Οι δραστηριότητες των παιδιών με τις ξύλινες ράβδους ..... - 78 -
Σχ.4. 13: Τα παιδιά δοκιμάζουν ..... - 80 -
Σχ.4. 14: Η μαθήτρια ενισχύει την υπόθεσή της με χειρονομίες ..... - 81 -
Σχ.4. 15: Τα τρίγωνα με τα ξυλάκια 2-3-4 και 6-8-10 ..... - 82 -
Σχ.4. 16: Δοκιμές για το αν το τρίγωνο 6-8-10 είναι ορθογώνιο. ..... - 82 -
Σχ.4. 17: Τα παιδιά σχηματίζουν τα τρίγωνα 9-12-15 και 5-12-13 στο σχήμα του φύλλου εργασίας ..... - 83 -
Σχ.4. 18: Οι πρώτοι τετράγωνοι αριθμοί όπως γράφτηκαν στον πίνακα με την υπόδειξη των μαθητών. ..... - 84 -

Σχ.4. 19: Οι τετράγωνοι αριθμοί όπως συμπληρώθηκαν στο φύλλο εργασίας των μαθητών ..... - 86 -
Σχ.4. 20: Η πρόταση που συμπλήρωσε μία μαθήτρια ..... - 88 -
Σχ.4. 21: Η επαγωγική σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος ..... - 88 -
Σχ.4. 22: Το διάγραμμα της 2ης ερώτησης ..... - 89 -
Σχ.4. 23: Το διάγραμμα της 10ης ερώτησης ..... - 90 -
Σχ.4. 24: Το διάγραμμα της 12ης ερώτησης ..... - 91 -
Σχ.4. 25: Το διάγραμμα της 11ης ερώτησης ..... - 92 -
Σχ.4. 26: Το κορίτσι κλείνει τα χέρια όπως «κλείνει» η γωνία ..... - 97 -
Σχ.4. 27: Τα παιδιά ενισχύουν τους ισχυρισμούς τους με κινήσεις ..... - 98 -
Σχ.4. 28: Δείχνει με τα χέρια ότι είναι μεγαλύτερο. ..... - 99 -
Σχ.4. 29: Το αγόρι προβληματίζεται με το σχήμα ..... - 100 -
Σχ.4. 30: Το 2ο κορίτσι προβληματίζεται από το σχήμα. ..... - 102 -
Σχ.4. 31: Το κορίτσι σχηματίζει την ορθή γωνία ..... - 103 -
Σχ.4. 32: Τα παιδιά αρχίζουν να αμφιβάλλουν για το σχήμα. ..... - 104 -
Σχ.4. 33: Το αγόρι εξηγεί ότι η υποτείνουσα πρέπει να είναι η ..... - 107 -
Σχ.4. 34: Τα κορίτσια βρήκαν τη βέργα «15» με το Πυθαγόρειο θεώρημα. ..... - 108 -
Σχ.4. 35: Η πλευρά 15 δεν φαίνεται να τους ταιριάζει ακριβώς ..... - 110 -
Σχ.4. 36: Μετράνε την τρίτη πλευρά. ..... - 111 -
Σχ.4. 37: Το κορίτσι διάλεξε με το μάτι μία «μεγάλη» βέργα. ..... - 112 -
Σχ.4. 38: Φτιάχνουν το τρίγωνο 9-12-14. ..... - 113 -
Σχ.4. 39: Εξετάζουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. ..... - 114 -
Σχ.4. 40: Κάνουν πράξεις για να ελέγξουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. ..... - 115 -
Σχ.4. 41: Τα παιδιά αναρωτιούνται αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. ..... - 116 -
Σχ.4. 42: Εξετάζουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. ..... - 118 -
Σχ.4. 43: Η πλευρά «7» δείχνει να περισσεύει. ..... - 119 -
Σχ.4. 44: Το τρίγωνο που έφτιαξαν με πλευρές 3-6 και 7. ..... - 120 -
Σχ.5. 1: Ο τρόπος που χρησιμοποιούν τα ξυλάκια οι μαθητές για να σχηματίσουν το τρίγωνο. ..... - 125 -

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε για την απόδοση Μεταπτυχιακού Διπλώματος από το Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών». Παρουσιάζεται μία εμπειρική μελέτη που βασίζεται στην φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου μέσω μιας διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Στην έρευνα συμμετείχαν 36 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, ενός δημόσιου σχολείου της Α΄ Αθήνας. Η αξιολόγηση της διδασκαλίας βασίστηκε στη σύγκριση του τμήματος παρέμβασης που έγινε η διδασκαλία με το τμήμα ελέγχου, σε ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης που κατασκευάστηκε για την παρούσα έρευνα. Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό ότι οι μαθητές για να αποκτήσουν ποιοτικές συνδέσεις με τις έννοιες που διαπραγματεύονται χρειάζονται μια διδασκαλία και ένα τρόπο προσέγγισης αυτών των εννοιών πιο κοντά στη δική τους καταρχήν πραγματικότητα. Το κατά πόσο ο αριθμός θα αποτελέσει ισχυρότερο επιχείρημα αλήθειας από ότι η εικόνα είναι αποτέλεσμα του επιπέδου εξαντικειμενίκευσης που θα προσεγγίσουν οι μαθητές.

Λέξεις κλειδιά: Εξαντικειμενίκευση, αναπαραστάσεις, πρότυπα, αφαίρεση, γενίκευση.

ABSTRACT

This research study was carried out in order to lead to the award of a Postgraduate Diploma in “Didactics and Methodology in Mathematics.” We present an empirical study based on the phenomenological concept of “objectification” of the right triangle through a teaching of the Pythagorean Theorem. Participants were 36 students of a public school of Athens. The assessment of teaching based on the comparison between the intervened and control party in an evaluation questionnaire constructed for this investigation. From the results of the investigation it became apparent that the students in order to gain quality links to the concepts negotiated, a teaching and a way to approach these concepts closer to their own reality principle is needed. Whether the number will be a stronger truth argument than the image, is the result of the level of objectification that students will reach.

Key words: Objectification, representations, prototypes, abstract, generalization.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα έρευνα προτείνεται μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος που βασίζεται στη φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης (objectification). Επιχειρήθηκε να μπουν οι μαθητές σε ένα ρόλο όπου θα αξιοποιήσουν τις άμεσες βιωματικές τους εμπειρίες, ώστε να καταλάβουν από μόνοι τους τον τρόπο που λειτουργούν τα μαθηματικά. Υποστηρίζουμε ότι το ανθρώπινο σώμα έχει αίσθηση της βαρύτητας κατά τον ίδιο τρόπο σε κάθε εποχή, επομένως σχεδιάζουμε μια διδασκαλία βασιζόμενη στη διαχρονικά αυτή αμετάβλητη αισθητηριακή αντίληψη, με στόχο την εξαντικειμενίκευση ("objectification") του ορθογωνίου τριγώνου. Υιοθετούμε στο σημείο αυτό την άποψη του Husserl για τη γνώση που πρέπει να συνδέεται με τον κόσμο που οι άνθρωποι βιώνουν και ότι αντιμετωπίζοντας έτοιμες έννοιες και προτάσεις χωρίς τη χρήση προεπιστημονικών υλικών, αφαιρείται από τη γεωμετρία το αληθινό της νόημα. Με μια ειδικά σχεδιασμένη διδασκαλία κατάλληλων προοδευτικών μαθηματικοποιήσεων και καθοδηγούμενης επανεπινόησης, ο μαθητής μπορεί να ανακατασκευάσει την ήδη αντικειμενική μαθηματική έννοια, βιώνοντας μ' αυτό τον τρόπο την επαναδραστηριοποίηση της εξαντικειμενίκευσής του. Ενσωματώνουμε στο σχεδιασμό της διδασκαλίας μας εργαλεία από τον πραγματικό κόσμο και στοχεύουμε να συνδεθούν σταδιακά η βαρύτητα και η αίσθηση της κατακορύφου, με την καθετότητα, τις Τριάδες και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Υιοθετούμε τον όρο *πρότυπο* (prototype) θεωρώντας ότι ένα πρότυπο είναι το αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα για μια έννοια. Τα πραξιακά πρότυπα (enactive prototypes) προερχόμενα από τον πραγματικό κόσμο (world of life) του Husserl και τον ενσώματο κόσμο, τα γεωμετρικά και αριθμητικά πρότυπα που προέρχονται από το κόσμο των μαθηματικών. Τα μαθηματικά αντικείμενα, σύμφωνα με τον Duval, δεν είναι αντικείμενα που αντιλαμβάνονται ευθέως ή παρατηρούνται με τη βοήθεια κάποιων οργάνων (μικροσκόπια, τηλεσκόπια, συσκευές μέτρησης), όπως αντίθετα συμβαίνει με τα φαινόμενα της αστρονομίας, της φυσικής, της χημείας, της βιολογίας κλπ. Η πρόσβαση σ' αυτά συνδέεται με τη χρήση ενός συστήματος αναπαραστάσεων που τους επιτρέπει να υποδειχθούν. Η γνώση προκύπτει από την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν μεταξύ των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων που συνδέονται με την κάθε αναπαράσταση.

Η εργασία αποτελείται από πέντε (5) κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια αναφορά στην ιστορική πορεία γέννησης και ανάπτυξης του Πυθαγορείου Θεωρήματος, που θεωρούμε ότι ταιριάζει στην πορεία που θα ακολουθήσουμε στη διδακτική μας παρέμβαση. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής μελέτης στο θεωρητικό πλαίσιο που δομήθηκε η έρευνά μας και στο διδακτικό πλαίσιο που σχεδιάστηκε η πραγματοποίησή της. Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύεται διεξοδικά η μεθοδολογία της έρευνας, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν, γίνεται αναφορά σε προηγούμενες έρευνες και αναλύονται τα στάδια της παρούσας έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης, η στατιστική ανάλυση με την οποία αξιολογήθηκε ποσοτικά η παρούσα έρευνα, καθώς επίσης και τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν. Τέλος στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα και επιχειρούμε κάποια συμπεράσματα.

Ακολουθεί παράρτημα με τα φύλλα εργασίας, το Ερωτηματολόγιο αξιολόγησης και τις δραστηριότητες που προτάθηκαν στους μαθητές. Ένα αρχείο excel με τις βαθμολογίες των 2 τμημάτων στο τεστ του σχολείου και στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης του οποίου τα δεδομένα εισήχθησαν στο SPSS και έγινε η στατιστική ανάλυση και τέλος, οι διάλογοι του ερευνητή με τους μαθητές στις συνεντεύξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : Ιστορικά στοιχεία

Στο κεφάλαιο αυτό δεν είναι πρόθεσή μας να κάνουμε μια ιστορική ανασκόπηση της Γεωμετρίας. Άλλωστε υπάρχει μια πλούσια βιβλιογραφία στην οποία μπορεί κανείς να βρει σημαντικά στοιχεία γι' αυτό. Σκοπός μας είναι να κάνουμε μία σύνδεση με την πορεία που ακολούθησε η εξέλιξη της γεωμετρίας και κυρίως το Πυθαγόρειο θεώρημα, σε σχέση με την προσέγγιση που επιθυμούμε να έχουν οι μαθητές μας, στη διδακτική μας παρέμβαση.

1.1 Αναφορά στις πρώτες Γεωμετρικές θεωρίες

Στους αρχαίους χρόνους, όταν η γνώση ήταν συγκεντρωμένη στα χέρια λίγων, πολλές φορές αυτοί ήταν ιερείς, η επιστήμη ταυτιζόταν με τη θρησκεία ή ακόμη και τη μαγεία. Τα μαθηματικά της εποχής (αριθμητική και γεωμετρία) ήταν μέρος της μυστικής γνώσης και συχνά συνδέονταν με μυστικισμό.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Οι γεωμετρικές γνώσεις αυτών των λαών, συνίστανται κυρίως στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι κυρίως εμπειρικής προέλευσης και η λύση τους δε συνιστά λογική απόδειξη.

Από τα μαθηματικά των λαών που αναφέραμε, τα Βαβυλωνιακά υπήρξαν τα πιο αξιόλογα και τα πιο περίπλοκα απ' όλα όσων προηγήθηκαν των ελληνικών μαθηματικών. Οι Βαβυλώνιοι εισήγαγαν την ιδέα ενός αριθμητικού συστήματος θέσης (το εξηκονταδικό), με το οποίο είχαν μια σαφή αναπαράσταση των αριθμών, χωρίς περιορισμό μεγέθους. Είχαν επίσης ένα συμβολισμό για τους ακέραιους και τα κλάσματα που τους επέτρεπε τον εύκολο λογισμό. Στη γεωμετρία υπολόγιζαν εμβαδά ορθογωνίων τριγώνων, παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Επίσης υπολόγιζαν όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων (Γιαννακούλιας, 2007).

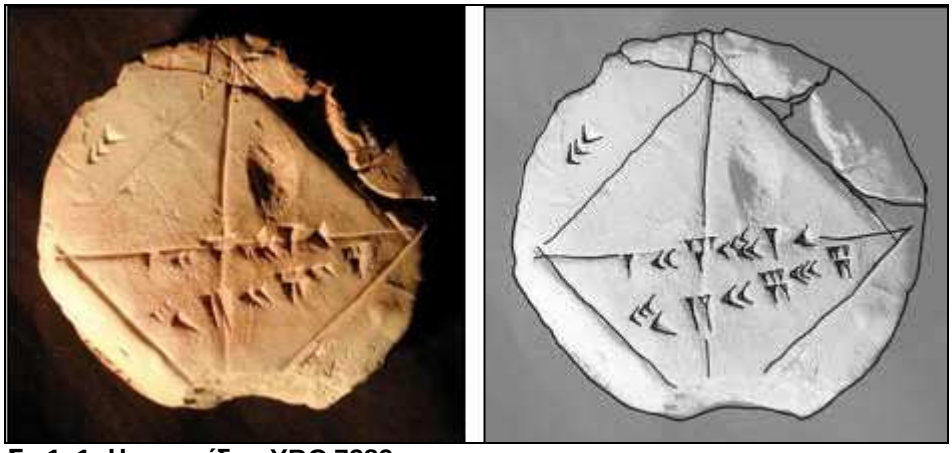
Ο Αιγυπτιακός πολιτισμός αναπτύχθηκε σε μια χρονική περίοδο 2000 περίπου χρόνων, από το 3000 έως το 1100 π.Χ. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη οι μαθηματικές τέχνες γεννήθηκαν πρώτα στην Αίγυπτο. Τα μαθηματικά όμως

των Αιγυπτίων δεν είχαν επιστημονική μορφή αλλά τα ασκούσαν επαγγελματικά οι Αιγύπτιοι γραφείς. Σ' αυτά ήταν ενοποιημένα αριθμητική και γεωμετρία και ασχολούνταν κυρίως με προβλήματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων (Van der Waerden, 2000).

Λέγεται ότι στην αρχαία Αίγυπτο η γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε στην οριοθέτηση και τη μέτρηση των γαιών, απ' όπου και ο όρος "γεωμετρία". Ανάγκη που δημιουργήθηκε από τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου και την επαναπόδοση των ιδιοκτησιών στους κατόχους τους. Αργότερα πιο προχωρημένοι υπολογισμοί, εμπειρικοί και πρακτικοί χρησιμοποιήθηκαν στην οικοδόμηση των πυραμίδων (Βασιλείου, 2009).

Μαρτυρίες για όλα τα παραπάνω έχουμε από πήλινες πινακίδες σφηνοειδούς γραφής που ανακαλύφθηκαν τον εικοστό αιώνα στη Μεσοποταμία, όπως είναι η πινακίδα «YBC 7289», η πινακίδα «Plimpton 322» και ο πάπυρος του Rhind.

1.1.1 Η πινακίδα «YBC 7289»



Σχ.1. 1: Η πινακίδα «YBC 7289»

Το όνομα της συγκεκριμένης πινακίδας σημαίνει ότι πρόκειται για την πινακίδα με αύξοντα αριθμό 7289 στη Βαβυλωνιακή Συλλογή του Πανεπιστημίου Yale. Χρονολογείται περίπου το 1800 με 1600 π.Χ. και απεικονίζει ένα τετράγωνο υπό κλίση και τις δύο διαγώνιές του, με κάποια σύμβολα χαραγμένα κατά μήκος της μιας πλευράς και κάτω από την οριζόντια διαγώνιο. Προκύπτει ότι πρόκειται για αριθμούς γραμμένους στο βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούσε ως βάση τον αριθμό 60. Οι ειδικοί που προσπαθούν να αποκωδικοποιήσουν τα αρχαία έγγραφα, βρήκαν πως στην περίπτωση της εν λόγω πινακίδας ο αριθμός που είναι γραμμένος κατά μήκος της πάνω αριστερής πλευράς αναγνωρίζεται εύκολα

ως ο 30. Κάτω από την οριζόντια διαγώνιο είναι με σύγχρονο συμβολισμό, η δεκαδική τιμή του $\sqrt{2}$, με ακρίβεια εκατοστού του χιλιοστού. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τη σχέση μεταξύ του μήκους της διαγωνίου ενός τετραγώνου και της πλευράς του, $d = a\sqrt{2}$. Όμως αυτό μπορεί να σημαίνει ότι γνώριζαν το πυθαγόρειο θεώρημα, ή τουλάχιστον την ειδική περίπτωσή του για τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, τουλάχιστον 1000 χρόνια πριν από τον Πυθαγόρα από όπου πήρε και το όνομά του (Maor, 2008).

1.1.2 Η πινακίδα Plimpton

Σχ.1. 2: Η πινακίδα Plimpton 322

Η πινακίδα Plimpton είναι μια πήλινη πινακίδα των Βαβυλωνίων από την ίδια περίοδο που αποδεικνύει ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν επίσης γνώστες αλγεβρικών διαδικασιών. Έχει την παραπάνω ονομασία γιατί κατέχει τον αύξοντα αριθμό 322 στη συλλογή του G.A. Plimpton στο Πανεπιστήμιο Columbia, στη Νέα Υόρκη. Πρόκειται για ένα πίνακα με τέσσερις στήλες, οι οποίες με μια πρώτη ματιά φαίνεται να αποτελούν καταγραφές εμπορικών συναλλαγών. Η προσεκτική ανάλυση, ωστόσο, αποκάλυψε ότι η πινακίδα ασχολείται με πυθαγόρειες τριάδες - δηλαδή ακέραιους αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Δυστυχώς στο αριστερό μέρος της πινακίδας λείπει ένα τμήμα της, αλλά ίχνη σύγχρονης κόλλας που βρέθηκαν στην άκρη του αποδεικνύουν ότι το χαμένο τμήμα έσπασε μετά την ανακάλυψη της πινακίδας, οπότε μπορεί κάποια μέρα να βρεθεί. Το χαμένο τμήμα έχει μερικώς αποκατασταθεί μετά από προσπάθεια και έρευνες των επιστημόνων και η πινακίδα μπορεί να διαβαστεί με μια σχετική άνεση. Η ερμηνεία αυτών που αναγράφονται οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι Βαβυλώνιοι πρέπει να γνώριζαν τον αλγόριθμο παραγωγής τέτοιων τριάδων, ο οποίος θα τυποποιούνταν 1500 χρόνια μετά, στα στοιχεία του Ευκλείδη. Στο σημείο αυτό ο Maor (2008) κάνει τα εξής σχόλια για την πινακίδα Plimpton:

Για τα αρχαία βαβυλωνιακά κείμενα - και ειδικά για την πινακίδα Plimpton 322 - έχουν προταθεί πολλές και αντικρουόμενες θεωρίες. Υπάρχουν αρκετές πινακίδες που συνηγορούν υπέρ της θέσης ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το πυθαγόρειο θεώρημα, τουλάχιστον εμπειρικά.

Η άποψη ότι η Plimpton 322 περιέχει πυθαγόρειες τριάδες ήταν, τουλάχιστον μέχρι πρόσφατα, η επικρατέστερη. Προτάθηκε από τους πρωτοπόρους στα βαβυλωνιακά μαθηματικά Otto Neugebauer και Abraham Sachs στο Mathematische Kleinschrift Texte (1935-1937). Μια πιο πρόσφατη θεωρία, η οποία προτάθηκε από την Eleanor Robson, ειδική στα βαβυλωνιακά μαθηματικά, δίνει μία άλλη ερμηνεία που βρίσκεται στα άρθρα της στο American Mathematical Monthly, 109 (2002), 105-120.

(Maor, 2008, σελ. 29).

1.1.3 Ο πάπυρος του Rhind

Σχ.1. 3: Ο πάπυρος του Rhind

Οι περισσότερες πληροφορίες για τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά προέρχονται από τον πάπυρο Rhind, μια συλλογή από ογδόντα τέσσερα προβλήματα που ασχολούνται με την αριθμητική, τη γεωμετρία, και τη στοιχειώδη άλγεβρα. Ο πάπυρος Rhind τον οποίο αντέγραψε από το πρωτότυπο, το 1650 π.Χ. κάποιος ονομαζόμενος Ahmose (ή Ahmes), αγοράστηκε το 1858 από το Σκοτσέζο Αιγυπτιολόγο A. Henry Rhind στο Λούξορ (Luxor) της Αιγύπτου και μάλλον βρέθηκε κατά την διάρκεια παράνομων ανασκαφών κοντά στην περιοχή Ramesseum και στη συνέχεια αγοράστηκε από το Βρετανικό Μουσείο το 1865. Έχει 18 πόδια μήκος και 13 ίντσες πλάτος. Επέζησε κάτω από εντυπωσιακά καλές συνθήκες και είναι το παλαιότερο εγχειρίδιο μαθηματικών που έφθασε σε μας σχεδόν άθικτο.

Ο πάπυρος είναι πιθανώς ένα βιβλίο μαθηματικών, που χρησιμοποιούνται από γραφείς (το κύριο εγγράμματο τμήμα του πληθυσμού) για εκμάθηση και επίλυση ειδικών μαθηματικών προβλημάτων με την παράθεση κατάλληλων παραδειγμάτων. Το κείμενο περιλαμβάνει ογδόντα

τέσσερα προβλήματα: πίνακες διαιρέσεων, πολλαπλασιασμούς, πράξεις με κλάσματα και γεωμετρικά προβλήματα συμπεριλαμβανομένων όγκων και εμβαδών.

Στον πάπυρο του Rhind το πυθαγόρειο θεώρημα δεν αναφέρεται ούτε μία φορά. Αυτό όμως σημαίνει ότι οι Αιγύπτιοι δεν το γνώριζαν; Λέγεται ότι χρησιμοποιούσαν ένα σχοινί που έφερε κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους προκειμένου να μετρούν αποστάσεις. Το σχοινί που έφερε τρεις, κατόπιν τέσσερις και τέλος πέντε διαδοχικούς κόμπους, θα πρέπει, να οδήγησε τους Αιγύπτιους στην ανακάλυψη ότι ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5 είναι ορθογώνιο τρίγωνο και κατ' επέκταση στη σχέση $3^2+4^2=5^2$.

1.2 Οι πρώτες προσπάθειες συστηματοποίησης της Γεωμετρίας

Η μελέτη της γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα, πέρα από τις πρακτικές ανάγκες, ως πνευματική αναζήτηση, ως θεωρητικό περίβλημα, είναι κατάκτηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος.

Κατ' αρχήν πρέπει να αναφερθεί πρώτα το όνομα του γεωμέτρη και φιλοσόφου Θαλή, ενός εκ των επτά Σοφών της αρχαίας Ελλάδας. Θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που συνέλαβε και εφάρμοσε την ιδέα της απόδειξης. Η φιλοσοφική του άποψη ήταν ότι η φύση έχει νόμους, τους οποίους μπορούμε να ανακαλύψουμε, ενώ μπορούμε να εξηγήσουμε τα φαινόμενα μέσω της παρατήρησης και της λογικής.

Ο Θαλής, γόνος πλούσιας οικογένειας και έμπορος ο ίδιος, θεμελίωσε γύρω στο 600 π.Χ. την «Ιωνική Σχολή», την πρώτη φιλοσοφική σχολή της αρχαίας Ελλάδας. Κατά τον νεοπλατωνικό φιλόσοφο Πρόκλο (410-485 μ.Χ.), ο Θαλής επισκέφθηκε την Αίγυπτο από όπου και επανέφερε στην Ελλάδα τις γνώσεις της Γεωμετρίας. Η γεωμετρία των Αιγυπτίων στα χρόνια του Θαλή ήταν στο στάδιο της γεωμέτρησης, δηλαδή ήταν ένα σύνολο από εμπειρικούς κανόνες για τη μέτρηση των εκτάσεων του εδάφους. Οι Έλληνες έμαθαν από τους Αιγύπτιους τους κανόνες υπολογισμού εμβαδών και όγκων, αλλά ήταν οι πρώτοι που σκέφθηκαν να τους αποδείξουν.

Με χρήση των ομοίων τριγώνων υπολόγισε ακριβώς το ύψος των πυραμίδων, κάτι που προηγουμένως γινόταν μόνο εμπειρικά. Η πρόβλεψη της έκλειψης του ήλιου το 585 π. Χ. τον κατέστησε πρόσωπο μυθικό. Για να κάνει την πρόβλεψη αυτή, πιθανόν να χρησιμοποίησε τις πολυάριθμες αστρονομικές παρατηρήσεις που είχαν κάνει οι Βαβυλώνιοι επί σειρά αιώνων. Ο Θαλής ήταν ο πρώτος που θέλησε να στηρίξει τη γεωμετρία σε νόμους

σκέψης καθολικής αποδοχής και εφαρμογής. Έτσι οι βάσεις της θεωρητικής γεωμετρίας, κατά γενική παραδοχή, τέθηκαν από αυτόν (Γιαννακούλιας, 2007).

Στο Θαλή αποδίδονται, από τον Πρόκλο, η πατρότητα των προτάσεων:

- Κάθε εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή.
- Οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- Δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτή γωνίες ίσες είναι ίσα.

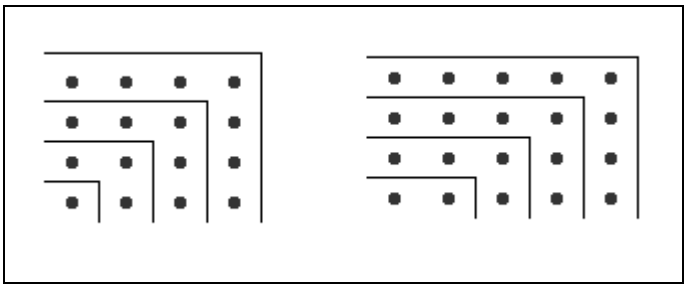
Γεγονός είναι ότι ο Θαλής προετοίμασε τους Πυθαγόρειους και απέδειξε πολλά θεωρήματα που συμπεριέλαβε στα Στοιχεία του ο Ευκλείδης.

1.2.1 Πυθαγόρειοι & πυθαγόρεια σχολή

Ο Πυθαγόρας (περίπου 570-500 π.Χ.) γεννήθηκε στη Σάμο. Αν και υπήρξε σύγχρονος του Θαλή, η άποψη ότι υπήρξε μαθητής του δεν φαίνεται να αληθεύει λόγω της διαφοράς ηλικίας των πενήντα περίπου ετών μεταξύ τους. Λέγεται ότι όπως ο Θαλής έτσι και ο Πυθαγόρας ταξίδευσε στην Αίγυπτο, τη Μεσοποταμία και την Ινδία, σύμφωνα με αρχαίες ιστορικές πηγές (Ιάμβλιχος 300 μ.Χ., Πορφύριος 232-304 μ.Χ., Διογένης ο Λαέρτιος 2ος αιώνας μ.Χ.). Ο Πυθαγόρας φέρεται επίσης ότι μαθήτευσε κοντά στους ιερείς του Πέρση νομομαθούς Ζωροάστρη, υπήρξε δε σύγχρονος του Βούδα, του Κομφούκιου και του κινέζου φιλόσοφου Λάο Τσε. Κατά το 525 π.Χ. περίπου, ο Πυθαγόρας μετανάστευσε στον Κρότωνα της Νοτίου Ιταλίας, όπου ίδρυσε τη γνωστή "Πυθαγόρεια Αδελφότητα", ένα κοινωνικό σύνολο, κάτι μεταξύ πολιτικού κόμματος και θρησκευτικής οργάνωσης. Ουσιαστικά ο Πυθαγόρας υπήρξε φιλόσοφος και ηθικοδιδάσκαλος, η φιλοσοφία του όμως στηρίζονταν σε μαθηματική βάση. (Αρτεμιάδης, 2000). Πέθανε, σύμφωνα με ένα θρύλο, μέσα στις φλόγες που πυρπόλησαν το σχολείο του - έργο πολιτικών και θρησκευτικών μισαλλόδοξων που ξεσήκωναν τις μάζες εναντίον της διαφώτισης που ο Πυθαγόρας ήθελε να φέρει. Sic transit gloria mundi. (Bell, 1995)

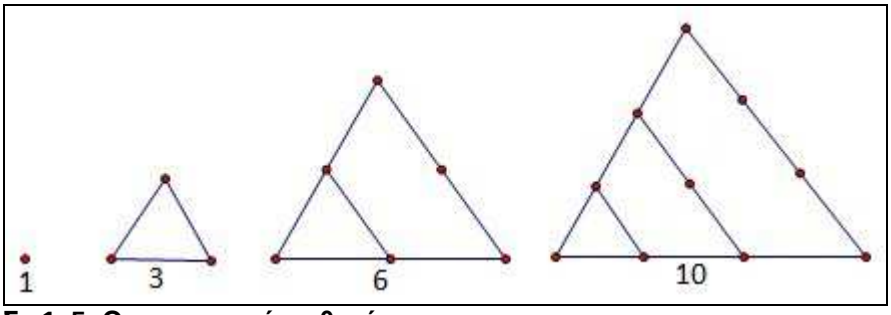
Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τους αριθμούς και τους ανακήρυξαν ως τα «φυσικά» δομικά υλικά της φύσης. Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι τα πάντα γύρω μας μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των αριθμών. Από τα Μαθηματικά οι πιο βασικοί αριθμοί είναι οι πρώτοι, οι οποίοι αποτελούν την κορωνίδα της Αριθμητικής και των άλλων επιστημών, ενώ ότι βρίσκεται στη φύση αποτελεί μίμηση αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι όταν

ήθελαν να εκφράσουν έναν περιττό αριθμό, π.χ. το 7, χρησιμοποιούσαν χαλίκια και γνώμονες. Δηλαδή τοποθετούσαν ένα χαλίκι, μετά ένα γνώμονα, κατόπιν ένα χαλίκι στη μία πλευρά του γνώμονα, ένα στην κορυφή και ένα στην άλλη πλευρά του γνώμονα. Η διαδικασία αυτή συνεχιζόταν διαρκώς μέχρις ότου να εμφανιστεί ο επιθυμητός περιττός. Με αντίστοιχο τρόπο αναπαριστούσαν και τους άρτιους. Ξεκινώντας από δύο χαλίκια, τοποθετούσαν γνώμονα, κατόπιν ένα χαλίκι στη μία πλευρά του, ένα στην κορυφή και άλλα δύο στην άλλη πλευρά του γνώμονα. Η διαδικασία πάλι συνεχιζόταν μέχρι να εμφανιστεί ο επιθυμητός άρτιος. (βλ. Σχ. 1.4)

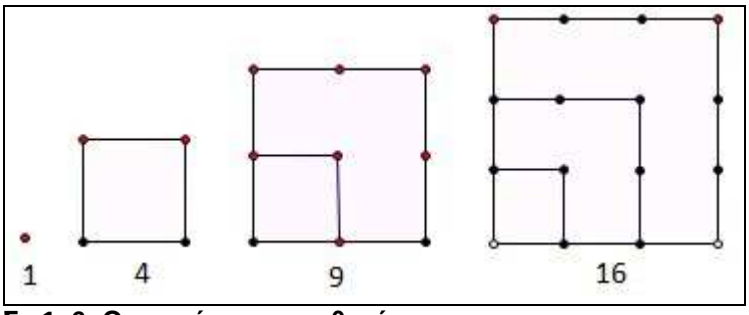


Σχ.1. 4: Ο σχηματισμός των περιττών και άρτιων με γνώμονες.

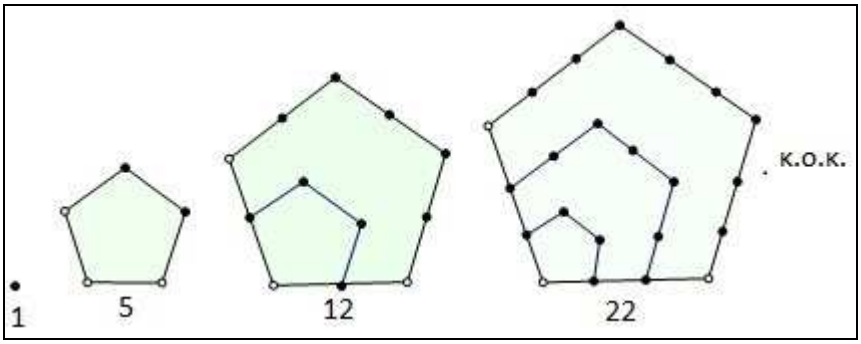
Στους πυθαγόρειους οφείλεται η ανακάλυψη των λεγόμενων πολυγωνικών ή σχηματικών αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί θεωρούμενοι ως το πλήθος των σημείων ορισμένων γεωμετρικών σχημάτων, αποτελούν το συνδετικό κρίκο της γεωμετρίας με την αριθμητική.



Σχ.1. 5: Οι τριγωνικοί αριθμοί



Σχ.1. 6: Οι τετράγωνοι αριθμοί



Σχ.1. 7: Οι πενταγωνικοί αριθμοί

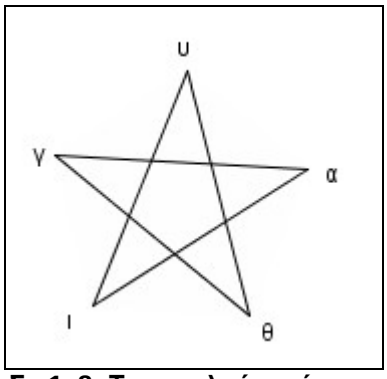
Οι μαθητές της Πυθαγόρειας σχολής που παρακολουθούσαν τα μαθήματα, χωρίζονταν σε δύο κλάσεις: τους "πυθαγόρειους", οι οποίοι ήταν απλοί ακροατές, και τους "πυθαγορικούς" οι οποίοι ήταν επιπλέον και μαθηματικοί. Άλλοι μελετητές ισχυρίζονται ότι, οι Πυθαγόρειοι αποτελούσαν μια κλειστή κοινωνία που έβλεπαν τον εαυτό τους: "εμείς - οι Πυθαγόρειοι - και οι άλλοι" (Νεγρεπόντης, 2009). Οι Πυθαγόρειοι ("άξιοι", ενώ οι άλλοι "ανάξιοι") χωρίζονταν σε ακουσματικούς και μαθηματικούς. Στους ακουσματικούς η περιγραφή της πυθαγόρειας γνώσης γίνονταν με συμβολικό τρόπο, οι οποίοι δέχονταν τα συμπεράσματα των μαθηματικών που είχαν τη γνώση. Οι μαθηματικοί είχαν αποκτήσει μεγάλη γνώση των πραγμάτων την οποία όμως κρατούσαν μυστική.

Η πιο σαφής ιστορία από όλες αυτές που περιγράφονται είναι αυτή από τον Πάππο. Αυτός που θα παραβεί την υποχρέωση για μυστικότητα θα χαθεί ή θα πνιγεί στη θάλασσα (από τη θεία δίκη).

Οι Πυθαγόρειοι δεν πίστευαν ότι το κέντρο του κόσμου είναι η γη. Πίστευαν ότι το κέντρο του κόσμου είναι το «εν» και γύρω από αυτά γύριζαν τα πάντα ακόμα και η γη. Συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης περιγράφει ότι ομοιώματα των αριθμών είναι το πυρ, η γη και το ύδωρ, ενώ δεν παύει να τονίζει ότι οι αριθμοί περιέγραφαν τη δικαιοσύνη, την ψυχή, το νου ακόμα και το πότε είναι η κατάλληλη στιγμή να προβεί κάποιος σε συγκεκριμένες ενέργειες.

Ένα από τα σύμβολα αναγνωρίσεως μεταξύ των πυθαγορείων ήταν και το «τριπλούν τρίγωνον» (πεντάγραμμο ή αστεροειδές πεντάγωνο ή πυθαγόρειο άστρο (βλ. Σχ.1.8). Εθεωρείτο ότι συμβολίζει την υγεία και στις γωνίες του ήταν γραμμένα τα γράμματα της λέξης «υγεία» με τη διαφορά ότι ο δίφθογγος ει, έχει αντικατασταθεί με το γράμμα θ. Ο αριθμός 10 ονομαζόταν «θείος αριθμός». Στο σχήμα του τριπλού τριγώνου διακρίνουμε 10 κορυφές και ότι ο αριθμός 10 είναι «τριγωνικός» αριθμός, δηλαδή μπορεί να γραφεί με

τη μορφή: v+(v-1)+...+2+1, όπου v ακέραιος και θετικός. (Στην περίπτωση του 10, είναι v=4).



Σχ.1. 8: Το τριπλούν τρίγωνο

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει να μελετήσουμε μία από τις βασικότερες Πυθαγόρειες δοξασίες ότι ο κόσμος βασίζεται σε δέκα αρχές οι οποίες έχουν τη μορφή διπόλου. Η πιο βασική είναι το δίπολο «πέρας και άπειρο» με τη βοήθεια της οποίας είναι συνδεδεμένα και όλα τα υπόλοιπα. Ο κόσμος των Πυθαγορείων ήταν δομημένος με βάση τους αριθμούς και επειδή αριθμοί για αυτούς ήταν οι ακέραιοι, ήταν δομημένος κατά τρόπο ρητό. Οι ακέραιοι αριθμοί ήταν αυτοί που ρύθμιζαν το σύμπαν ποιοτικά και ποσοτικά. Μελετώντας λοιπόν τους αριθμούς πίστευαν ότι αποκαλύπτοντας τις εσωτερικές τους ιδιότητες, ίσως μπορούσαν σε κάποιο βαθμό να καθορίσουν ή να βελτιώσουν το πεπρωμένο τους (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Αριστοτέλης στα Μεταφυσικά κάνει κάποια σχόλια για τους αριθμούς που όπως αναφέρει γεννιούνται από το «εν». Ωστόσο δεν είναι ο πρώτος που κάνει σχόλια για τους αριθμούς. Ο Πλάτων σε χωρία στην Πολιτεία (522-526) και στο Φίληβο, επισημαίνει ότι οι αριθμοί δεν χρησιμοποιούνται σωστά από τους περισσότερους ανθρώπους και αυτό για τον εξής λόγο. Λένε για παράδειγμα «2 άνθρωποι», κάτι που δεν είναι σωστό. Οι αριθμοί πρέπει να έχουν ίσες μονάδες.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο (Πρόκλος εις Ευκλείδην 35,21 – 36,3), για τους Πυθαγόρειους, η Μαθηματική Επιστήμη χωρίζονταν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η πρώτη ήταν εκείνη που ασχολείται με το ΠΟΣΟΝ, σ’ αυτήν ανήκουν η αριθμητική και η μουσική. Η δεύτερη κατηγορία ασχολείται με το ΠΗΛΙΚΟΝ, σ’ αυτήν υπάγονταν η γεωμετρία και η αστρονομία.

Ο «μυστικισμός» που κυριαρχούσε στην Πυθαγόρεια σχολή συνδεόταν και με δοξασίες που (όπως συμβαίνει συχνά) δεν ήταν πάντα σωστές. Σύμφωνα με μία από αυτές, «τα μεγέθη είναι σύμμετρα», δηλαδή το

αποτέλεσμα της μέτρησης ενός ευθυγράμμου τμήματος ως προς οποιαδήποτε μονάδα πρέπει να είναι ρητός αριθμός. Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οποιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και στο ΓΔ. Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιό ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους Πυθαγόρειους στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές. Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη Γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) συναντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί αν υποτεθεί ότι η διαγώνιος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σιδέρης, 2001).

Η κατάρριψη αυτής της δοξασίας συγκλόνισε τους Πυθαγόρειους, όχι μόνο επειδή ανέτρεπε ένα από τα θεμελιώδη στοιχεία των απόψεών τους, αλλά και γιατί δημιούργησε σοβαρότατες δυσκολίες στις "συλλογιστικές", και, ίσως αποδεικτικές διαδικασίες που οι Πυθαγόρειοι είχαν προωθήσει αισθητά τόσο ως προς την ποιότητα, όσο και ως προς την κομψότητα. Διαβάζουμε στον Στράντζαλο (1989) ότι:

> Η ανακάλυψη των «αρρήτων» θεωρείται σήμερα μια από τις ιδιαίτερα σημαντικές κατακτήσεις της αρχαιότητας. Επηρέασε καίρια την επιστημονική σκέψη της εποχής και το συγκεκριμένο τρόπο ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, πιθανόν γιατί:
>
> - επέτεινε την «αντιπάθεια» των αρχαίων Ελλήνων προς τους υπολογισμούς, αφού θα είχαν αυξημένες δυσκολίες με υπολογισμούς όπου θα υπεισέρχονταν άρρητοι αριθμοί, αφού δεν είχαν κατανοήσει καλά την έννοια του «αρρήτου» και

- έγινε μία από τις κύριες αιτίες για τη διατύπωση του γενικού προβλήματος της Γεωμετρίας της εποχής, που απαιτούσε «κατασκευές σχημάτων μόνο με κανόνα και διαβήτη», κάτι που διευκόλυνε χειρισμούς ακόμα και με «άρρητα μεγέθη».

Ο Πλάτων (≅427-347 π.Χ.) φαίνεται να προβληματίστηκε περισσότερο στις αντιφάσεις που έβγαλε στην επιφάνεια η ανακάλυψη των «αρρήτων». Πολλοί υποστηρίζουν ότι διατύπωσε την εικασία ότι: τα προβλήματα των κατασκευών μόνο με κανόνα και διαβήτη είναι η "κορυφή του παγόβουνου" στην προσπάθειά του να συμβιβάσει τη θέση των Πυθαγορείων, ότι οι ακέραιοι αριθμοί παίζουν θεμελιακό ρόλο για τα πάντα, με την άποψη που κέρδιζε συνεχώς έδαφος για τον κυρίαρχο ρόλο της γεωμετρίας, η οποία έδινε διεξόδους όσον αφορά τους "αρρήτους". Για το λόγο αυτό οι ίδιοι ερμηνεύουν και την επιγραφή της Ακαδημίας του Πλάτωνα «μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω». (Στράντζαλος, 1989, σελ. 15)

1.2.2 Πυθαγόρειες τριάδες

Στη σχολή του Πυθαγόρα εκτός από τη φιλοσοφία, τη μουσική και την αριθμητική καλλιεργείται και η γεωμετρία. Η απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι η πιο γνωστή παγκοσμίως από τις γεωμετρικές ενασχολήσεις της σχολής. Προέκυψε από αριθμητικές θεωρήσεις, δηλαδή από τη μελέτη τριάδων αριθμών (α,β,γ) που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Τριάδες τέτοιων αριθμών έχουν καταγράψει και οι Βαβυλώνιοι, όπως και οι Αιγύπτιοι γνώριζαν τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, με εμπειρικό τρόπο, αλλά δεν ενδιαφέρονταν να αναζητήσουν το γιατί είναι αληθινή. Ορισμένοι διανοητές ισχυρίζονται ότι πρόκειται για το πιο ονομαστό αλλά και το πιο σημαντικό θεώρημα στη ιστορία των Μαθηματικών. επειδή δίνει μια τόσο βασική, όμορφη και μη προφανή συσχέτιση μεταξύ γεωμετρίας και αριθμών (Davis, 2007).

Πυθαγόρεια τριάδα είναι μία τριάδα ακεραίων (α, β, γ) τέτοια ώστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Με απλή άλγεβρα δείχνεται ότι για κάθε θετικούς ακέραιους μ, ν, η τριάδα $\left(\mu^2 - \nu^2, 2\mu\nu, \mu^2 + \nu^2\right)$ (1) είναι Πυθαγόρεια τριάδα. Για παράδειγμα θέτοντας μ=2 και ν=1 παίρνουμε την τριάδα (3, 4, 5). Κάθε πολλαπλάσιο Πυθαγόρειας τριάδας είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα. Για παράδειγμα οι τριάδες (6, 8, 10), (9, 12, 15) είναι Πυθαγόρειες ως πολλαπλάσια της (3, 4, 5), πράγμα που δεν είναι και πολύ ενδιαφέρον. Πιο ενδιαφέρουσα είναι η εύρεση βασικών Πυθαγόρειων τριάδων, που, ενώ είναι Πυθαγόρειες τριάδες δεν είναι πολλαπλάσια καμίας άλλης τέτοιας. Άρα μια Πυθαγόρεια τριάδα είναι βασική ή πρωταρχική αν οι α, β, γ δεν έχουν κοινούς διαιρέτες ≠ 1. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η Πυθαγόρεια τριάδα του τύπου

(1) είναι βασική αν και μόνο αν οι μ και ν δεν έχουν κοινούς διαιρέτες και έχουν αντίθετη ισοτιμία mod2. (Αυτό σημαίνει, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός). Δεν είναι πολύ πιο δύσκολο να δειχθεί ότι όλες οι βασικές Πυθαγόρειες τριάδες προέρχονται από τον τύπο (1) (Davis, 2007).

Οι Πυθαγόρειοι είχαν ανακαλύψει τον ακόλουθο τύπο που δίνει τριάδες πλευρών με μήκη ακέραια: $\left(\mu, \frac{\mu^2-1}{2}, \frac{\mu^2+1}{2}\right)$, όπου μ περιττός ακέραιος. Αναφέρεται ότι ο φιλόσοφος Πλάτωνας (5ος π.Χ. αιώνας) ανακάλυψε έναν άλλον τύπο που δίνει ορθογώνια τρίγωνα με ακέραιο μήκος πλευρών για μ άρτιο αριθμό. Ο τύπος αυτός είναι: $\left(\mu, \frac{\mu^2}{4}-1, \frac{\mu^2}{4}+1\right)$. Αργότερα ο μαθηματικός Διόφαντος (μέσα του 3ου μ.Χ. αιώνα) βρήκε όλους τους τύπους που δίνουν πλευρές ορθογωνίων τριγώνων με ακέραιο μήκος, δηλαδή έλυσε την εξίσωση $\chi^2+\psi^2=\omega^2$ με χ, ψ, ω ακέραιους αριθμούς και έτσι ανακάλυψε όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες. Η κεντρική ιδέα του Διόφαντου ήταν η αξιοποίηση της ταυτότητας $(2\mu\nu)^2+\left(\mu^2-\nu^2\right)^2=\left(\mu^2+\nu^2\right)^2$, η οποία ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους. Η λύση της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=\omega^2$ είναι ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης $\chi^\nu+\psi^\nu=\omega^\nu$, όπου ν φυσικός αριθμός, για την οποία ο Γάλλος Pierre de Fermat (1601-1665) είχε διατυπώσει την εικασία ότι δεν είχε άλλες λύσεις εκτός από αυτές που βρήκε ο Διόφαντος. Η πλήρης απόδειξη της εικασίας του Fermat, ένα δύσκολο πρόβλημα που βασάνισε τους μαθηματικούς για περισσότερο από 300 χρόνια, πραγματοποιήθηκε μόλις το 1995 από το μαθηματικό Andrew Wiles.

Το πρόβλημα της ύπαρξης ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές ακέραιες σχετίζεται με ένα άλλο ερώτημα: όλα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν πλευρές με μήκος ρητό; Δηλαδή, μήπως υπάρχουν ορθογώνια τρίγωνα, που η μια τουλάχιστον πλευρά τους έχει μήκος άρρητο αριθμό; Τη απάντηση και στο ερώτημα αυτό βρήκε ο ίδιος ο Πυθαγόρας, αφού αναγκάστηκε να αναθεωρήσει μια βασική αρχή της φιλοσοφίας του, σύμφωνα με την οποία το υπέρτατο Όν είχε οικοδομήσει το Σύμπαν με τέτοιον τρόπο, ώστε οι σχέσεις των αντικειμένων να εκφράζονται με αριθμούς ακέραιους ή κλασματικούς. (Θωμαΐδης, Ξένος, Παντελίδης, Πούλος & Στάμου, 1999).

1.3 Η συστηματοποίηση της γνώσης

Η επίπεδη Γεωμετρία που διδάσκουμε και διδαχθήκαμε στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο στηρίζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη που γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ.. Επικρατεί η άποψη ότι ο Ευκλείδης συμπλήρωσε ουσιαστικά τις προϋπάρχουσες γνώσεις και κυρίως τις προσπάθειες αξιωματικοποίησης, που φαίνεται ότι δεν άρχισαν με τα «Στοιχεία». Λέγεται ότι αυτό το βιβλίο είναι το πιο πολυδιαβασμένο μετά τη Βίβλο και έχει θεωρηθεί από πολλούς ως το αρχέτυπο ενός αυστηρού συμπερασματικού συστήματος. Τα «Στοιχεία» είναι το βιβλίο με τις περισσότερες μεταφράσεις μετά τη Βίβλο και δημοσιεύτηκαν για πρώτη φορά τυπωμένα στη Βενετία το 1482 στη λατινική γλώσσα, ενώ η πρώτη εκτύπωση στα ελληνικά έγινε στη Βασιλεία το 1533.

Δεν έχει διασωθεί η πρωτότυπη γραφή των «Στοιχείων» και ότι έφτασε σ' εμάς είναι το αποτέλεσμα αλλεπάλληλων αντιγραφών (Στράντζαλος, 1998).

Δεν είναι γνωστό πόσα από τα θεωρήματα αυτά ανήκουν αποκλειστικά στον ίδιο, συνήθως αποκαλούνται απλώς θεωρήματα του Ευκλείδη, εκτός από λίγες ειδικές περιπτώσεις, όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

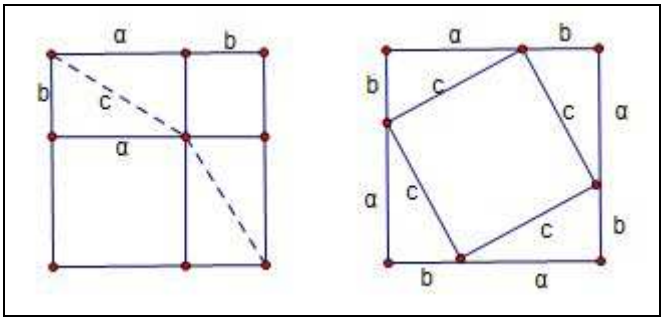
Το βιβλίο Ι των Στοιχείων περιέχει 48 προτάσεις. Στο 3^{ο} και τελευταίο μέρος του, που μπορεί να χαρακτηριστεί η Γεωμετρία των εμβαδών, περιλαμβάνονται οι Προτάσεις 35 έως 47 με επιστέγασμα την Πρόταση Ι.47, το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Κατά άλλους περιέχεται και η Πρόταση 48, που είναι το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Επικεντρωνόμαστε στο τελευταίο αυτό μέρος του Βιβλίου Ι, όπου το Πυθαγόρειο Θεώρημα παρουσιάζεται από τον Ευκλείδη στη θεωρία εμβαδών. Παρατηρούμε ότι η πορεία του Πυθαγορείου θεωρήματος ξεκινάει από τους αρχαιότατους χρόνους (Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι) από εμπειρικά στοιχεία, κατόπιν παίρνει μια πιο αλγοριθμική μορφή με τις τριάδες (Πυθαγόρειοι, ακέραιες τριάδες) και καταλήγει σε σχέση εμβαδών. Ακολουθεί θα λέγαμε μια συνεχόμενη γενίκευση, που ταιριάζει με τη δομή που σκοπεύουμε να ακολουθήσουμε στην έρευνά μας. Η πειραματική διδακτική παρέμβαση του Πυθαγορείου θεωρήματος με σκοπό την εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου που σχεδιάζουμε και περιγράφουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, ακολουθεί μια σταδιακή γενίκευση που ξεκινάει από εμπειρικά βιώματα των μαθητών, ποσοτικοποιείται από τις τριάδες για να οδηγήσει στην επαγωγική αλήθεια της σχέσης $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.

Ολοκληρώνοντας τις αναφορές μας στα ιστορικά στοιχεία σημειώνουμε ότι, οι αρχαίοι Έλληνες σε αντίθεση με τους προγενέστερους τους, δεν ενδιαφέρονταν για τον αριθμητικό υπολογισμό των εμβαδών. Πολύ περισσότερο τους ενδιέφερε η «αναγωγή» των εμβαδών σε εμβαδά γνωστών σχημάτων, π.χ. σε εμβαδά τετραγώνων, από όπου και προέκυψε ο όρος «τετραγωνισμός» ενός σχήματος. Η «αναγωγή» αυτή γινόταν με «σύγκριση» των εμβαδών μεταξύ τους.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι (αναφερόμενος στον Εύδημο) η πρόταση 47 είναι του Πυθαγόρα και μάλιστα, ότι ο Πυθαγόρας θυσίασε ένα βόδι για να ευχαριστήσει τους θεούς για την ανακάλυψη αυτή. Λέει επίσης, ότι αν και θαυμάζω αυτόν που ανακάλυψε την πρόταση, θαυμάζω περισσότερο τον συγγραφέα των Στοιχείων, όχι μόνο γιατί απέδειξε απλούστερα με ένα λαμπρό τρόπο το θεώρημα, αλλά γιατί βρήκε και περισσότερα γενικά θεωρήματα.

Μια πιο εποπτική απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος που για άλλους εικάζεται ότι οφείλεται στους πυθαγόρειους μοιάζει με την παρακάτω:



Σχ.1. 9: Το σχήμα στην απόδειξη που εικάζεται των Πυθαγορείων

Τα δύο μεγάλα τετράγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν και τα δύο περιέχουν τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα α-b-c. Το ένα έχει εμβαδόν $a^2 + b^2$ ενώ το άλλο c^2. Άρα $a^2 + b^2 = c^2$. Στην απόδειξη αυτή υποκρύπτει η Πρόταση 32. που λέει ότι οι δύο μη ορθές γωνίες των τριγώνων α-b-c έχουν άθροισμα 90°. Αυτό είναι αναγκαίο προκειμένου να σχηματιστούν και τα δύο σχέδια του Σχ.1.9. Στο αριστερό χρειάζεται για να είναι τα τρίγωνα ταιριαστά μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν ορθογώνιο, ενώ στο δεξιό διάγραμμα χρειάζεται για να είναι η γραμμή της βάσης ευθεία. (Davis, 2007).

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Το 1819 ο Γερμανός μαθηματικός J. W. Múller δημοσίευσε ένα βιβλίο με τις πιο ενδιαφέρουσες αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στην έκδοση του

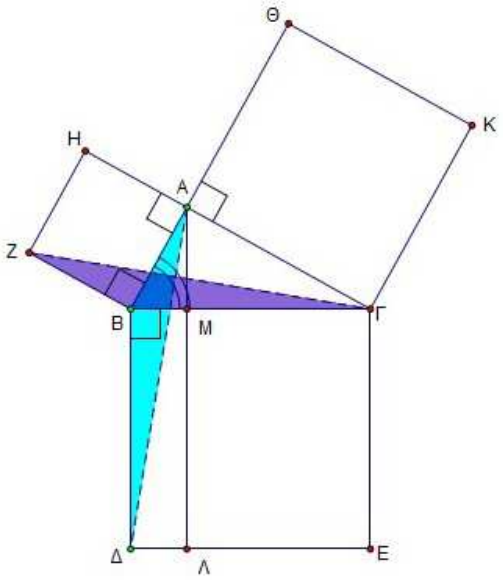
1821, το βιβλίο περιείχε 32 αποδείξεις, μεταξύ των οποίων και μία του Leonardo da Vinci. Το 1927 ο Αμερικανός μαθηματικός Elisha Scott Loomis δημοσίευσε ένα βιβλίο με 370 αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος. Σήμερα ο αριθμός των γνωστών αποδείξεων είναι πολύ μεγαλύτερος των 1000 και συνεχώς μεγαλώνει. Για παράδειγμα, μπορούμε να δημιουργούμε συνεχώς αποδείξεις γενικεύοντας παλαιότερες. Μία μάλιστα απόδειξη αποδίδεται στον Πρόεδρο των Η.Π.Α. James A. Garfield (1831-1881), (Εξαρχάκος, 2001).

1.4 Η Πρόταση Ι47 των Στοιχείων του Ευκλείδη

Τελειώνοντας, έχοντας ολοκληρώσει τη σύντομη αναφορά μας στην εξέλιξη και πορεία του Πυθαγορείου θεωρήματος, παρουσιάζουμε την τελική και γενικευμένη μορφή με την οποία αυτό, παρουσιάζεται από τον Ευκλείδη. Αποδεικνύεται με τη βοήθεια των εμβαδών, αφού ανήκει άλλωστε και στην τελευταία ενότητα που όπως αναφέραμε μπορεί να θεωρηθεί η Γεωμετρία των εμβαδών. Ομοίως και στα μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου, η διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος στηρίζεται στην έννοια του εμβαδού αφού εισάγεται ακριβώς μετά από αυτή την έννοια και περιγράφεται αναλυτικά στην §3.4.

Πρόταση Ι47 - Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.



Απόδειξη

Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο και $\hat{A} = 90°$. Θα αποδείξουμε ότι (ΒΓΕΔ)=(ΑΒΖΗ)+(ΑΓΚΘ).
Φέρουμε ΑΛ // ΒΔ και θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΖΗ)=(ΒΔΛΜ) και κατ' αναλογία, (ΑΓΚΘ)=(ΓΜΛΕ). Σύμφωνα με την Πρόταση 41. ισχύει ότι: (ΑΒΖΗ)=2(ΒΖΓ) και (ΒΔΛΜ)=2(ΑΒΔ).
Επειδή τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΑΒΔ είναι ίσα (ΒΓ κοινή, ΒΖ=ΑΒ και $Z\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta = \hat{B} + 90°$), έχουν ίσα εμβαδά και επομένως (ΑΒΖΗ)=(ΒΔΛΜ).

Σχ.1. 10: Η Πρόταση Ι47 και η απόδειξή της.

1.4.1 Η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου

Θεώρημα Ι

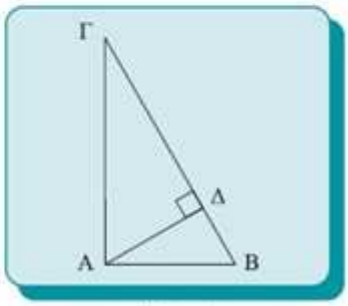
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ **και** $\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\angle$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:



Σχήμα 2

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \quad ή \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \qquad \text{και} \qquad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta\,.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι :

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$

$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2\,.$$

Σχ.1. 11: Σελ. 183-184 του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου

1.5 Κύρια σημεία του 1ου κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό, μέσα από τις αναφορές των πρώτων θεωριών που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά των αρχαίων χρόνων, παρουσιάζουμε την πορεία του Πυθαγορείου θεωρήματος. Τη γνώση που πιθανόν είχαν γι' αυτό, αρχαίοι λαοί όπως οι Βαβυλώνιοι ή οι Αιγύπτιοι. Η χρήση των Πυθαγορείων Τριάδων με ακέραιους από τους Πυθαγόρειους και η απόδειξη του θεωρήματος που εικάζεται ότι οφείλεται σ' αυτούς. Η Πρόταση Ι47 του Ευκλείδη και η παρουσίασή του από αυτόν με τη Γεωμετρία των εμβαδών. Συνοπτικά:

- Γίνεται μια αναφορά στην αρχή της Γεωμετρίας η οποία δημιουργήθηκε από την ανάγκη επίλυσης πρακτικών ζητημάτων και αντιμετωπιζόταν με έναν αλγοριθμικό τρόπο και αναφέρονται οι πινακίδες YBC 7289, Plimpton και ο πάπυρος του Rhind, από όπου πληροφορούμαστε για τις γεωμετρικές γνώσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων.
- Ο Θαλής συστηματοποιεί τις γνώσεις που αποκόμισε από την παραμονή του στην Αίγυπτο και δημιουργεί τις βάσεις της θεωρητικής γεωμετρίας. Αναφερόμαστε στους Πυθαγόρειους και στις Πυθαγόρειες τριάδες, όπου αρχίζει μια προσπάθεια ενοποίησης της αριθμητικής με τη γεωμετρία.
- Στα Στοιχεία του Ευκλείδη συγκεντρώνεται και συστηματοποιείται όλη η προηγούμενη γνώση, αλλά κυρίως αναφερόμαστε στο πως παρουσιάζεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Τέλος, δίνουμε τον τρόπο που παρουσιάζεται το συγκεκριμένο θεώρημα στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Θεωρητικό & διδακτικό πλαίσιο

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο Α΄ μέρος αναφέρουμε το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο οικοδομείται ο σχεδιασμός της διδασκαλίας μας. Συζητάμε για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων, την αντικειμενικότητα των μαθηματικών εννοιών και τη δυνατότητα προσέγγισής τους.

Στο Β΄ μέρος παρουσιάζουμε τις διδακτικές αρχές που στηρίζουν τη διδασκαλία μας με βάση αυτά που υποστηρίζουμε στο θεωρητικό πλαίσιο. Βασιζόμαστε σε γενικεύσεις και αφαιρέσεις οι οποίες στηρίζονται σε διδακτικές αρχές και πρότυπα.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

2.1 Ο όρος objectification (εξαντικειμενίκευση)

Ο όρος objectification, σύμφωνα με το Radford, έχει τις ρίζες του στη λέξη object η οποία παράγεται πρωταρχικά από το λατινικό ρήμα obiectare που σημαίνει βγάζω κάτι προς τα έξω (Charleton στο Radford, 2003). Η κατάληξη -tification προέρχεται από το ρήμα facere που σημαίνει κάνω ή φτιάχνω (Charleton στο Radford, 2003). Ετυμολογικά λοιπόν, η εξαντικειμενίκευση (objectification) σχετίζεται με εκείνες τις ενέργειες που στοχεύουν στο να φέρουν ή να βγάλουν κάτι μπροστά σε κάποιον, να κάνουν κάτι ορατό. Κατ' αυτή την έννοια ένα σημείο ή ένα σημάδι που τοποθετούμε κάπου για να μας υπενθυμίζει ένα άλλο αντικείμενο ή μια ενέργεια που πρέπει να κάνουμε εξαντικειμενικεύει το αντικείμενο ή την ενέργεια που θέλουμε. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι η σχέση του σώματός μας στο χώρο που παίζει το ρόλο της εξαντικειμενίκευσης. Τι γίνεται όμως με τη διαδικασία προσέγγισης των μαθηματικών αντικειμένων στα οποία δεν έχουμε άμεση πρόσβαση, δεν μπορούν να καταδειχθούν; Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμη η έννοια της αναπαράστασης.

2.2 Ο Radford και οι αναπαραστάσεις

Ο Radford (2003) επηρεασμένος από την εργασία του Vygotsky και από τη φαινομενολογία, αποδίδει στην αντανακλαστική διαμεσολαβημένη δραστηριότητα, ένα κεντρικό ρόλο τόσο στη γνωστική διαδικασία όσο και στην εμφάνιση των μαθηματικών αντικειμένων. Υποστηρίζει ότι, σύμφωνα με τον Kant (1781/1996) ο μόνος τρόπος που ένα αντικείμενο δίνεται σε μας είναι με το μυαλό, γίνεται αντιληπτό με ένα συγκεκριμένο τρόπο μέσα από τις αισθήσεις, από την αναπαράσταση του αντικειμένου. Ο Husserl (1859/1938) ο ιδρυτής της φαινομενολογίας, έχει επίσης μια παρόμοια θέση. Υπέθετε ότι οι έννοιες δίνονται σε μας με έναν αισθητηριακό τρόπο, για παράδειγμα, μέσω των αναπαραστάσεων, όπως οι μαθηματικές παραστάσεις, τα σχήματα κλπ. Η μάθηση κατά τον Radford (2003), θεωρείται μια διαδικασία εξαντικειμενίκευσης (objectification) που επιτυγχάνεται μέσα από μια αντανακλαστική δραστηριότητα, μια διαδικασία λήψης σημασίας που επιτρέπει στο μαθητή να λάβει γνώση του μαθηματικού αντικειμένου που υπάρχει πολιτισμικά, αλλά αυτός δεν αναγνωρίζει. Η εξαντικειμενίκευση επίσης, συνεπάγεται μια άλλη διαδικασία, τη διαδικασία της *αποϋποκειμενοποίησης (desubjectification)* - δηλαδή, το να καταστεί κάτι απρόσωπο. Η εξαντικειμενίκευση και η αποϋποκειμενοποίηση πρέπει στην πραγματικότητα να θεωρηθούν ως δύο αμοιβαία αποτελούμενες διαδικασίες στην καθοδήγηση της εμπλοκής των μαθητών με πολιτισμικές μορφές σκέψης και μια αίσθηση των θεμάτων από την διαπροσωπική άποψη της πολυφωνίας, της ένταξης και άλλων κύριων χαρακτηριστικών του κοινοτιστικού εαυτού (Radford, 2006a).

Οι διαδικασίες δημιουργίας γνώσης είναι ενσωματωμένες σε συστήματα δραστηριοτήτων που περικλείουν και άλλα φυσικά και αισθητηριακά μέσα εξαντικειμενίκευσης εκτός της ομιλίας για παράδειγμα, που δίνουν μια σωματική και χειροπιαστή μορφή της γνώσης επίσης. Η εξαντικειμενίκευση των μαθηματικών αντικειμένων φαίνεται να συνδέεται με τις διαμεσολαβητικές και αντανακλαστικές προσπάθειες του ατόμου που σκοπό έχουν την κατάκτηση της επιτυχίας της ενέργειάς του. Για να το καταφέρει αυτό μπορεί να χειρίζεται αντικείμενα (πλαστικά μπλοκ ή χρονόμετρα), να σχεδιάζει, να κάνει χειρονομίες, να γράφει σημειώσεις ή να κάνει αναλογίες, μεταφορές, μετονομασίες κ.λπ. Με άλλα λόγια χρησιμοποιεί σημεία και γλωσσικά εργαλεία μέσω των οποίων οργανώνει τις δράσεις του χωροχρονικά. Όλα τα

παραπάνω, που χρησιμοποιεί κανείς για την επίτευξη μιας σταθερής μορφής συνειδητοποίησης, για να κάνει εμφανείς τις προθέσεις του, τα ονομάζει ο Radford, σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης (semiotic means of objectification). Κατά μία έννοια, τα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης είναι προφανώς κοινωνικές πρακτικές. Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, για τη γλώσσα που από μόνη της είναι μια κοινωνική πρακτική. Κάποιες άλλες πρακτικές σχετίζονται με την πολιτισμική και κοινωνική ανάπτυξή τους. Τα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης που βρίσκουν τα άτομα στον πολιτισμό τους (της γλώσσας συμπεριλαμβανομένης), παράγονται για κάποιο σκοπό. Θα έλεγε κανείς ότι είναι σαν μακροεντολές (macros) για εξοικονόμηση δράσεων, αλλά το πιο σημαντικό είναι κυρίως η ιστορική τους διάσταση που τα κάνει φορείς μιας «ενσώματης ευφυΐας», δηλαδή μεταφέρουν κανόνες προηγούμενων συλλογισμών. Σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, ο Radford καλεί σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης το όλο οπλοστάσιο των αποβλεπτικών πόρων που κινητοποιεί το άτομο στην άσκηση των δραστηριοτήτων του και υπογραμμίζει την κοινωνική τους φύση: Τα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης εμφανίζονται ενσωματωμένα σε κοινωνικό - ψυχό - σημειωτικές διαδικασίες απόδοσης νοήματος, πλαισιωμένες από πολιτισμικούς κανόνες γνώσης που ενθαρρύνουν και νομιμοποιούν ιδιαίτερους τρόπους του σημείου και του εργαλείου, ενώ απορρίπτουν άλλους.

Τα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης (Santi, 2006) διαχωρίζουν τα μαθηματικά αντικείμενα, σε επίπεδα γενίκευσης σύμφωνα με την αντανακλαστική δραστηριότητα στην οποία μεσολαβούν. Η σημασία δεν είναι πλέον μια απλή σχέση σημείου - αντικειμένου, αλλά μια διπλής όψης κατασκευή με μια προσωπική μια πολιτισμική διάσταση. Η προσωπική διάσταση αναφέρεται στις αποβλεπτικές πράξεις του ατόμου κατευθυνόμενες προς ένα ενιαίο πολιτισμικό αντικείμενο. Η πολιτισμική διάσταση αναφέρεται στα συνοπτικά πολιτισμικά και ιστορικά χαρακτηριστικά ενός γενικού και διαπροσωπικού μαθηματικού αντικειμένου που παρουσιάζεται στο άτομο με διδακτικές δραστηριότητες. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα της μάθησης ως μια διαδικασία εξαντικειμενίκευσης, είναι η ευθυγράμμιση της προσωπικής με την πολιτισμική σημασία.

2.3 Ο Duval και οι αναπαραστάσεις

Ο Duval (2006) προκειμένου να ερευνήσει την παρανόηση (incomprehension) των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά αντικείμενα επιχειρεί να καθορίσει τις γνωστικές συνθήκες που κάνουν δυνατή την κατανόησή τους. Διερωτάται λοιπόν ποιά γνωστικά συστήματα απαιτούνται και κινητοποιούνται στην πρόσβαση ενός μαθηματικού αντικειμένου και αν ο τρόπος σκέψης είναι ο ίδιος στα μαθηματικά όπως και στις άλλες γνωστικές περιοχές. Θεωρεί πως η διαφορά δεν έγκειται στις έννοιες, περισσότερο ή λιγότερο πολύπλοκες στους διάφορους τομείς της γνώσης, αλλά στα παρακάτω τρία βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών:

α) την κυρίαρχη σημασία των σημειωτικών αναπαραστάσεων

β) το γνωστικό παράδοξο της πρόσβασης στο γνωστικό αντικείμενο και

γ) τη μεγάλη ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται σ' αυτά. Πιο συγκεκριμένα:

Τα μαθηματικά αντικείμενα, ξεκινώντας από τους αριθμούς, δεν είναι αντικείμενα που παρατηρούνται, για παράδειγμα με τη βοήθεια κάποιων οργάνων. Η πρόσβαση στους αριθμούς συνδέεται με τη χρήση ενός συστήματος αναπαραστάσεων που τους επιτρέπει να υποδειχθούν, όχι όμως μόνο για να υποδείξουν τα μαθηματικά αντικείμενα αλλά για να δουλεύουν πάνω σ' αυτά και μαζί με αυτά. Ο ρόλος των σημείων στα μαθηματικά δεν είναι για να συσταθούν για αυτά τα αντικείμενα, αλλά για άλλα σημεία. Ο μόνος τρόπος λοιπόν να τα αντιληφθούμε και να επικοινωνήσουμε με αυτά είναι με τη χρήση σημειωτικών αναπαραστάσεων. Και ενώ για να γίνει οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα, πρέπει αναγκαστικά να χρησιμοποιηθούν οι σημειωτικές αναπαραστάσεις, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν πρέπει να συγχέονται με τη σημειωτική αναπαράσταση στην οποία χρησιμοποιούνται ακόμη και αν υπάρχει επιλογή για το είδος της. Προκειμένου λοιπόν οι μαθητές να διακρίνουν το αναπαριστώμενο αντικείμενο από τη σημειωτική αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε, πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα αλλαγής από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο που πολύ συχνά αποτελεί το κρίσιμο κατώφλι για την πρόοδο στη μάθηση και στην επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον η μαθηματική δραστηριότητα χρειάζεται να έχει διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα τα οποία να χρησιμοποιούνται ελεύθερα ανάλογα το σκοπό που έχουν να επιτύχουν, ή σύμφωνα με το ερώτημα που τίθεται. Κάποιες διαδικασίες είναι

πιο εύκολες σε ένα σημειωτικό σύστημα από ένα άλλο, ή ακόμη μπορούν να γίνουν σε ένα μόνο τέτοιο σύστημα. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τουλάχιστον δύο τέτοια συστήματα.

Στη γεωμετρία είναι απαραίτητο να συνδεθεί η χρήση τουλάχιστον δύο αναπαραστασιακών συστημάτων, ένα για λεκτικές εκφράσεις των ιδιοτήτων ή για αριθμητικές εκφράσεις μεγέθους και ένα άλλο για την οπτικοποίηση (visualization). Αυτό που ονομάζεται «γεωμετρικό σχήμα» συνδέει πάντα τόσο τις λεκτικές (discursive) όσο και τις οπτικές αναπαραστάσεις ακόμη και αν μόνο μία από αυτές μπορεί να τονισθεί ρητά σύμφωνα με τη μαθηματική δραστηριότητα που απαιτείται. Επιπλέον στη στοιχειώδη γεωμετρία, ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική απόδειξη δουλεύει στη φυσική γλώσσα δεν μπορεί να τυποποιηθεί παρά μόνο με τη χρήση συμβολικών συστημάτων. Στην τάξη μιλάμε τη φυσική γλώσσα ενώ γράφουμε με συμβολικές εκφράσεις σαν να μπορούν οι λεκτικές εξηγήσεις να κάνουν οποιαδήποτε συμβολική επεξεργασία διαφανή (Duval, 2000b).

Προκειμένου να επιτευχθεί τελικά η κατανόηση στα μαθηματικά, ο Duval (2006) προϋποθέτει το συντονισμό τουλάχιστον δύο σημειωτικών αναπαραστάσεων. Κατ' αρχήν η καλή εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων οφείλει να οδηγήσει το μαθητή να δει σε ένα σχήμα αυτά που πρέπει να δει ώστε να βρει εκείνα τα στοιχεία που θα τον οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Κατόπιν μπορεί να χρειάζεται να μετασχηματιστούν οι αναπαραστάσεις, χωρίς όμως να αλλάξουν τα σημαίνοντα αντικείμενα. Δηλαδή απαιτείται αναγνώριση του ίδιου αναπαριστώμενου αντικειμένου μεταξύ δύο αναπαραστάσεων, των οποίων τα περιεχόμενα πολύ συχνά δεν έχουν τίποτα κοινό. Αυτό που βλέπει κάποιος σε ένα σχήμα εξαρτάται από παράγοντες οπτικής αναγνώρισης. Αυτοί ο παράγοντες είναι, που αναγνωρίζουν και διαχωρίζουν κάποιους τύπους σε ένα σχήμα και εξαιρούν από το διαχωρισμό άλλους δυνατούς μετασχηματισμούς ή κρυμμένα σχήματα στο ίδιο σχήμα.

2.4 Σύγκριση των θεωριών Duval και Radford

Ο Santi (2006) επιχειρώντας να συγκρίνει την προσέγγιση του μαθηματικού αντικειμένου μέσα από τη δομική και λειτουργική προσέγγιση του Duval και την πολιτισμική-σημειολογική προσέγγιση του Radford, σημειώνει ότι, μολονότι και οι δύο θεωρίες συνδέονται από σημειωτική προοπτική σε σχέση με τη γνωστική λειτουργία, η σημειωτική έχει διαφορετική

ιεραρχική θέση στο αντίστοιχο σύστημα αρχών. Στην προσέγγιση του Duval, η σημειωτική παίζει αναπαραστασιακό ρόλο και είναι η ίδια η φύση της γνωστικής λειτουργίας που ταυτίζεται με το συντονισμό των σημειωτικών συστημάτων. Στην προοπτική του Radford, η γνωστική λειτουργία θεωρείται μια διαδικασία εξαντικειμενίκευσης στην οποία το σημείο διαμεσολαβεί σε μια αντανακλαστική δραστηριότητα. Τα σημεία επίσης χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο. Στην προοπτική του Duval, οι σημειωτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται διαχρονικά μέσα από την επεξεργασία και τη μετατροπή των μετασχηματισμών. Ενώ, στην προοπτική του Radford, η έννοια του σημείου διευρύνεται ώστε να συμπεριλάβει χειρονομίες, αντικείμενα, ρυθμό, κιναισθητικές δραστηριότητες κ.λπ., κάτι που ο Duval δεν θα εξέταζε ποτέ σημειωτικά.

Οι δύο θεωρίες όμως παρά τις διαφορές τους δεν συνεπάγουν την αντίθεση μεταξύ των δύο προοπτικών. Η ανάπτυξη των μαθηματικών αντικειμένων χαρακτηρίζεται από δύο συμπληρωματικές λειτουργίες: τη φάση λειτουργίας και την αναφορική φάση (Ullmann, 1962). Από τη μια μεριά τα μαθηματικά αντικείμενα και η σημασία τους αναδύονται και εξαντικειμενικεύονται από μια αντανακλαστική δραστηριότητα, από την άλλη πλευρά, είναι απαραίτητο να αναφέρονται λεκτικά στις οντότητες που προκύπτουν από αυτές τις πρακτικές. Η διττή φύση των μαθηματικών αντικειμένων - σαν κανονικότητες της δραστηριότητας και σαν «υπαρκτές» ιδεατές πολιτισμικές οντότητες - συνεπάγεται επίσης ότι η σημασία και η σημειωτική έχουν διττή φύση. Ο συντονισμός των δύο θεωριών είναι σε θέση να επιτευχθεί από τη διπλή φύση της σημειωτικής. Ο Santi (2006) καταλήγει ότι, αν παραβλέψουμε τα σημεία ως σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης, η μάθηση είναι ένας κενός και χωρίς νόημα χειρισμός των σημείων, αν παραβλέψουμε επίσης, ότι τα σημεία ανήκουν στο σημειωτικό σύστημα, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν θα είχαν εξελιχθεί στην ορθολογιστική μορφή που γνωρίζουμε σήμερα και η εννοιολογική τους απόκτησή θα ήταν αδύνατη. Αν αγνοήσουμε μία από αυτές τις πτυχές η κατανόηση της σημασίας και οι διαδικασίες μάθησης είναι αναπόφευκτα ελλιπείς.

2.5 Η υποκειμενική κατασκευή των ιδεατοτήτων: Εξαντικειμενίκευση

Ένα κεντρικό ερώτημα που απασχόλησε τον Husserl ήταν, ποιά είναι *η σχέση ανάμεσα στην υποκειμενικότητα της γνώσης και στην αντικειμενικότητα του περιεχομένου της γνώσης*. Ο Σπύρου (2006) ερμηνεύει το ερώτημα αυτό λέγοντας, «πώς δηλαδή συγκροτείται μέσα στο υποκείμενο ο αντικειμενικός διϋποκειμενικός κόσμος και πώς παράγονται οι καθολικές αλήθειες» (σελ.149).

Στο έργο του «Origin of Geometry» ο Husserl έθεσε το πρόβλημα της διόδου από την υποκειμενική αισθητηριακή εμπειρία των αντικειμένων στην αντικειμενικότητα μιας ιδεατότητας, διαχρονικό αντικείμενο με τους ακόλουθους όρους:

> «Το πρόβλημα μας τώρα αφορά ακριβώς τα ιδεατά αντικείμενα που είναι στη γεωμετρία: πως αυτή η γεωμετρική ιδεατότητα (όπως και ότι όλες οι επιστήμες) μεταβαίνει από την πρωτογενή ενδοπροσωπική προέλευση στην ιδεατή της αντικειμενικότητα ;» (Husserl 1989, σελ.161)

Ο Derrida (1989) σημειώνει ότι οι ιδεατότητες του Husserl θα έπρεπε να διαφοροποιηθούν από τα Πλατωνικά ιδεώδη, γιατί αυτά δεν προϋπάρχουν οποιασδήποτε υποκειμενικής δράσης και έχουν μία ιστορία στην οποία πρέπει να αναφέρονται. Πρέπει να αναπτύχθηκαν σε πρωτο-ιδεατότητες στη βάση ενός πραγματικά αντιληπτού πραγματικού κόσμου. Παρ' όλα αυτά, οι ιδεατότητες του Husserl, άπαξ και κατασκευαστούν υποκειμενικά σε ένα συγκεκριμένο χώρο και μια συγκεκριμένη στιγμή, μοιάζουν στα Πλατωνικά ιδεώδη ως προς την αντικειμενικότητά τους. Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενικότητα επιτυγχάνεται όντας μέλος μιας άμεσης και έμμεσης γλωσσικής κοινότητας. Μέσω του προφορικού λόγου, η ιδεατότητα απελευθερώνεται από την έμμεση γλωσσική κοινότητα, αλλά συνδέεται με το ξεκίνημά της και το συγχρονισμό μιας αλλαγής μέσα στην ιδρυτική κοινότητα. Μέσω του γραπτού λόγου, η ιδεατότητα αποκτά την απόλυτα ιδεατή αντικειμενικότητα, όπου κάθε υποκείμενο εμφανίζεται με την απουσία του. Έτσι, η εξαντικειμενίκευση μιας ιδεατότητας εμφανίζεται μέσα σε ένα σημειωτικό σύστημα (συμπεριλαμβανομένων των σημείων και των ρόλων που αυτά χρησιμοποιούν) που καλείται να περιγράψει και να παρουσιάσει εκ νέου το σημαινόμενο της ιδεατότητας αυτής (Husserl, 2001).

Οι Lappas και Spyrou (2006) αναγνωρίζουν δύο επίπεδα εξαντικειμενίκευσης των γεωμετρικών εννοιών, εξαρτώμενα από το σημειωτικό σύστημα μέσα στο οποίο εμφανίζεται η εξαντικειμενίκευση. Στο

πρώτο επίπεδο, τα αρχέτυπα αποτελέσματα που πηγάζουν από την εμπειρία εξαντικειμενικεύονται μέσω των αριθμητικών τους αναπαραστάσεων, μιας και οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για την εγκαθίδρυση της ομογένειας των εμπειριών σε κοινωνικές μορφές και στις εφαρμογές τους. Στο δεύτερο επίπεδο, τα υπάρχοντα αρχέτυπα αποτελέσματα ενσωματώνονται στη θεωρία, η οποία βασίζεται στο λογικό και παραγωγικό τρόπο σκέψης.

2.6 Ιστορία και εξαντικειμενίκευση

Η μελέτη της ιστορικής ανάπτυξης μιας μαθηματικής έννοιας μπορεί να βοηθήσει τους καθηγητές των μαθηματικών στον παιδαγωγικό σχεδιασμό που θα διευκολύνει τους μαθητές στη μάθηση αυτής της έννοιας (Fauvel & van Maanen, 2000). Όμως η αναπαραγωγή της ιστορίας στην τάξη είναι ουσιαστικά αδύνατη (Radford, 1997), λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές κοινωνικές και πολιτισμικές παραμέτρους που κάθε εποχή συνεπάγεται. Κατά συνέπεια, οι δάσκαλοι πρέπει να γνωρίζουν τα «γιατί» και «πώς» μιας επιτυχημένης εφαρμογής της ιστορίας στους σχεδιασμούς τους (Arcavi & Isoda, 2007· Furinghetti, 2007· Jankvist, 2009). Η Furinghetti (2007), στην έρευνά της με μελλοντικούς καθηγητές, πρότεινε μια μη γραμμική διαδικασία που μπορεί να οδηγήσει στο σχεδιασμό μιας κατάλληλης διδακτικής ακολουθίας, που βασίζεται την ιστορία. Η γνώση του προγράμματος σπουδών από τους εκπαιδευτικούς, η ιστορία και η γνωστική ανάπτυξη φαίνονται να είναι κρίσιμες για έναν τέτοιο σχεδιασμό.

Από μια φαινομενολογική προοπτική, ο Husserl (1999) σημείωσε ότι στην παραδοσιακή, λογικό-παραγωγική διδασκαλία της γεωμετρίας οι μαθητές «έρχονται αντιμέτωποι με έτοιμες ιδέες και προτάσεις με ένα αυστηρά συστηματικό τρόπο» χωρίς κανένα «προεπιστημονικό εργαλείο», αφαιρώντας μ' αυτόν τον τρόπο από τη γεωμετρία το «αληθινό της νόημα». Ως εκ τούτου, ο Husserl εμμένει στη σημασία της σύνδεσης του «πραγματικού κόσμου» με τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας. Ο Radford (1997) συμφωνεί, ότι μια αρχαία ιδέα «μέσω ενός προσαρμοσμένου διδακτικού έργου, μπορεί πιθανώς να ξανασχεδιαστεί και να συμβαδίζει με τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών. Η παρέμβαση του δασκάλου είναι αποφασιστικής σημασίας για να οδηγήσει την αλληλεπίδραση δασκάλου - μαθητή προς «την κατεύθυνση του πολιτισμικού εννοιολογικού αντικειμένου» (Radford, 2006).

2.7 Βαρύτητα και ανθρώπινο σώμα

Τα ανθρώπινα όντα έχουν ζήσει σε ένα περιβάλλον που διαμορφώνεται και καθορίζεται από τους νόμους της βαρύτητας, οι οποίοι επέδρασαν στην ανάπτυξη της εσωτερικής εξέλιξης των σωμάτων τους, ιδιαίτερα στην αίσθηση της ικανότητας του ανθρώπου να αναγνωρίζει την κατακόρυφο. Για παράδειγμα, η βαρύτητα παίζει καθοριστικό ρόλο στη λειτουργία της *(equlilibrial triad) τριαδικής ισορροπίας* (οπτικά, ιδιοδεκτικά και προθαλαμιαία συστήματα· Noback, Strominger, Demarest & Ruggiero, 2005), η εισαγωγή της οποίας αξιολογείται από τον ανθρώπινο εγκέφαλο προκειμένου να επιτευχθεί η βέλτιστη ισορροπία, ο μηχανικός προγραμματισμός και ο χωρικός προσανατολισμός. Επιπλέον, η ανάγκη να επιζήσει κάποιος σε ένα τρισδιάστατο χώρο φαίνεται να είναι σύμφωνη με τη δομή της τριαδικής ισορροπίας. Παραδείγματος χάριν, τα ημικυκλικά κανάλια μέσα στο αυτί διαμορφώνουν ένα σύστημα αναφοράς τριών αξόνων (παρόμοιο με αυτά που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά· βλ. Manno, 2006). Επιπλέον, η περιβαλλοντική επίπτωση στις λειτουργίες του εγκεφάλου εμφανίζεται να είναι τόσο στα αισθητηριακά συστήματα όσο και στα εσωτερικά μοντέλα, που μπορούν «να οριστούν ως τα νευρωνικά συστήματα που μιμούνται τις φυσικές αρχές» (Merfeld, Zupan & Peterka, 1999, σελ. 615). Για παράδειγμα, ο ανθρώπινος εγκέφαλος εμφανίζεται να προσλαμβάνει ένα εσωτερικό μοντέλο της βαρύτητας που συμπληρώνει τις πληροφορίες που λαμβάνει από τις αισθήσεις (McIntyre, Zago, Berthoz & Lacquaniti, 2001). Συνολικά, η βαρύτητα φαίνεται να είναι κεντρική στη δομή και τη λειτουργία του ανθρώπινου σώματος και του εγκεφάλου. Μια ποικιλία σωματικών και νευρικών μηχανισμών έχει αναπτυχθεί, προκειμένου να προσδιοριστεί η κατακόρυφος και ο άνθρωπος να επιζήσει σε έναν κόσμο που κυβερνάται από τη βαρύτητα. Επιπλέον, αυτοί οι μηχανισμοί μπορούν να συνδεθούν με τις θεμελιώδεις γεωμετρικές έννοιες, όπως η καθετότητα και άλλες γενικότερες μαθηματικές έννοιες.

2.8 Σύνδεση ιστορικότητας και ενσωμάτωσης στη γεωμετρία

Η ισχυρή επίδραση της βαρύτητας στον ανθρώπινο εγκέφαλο υποστηρίζεται στη διατριβή *ενσώματος νους· (embodied mind)* (Varela, Thompson & Rosch, 1991). Οι Lappas και Spyrou (2006) ανέπτυξαν ένα θεωρητικό μοντέλο το οποίο επιχειρεί να συνδέσει ιδέες από την παραπάνω

διατριβή με το ιστορικό πλαίσιο εντός του οποίου χτίζεται μια μαθηματική ιδέα. Τόνισαν ότι τα άτομα χτίζουν τη «διανοητική τους αναπαράσταση του κόσμου, μέσω μιας προοδευτικής αναδιοργάνωσης των προγενέστερών τους ενεργών χειρισμών του περιβάλλοντος» (σελ. 12-13). Συγχρόνως, υποστήριξαν ότι, προκειμένου να επιτευχθεί η βαθύτερη κατανόηση όσον αφορά τους τρόπους που η ανθρώπινη εμπειρία θα μπορούσε να μετασχηματιστεί στις μαθηματικές έννοιες, είναι λογικό να εξεταστούν τόσο οι σωματικές λειτουργίες όσο και το ιστορικό πλαίσιο.

Οι Lappas και Spyrou (2006) προϋπέθεσαν ότι τα κύρια θεωρητικά εργαλεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προέρχονται από την αντίληψη της κατακορύφου, την οριζοντιότητας και της γεωμετρικής ομοιότητας ((verticality, horizontality and geometric similarity), αντίστοιχα V, H και S). Η ανάγκη να επικοινωνηθούν οι εντυπώσεις και οι εσωτερικές αναπαραστάσεις, οδήγησε στα πρώτα αποτελέσματα της γεωμετρίας, μέσω της αντικειμενικής απόδοσης και της εκπραγμάτωσης (reification) των λειτουργιών που συνδέονται με τις μορφές V, H και S, πρωτίστως, μέσω των αριθμών και ακολούθως μέσω της λογικής. Τα «αρχέτυπα» αποτελέσματα, όπως οι Πυθαγόρειες τριάδες, αποτέλεσαν μία πρωτόγονη υποκειμενική - ομοιογενή και διϋποκειμενική - γνώση, πριν από την εμφάνιση οποιασδήποτε συνεπούς λογικής παραγωγικής θεωρίας στη γεωμετρία.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

2.9 Φαινομενολογικές ιδέες στη διδακτική των μαθηματικών

Στη διδασκαλία των μαθηματικών, ένα θέμα που έχει συζητηθεί από διάφορες οπτικές γωνίες, είναι η φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Διάφοροι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, επισημαίνουν ότι τα παιδιά για να αναπτύξουν μαθηματικές ιδέες χρειάζεται να διαχειριστούν και να μελετήσουν καταστάσεις με περιεχόμενο και νόημα γι' αυτούς. Οι καταστάσεις όμως αυτές αν και ξεκινάνε από πρακτικούς χειρισμούς χρειάζεται να οδηγήσουν τους μαθητές να μετασχηματίσουν τα πραγματικά αντικείμενα που χειρίζονται, σε νοερά και έτσι να τα αντιληφθούν σε ένα ανώτερο επίπεδο (Freudenthal, 1983). Στη διδακτική φαινομενολογία του ο Freudenthal (1983) βλέπει τα μαθηματικά σαν μια δραστηριότητα και θεωρεί ότι οι μαθητές θα πρέπει να καθοδηγούνται έτσι ώστε, να επανεπινοήσουν (guided reinvention) τις έννοιες που τίθενται υπό συζήτηση, χρησιμοποιώντας τη γνώση που ήδη έχουν.

Ο Freudenthal (1983) αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες ως εργαλεία οργάνωσης των πραγματικών φαινομένων. Αντί να παρουσιαστούν στο μαθητή οργανωμένα φαινόμενα, με στόχο την ανακάλυψη κοινών δομών, προτείνεται ο μαθητής να ξεκινήσει από τα ίδια τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και με αφετηρία αυτά, να διδαχθεί πώς να χειρίζεται τις μαθησιακές έννοιες και δομές. Υποστηρίζει επίσης ότι ο μαθητής έχει το δικαίωμα να ακολουθήσει τη μαθησιακή πορεία που ακολούθησε το ανθρώπινο είδος, χωρίς αυτό βέβαια, να σημαίνει ότι θα αναπαραχθεί βήμα προς βήμα η ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας.

Παρόμοιες φαινομενολογικές ιδέες έχουν εφαρμοστεί σε διάφορες έρευνες των μαθηματικών. Για παράδειγμα, στον τομέα των ρεαλιστικών μαθηματικών (Gravemeijer, 1994), που σχετίζονται κατ' ουσία με ρεαλιστικά προβλήματα, έχουμε παρόμοιες διδακτικές προσεγγίσεις με τις φαινομενολογικές ιδέες του Freudenthal. Οι Brown και Haywood (2011) σε μία έρευνα που στόχο είχε την ικανότητα των μαθητών όσον αφορά τα μαθηματικά μοντέλα του ηλιακού συστήματος, οι μαθητές κλήθηκαν να διερευνήσουν πώς φαντάζονται τη μέρα και τη νύχτα, ή τις 4 εποχές του χρόνου, συζητώντας, σχεδιάζοντας και παίζοντας και να εξηγήσουν όλα αυτά, με βάση τις πλανητικές κινήσεις. Τους ζητήθηκε δηλαδή να διαπραγματευτούν

φαινόμενα που ήταν «γνωστά» εκ των προτέρων, αλλά καλούνταν να τα μάθουν με νέους τρόπους μέσω κάποιων δραστηριοτήτων.

Ο Radford (2003) σε μία άλλη διδασκαλία που αφορούσε τη συμπλήρωση μιας ακολουθίας σχημάτων, όπου οι μαθητές έπρεπε να βρουν το πλήθος των οδοντογλυφίδων που χρειαζόταν, για παράδειγμα το $25^{ο}$ σχήμα μετά από 3 διαδοχικά σχήματα που τους εμφανιζόταν, σημειώνει ότι, οι μαθητές μέσα από τη χρήση ενός ευρέος συνόλου μέσων, όπως οι γλωσσικές μεταφορές, παρομοιώσεις, διάφορες κινήσεις και χειρονομίες, κατάφεραν να οδηγηθούν σε ένα επιθυμητό επίπεδο κατανόησης και κατάκτησης των στόχων της δραστηριότητας.

Η Fynn (2007) σε μία έρευνα για το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις γωνίες, προτείνει μια διδακτική στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές μέσω «αληθινών» γι' αυτούς δραστηριοτήτων, (ένα αναρριχητικό παιγνίδι) καθοδηγούνται στην επανεπινόηση μαθηματικών εννοιών.

Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε την άποψη ότι η εξαντικειμενίκευση περιγράφει τη διαδικασία της υποκειμενικά κατασκευασμένης ιδεατότητας η οποία μπορεί να συμβεί μόνο μια φορά για κάθε μαθηματικό αντικείμενο. Βιώνοντας την επανενεργοποίηση της εξαντικειμενίκευσης, ο μαθητής κατορθώνει να αναδημιουργήσει την ήδη - σε μια συγκεκριμένη εποχή - κατασκευασμένη ιδεατότητα και όχι μία άλλη διαφορετική. Σε ένα συγκεκριμένο σχέδιο διδασκαλίας, αποτελούμενο από κατάλληλα προοδευτικές μαθηματικοποιήσεις και την καθοδηγούμενη επανεπινόηση, ο μαθητής μπορεί να ανακατασκευάσει την ήδη εξαντικειμενοποιημένη μαθηματική έννοια, δοκιμάζοντας κατά συνέπεια την επανενεργοποίηση της εξαντικειμενίκευσής του. Σύμφωνα με αυτές τις θέσεις, στο σχέδιο διδασκαλίας μας, προσπαθήσαμε να εφαρμόσουμε τις ιδέες από ένα θεωρητικό πλαίσιο που συνδέει ρητά ιδέες από την ιστορία, τη φαινομενολογία και τη διατριβή «ενσώματος νους» με παιδαγωγικές αρχές που προτείνονται από τους Harel και Tall (1991).

Βασιζόμαστε σε γενικεύσεις και αφαιρέσεις οι οποίες για να γίνουν βασίζονται σε διδακτικές αρχές και πρότυπα. Επιπλέον στο σχεδιασμό της διδασκαλίας ενσωματώνεται η έννοια του αναστοχασμού των μαθητών στη σκέψη τους και στη δράση τους («αναστοχαστική δράση»· Τζεκάκη, 2011), όπως επίσης και η συμφωνία με το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα.

2.10 Γενίκευση

Οι Harel & Tall (1991) αναγνωρίζουν τρεις τύπους γενίκευσης που μπορούν να προκύψουν όταν οι σπουδαστές διαπραγματεύονται με μία καινούργια έννοια. Την *διευρύνουσα γενίκευση (expansive generalization)* στην οποία γίνεται διεύρυνση ενός υπάρχοντος σχήματος χωρίς την ανακατασκευή του. Την *αναδιαρθρωτική γενίκευση (reconstructive generalization)* στην οποία γίνεται ανακατασκευή ενός υπάρχοντος σχήματος προκειμένου να διευρυνθεί το εύρος εφαρμογής του. Την *αποκομμένη γενίκευση (disjunctive generalization)* στην οποία για τη μετάβαση από ένα οικείο πλαίσιο σε ένα άλλο, κατασκευάζεται ένα νέο μη σχετιζόμενο (*disjoint*) σχήμα για να διαπραγματευτεί κανείς τη νέα έννοια και αυτό το νέο σχήμα προστίθεται στο φάσμα των διαθέσιμων σχημάτων.

Αναλύοντας αυτούς τους τύπους γενίκευσης, οι Harel & Tall (1991) σημειώνουν ότι μια πραγματική γενίκευση είναι η επεκτατική, με την έννοια ότι τα προηγούμενα σχήματα περιλαμβάνονται άμεσα ως ειδικές περιπτώσεις στο τελικό σχήμα. Διαφέρει από την επανορθωτική γενίκευση στο ότι στην τελευταία, το παλιό σχήμα αλλάζει, εμπλουτίζεται πριν να ενσωματωθεί στο γενικότερο σχήμα, αλλά στη συνέχεια παρέχει μια πραγματική γενίκευση του εμπλουτισμένου σχήματος. Μια επιτυχημένη περίπτωση γενίκευσης φαίνεται να είναι η διαζευκτική γενίκευση. Επιτρέπει σίγουρα στο μαθητή να αντιμετωπίσει ένα ευρύτερο φάσμα από μαθηματικά παραδείγματα, αλλά αποτυγχάνει να είναι μια γνωστική γενίκευση. Με την έννοια ότι, μπορεί να μην είναι αντιληπτά από το μαθητή, κάποια παραδείγματα ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής διαδικασίας. Μακροπρόθεσμα, η επανορθωτική και η επεκτατική γενίκευση είναι πολύ πιο κατάλληλες για τη γνωστική ανάπτυξη και, από αυτές, η επεκτατική γενίκευση είναι γνωστικά πιο εύκολη από ότι η επανορθωτική. Ωστόσο, αν και η επεκτατική γενίκευση μπορεί να είναι ευκολότερη βραχυπρόθεσμα, σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα, υπάρχουν φορές που η αναδιοργάνωση της γνώσης καθίσταται πλέον αποφασιστικής σημασίας και εκεί, η επανορθωτική γενίκευση είναι πολύ πιο κατάλληλη.

Σύμφωνα με τους Harel & Tall (1991) η πιο επιθυμητή προσέγγιση γενίκευσης, είναι να παραχθούν οι εμπειρίες που οδηγούν σε μια ουσιαστική κατανόηση της τρέχουσας κατάστασης, να επιτραπεί η μετάβαση σε μια πιο γενική περίπτωση που εμφανίζεται με την επεκτατική γενίκευση, αλλά σε εκείνες τις περιπτώσεις, που η κατάσταση απαιτεί ανακατασκευή, είναι

αναγκαίο να δημιουργηθούν στους μαθητές, οι κατάλληλες συνθήκες μέσα στις οποίες, θα συντελεστεί η συγκεκριμένη ανακατασκευή. Υποστηρίζουν επίσης ότι η διαδικασία απόκτησης γνώσης ενός μαθηματικού αντικειμένου από τους μαθητές, βασίζεται σε μια σειρά κατάλληλων γενικεύσεων και χαρακτηρίζεται από την έννοια της *τυπικής αφαίρεσης (formal abstraction)*, παραπέμποντας, είτε στην αφαίρεση συγκεκριμένων ιδιοτήτων ενός ή περισσοτέρων μαθηματικών αντικειμένων για το σχηματισμό της βάσης του ορισμού του, είτε στη διαδικασία κατασκευής της αφηρημένης έννοιας μέσω του λογικού παραγωγικού τρόπου σκέψης που προέρχεται από τον ορισμό.

2.11 Αφαίρεση

Μια διαδικασία αφαίρεσης συμβαίνει όταν το υποκείμενο εστιάζει την προσοχή του στις συγκεκριμένες ιδιότητες ενός δεδομένου αντικειμένου και στη συνέχεια, εξετάζει αυτές τις ιδιότητες απομονώνοντάς το από το πρωτότυπο. Αυτό μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, όταν οι μαθητές κατανοήσουν την ουσία ενός συγκεκριμένου φαινομένου, να είναι σε θέση αργότερα, να εφαρμόσουν την ίδια θεωρία, σε άλλες περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζεται. Μια τέτοια εφαρμογή της θεωρίας αφαίρεσης, θα ήταν μια περίπτωση επανορθωτικής γενίκευσης - γιατί οι αφαιρούμενες ιδιότητες είναι ανακατασκευές των αρχικών ιδιοτήτων, που τώρα εφαρμόζονται σε έναν ευρύτερο τομέα. Ωστόσο, μόλις η επανορθωτική γενίκευση έχει συμβεί, τότε είναι δυνατόν να μπορούν να επεκτείνουν το εύρος των παραδειγμάτων στα οποία αυτά τα επιχειρήματα εφαρμόζονται, μέσα από την πιο απλή διαδικασία της επεκτατικής γενίκευσης.

Η τυπική αφαίρεση είναι πολύτιμη για έναν ειδικό αλλά είναι δύσκολο να επιτευχθεί από τους μαθητές. Πώς μπορούν όμως οι μαθητές να επιτύχουν την επανορθωτική γενίκευση που απαιτείται για την τυπική αφαίρεση;

Οι Harel & Tall (1991) προτείνουν ότι η μετάβαση από αυτή τη δύσκολη μεταβατική περίοδο μπορεί να πραγματοποιηθεί αποτελεσματικά με μια ενδιάμεση πορεία την οποία ονομάζουν *γενική αφαίρεση (generic abstraction)*.

Πιο συγκεκριμένα, ο δάσκαλος θεωρεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ως αντιπροσωπευτικό της αφηρημένης έννοιας, το οποίο το ορίζουν ως γενικό παράδειγμα. Παρουσιάζεται στο μαθητή ένα ή περισσότερα πρότυπα για την αφηρημένη έννοια. Στην παρούσα έρευνα, υιοθετούμε τον όρο πρότυπο για την αναγνώριση τέτοιων παραδειγμάτων. (βλ. επόμενη παράγραφο

«πρότυπα»). Για το δάσκαλο αυτές οι ιδέες αποτελούν στιγμιότυπα (instantiations) της αφηρημένης έννοιας, αλλά ο μαθητής δεν έχει κάνει ακόμη την αφαίρεση, και έτσι αυτά τα πρότυπα μπορεί να λειτουργήσουν σε σημαντικό βαθμό, με λάθος τρόπο, ώστε ο μαθητής να αφαιρεί τις λάθος ιδιότητες. Ωστόσο, αν η διαδικασία είναι επιτυχής και ο μαθητής βλέπει ένα ή περισσότερα συγκεκριμένα παραδείγματα που θα συγκεκριμενοποιούν μία αφηρημένη έννοια, τότε αυτό είναι μια (σχετικά ανώδυνη) μορφή αφαίρεσης που την ονομάζουν γενική αφαίρεση. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει σαφώς τη γενίκευση (επειδή ενσωματώνει τα παραδείγματα σε μια ευρύτερη κατηγορία παραδειγμάτων ενσωματωμένων από τη γενική αφαίρεση). Αλλά είναι επίσης μια ήπια μορφή αφαίρεσης, επειδή ανεβάζει σε ένα υψηλότερο επίπεδο τη γνωστική συνείδηση του μαθητή, στο οποίο η πιο γενική έννοια γίνεται αντιληπτή και αυτό γίνεται, τουλάχιστον σιωπηρά, από τα γενικά παραδείγματα. Συμφωνούν ότι μια γενική αφαίρεση για μια μαθηματική έννοια δίνει στο μαθητή μια αίσθηση της έννοιας ότι είναι *λειτουργική*. Προκειμένου να επιτευχθεί η τυπική αφαίρεση, ο μαθητής χρειάζεται να οικοδομήσει εκ νέου τις αντιλήψεις του σε ένα αφηρημένο πλαίσιο, ένα πλαίσιο όπου το άτομο ξέρει ότι οι συγκεκριμένες ιδιότητες είναι αληθινές σε όλα τα γνωστά παραδείγματα, αλλά πρέπει να συναχθούν με επιφύλαξη μέσα στην αφηρημένη έννοια. Επιπλέον, προϋποθέτουν, ότι ακολουθώντας αυτή την αλληλουχία, η επανορθωτική γενίκευση των σπουδαστών, που απαιτείται για την τυπική γενίκευση, μπορεί να προκύψει με δυνητικά λιγότερο γνωστικό κόπο.

Οι Harel & Tall (1991) αναγνωρίζουν τρείς παιδαγωγικές αρχές που είναι κρίσιμες για τη γενική αφαίρεση των μαθηματικών αντικειμένων:

Η αρχή της συγκρότησης (the entification principle).

Ο μαθητής έχει τέτοιες διαδικασίες που μπορεί να θεωρεί τα μαθηματικά αντικείμενα ως δεδομένα. Δηλαδή μπορεί να δει ένα μαθηματικό αντικείμενο σαν μια νέα εννοιολογική οντότητα στην οποία μπορεί να δράσει, σαν ένα δεδομένο για υπολογιστικές διαδικασίες που κατέχει ήδη.

Η αρχή της αναγκαιότητας (the necessity principle).

Ο μαθητής βλέπει την αναγκαιότητα κατασκευής του μαθηματικού αντικειμένου. Δηλαδή αυτό το αντικείμενο πρέπει να παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο σ' αυτόν, ώστε να μπορεί να δει την αναγκαιότητά του. Αν οι μαθητές δεν βλέπουν το λόγο για μια ιδέα (π.χ. έναν ορισμό ή έναν συμβολισμό μίας έννοιας) μπορεί να τους φαίνεται ότι η ιδέα έρχεται αυθαίρετα και δεν μπορεί

να γίνει κατανοητή από αυτούς. Με την αρχή της αναγκαιότητας οι μαθητές ανακατασκευάζουν τις αντιλήψεις τους, ώστε να ενσωματώσουν τη νέα γνώση. Έτσι επιτυγχάνουν ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, η οποία παρά του ότι δεν μπορεί να περιγραφεί ως τυπική αφαίρεση, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα βήμα πριν από αυτή.

Η αρχή της παραλληλίας (the parallel principle).

Οι απαιτούμενες διαδικασίες της entification αρχής πρέπει να παραλληλίσουν τις διαδικασίες που θα εφαρμοστούν αργότερα εντός της αφηρημένης δομής. Με τις διαδικασίες της παράλληλης αρχής, οι μαθητές μπορεί να αναγνωρίζουν τα παραδείγματα που βρίσκουν σε ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο, σαν στοιχεία ενός ευρύτερου συνόλου που ανήκει σε ένα αφηρημένο αντικείμενο και έτσι να φτάσουν στη γενική αφαίρεση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας.

2.12 Πρότυπα

Ένα πρότυπο είναι ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα μιας έννοιας. Στην παρούσα έρευνα διακρίνουμε τρεις κατηγορίες προτύπων, ανάλογα τον «κόσμο» από τον οποίο προέρχονται: «Πραξιακά» (από τον «πραγματικό κόσμο» του Husserl και τον ενσώματο κόσμο, «γεωμετρικά» (από τον κόσμο των γεωμετρικών αναπαραστάσεων) και «αριθμητικά» (από τον κόσμο των αριθμητικών αναπαραστάσεων). Ο Tall (2004) διακρίνει τρεις κόσμους των μαθηματικών με διακριτές αλλά αλληλεπιδραστικές εξελίξεις στη γνωστική ανάπτυξη. Ο «ενσώματος κόσμος» (embodied world) που περιλαμβάνει όχι μόνο τις νοητικές μας αντιλήψεις των πραγματικών αντικειμένων στον κόσμο, αλλά και εσωτερικές αντιλήψεις μας, που περιλαμβάνουν οπτικό-χωρική εικόνα (visuo-spatial imagery). Αυτό ισχύει για παράδειγμα στην εννοιολογική ανάπτυξη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά και σε κάθε άλλη μαθηματική έννοια που γίνεται αντιληπτή με οπτικό-χωρικούς και άλλους αισθητηριακούς τρόπους. Ο δεύτερος κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό και τη χρήση στην αριθμητική, στην άλγεβρα, στο λογισμό και ούτω καθεξής. Αυτά ξεκινούν με δράσεις (όπως το μέτρημα) που είναι ενσώματες ως έννοιες, χρησιμοποιώντας το σύμβολο που μας επιτρέπει να μεταβούμε εύκολα από τις διαδικασίες για να κάνουμε μαθηματικά, στις έννοιες για να σκεφτούμε. Αυτό το δεύτερο κόσμο, τον αποκαλεί το συμβολικό κόσμο της διεργέννοιας (proceptual-symbolic world) ή απλώς κόσμο της διεργέννοιας (proceptual world). Ο τρίτος κόσμος

καθορίζεται με βάση τις ιδιότητες, που εκφράζονται με όρους των τυπικών ορισμών που χρησιμοποιούνται ως αξιώματα για να καθορίσουν μαθηματικές δομές π.χ. «πεδίο», «διανυσματικός χώρος», «τοπολογικός χώρος» κ.λπ. Αυτός αποκαλείται ο «τυπικό-αξιωματικός κόσμος» (formal-axiomatic world) ή «τυπικός κόσμος» (formal world), για συντομία. Γυρίζει τις προηγούμενες εμπειρίες στις πηγές τους, δεν εργάζεται με οικεία αντικείμενα της εμπειρίας, αλλά με αξιώματα που είναι προσεκτικά διατυπωμένα για να καθορίσουν μαθηματικές δομές όσον αφορά καθορισμένες ιδιότητες. Άλλες ιδιότητες τότε ανάγονται από την επίσημη απόδειξη για την οικοδόμηση μια σειράς θεωρημάτων. Εντός του αξιωματικού συστήματος, νέες έννοιες μπορούν να οριστούν και οι ιδιότητες τους συνάγονται για την οικοδόμηση μιας συνεκτικά λογικής θεωρίας. Παρά το ότι ο διαχωρισμός των 3 κόσμων που χρησιμοποιούμε συνδέεται στενά με τους τρεις κόσμους του Tall, υπενθυμίζουμε ότι η δική μας ταξινόμηση προκύπτει από μια φαινομενολογική οπτική γωνία των μαθηματικών αντικειμένων εστιασμένη στην επαναδραστηριοποίηση της εξαντικειμενίκευσης.

Οι Lappas και Spyrou ταξινομούν τα γεωμετρικά πρότυπα με βάση την πολυπλοκότητα των γεωμετρικών αντικειμένων στα οποία αναφέρονται. Ισχυρίζονται ότι τα «στοιχειώδη» πρότυπα εξαρτώνται μόνο από λεκτικές περιγραφές, ενώ τα πιο σύνθετα χρειάζονται επιπλέον, μια επιπρόσθετη δομή ώστε να γίνουν κατανοητά. Η πρότασή τους είναι ότι τα *σημεία*, οι *γραμμές* και τα *επίπεδα*, στην ιδεατή τους χρήση εξυπηρετούν ως τα κύρια παραδείγματά μας για τα «στοιχειώδη» πρότυπα στη Γεωμετρία, ενώ η γωνία αποτελεί ένα σύνθετο πρότυπο.

2.12.1 Το σημείο, η ευθεία γραμμή και το επίπεδο

Οι Lappas και Spyrou (2006) ερευνούν αυτές τις έννοιες ως έννοιες διαμορφωμένες από την ανάπτυξη των γλωσσικών μεταφορών. Σύμφωνα με τον Piaget, η ευθεία γραμμή εμφανίζεται να μην είναι τίποτα παραπάνω από την ενθυλάκωση της μεταφοράς από το ένα σημείο στο άλλο (του traveling). Οι Lakoff & Nunez (2000) κάνουν κάποιους υπαινιγμούς για την έννοια του σημείου, της γραμμής και του επιπέδου και τα συνδέουν με τη Βασική Μεταφορά του Απείρου, υποθέτοντας μια ευφυή κατασκευή.

Από την ιστορία των μαθηματικών, κάνουν επίσης κάποιες παρατηρήσεις. Στον Ευκλείδη, το σημείο όπως επίσης και η ευθεία γραμμή, περιέχονται στους Όρους. Η ορολογία που χρησιμοποιείται ζητά την προσοχή

μας ως γλωσσική μεταφορά, δεδομένου ότι συνθέτει κάτι ευρύτερο από τους απλούς ορισμούς εφόσον έχουν την έννοια της πρόσβασης μιας έννοιας σε μια κατηγορία.

Το σημείο στον Ευκλείδη προκύπτει ως ένα πρότυπο (υπόδειγμα) με διαφορετικές μορφές. Τα άκρα μιας γραμμής είναι σημεία, η τομή δύο ευθειών είναι ένα σημείο, κλπ. (Ζερβός, 1972). Το σημείο είναι μια (εφεύρεση) ανακάλυψη που κρατά τη συζήτηση και την περιγραφή ενός προβλήματος στο χώρο. Εκφράσεις όπως «Αφήστε ένα σημείο», είναι μία πρόταση για να γίνει κάτι αποδεκτό και να θεωρηθεί σαν νοητικό αντικείμενο σε μια συζήτηση.

Προκειμένου να ενισχυθούν τα παραπάνω επιχειρήματα αναφέρονται στη νύξη του Tall:

> Η γλώσσα παίζει έναν όλο και περισσότερο λεπτό τρόπο σ' αυτή τη γεωμετρική ανάπτυξη. Πρωτότυπες μορφές όπως η ευθεία γραμμή, ένα τρίγωνο, ένας κύκλος περιγράφονται προφορικά με τρόπους που υποστηρίζουν την ικανότητα απόδοσης εικόνας (imagination) των τέλειων πλατωνικών αναπαραστάσεων, όπως μια τέλεια ευθεία γραμμή χωρίς πλάτος που μπορεί να εκτείνεται απεριόριστα σε κάθε κατεύθυνση, ή ο τέλειος κύκλος, το τέλειο τετράγωνο. Έτσι, παραδόξως, οι τέλειες γεωμετρικές οντότητες εξαρτώνται από τη γλώσσα για την κατασκευή της σημασίας τους. D. Tall et al (2000)

2.12.2 Η γωνία - ένα σύνθετο πρότυπο

Η έννοια της «γωνίας» συμμετέχει ζωτικά στις θεμελιώδεις αντιληπτικές κατηγορίες δεδομένου ότι μεσολαβεί προφανώς στη σχηματική αναγνώριση.

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη, η γωνία ορίζεται ως εξής:

> Η επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται και δεν βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.
> Και όταν οι ευθείες που περιέχουν τη γωνία αποτελούν ευθεία, η γωνία αυτή ονομάζεται ευθύγραμμη (ευθεία). (Εξαρχάκος, 2001)

Επομένως μέσα από την επιστημονική σκοπιά, η γωνία δεν δίνεται ως μετρήσιμο μέγεθος. Εμφανίζεται μάλλον ως ένα σύνθετο πρότυπο, δοσμένο με λεκτικές περιγραφές και αναφέρεται στα απλούστερα βασικά πρότυπα των σημείων, της ευθείας γραμμής και του επιπέδου συν την Ευκλείδεια επινόηση του γλωσσικού όρου κλίση. Τα σύνθετα πρότυπα εξετάζονται από τη θεωρία των προτύπων.

> Ένας ορισμός δεν είναι για να δώσει κάποια σταθερά σύνολα ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την εφαρμογή μιας έννοιας, αντίθετα, οι έννοιες ορίζονται από πρότυπα και από τα είδη των σχέσεων των προτύπων. Αντί να

είναι αυστηρά καθορισμένες, οι έννοιες προκύπτουν από την εμπειρία μας, είναι χωρίς τελειωμό. Lakoff & Johnson (1980, σ. 125).

Οι γωνίες επιδέχονται μόνο απλούς χειρισμούς, όπως η υπέρθεση (superposition) και η ταύτιση, με τον ίδιο τρόπο που αυτό εμφανίζεται σε όλα τα σχήματα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αυτές οι συνθετικές συνθήκες (με την έννοια του man-made) δεν συνθέτουν αντικειμενικά κριτήρια για τις γωνίες, ανεξάρτητα από υποκειμενικές εμπειρίες, όπως αυτά που προκύπτουν από τη μέτρηση. Εξάλλου δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν ταυτίζονται. Κατά συνέπεια, η γωνία γίνεται ένα αντικείμενο που εγγενώς συμμετέχει στον προσδιορισμό του σχήματος. Ωστόσο παρά την εξεζητημένη επεξεργασία στα Στοιχεία του Ευκλείδη, οι γωνίες υπόκεινται σε πραξιακούς χειρισμούς χωρίς τη διαμεσολάβηση της μέτρησης.

Στην περίπτωση των κάθετων και των παράλληλων ευθειών, ακόμη και οι ορισμοί, ή οι επαληθεύσεις τους ανάγονται σε πιστοποιήσεις που αφορούν πρωτότυπα σχήματα, όπως τα σημεία, οι ευθείες και οι γωνίες.

Ειδικότερα: «μια ευθεία γραμμή συναντά μια άλλη ευθεία κάθετα, όταν οι γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες - τότε οι γωνίες ονομάζονται ορθές» - «Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες», (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Ορισμός 10 και $4^{ο}$ Αίτημα). Στις παραπάνω δηλώσεις ένας διπλός σκοπός επιτυγχάνεται. Από τη μια πλευρά έχουμε μια κατάσταση αναγνώρισης της καθετότητας, μέσω των ορθών γωνιών, από την άλλη πλευρά, μέσω της χρήσης «Όλες» στο παραπάνω ισχυρισμό, ένας υπονοούμενος υπερβατικός ορισμός διατυπώνεται.

Οι Lappas και Spyrou (2006), θεωρούν όλα τα παραπάνω ως ενδεικτικές και υποδειγματικές περιπτώσεις της αναγωγής στα πρότυπα.

2.12.3 Το τρίγωνο - Γεωμετρικές κανονικότητες

Όταν οι Lappas και Spyrou (2006) αναφέρονται όμως σε γεωμετρικές έννοιες αυξανομένης πολυπλοκότητας, χρησιμοποιούν τον όρο κανονικότητα. Για τη Γεωμετρία, η κανονικότητα ενός τριγώνου φαίνεται να περιέχει τα ελάχιστα δεδομένα από το σύστημα των προτύπων (όπως είναι το σημείο, ευθεία, επίπεδο και γωνία) με ένα ενιαίο τρόπο σε μία συνεκτική δομή. Στη μελέτη της Στερεομετρίας, δίπλα σε αυτή την κατάταξη, θα μπορούσε να είναι το τετράεδρο, μια σαφής χωρική κανονικότητα.

Σαν κανονικότητα, το τρίγωνο είναι το πρώτο βήμα για την ανάλυση ενός σχήματος και την αναγωγή του σε πρότυπο. Σε ένα τρίγωνο, οι ευρύτερες

γεωμετρικές σχέσεις της ισότητας, της ομοιότητας και του εμβαδού παρέχουν μια ποιότητα πρόσθετων δομών και δημιουργούν περισσότερες συνδέσεις στην επίπεδη γεωμετρία. Έτσι, η κανονικότητα ενός τριγώνου είναι θεμελιώδης και γίνεται το πρωτεύον εργαλείο, που μεσολαβεί σε όλες τις αποδείξεις ακόμη και στα πιο πολύπλοκα σχήματα. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η κανονικότητα του τριγώνου είναι αναγκαίος και αποφασιστικός παράγοντας για την μετέπειτα εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Το τρίγωνο δεν εισάγεται μόνο ως σχήμα, αλλά επίσης και σαν δομή (κατασκευή) που υποστηρίζει ένα σύνολο σχέσεων και οδηγεί στις συνθήκες της ταυτοποίησης και της διαφοράς που θα το καθορίσουν. Στη συνέχεια, ένα τρίγωνο - και κατά συνέπεια οποιοδήποτε πολύπλοκο γεωμετρικό αντικείμενο - θα είναι αποδεκτό αν και μόνο αν έχουμε αυστηρά κριτήρια που θα μπορούν να το κάνουν μία αναγνωρίσιμη δομή (κατασκευή) σε όλες τις πιθανές μορφές και τους επιτρεπόμενους μετασχηματισμούς του.

2.12.4 Από τα αρχέτυπα αποτελέσματα σε μια λογική θεωρία

Όμως τα υπάρχοντα αρχέτυπα αποτελέσματα αποτέλεσαν μια πρωτόγονη υποκειμενική γνώση, στην προϊστορική περίοδο της Γεωμετρίας, πριν την εμφάνιση οποιασδήποτε λογικής επαγωγικής θεωρίας. Άλλωστε στα Ελληνικά Μαθηματικά, βασικό αίτημα για τις γεωμετρικές ανακαλύψεις ήταν η ανάγκη της αντι-οπτικής θεμελίωσης (κυρίως πλατωνικής) όπως έχει τονίσει και ο Szabo:

> Φαίνεται πως τα νέα είδη απόδειξης εμφανίστηκαν την στιγμή που τα Ελληνικά μαθηματικά έγιναν αντί-εμπειρικά και αντί-οπτικά. Szabo (1978, σελ.197)

Η συγκρότηση μιας θεωρίας για τη Γεωμετρία και η ιδιαίτερη ανάγκη να ενσωματωθούν σ’ αυτή, τα ήδη υπάρχοντα αρχέτυπα αποτελέσματα, συνίσταται από μία εννοιολογική αλλαγή. Εκτός κάποιων συγκεκριμένων μεθοδολογικών προβλημάτων που τίθενται σ’ αυτό το πλαίσιο, οι ακόλουθοι γνωστικοί παράγοντες που προκύπτουν είναι:

- η απαίτηση τυπικών περιγραφών εντός της Θεωρίας όπως επίσης και επαγωγικές αποδείξεις.
- η πρόσθετη παραγωγή αφηρημένων εργαλείων (όπως το επίπεδο, η γωνία, το εμβαδόν και η κατασκευή), δεδομένου ότι η συσσωρευμένη εμπειρική γνώση δεν αρκεί.
- Κάποιες τεχνικές κατασκευής και απόδειξης.

Το επίπεδο βρίσκεται ενδιάμεσα της αισθητηριακής διαίσθησης και της συστηματικής προβολής της θεωρίας. Τα επίπεδα σχήματα, ακόμη και στην περίπτωση που δεν ταυτίζονται, μπορούν να συγκριθούν, όσον αφορά το εμβαδόν του χωρίου που περικλείουν. Οι κατασκευές που γίνονται στο επίπεδο, είναι μη αυθαίρετες νοητές οντότητες. Στο πρώτο στάδιο, οι κατασκευές που γίνονται είναι ενέργειες. Η θεωρία απαιτεί την υπέρβαση των επιμέρους (ενεργειών) δράσεων, μέσα από λεκτικές περιγραφές και την αντικατάστασή τους, από νοητικούς χειρισμούς. Η μερική πρότυπη ενέργεια μετατράπηκε σε αξιώματα ή τεχνικές διαδικασίες, εκεί όπου χρειάζεται η κατασκευή ενός αντικειμένου. Για παράδειγμα, το πρώτο αξίωμα ορίζει, την ενσώματη ενέργεια της κατασκευής του τμήματος μιας γραμμής που γίνεται με τη χρήση μολυβιού και χάρακα. Η κατασκευή ενός τέτοιου νοητικού αντικειμένου όπως το ορθογώνιο ή το τετράγωνο καθορίζεται και αιτιολογείται επίσης, από την ανάκληση των επιμέρους δράσεων. Από την άλλη πλευρά η απόδειξη με την υπέρθεση εμφανίζεται ως πρότυπη (Tall, 1995b).

2.12.5 Η περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Στην περίπτωση του Πυθαγορείου θεωρήματος, η απλοϊκή (primitive) μέθοδος παρουσίασής και εξήγησής του μέσω των ιδιοτήτων των τριάδων (οι οποίες μπορούν να αφορούν είτε αριθμούς είτε πλευρές τριγώνων και τις σχέσεις μεταξύ τους) ήταν κατάλληλη σε εφαρμογές πρακτικών προβλημάτων και σε προ-επιστημονικές θεωρήσεις. Δεν ήταν αρκετή για τη λογική επιχειρηματολογία, η οποία αναδύθηκε στο πλαίσιο της Γεωμετρίας. Στα σχόλια του Πρόκλου σχετικά με αυτό το αποτέλεσμα, βρίσκουμε επιχειρήματα που τεκμηριώνουν την άποψη ότι η γενική απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος ήρθε μετά το πέρασμα από τους σχηματικούς αριθμούς, ένα νοητικό εργαλείο που εφευρέθηκε. Αυτή η νέα αντίληψη για το τετράγωνο προτείνει έμμεσα: μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των τμημάτων και των τετραγώνων που θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως τρόπος μέτρησης εμβαδού και να επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τμημάτων, «ιδωμένα ως μεγέθη» προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός.

Αυτή η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια πρώιμη διττή αναπαράσταση, τόσο αριθμητικής όσο και γεωμετρικής φύσης, σχετικά με δισδιάστατα αντικείμενα. Οι πτυχές αυτές αποκτούν κυρίαρχη θέση στη νεώτερους καιρούς και οδηγούν στην αλγεβρική αναπαράσταση του Θεωρήματος μέσω του τύπου $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Τα παραπάνω υποδηλώνουν ότι η μετάβαση από την αρχέτυπη διατύπωση σε μια πιο αυστηρή γεωμετρική παρουσίαση απαιτούσε όχι μόνο ένα υψηλό βαθμό αφαίρεσης, διαίσθησης και εφεύρεσης, αλλά και μια επιτυχημένη θεμελιώδη εργασία. Οι Lappas και Spyrou (2006), λαμβάνοντας υπόψη τον επιστημολογικό χαρακτήρα του συγκεκριμένου αποτελέσματος, παρατηρούν ότι μια καθαρά αντιληπτική κατηγορία, όπως η καθετότητα:

(i) Έχει αντικειμενοποιηθεί σε πρώιμο στάδιο, μέσω αριθμητικών σχέσεων. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η ανακάλυψη των τριάδων θα μπορούσε να τεθεί παρατηρώντας πώς η βαρύτητα τραβά ένα βάρος δεμένο σε ένα νήμα. Η αντίστροφη επίπτωση (δηλ. έχοντας μια τριάδα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθή γωνία σε ένα επίπεδο), δίνει την εξαντικειμενίκευση της ιδέας της ορθής γωνίας ανεξάρτητα από την αίσθηση της βαρύτητας. Έχουμε εδώ μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για τον προσδιορισμό ενός αντικειμένου.

(ii) Έχει περιγραφεί πλήρως και με ακρίβεια από μια γενική μαθηματική διατύπωση (Πυθαγόρειο Θεώρημα), αποκτώντας καθολική θεωρητική ισχύ.

Στην παρούσα έρευνα η επιλογή διαφόρων προτύπων και η συχνότητα με την οποία αυτά παρουσιάζονται στους μαθητές, συμφωνούν με το θεωρητικό μας πλαίσιο που ενσωματώνει στοιχεία από την ιστορία και τη νευροφυσιολογία. Συνολικά στο σχεδιασμό μας, τα πρότυπα λειτουργούν σαν μέσα για τη διευκόλυνση της γενικής αφαίρεσης των μαθητών και της εμπειρίας της επανενεργοποίησης της εξαντικειμενίκευσης.

Ιδιαίτερα κρίσιμο σ’ αυτή τη διαδικασία είναι η σύνδεση των διάφορων αναπαραστάσεων του θεωρήματος. Δεδομένου ότι, ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν οριοθετείται μόνο σε μία αναπαράστασή του, αλλά είναι η σχέση ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις του, που πηγάζουν από διαφορετικά σημειωτικά συστήματα και η ικανότητα των σπουδαστών να μεταφράζουν ανάμεσα σ’ αυτά, τη σημασία του μαθηματικού αντικειμένου (Duval, 2006).

2.13 Μαθηματική και αναστοχαστική δράση

Τα μαθηματικά όπως και κάθε μορφής γνώση δεν μεταδίδεται με την απλή παρουσίαση, αλλά αναπτύσσεται με την ενεργό δραστηριοποίηση των μαθητών, με πειραματισμό, δημιουργία, ανταλλαγή και επικοινωνία. Η διδασκαλία επίσης των Μαθηματικών δεν πρέπει να περιορίζεται στην ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, εννοιών και διαδικασιών, αλλά να ενθαρρύνει την ανάπτυξη δραστηριοτήτων μέσα σε συγκεκριμένες καταστάσεις.

Μια μαθηματική δραστηριότητα είναι καταρχήν μια δραστηριότητα που επιδιώκει τη νοητική ενεργοποίηση του μαθητή για την αντιμετώπιση μιας κατάστασης, ενός προβλήματος κλπ. Μπορεί να πρέπει οι μαθητές να τη διαχειριστούν ατομικά ή ομαδικά, να πραγματοποιείται σε διάφορα επίπεδα, αλλά δεν μπορεί να είναι ένας απλός χειρισμός αντικειμένων. Πρέπει να περιλαμβάνει πολλαπλές ενέργειες και να στηρίζεται στη σκέψη. Πρέπει δηλαδή να περιλαμβάνει δράση μαθηματική, να καταλήγει δηλαδή σε αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών, σε εντοπισμό ιδιοτήτων και σχέσεων και να οδηγεί σε γενικεύσεις που δημιουργούν ή κατευθύνονται προς μια μαθηματική ιδέα. Μάλιστα οι μαθηματικές δραστηριότητες δεν μπορεί να είναι ποτέ μεμονωμένες. Θα ακολουθούνται και από άλλες δραστηριότητες ώστε οι ιδιότητες που εντόπισαν οι μαθητές να συστηματοποιηθούν στο μυαλό τους και να αρχίσουν να παίρνουν νόημα ώστε να βοηθήσουν στη διαδικασία γενικεύσεων.

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2011), η μαθηματική δραστηριότητα αποτελεί ένα σύνολο μαθηματικών δράσεων όπως:

> αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, κανονικοτήτων και κοινών δομών, ανάλυση και σύνθεση σε μέρη, δημιουργία συνδέσεων, σύνδεση με παραστάσεις, σήματα και σύμβολα, εξήγηση, αναστοχαστική δράση και δράση γενίκευσης. (σελ. 58)

Ο σχηματισμός όμως μαθηματικών εννοιών περιλαμβάνει τον αναστοχασμό πάνω στη δράση. Εννοώντας ότι, για την ανάπτυξη κάθε στοιχείου μαθηματικής γνώσης στο επίπεδο που το προσεγγίζουμε, είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός ολοκληρωμένου σχεδίου που περιλαμβάνει μαθηματική δράση αλλά και συστηματική σκέψη των παιδιών πάνω στη δράση αυτή. Έτσι χρειαζόμαστε διδακτικές προσεγγίσεις που να ενσωματώνουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αυτά μπορεί να είναι, δραστηριότητες τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν μόνοι τους ή σε συνεργασία μεταξύ τους. Καταστάσεις που συνδέονται με την εμπειρία και την

πραγματικότητα, αλληλεπιδρούν και τεκμηριώνουν τη δράση τους, συζητούν για να εμβαθύνουν τη δράση αυτή και να οδηγηθούν σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης, γενίκευσης αλλά και κατανόησης της πραγματικότητας. Δηλαδή οι διδακτικές αυτές προσεγγίσεις να γίνονται με σχεδιασμό κατάλληλων δομών και κατάλληλη χρήση εργαλείων τα οποία από τη μια να οδηγούν στην ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας και από την άλλη να συνδυάζουν στοιχεία που να οδηγούν τους μαθητές στο μαθηματικό νόημα και να τους ασκούν στη μαθηματική λειτουργία (Τζεκάκη, 2011).

Στο σχεδιασμό λοιπόν της διδασκαλίας μας, επιλέγουμε να ενσωματώσουμε τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη σκέψη τους και στη δράση τους. Η χρήση των πραξιακών προτύπων, η αλληλουχία διαφορετικών προτύπων, η δημιουργία πολλών αναπαραστάσεων και μια σειρά δραστηριοτήτων που υποστηρίζουν όλα τα παραπάνω, σκοπό έχουν να δημιουργηθεί ένα κατάλληλο περιβάλλον στην τάξη που θα βοηθήσει τους μαθητές να δράσουν, να σκεφτούν και να αναδειχθούν τα μαθηματικά νοήματα που επιδιώκουμε.

2.14 Κύρια σημεία του 2ου κεφαλαίου

2.14.1 Α΄ Μέρος

Τα θέματα που συζητήσαμε στο Α΄ μέρος του θεωρητικού πλαισίου συνοπτικά είναι:

- Η έννοια της εξαντικειμενίκευσης (ετυμολογικά) και η θέση του Radford για τη διαδικασία εξαντικειμενίκευσης (Radford, 2003).
- Τα μαθηματικά ως ιδεατότητες και η δυνατότητα προσέγγισής τους μέσω των αναπαραστάσεων (Duval, 2006)
- Η σύγκριση των δύο θεωριών Radford και Duval.
- Οι υποκειμενικά κατασκευασμένες ιδεατότητες σύμφωνα με το Husserl.
- Η σύνδεση του πραγματικού κόσμου με τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας.
- Σύνδεση της βαρύτητας με την καθετότητα.

Ο μετασχηματισμός της εμπειρικής έννοιας της βαρύτητας σε μαθηματική έννοια σε συνδυασμό με το ιστορικό πλαίσιο.

2.14.2 Β΄ Μέρος

Τα θέματα που συζητήσαμε στο Β΄ μέρος του διδακτικού πλαισίου συνοπτικά είναι:

- Οι τρείς τύποι γενίκευσης που αναγνωρίζουν οι Harel και Tall (1991) στη διαπραγμάτευση των μαθητών με μία καινούργια έννοια.
- Πώς πραγματοποιείται η διαδικασία της τυπικής αφαίρεσης και οι αρχές στις οποίες στηρίζεται.
- Η έννοια των προτύπων και η κατάλληλη διδακτική αλληλουχία τους με σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές στη μετάβασή τους στην τυπική αφαίρεση.
- Τα στοιχειώδη και τα σύνθετα πρότυπα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία σύμφωνα με την πρόταση των Lappas και Spyrou (2006) και το τρίγωνο ως κανονικότητα.
- Η μετάβαση από την πρωτόγονη υποκειμενική γνώση στην προϊστορική περίοδο της Γεωμετρίας σε μια λογική θεωρία και η περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
- Τέλος η μαθηματική δραστηριότητα και η αναστοχαστική δράση σύμφωνα με τη Τζεκάκη (2011) και ο λόγος που τα ενσωματώνουμε στο σχεδιασμό της διδασκαλίας μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Μεθοδολογία

3.1 Ερευνητικό ερώτημα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αιτιολογείται η μεθοδολογία με την οποία σχεδιάστηκε η έρευνα ώστε να διερευνηθεί και να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα. Σκοπός μας είναι μια διδασκαλία συμπληρωματική και εφαρμόσιμη στην υπάρχουσα ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα που βασίζεται στη φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης. Ο ισχυρισμός είναι ότι η διδακτική μας παρέμβαση μπορεί να διευκολύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να βιώσουν την «μεταμόρφωση» της υποκειμενικής εμπειρίας της καθετότητας στην αντικειμενική μαθηματική ιδέα του ορθογωνίου τριγώνου. Θυμίζουμε ότι το αντικείμενο της εμπειρικής αυτής μελέτης είναι:

«Η έννοια της εξαντικειμενίκευσης στη δόμηση μια διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος: Μια εμπειρική μελέτη».

3.2 Γενικές μεθοδολογικές αποφάσεις

Σε διάφορες έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών, ένα θέμα που έχει απασχολήσει τους ερευνητές είναι η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και με ποιό τρόπο θα προσεγγίσουν οι μαθητές τις έννοιες που διαπραγματεύονται. Για παράδειγμα ο Freudental (1983) στη διδακτική φαινομενολογία του, προτείνει προβλήματα ή καταστάσεις που εκτός από το γεγονός ότι συνδέονται με την πραγματική ζωή και έχουν νόημα και ενδιαφέρον για τα παιδιά, τους φέρνουν σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα, για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε αποτελούν τα οργανωτικά εργαλεία. Κατανοεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα τρόπο δημιουργίας μοντέλων για την αντιμετώπιση και κατανόηση των πραγματικών καταστάσεων επιδιώκοντας να δημιουργήσει πλαίσια και έργα η διαπραγμάτευση των οποίων θα οδηγήσει στην προσέγγιση αυτών των εννοιών. Επίσης, η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (Fynn, 2007) προτείνει μια διδακτική στρατηγική στην οποία οι μαθητές μέσω αληθινών δραστηριοτήτων, καθοδηγούνται στην επανεπινόηση (reinvention) μαθηματικών εννοιών.

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μπουν οι μαθητές σε ένα ρόλο όπου θα αξιοποιήσουν τις άμεσες βιωματικές τους εμπειρίες, ώστε να

καταλάβουν από μόνοι τους τον τρόπο που λειτουργούν τα μαθηματικά. Επομένως υπάρχουν εννοιολογικές προσεγγίσεις από αυτή τη φαινομενολογική σκοπιά.

Λαμβάνουμε επιπλέον υπ' όψη τους Lappas & Spyrou (2006) οι οποίοι όταν μιλούν για την αντικειμενικότητα των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην ιδεατότητά τους (ως μαθηματικά αντικείμενα) και σε κοινωνικές συμφωνίες που εξετάζονται στα πλαίσια της ανθρώπινης εμπειρίας. Ως εκ τούτου, οι μαθηματικές έννοιες σε οποιοδήποτε πολιτισμό, αντιπροσωπεύουν τη διϋποκειμενική γνώση και τις εκφράσεις της. Επειδή λοιπόν υποστηρίζουμε ότι το ανθρώπινο σώμα έχει αίσθηση της βαρύτητας κατά τον ίδιο τρόπο σε κάθε εποχή, σχεδιάζουμε μια διδασκαλία βασιζόμενη στη διαχρονικά αυτή αμετάβλητη αισθητηριακή αντίληψη, με στόχο την εξαντικειμενίκευση ("objectification" Husserl, 1989) του ορθογωνίου τριγώνου. Στη γεωμετρία, σύμφωνα με τους Lappas & Spyrou (2006), η εξαντικειμενίκευση επιτυγχάνεται σε δύο επίπεδα: μέσω των αριθμών (1° επίπεδο) ή μέσω της λογικής και της απόδειξης (2° επίπεδο).

Επιπλέον, συμφωνούμε ότι *ο πραγματικός κόσμος (world of life)* του Husserl (Derrida, 1989), στην προκειμένη περίπτωση ο κόσμος που καθορίζεται από τη βαρύτητα, διαμόρφωσε το ανθρώπινο σώμα, το οποίο με τη σειρά του προσδιόρισε *τον κόσμο των φαινομένων (world of appearances)* και μέσω της εξαντικειμενίκευσης οδηγεί τελικά, στον *κόσμο των μαθηματικών (world of mathematics)*. Την ίδια όμως στιγμή, ο κόσμος των μαθηματικών αποτελείται από ιδεατά αντικείμενα που δεν έχουν υλική υπόσταση και δεν είναι παρατηρήσιμα, επομένως μπορούν να επικοινωνηθούν μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων (Duval, 2006).

3.3 Ειδικές μεθοδολογικές αποφάσεις

Η εξαντικειμενίκευση περιγράφει τη διαδικασία με την οποία κατασκευάζεται υποκειμενικά μια ιδεατότητα, η οποία μπορεί να συμβεί μία μόνο φορά για κάθε μαθηματικό αντικείμενο. Βιώνοντας την επανενεργοποίηση της εξαντικειμενίκευσης, ο μαθητής επιτυγχάνει να ανοικοδομήσει όχι μία διαφορετική ιδεατότητα, αλλά την ήδη κατασκευασμένη. Με μια ειδικά σχεδιασμένη διδασκαλία κατάλληλων προοδευτικών μαθηματικοποιήσεων και καθοδηγούμενης επανεπινόησης, ο μαθητής μπορεί να ανακατασκευάσει την ήδη αντικειμενική μαθηματική

έννοια, βιώνοντας μ' αυτό τον τρόπο την επαναδραστηριοποίηση της εξαντικειμενίκευσής του.

Ενσωματώνουμε στο σχεδιασμό της διδασκαλίας μας εργαλεία από τον πραγματικό κόσμο, υιοθετώντας την άποψη του Husserl (1989) που τονίζει τη σημασία της σύνδεσης του πραγματικού κόσμου με τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας. Στοχεύουμε να συνδεθούν σταδιακά η βαρύτητα και η αίσθηση της κατακορύφου, με την καθετότητα, τις Τριάδες και το Πυθαγόρειο Θεώρημα, στηριζόμενοι στον ισχυρισμό των Lappas και Spyrou (2006) ότι οι Πυθαγόρειες Τριάδες μπορεί να βοηθήσουν στη σύνδεση κιναισθητικών δράσεων με μαθηματικές ιδέες σχετικές με το Θεώρημα. Οι Harel and Tall (1991) προτείνουν μια διδακτική αλληλουχία που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στη μετάβασή τους στην τυπική αφαίρεση, μέσω γενικών παραδειγμάτων. Υιοθετούμε τον όρο *πρότυπο* (prototype) για την αναγνώριση αυτών των παραδειγμάτων, θεωρώντας ότι ένα πρότυπο είναι το αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα για μια έννοια. Διακρίνουμε τρείς κατηγορίες προτύπων ανάλογα με τον κόσμο από τον οποίο προέρχονται και τα οποία συνδέονται με διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα («τρεις κόσμοι των μαθηματικών», Tall, 2004). Τα πραξιακά πρότυπα (enactive prototypes) προερχόμενα από τον πραγματικό κόσμο (world of life) του Husserl και τον ενσώματο κόσμο και τέτοια είναι η φυσική καθετότητα που δημιουργεί ο ορίζοντας και η κατακόρυφος ή η γωνία που σχηματίζει το νήμα της στάθμης με την επιφάνεια ενός χρωματισμένου υγρού. Τα γεωμετρικά και αριθμητικά πρότυπα που προέρχονται από το κόσμο των μαθηματικών. Ειδικότερα, θεωρούμε ότι οι σχηματικοί αριθμοί είναι κατάλληλα γεωμετρικά πρότυπα αφού είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών που συνδέονται με την έννοια του εμβαδού και τέλος οι Τριάδες που τις συναντάμε σε διάφορους πολιτισμούς, αποτελούν τα αριθμητικά πρότυπα, προερχόμενα από τον κόσμο των αριθμητικών αναπαραστάσεων.

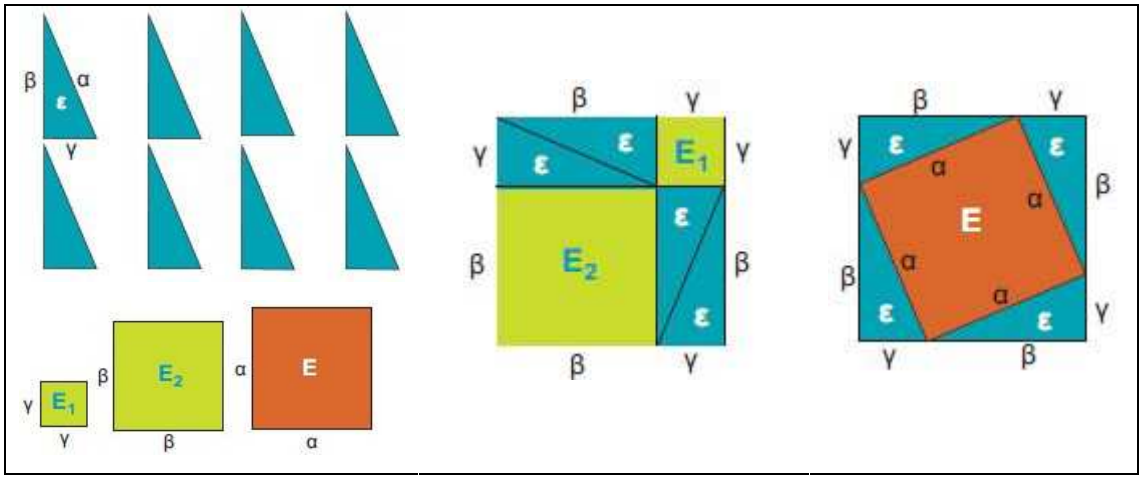
Συμπεριλάβαμε επίσης, στο σχεδιασμό της διδασκαλίας την άποψη ότι οι μαθητές πρέπει να αναστοχάζονται πάνω στη σκέψη τους και στη δράση τους («αναστοχαστική δράση», Τζεκάκη, 2011), να έχουν τη δυνατότητα συζήτησης και τεκμηρίωσης των απόψεων τους, αφού η εξαντικειμενίκευση συμβαίνει μέσω του λόγου (προφορικού ή γραπτού) καθώς επίσης να μπορούν να ελέγχουν οι ίδιοι τις σκέψεις τους και τις δράσεις τους. Ισχυριζόμαστε ότι, όλα τα παραπάνω μαζί με την καθοδήγηση του δασκάλου και στηριζόμενα σε παιδαγωγικές αρχές βοηθούν τους μαθητές να

εισχωρήσουν στον «κόσμο των μαθηματικών» διευκολύνοντας την τυπική αφαίρεσή τους (formal abstraction), μέσω μιας σειράς γενικεύσεων. Την ίδια στιγμή, αυτή η διαδικασία ωθεί την επαναδραστηριοποίηση της εξαντικειμενίκευσης των μαθητών μέσω της συνειδητοποίησης από αυτούς της σχέσης μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων του θεωρήματος. Μια αρχαία ιδέα δηλαδή μαζί με το κατάλληλο διδακτικό έργο προσαρμογής, που σκοπό έχει να οδηγήσει τους μαθητές στη γενική αφαίρεση (generic abstraction).

3.4 Η διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος στη Β΄ Γυμνασίου

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι μαθητές διδάσκονται πρώτη φορά το θεώρημα στην Β΄ Γυμνασίου. Ο προτεινόμενος χρόνος από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο είναι 3 διδακτικές ώρες. Δύο ώρες για την κατανόηση, τη γεωμετρική ερμηνεία και το αντίστροφο του θεωρήματος και μία ώρα για προβλήματα και εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Η διδασκαλία ξεκινάει με μια δραστηριότητα στην οποία ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν τα εμβαδά 8 ίσων ορθογωνίων τριγώνων (με κάθετες πλευρές β και γ και υποτείνουσες α και 3 τετραγώνων με πλευρές αντίστοιχα α, β και γ. Επιπλέον ζητείται να τοποθετήσουν οι μαθητές τα τρίγωνα και τα τετράγωνα κατάλληλα, ώστε να σχηματιστούν δύο νέα τετράγωνα πλευράς (β+γ).



Σχ.3. 1: Τα σχήματα του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 127)

Στη συνέχεια διατυπώνεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Γίνεται αναφορά ότι στην αρχαία Αίγυπτο χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί με 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν με αυτό ένα τρίγωνο το οποίο πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο, ενώ οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον

ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντάς τον με την πρόταση που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ακολουθεί μία σειρά δραστηριοτήτων και ερωτήσεων κατανόησης, εννέα ασκήσεις, μία δραστηριότητα «για διασκέδαση» και ένα σύντομο ιστορικό σημείωμα για τον Πυθαγόρα και το Πυθαγόρειο θεώρημα. (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007)

Στις οδηγίες στο βιβλίου του καθηγητή, προτείνεται στο διδάσκοντα να επιμείνει καταρχάς στη γεωμετρική «ανακάλυψη» και κατανόηση του Πυθαγορείου θεωρήματος και κατόπιν να ενθαρρύνει τους μαθητές να μετατρέψουν τη σχέση των εμβαδών σε αλγεβρική σχέση μεταξύ των πλευρών. Αιτιολογείται για ποιό λόγο το Πυθαγόρειο θεώρημα εισάγεται μετά την έννοια του εμβαδού, αφού έτσι αναπτύσσεται μέσα στο σωστό μαθηματικό πλαίσιο. Πρέπει ωστόσο, να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα με ρητούς, γιατί θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την εισαγωγή στους άρρητους. (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007)

3.5 Προϋπάρχουσες έρευνες - Πιλοτική έρευνα

Η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε σχολική τάξη βασισμένη στη φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου και η διερεύνηση της αποτελεσματικότητάς της, έχει παρουσιαστεί και σε προηγούμενες έρευνες. Συγκεκριμένα από τον Οκτώβριο του 2007 έως το Φεβρουάριο του 2008, πραγματοποιήθηκε μία έρευνα, την οποία καλούμε «ΕΡΕΥΝΑ 1», σε μαθητές Γυμνασίου με σκοπό να διερευνηθεί η επανενεργοποίηση της πράξης της εξαντικειμενίκευσης στα μαθηματικά και αν αυτή, μπορεί να συμβάλλει σε μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος βασισμένη στη σωματική εμπειρία των μαθητών. (Τριανταφύλλου, 2008). Στην παραπάνω έρευνα υιοθετήθηκε η μέθοδος της ποιοτικής έρευνας. Από τον Οκτώβριο του 2009 έως το Φεβρουάριο του 2010 μία αντίστοιχη έρευνα, την οποία καλούμε «ΕΡΕΥΝΑ 2», πραγματοποιήθηκε από τους Μούτσιο-Ρέντζο και Σπύρου, σε δύο τμήματα της Β΄ Γυμνασίου (τμήμα ελέγχου & τμήμα παρέμβασης) και υιοθετήθηκε η μέθοδος της ποσοτικής έρευνας (Σπύρου και Μούτσιος-Ρέντζος, 2011)

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι δύο προηγούμενες έρευνες και το μεθοδολογικό σχέδιο που ακολουθήθηκε σε κάθε μία.

	ΕΡΕΥΝΑ (τύπος)	ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ
ΠΡΟΥΠΑΡΧΟΥΣΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ	**ΕΡΕΥΝΑ 1** (ποιοτική)	• διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος σε διάφορα ζεύγη μαθητών στο χώρο του σχολείου • θεατή μη συμμετοχική παρατήρηση από τον ερευνητή (όταν δίδασκε ο καθηγητής της τάξης) ώστε μέσα από τις παρατηρήσεις του να δομηθούν οι ερωτήσεις των συνεντεύξεων • συνεντεύξεις στα ίδια ζεύγη μαθητών, μετά τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος στην τάξη, που περιελάμβαναν 17 ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου
	ΕΡΕΥΝΑ 2 (ποσοτική)	• ίσος αριθμός διδακτικών ωρών και στα δύο τμήματα • διδακτική παρέμβαση • σχολικό τεστ από τον καθηγητή του σχολείου ανεξάρτητο από τη διδακτική παρέμβαση • ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης 11 ερωτημάτων πολλαπλής επιλογής

Πίνακας 3. 1: Οι προηγούμενες έρευνες

Η παρούσα έρευνα είναι μία εξέλιξη της «ΕΡΕΥΝΑΣ 2» με αρκετές διαφορές και τροποποιήσεις από τις δύο προηγούμενες. Πραγματοποιείται σε 4 στάδια τα οποία περιγράφονται συνοπτικά στον Πίνακα 3.2 της ενότητας §3.6. Οι διαφορές και τροποποιήσεις με κάθε μία από τις παραπάνω έρευνες, αναφέρονται αναλυτικά στην §3.8. Ενδεικτικά επισημαίνεται ότι εκτός από τη μέθοδο της ποσοτικής έρευνας, εισάγεται και η μέθοδος της ποιοτικής έρευνας με στόχο να διερευνηθεί η κατανόηση των μαθητών στα διάφορα στάδια της έρευνας.

Πραγματοποιήθηκε επίσης πιλοτική έρευνα σε δύο τμήματα 30 μαθητών (τμήμα ελέγχου & τμήμα παρέμβασης) της Β΄ Γυμνασίου ενός δημόσιου σχολείου της Δ΄ Αθήνας. Η διδακτική παρέμβαση ($2^{η}$ φάση) που σχεδιάσαμε,

έγινε από τον διδάσκοντα, η οποία και βιντεοσκοπήθηκε. Δεδομένης της ανάλυσης των ευρημάτων (απομαγνητοφώνηση της διδασκαλίας, παρακολούθηση των χρόνων, έλεγχος των εργαλείων που προτείνουμε) παρέμεινε η βασική δομή της έρευνάς μας στις 4 φάσεις που αυτή χωρίζεται. Έγινε μία μεθοδολογική αλλαγή στο τελευταίο στάδιο της έρευνας (4η φάση) το στάδιο των Συνεντεύξεων. Στην πιλοτική έρευνα, στη διαδικασία των συνεντεύξεων, δώσαμε ένα φύλλο δραστηριοτήτων στα ζεύγη των παιδιών, Παρά το γεγονός ότι η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση των μαθητών (προφορικός, γραπτός λόγος) σύμφωνα με το Radford (2003), συμβάλλει στη διαδικασία εξαντικειμενίκευσης, διαπιστώσαμε στη παρακολούθηση των βίντεο, ότι οι μαθητές με μεσαία έως άριστη επίδοση «παρέσυραν» στις απαντήσεις τους και στην επιχειρηματολογία το άλλο μέλος του ζεύγους. Οι κοινές αποφάσεις στην τεκμηρίωση και επιχειρηματολογία, στις δραστηριότητες που προτείναμε, είχαν θετικό αποτέλεσμα, στα ζεύγη με χαμηλή επίδοση. Συνεπώς, σε αντίθεση με την πιλοτική έρευνα, στην κύρια έρευνα επιλέξαμε να δώσουμε από ένα φύλλο δραστηριοτήτων και στα 2 παιδιά για να διερευνήσουμε τη σκέψη του καθένα χωριστά.

3.6 Μεθοδολογικό σχέδιο της έρευνας

Στην έρευνα αυτή επιλέχτηκε να συμμετέχουν 2 τμήματα της Β΄ Γυμνασίου (τμήμα παρέμβασης και τμήμα ελέγχου), ενός δημόσιου σχολείου της Α΄ Αθήνας και να πραγματοποιηθεί σε 4 φάσεις. Τα δύο τμήματα, επιλέχτηκαν να διδάσκονται από τον ίδιο καθηγητή, ώστε να υπάρχει όμοια διδασκαλία και αξιολόγηση. Οι 4 φάσεις της έρευνας περιγράφονται συνοπτικά στον παρακάτω Πίνακα 3.2.

	Δείγμα		**Στόχοι**	**Μέθοδος**		**Καταγραφή**
	Μέγεθος	**Τμήματα**		**Εργαλεία**	**Ανάλυση**	
1η φάση (Τετράγωνοι αριθμοί)	20	Τμήμα παρέμβασης	Γνωριμία με τετράγωνους αριθμούς	Φύλλο εργασίας		
2η φάση (διδασκαλία)	17	Τμήμα παρέμβασης	Διδασκαλία	Ξυλάκια Φύλλο εργασίας	Ποιοτική	Βίντεο
3η φάση (αξιολόγηση)	17 20	Τμήμα ελέγχου Τμήμα παρέμβασης	Αξιολόγηση	Σχολικό τεστ Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης	Ποσοτική	Βαθμοί Ερωτηματολόγιο
4η φάση (συνεντεύξεις)	3 ζεύγη 3 ζεύγη	Τμήμα ελέγχου Τμήμα παρέμβασης	Ποιοτική διερεύνηση	Ημιδομημένες συνεντεύξεις	Ποιοτική	Βίντεο Φύλλα δραστηριοτήτων

Πίνακας 3. 2: Μεθοδολογικό σχέδιο της έρευνας

* Οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης ήταν αρχικά 20, αλλά στη 2η φάση, στη διάρκεια της διδασκαλίας απουσίαζαν τρεις μαθητές, οπότε και στη φάση της αξιολόγησης δεν συμπεριλήφθηκαν αυτά τα 3 άτομα. Τα 3 ζεύγη των μαθητών στις συνεντεύξεις ήταν επίσης από τα 17 άτομα που ήταν παρόντα στη διδασκαλία μας.

3.7 Εργαλεία

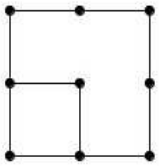
Στην ενότητα αυτή περιγράφονται αναλυτικά τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε φάση. Οι φάσεις της έρευνας περιγράφονται στις §3.8.1 έως και §3.8.4.

3.7.1 Τετράγωνοι αριθμοί (φύλλο εργασίας)

Συντάχθηκε από τους ερευνητές ένα φύλλο εργασίας με δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα ζητάμε από τους μαθητές αν μπορούν να βρουν τους δύο επόμενους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια τετραγωνικών αριθμών και να συμπληρώσουν έναν πίνακα.

Δραστηριότητα

1. Μπορείτε να βρείτε τους δύο επόμενους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια τετραγωνικών αριθμών και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;

Φυσικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί ως τετραγωνικός αριθμός	4	9		
Τετραγωνικός αριθμός				
Πλήθος ψηφίδων πλευράς τετραγωνικού αριθμού	2	3		
Πλήθος ψηφίδων τετραγωνικού αριθμού	4	9		
Σχέση τετραγωνικού αριθμού με το πλήθος ψηφίδων	2^2			

Σχ.3. 2: Η 1η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας που αφορά τους σχηματικούς αριθμούς

Στη συνέχεια επειδή ισχυριζόμαστε ότι, οι σχηματικοί τετράγωνοι αριθμοί θα βοηθήσουν στη σύνδεση των Τριάδων και της αριθμητικής έκφρασης του Θεωρήματος (που εντάσσονται στο αριθμητικό αναπαραστασιακό πλαίσιο) με το γεωμετρικό σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου (που εντάσσεται στο γεωμετρικό αναπαραστασιακό πλαίσιο), τους ζητάμε να ολοκληρώσουν μία έκφραση συμπληρώνοντας τα κενά σε μία πρόταση.

2. Μπορείτε να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση;

«Για να βρω το πλήθος των ψηφίδων ενός τετραγωνικού αριθμού βρίσκω το ..... ψηφίδων της πλευράς του τετραγωνικού αριθμού και την ..... στο .....»

Σχ.3. 3: Η 2η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας που αφορά τους σχηματικούς αριθμούς

3.7.2 Διδασκαλία (χειραπτικά υλικά, φύλλο εργασίας)

Χρησιμοποιούμε απλά χειραπτικά υλικά και ένα φύλλο εργασίας αποτελούμενο συνολικά από 6 δραστηριότητες. Τα χειραπτικά υλικά είναι ένα βαρίδι κρεμασμένο από ένα σχοινί που ισορροπεί πάνω από την επιφάνεια ενός χρωματισμένου υγρού και 3 ράβδοι μήκους 90, 120 και 150 εκατοστά αντίστοιχα, χρωματισμένες ανά ίσα τμήματα σε 3, 4 και 5 κομμάτια, που χρησιμοποιεί ο ερευνητής.

Σχ.3. 4: Το βαρίδι κρεμασμένο από το νήμα πάνω από την επιφάνεια του χρωματισμένου υγρού.

Σχ.3. 5: Οι χρωματισμένες ράβδοι σε 3, 4 και 5 κομμάτια.

3.7.2.1 1η ενότητα (νήμα της στάθμης, ξύλινες ράβδοι, φύλλο εργασίας)

Στην πρώτη ενότητα η διδασκαλία γίνεται μέσω επίδειξης προς όλη την τάξη με χρήση των χειραπτικών υλικών που αναφέραμε παραπάνω. Στο τέλος αυτής της ενότητας οι μαθητές καλούνται, να καταγράψουν σε ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού, τα ποιοτικά συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η κοινότητα της τάξης με τη βοήθεια των χειραπτικών υλικών, ώστε να εδραιωθεί αυτή η εμπειρική γνώση που απέκτησαν.

1. Με βάση αυτά που συζητήσαμε, να συμπληρώσετε τις παρακάτω φράσεις με τις λέξεις: «ΙΣΗ με», «ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ από», «ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ από»,

   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΟΡΘΗ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΟΞΕΙΑ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

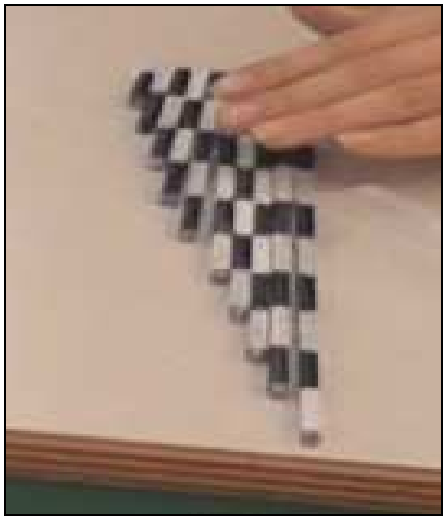
   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΑΜΒΛΕΙΑ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

2. Αν έχεις ένα τρίγωνο και οι πλευρές του έχουν μήκος 3, 4 και 5, τότε το τρίγωνο είναι ..... και η ορθή γωνία βρίσκεται ..... από την πλευρά μήκους 5, που είναι η ..... πλευρά του τριγώνου.

Σχ.3. 6: Οι 2 πρώτες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας

3.7.2.2 2η ενότητα (ξυλάκια, φύλλο εργασίας)

Στη δεύτερη ενότητα, στοχεύουμε στην εύρεση Πυθαγορείων Τριάδων. Σε κάθε θρανίο υπάρχει ένα σακουλάκι με ξύλινες ράβδους χωρισμένες ανά 3 εκατοστά παριστάνοντας τα μήκη από το 1 έως το 10 και ένας χάρακας. Οι μαθητές καλούνται να προτείνουν Τριάδες, να διατυπώσουν υποθέσεις και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους αυτές. Ο έλεγχος των υποθέσεων τους μπορεί να γίνει με τη βοήθεια χειραπτικών εργαλείων και αν αυτά δεν αρκούν, με μία δραστηριότητα στην οποία έχουμε σχεδιάσει δύο κάθετες ευθείες και τους ζητάμε να δοκιμάσουν πάνω σ' αυτό το σχέδιο τις τριάδες που προτείνουν.



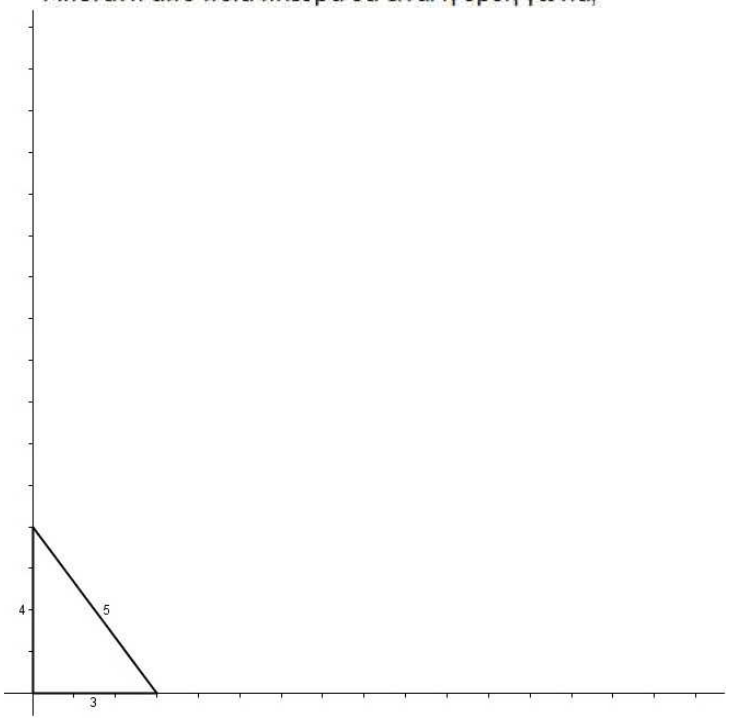
Σχ.3. 7: Τα ξυλάκια που μοιράσαμε στους μαθητές

3. Διαπιστώσαμε ότι ένα τρίγωνο με πλευρές (3, 4, 5) είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Μπορείς να μαντέψεις άλλη τριάδα μηκών που να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο; Ποιά;

Πώς το σκέφτηκες;

Απέναντι από ποιά πλευρά θα είναι η ορθή γωνία;



Σχ.3. 8: Η 3η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας και το σχήμα στο οποίο θα δοκιμάσουν τις τριάδες που προτείνουν.

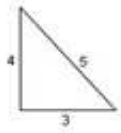
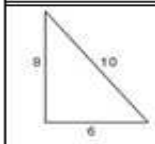
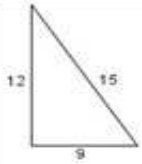
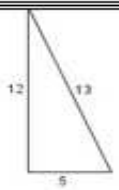
3.7.2.3 3η ενότητα (φύλλο εργασίας)

Στην τελευταία αυτή ενότητα όπου δημιουργείται η ανάγκη εύρεσης τρόπου παραγωγής τέτοιων τριάδων, είναι καθοριστική η γνώση των τετράγωνων αριθμών. Να θυμίσουμε ότι στην «ΕΡΕΥΝΑ 2» (βλ. §3.5), η εισαγωγή της έννοιας των τετράγωνων αριθμών που ήταν ενσωματωμένη στη

διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, γινόταν με τη χρήση ψηφίδων. Δηλαδή είχε μοιραστεί στους μαθητές ένα σακουλάκι με ψηφίδες με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές εξοικειώνονταν με τους σχηματικούς αριθμούς και προτρέπονταν στη διατύπωση μιας σχέση μεταξύ του πλήθους των ψηφίδων και του αντίστοιχου σχηματικού αριθμού.

Με την δραστηριότητα που έχει πραγματοποιηθεί στα εισαγωγικά μαθήματα και τη βοήθεια του φύλλου εργασίας (βλ. Σχ.3.2, §3.7.1) που ζητήσαμε από το διδάσκοντα να συμπεριλάβει στο τμήμα παρέμβασης, οι τετράγωνοι αριθμοί αποτελούν προϋπάρχουσα γνώση για τους μαθητές. Οπότε τους ζητάμε να θυμηθούν έναν άλλο τρόπο αναπαράστασης των φυσικών αριθμών, ώστε να προχωρήσουμε στην επόμενη δραστηριότητα.

4. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

Τρίγωνο	Πλευρά τριγώνου	Τετραγωνικός αριθμός που ταιριάζει με την πλευρά του τριγώνου	Πλήθος ψηφίδων τετραγωνικού αριθμού	
	3			
	4			
	5			
	6			
	8			
	10			
	9			
	12			
	15			
	5			
	12			
	13			

Σχ.3. 9: Η 4η δραστηριότητα του φύλλου εργασίας

Μέσα από τη συμπλήρωση αυτού του πίνακα στοχεύουμε οι μαθητές να βρουν τη σχέση που συνδέει τις ψηφίδες των τετραγωνικών αριθμών των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με τα δύο πρώτα παραδείγματα και να επιβεβαιώσουν την εικασία τους με τα δύο επόμενα. Κατόπιν να

διατυπώσουν και να καταγράψουν έναν κανόνα και να καταλήξουν στην αριθμητική έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, συμπληρώνοντας τις δύο τελευταίες δραστηριότητες:

5. Μπορείς να διατυπώσεις με λέξεις τη σχέση που συνδέει τις τριάδες μηκών ενός ορθογωνίου τριγώνου;
6. Μπορείς να διατυπώσεις αυτή τη σχέση με μαθηματικά σύμβολα;

Σχ.3. 10: Οι δύο τελευταίες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας

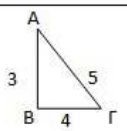
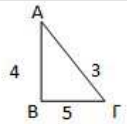
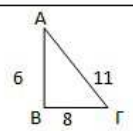
3.7.3 Αξιολόγηση (Ερωτηματολόγιο αξιολόγησης)

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από 13 ερωτήματα πολλαπλής επιλογής με διαφορετικούς διερευνητικούς στόχους στις πέντε (5) ομάδες ερωτήσεων.

3.7.3.1 1η ομάδα ερωτήσεων

Χαρακτηρισμός ενός τριγώνου (ορθογωνίου, οξυγωνίου, αμβλυγωνίου) του οποίου οι πλευρές είναι είτε οι γνωστές Πυθαγόρειες Τριάδες είτε όχι αλλά μπορεί να δημιουργείται «οπτική απάτη» στη θέση της ορθής.

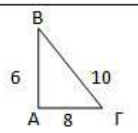
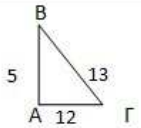
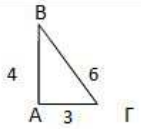
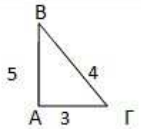
Στις επόμενες ερωτήσεις να ΚΥΚΛΩΣΕΙΣ την απάντηση που είναι κατά τη γνώμη σου Η ΠΙΟ ΣΩΣΤΗ.

Ε Ρ Ω Τ Η Σ Η 1				
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι: 				
Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές
Ε Ρ Ω Τ Η Σ Η 2				
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι: 				
Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές
Ε Ρ Ω Τ Η Σ Η 3				
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι: 				
Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές

Σχ.3. 11: 1η ομάδα ερωτήσεων

3.7.3.2 2η ομάδα ερωτήσεων

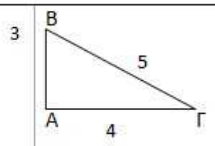
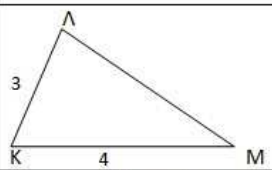
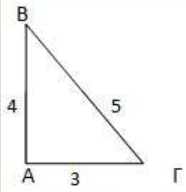
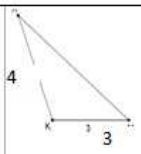
Χαρακτηρισμός μιας γωνίας (ορθή, οξεία, αμβλεία), που είτε είναι η ορθή γωνία ενός τριγώνου με πλευρές τις Πυθαγόρειες Τριάδες είτε όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4				
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία $\widehat{A}$ είναι: 				
Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$
ΕΡΩΤΗΣΗ 5				
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία $\widehat{A}$ είναι: 				
Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$
ΕΡΩΤΗΣΗ 6				
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία $\widehat{A}$ είναι: 				
Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$
ΕΡΩΤΗΣΗ 7				
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία $\widehat{A}$ είναι: 				
Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$

Σχ.3. 12: 2η ομάδα ερωτήσεων

3.7.3.3 3η ομάδα ερωτήσεων

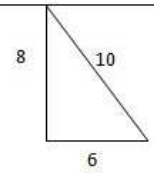
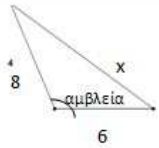
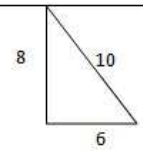
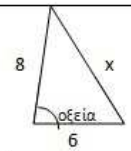
Χαρακτηρισμός μιας πλευράς ενός μη ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με ένα ορθογώνιο τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες με τις δύο πλευρές αυτού του τριγώνου.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8				
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία $\widehat{K}$ είναι οξεία. Η πλευρά ΛΜ είναι:  				
Α. ίση με 5	**Β.** μεγαλύτερη από 5	**Γ.** μικρότερη από 3	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** μικρότερη από 5
ΕΡΩΤΗΣΗ 9				
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία $\widehat{K}$ είναι αμβλεία. Η πλευρά ΛΜ είναι:  				
Α. ίση με 5	**Β.** μεγαλύτερη από 5	**Γ.** μικρότερη από 3	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** μικρότερη από 5

Σχ.3. 13: 3η ομάδα ερωτήσεων

3.7.3.4 4η ομάδα ερωτήσεων

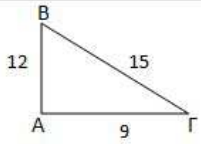
Αναγνώριση της Πυθαγόρειας Τριάδας που υλοποιεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ποιά η σχέση της τρίτης πλευράς ενός τριγώνου που έχει δύο πλευρές ίσες με τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου και η περιεχόμενη γωνία των πλευρών αυτών είναι είτε αμβλεία, είτε οξεία.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10				
Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα. Για το 'x' γνωρίζουμε ότι:				
Α. $x = 10$	**Β.** $x > 10$	**Γ.** $x < 10$	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** $x < 8$
ΕΡΩΤΗΣΗ 11				
Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα. Για το 'x' γνωρίζουμε ότι:				
Α. $x = 10$	**Β.** $x > 10$	**Γ.** $x < 10$	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** $x > 11$

Σχ.3. 14: 4η ομάδα ερωτήσεων

3.7.3.5 5η ομάδα ερωτήσεων

Κριτήριο χαρακτηρισμού μιας γωνίας (ορθή, οξεία ή αμβλεία) και ενός ορθογωνίου τριγώνου, βάσει οπτικού ή αριθμητικού ερεθίσματος, ή βάσει αυθεντίας)

ΕΡΩΤΗΣΗ 12				
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ ο δάσκαλος λέει ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία. Εσύ λες ότι:				
Α. «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί φαίνεται με το μάτι ότι είναι ορθή»	**Β.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί θυμάμαι ότι είχαμε πει στην τάξη ότι είναι ορθή»	**Γ.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί αν μετρήσω τη γωνία με το μοιρογνωμόνιο θα βρω ότι είναι ορθή»	**Δ.** «Ο δάσκαλος είναι σωστός, γιατί δεν κάνει ποτέ λάθος»	**Ε.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί είναι $15^2 = 9^2 + 12^2$ »
ΕΡΩΤΗΣΗ 13				
Αν θέλεις να πεις σε ένα φίλο σου τον **πιο σίγουρο** τρόπο για να βρίσκει ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τι θα του έλεγες;				
Α. «Όταν κοιτάξεις το τρίγωνο με το μάτι, αν μια γωνία του τριγώνου είναι ορθή φαίνεται»	**Β.** «Μέτρησε τις πλευρές και έλεγξε αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα»	**Γ.** «Μέτρησε τις γωνίες με το μοιρογνωμόνιο για να ελέγξεις αν κάποια είναι ορθή»		

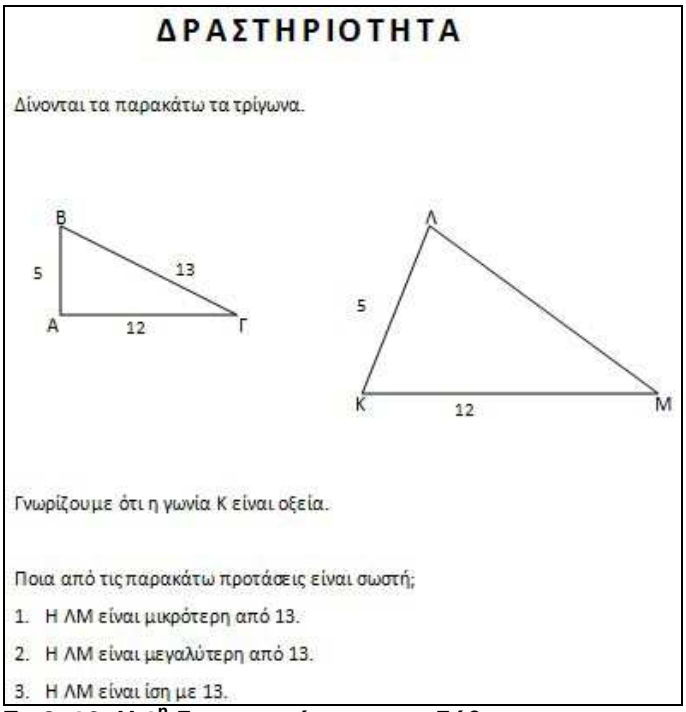
Σχ.3. 15: 5η ομάδα ερωτήσεων

3.7.4 Συνεντεύξεις (φύλλα δραστηριοτήτων, βέργες)

Δίνονται σε κάθε παιδί ξεχωριστά από τα ζεύγη των μαθητών, δύο φύλλα με δύο δραστηριότητες στις οποίες καλούνται να επιλέξουν τη σωστή απάντηση. Θέλουμε να καταγράψουμε τον τρόπο σκέψης τους και την άποψή τους καθώς επίσης και τον τρόπο με τον οποίο τεκμηριώνουν την επιλογή τους. Υπάρχουν επίσης βέργες (με διαβάθμιση ανά 3 cm) από «1» έως και «15» βαμμένες με ακρυλικό σπρέι μαύρο, τις οποίες δίνουμε όλες μαζί στα παιδιά μετά τις 2 δραστηριότητες και τους κάνουμε διάφορες διερευνητικές ερωτήσεις.

3.7.4.1 1η δραστηριότητα (διερευνητική άσκηση)

Διερεύνηση της ερώτησης 10 από την 4η ομάδα ερωτήσεων (βλ. Σχ.3.14, §3.7.3.4) όπως προέκυψε από τη στατιστική ανάλυση του Ερωτηματολογίου Αξιολόγησης που υιοθετήθηκε στην κύρια έρευνα και περιγράφεται αναλυτικά στην §3.9.2. Στην 1η δραστηριότητα υπάρχει μία «οπτική απάτη» στο μέγεθος έτσι όπως δίνεται στους μαθητές. Υπάρχουν δύο τρίγωνα που διαφέρουν στο μέγεθος, με ίσες τις δύο πλευρές τους εκ των οποίων το ένα είναι ορθογώνιο με τις πλευρές του να αποτελούν Πυθαγόρεια Τριάδα. Διερευνούμε αν αναγνωρίζουν την Πυθαγόρεια Τριάδα καθώς επίσης και την ποιοτική σχέση της τρίτης πλευράς με την περιεχόμενη γωνία των δύο ίσων πλευρών.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνονται τα παρακάτω τα τρίγωνα.

Γνωρίζουμε ότι η γωνία Κ είναι οξεία.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

1. Η ΛΜ είναι μικρότερη από 13.
2. Η ΛΜ είναι μεγαλύτερη από 13.
3. Η ΛΜ είναι ίση με 13.

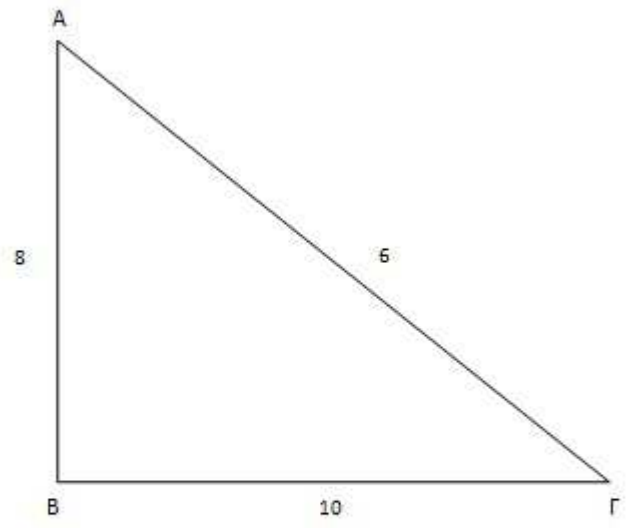
Σχ.3. 16: Η 1η δραστηριότητα που δόθηκε στις συνεντεύξεις

3.7.4.2 2η δραστηριότητα (διερευνητική άσκηση)

Διερεύνηση της ερώτησης 2 από την 1η ομάδα ερωτήσεων (βλ. Σχ.3.11, §3.7.3.1) όπως προέκυψε επίσης από τη στατιστική ανάλυση. Εξετάζουμε αν οι μαθητές αναγνωρίζουν την Πυθαγόρεια Τριάδα που υλοποιεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο και αν επιλέγουν να χαρακτηρίσουν μια γωνία αυτού του τριγώνου, βάσει οπτικού ή αριθμητικού ερεθίσματος.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 8, ΒΓ = 10 και ΑΓ = 6.



Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι κατά τη γνώμη σου η σωστή;

Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι οξεία.

Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι ορθή.

Γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι αμβλεία.

Δ. Δεν μπορώ να απαντήσω.

Ε. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι ίση με την Α.

Σχ.3. 17: Η 2η δραστηριότητα που δόθηκε στις συνεντεύξεις

3.7.4.3 3η & 4η δραστηριότητα (βέργες)

Παρουσιάζουμε στους μαθητές τις βέργες όλες μαζί. Τους δίνουμε δύο βέργες που να αποτελούν τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και τους ζητάμε να βρουν ποιά βέργα χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε το τρίγωνο, υπενθυμίζοντάς τους να μας λένε τι σκέφτονται. Κατόπιν τους δίνουμε τρεις βέργες που δεν αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου και τους ζητάμε να σχηματίσουν με αυτές, αν μπορούν, ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Θέλουμε να διερευνήσουμε και στις δύο αυτές κατασκευές, ποιά είναι τα κριτήρια και το πλαίσιο επιλογής τους. Δηλαδή, αν είναι οι αριθμοί, το θεώρημα ή οι ίδιες οι βέργες. Ένα βασικό πρωτόκολλο κλιμακούμενων

ερωτήσεων, διερεύνησης της απάντησής τους παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

3η δραστηριότητα	• *Πώς διαλέξατε αυτή τη βέργα;* • *Πόσα κομμάτια είναι η βέργα που διαλέξατε;* • *Πώς είμαστε σίγουροι ότι είναι ορθογώνιο το τρίγωνο που σχηματίσατε;* • *Χρειαζόμαστε το Πυθαγόρειο θεώρημα για να είμαστε 100% σίγουροι ή όχι;*
4η δραστηριότητα	• *Πώς σκέφτεστε να το κάνετε;* • *Είναι ορθογώνιο το τρίγωνο που φτιάξατε;* • *Ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα σ' αυτό το τρίγωνο;* • *Υπάρχει περίπτωση κάποιος να καταφέρει να φτιάξει ορθογώνιο τρίγωνο μ' αυτά;*

Πίνακας 3. 3: Ερωτήσεις διερεύνησης της απάντησης κλιμακούμενες

3.8 Κύρια έρευνα

Η έρευνα διεξήχθη από τον Οκτώβριο του 2011 έως και τον Ιανουάριο του 2012. Συμμετείχαν σ' αυτήν δύο τμήματα της Β΄ Γυμνασίου.

	Τμήμα παρέμβασης	**Τμήμα ελέγχου**
Αγόρια	7	7
Κορίτσια	10	12
ΣΥΝΟΛΟ	**17**	**19**

Πίνακας 3. 4: Οι συμμετέχοντες στην έρευνα

Στην έρευνα, συμμετείχε το σύνολο των μαθητών του τμήματος, εκτός από την τελευταία (4η) φάση που πραγματοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις σε επιλεγμένα ζεύγη μαθητών. Στο τμήμα παρέμβασης την ημέρα που πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία μας, απουσίαζαν 3 μαθητές, 1 αγόρι και 2 κορίτσια γι' αυτό και δεν έχουν συνυπολογιστεί στις επόμενες φάσεις. Η διδασκαλία έγινε σε ζεύγη των μαθητών, η επιλογή των οποίων έγινε από την καθηγήτριά τους, με σκοπό να μην διαταραχθεί η καθημερινότητά τους στην τάξη και να είναι δυνατή η συνεργασία ανάμεσά τους με βάση τη φιλία που έχουν αναπτύξει μεταξύ τους. Το μάθημα βιντεοσκοπήθηκε και η βιντεοσκόπηση έγινε από μία σταθερή κάμερα τοποθετημένη σε μία ντουλάπα της αίθουσας σε σημείο που να καταγράφει όλη την αίθουσα και το

σημείο που πραγματοποιήθηκαν οι 2 πρώτες δραστηριότητες και από μία φορητή κάμερα που χρησιμοποιούσε ο ένας ερευνητής κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στις επόμενες παραγράφους §3.8.1 έως §3.8.4 περιγράφουμε αναλυτικά τους στόχους και τις διαδικασίες κάθε φάσης της έρευνας όπως φαίνονται συνοπτικά στον Πίνακα 3.2 της §3.6.

3.8.1 Τετράγωνοι αριθμοί

Μία διαφορά με την «ΕΡΕΥΝΑ 2» (βλ. Πίνακας 3.1 της §3.5) είναι ότι δεν υπήρχε στο σχεδιασμό της προηγούμενης αυτής έρευνας, η συγκεκριμένη φάση. Η έννοια των τετράγωνων αριθμών και ο τρόπος με τον οποίο βοηθούν στη σύνδεση των Τριάδων με την αριθμητική έκφραση του Πυθαγορείου θεωρήματος ήταν ενσωματωμένη στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Το αποτέλεσμα ήταν ότι, αφενός ο χρόνος ήταν ασφυκτικός, αφετέρου δεν γινόταν ομαλά η σύνδεση αυτής της έννοιας με τις υπόλοιπες δραστηριότητες, γιατί δεν προϋπήρχε σα γνώση στους μαθητές αυτή η μορφή γεωμετρικής αναπαράστασης των φυσικών αριθμών.

Δεδομένου ότι η διδασκαλία του Θεωρήματος στο σχολείο βασίζεται στην έννοια του εμβαδού, ισχυριζόμαστε ότι οι Τριάδες είναι κατάλληλο αριθμητικό πρότυπο για τους σκοπούς της διδακτικής μας παρέμβασης. Επιπλέον οι σχηματικοί τετράγωνοι αριθμοί μπορούν να βοηθήσουν στη σύνδεση των Τριάδων και της αριθμητικής έκφρασης του θεωρήματος με το γεωμετρικό σχήμα ορθογώνιο τρίγωνο. Για το λόγο αυτό οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν το γεωμετρικό τρόπο αναπαράστασης κάποιων φυσικών αριθμών με τη μορφή των τετράγωνων αριθμών.

Στα πρώτα μαθήματα που γίνονται με την έναρξη της σχολικής χρονιάς οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ολοκληρώνουν την ύλη της Α΄ Γυμνασίου, αν δεν ολοκληρώθηκε την προηγούμενη χρονιά και κατόπιν ξεκινούν από το βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου. Στα μαθήματα αυτά γίνεται επίσης επανάληψη των ιδιοτήτων των φυσικών και ρητών αριθμών. Επιλέξαμε στο τμήμα παρέμβασης κατά τη διάρκεια των πρώτων επαναληπτικών μαθημάτων στην ενότητα των φυσικών αριθμών να εισάγει ο διδάσκων του τμήματος, το φύλλο εργασίας με την ολιγόλεπτη δραστηριότητα που αφορά τους σχηματικούς αριθμούς (βλ. Σχ.3.2, §3.7.1).

Σκοπός μας είναι, οι τετράγωνοι αριθμοί και οι σχέσεις τους με τις αντίστοιχες πλευρές τους, να αποτελούν μέρος της γνώσης της κοινότητας μάθησης, όταν αργότερα γίνει η παρέμβαση στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στα

πλαίσια των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών, να δουν ότι κάποιοι από αυτούς μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή κάποιου γεωμετρικού σχήματος. Στη δραστηριότητα αυτή είχαμε σχηματίσει το 4 και το 9 με ψηφίδες, αναγράφοντας το πλήθος των ψηφίδων τους και την αλγεβρική μορφή που έχει ένας τετραγωνικός αριθμός, πχ. 2^2, 3^2 κ.ο.κ. και ζητήσαμε από τους μαθητές να βρουν τους επόμενους δύο τετράγωνους αριθμούς.

3.8.2 Διδασκαλία

Γίνεται στο τμήμα παρέμβασης, είναι διάρκειας μιας σχολικής ώρας και συμπληρωματική στη προβλεπόμενη διδασκαλία τους Θεωρήματος στη Β΄ Γυμνασίου. Στο τμήμα ελέγχου γίνεται μια επιπλέον ώρα διδασκαλίας στο Πυθαγόρειο Θεώρημα από τον διδάσκοντα, ώστε να υπάρχει ίσος αριθμός διδακτικών ωρών στη συγκεκριμένη ενότητα και στα δύο τμήματα.

Χωρίζεται σε 3 ενότητες και σκοπός μας είναι οι μαθητές να βιώσουν την «μεταμόρφωση» της υποκειμενικής εμπειρίας της καθετότητας στην αντικειμενική μαθηματική ιδέα του ορθογωνίου τριγώνου. Σύμφωνα με τους Lappas και Spyrou (2006) υπάρχουν δύο επίπεδα εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου. Το $1^{ο}$ επίπεδο μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αριθμητικής έκφρασης του Πυθαγορείου Θεωρήματος «$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$» (με α, β, γ τα μήκη πλευρών ενός συγκεκριμένου ορθογωνίου τριγώνου), που είναι μία αντικειμενική επαγωγική περιγραφή. Κατόπιν στο $2^{ο}$ επίπεδο όπου η αλγεβρική έκφραση «$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$» προκύπτει από παραγωγικούς συλλογισμούς, γίνεται μια αντικειμενική παραγωγική αλήθεια. Στην παρούσα έρευνα και στη διδακτική παρέμβαση που σχεδιάζουμε, στόχος μας είναι η επίτευξη του $1^{ου}$ επιπέδου εξαντικειμενίκευσης, αφού σύμφωνα με τους Lappas και Spyrou (2006), τα αρχέτυπα αποτελέσματα που πηγάζουν από την εμπειρία εξαντικειμενικεύονται μέσω των αριθμητικών τους αναπαραστάσεων.

Στη $2^{η}$ αυτή φάση γίνεται ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων, με τη βοήθεια των βίντεο που τραβήχτηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και στόχος μας είναι να μελετήσουμε τη συλλογιστική πορεία που ακολούθησαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια αυτής της διδακτικής μας παρέμβασης. Η ανάλυση αυτής της φάσης περιγράφεται αναλυτικά στην §3.9.1.

Σε κάθε θρανίο υπήρχε το φύλλο εργασίας με τις τρεις ενότητες δραστηριοτήτων, το σακουλάκι με τις ξύλινες ράβδους χωρισμένες ανά 3 εκατοστά παριστάνοντας τα μήκη από το 1 έως το 10 και ένας χάρακας (βλ.

§3.7.2.1 έως και §3.7.2.3). Η διδακτική παρέμβαση χωρίζεται σε τρεις ενότητες.

Στην πρώτη ενότητα, η διδασκαλία γίνεται μέσω επίδειξης προς όλη την τάξη, ενώ στις επόμενες οι μαθητές λειτουργούν ομαδοσυνεργατικά ανά δυάδες στο θρανίο.

3.8.2.1 1η ενότητα (ποιοτική αναγνώριση της καθετότητας)

Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζουμε στους μαθητές ένα βαρίδι κρεμασμένο από ένα σκοινί που ισορροπεί πάνω από την επιφάνεια ενός χρωματισμένου υγρού. Ζητάμε από αυτούς να μας πουν τη γωνία που σχηματίζει το σκοινί με το υγρό, αναγνωρίζοντας έτσι τη φυσική καθετότητα που δημιουργεί η βαρύτητα. Κατόπιν τους παρουσιάζουμε 3 ξύλινες ράβδους, παρόμοιες με τις ράβδους που έχουν στα θρανία τους αλλά μεγαλύτερες, χρωματισμένες ανά ίσα τμήματα σε 3, 4 και 5 κομμάτια και τους ζητάμε να φτιάξουν με αυτά μία γωνία που να ταιριάζει με τη γωνία που σχηματίζει το σκοινί με το υγρό και κατόπιν ένα τρίγωνο. Συνδέεται έτσι οπτικά η «φυσική» καθετότητα μεταξύ του νήματος της στάθμης με την επιφάνεια χρωματισμένου υγρού που ηρεμεί, με το τριγωνικό πλαίσιο που σχηματίζουν οι τρεις ράβδοι.

Για να σχηματίζεται το τρίγωνο θα πρέπει να τοποθετήσουν στις κάθετες τα ξύλα 3-4 ή 4-3, οπότε το τρίτο ξύλο (5) θα κλείνει το τρίγωνο. Στην περίπτωση αυτή τους ρωτάμε αν δοκιμάσουν αλλιώς τις πλευρές, τι θα συμβεί. Αν η προσπάθεια γίνει με τα ξύλα 4-5, οπότε το ξύλο (3) που απομένει δεν «φτάνει» για να σχηματιστεί το τρίγωνο, τους ρωτάμε αν κάποια από αυτές τις πλευρές έχει συγκεκριμένη θέση όπως και στην περίπτωση που τους ζητάμε να δοκιμάσουν αλλιώς τις πλευρές. Διαπιστώνουν έτσι ότι το ξύλο με μήκος 5, έχει συγκεκριμένη θέση και έτσι επιτυγχάνεται μια πρώτη ποιοτική σχέση ορθής γωνίας - υποτείνουσας, και υποτείνουσας - καθέτων πλευρών. Κατόπιν ζητάμε από τους μαθητές να σχηματίσουν ένα παρόμοιο τρίγωνο στο δάπεδο που να έχει την ίδια γωνία με τη «γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της επιφάνειας του υγρού και του νήματος», καθώς και να προσδιορίσουν τη γωνία αυτή και να ονομάσουν τις πλευρές του τριγώνου. Ελέγχεται ο ισχυρισμός αυτός, μεταφέροντας το τρίγωνο από το πάτωμα στον τοίχο, διαπιστώνοντας έτσι ότι η ορθή γωνία μπορεί να φτιαχτεί πάνω σε οποιαδήποτε επιφάνεια και μάλιστα να σχηματιστεί ανεξάρτητα από τη φυσική καθετότητα που δημιουργεί η βαρύτητα. Ρωτάμε να μας πουν σε πόσα κομμάτια είναι χωρισμένη κάθε ράβδος, ώστε να εστιάσουν στην

ποσότητα 3-4-5 και κατόπιν τους ζητάμε να βρουν τα αντίστοιχα ξυλάκια που έχουν στα θρανία τους και να κατασκευάσουν με αυτά ένα τέτοιο τρίγωνο. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκουμε να δοκιμάσουν, να ελέγξουν και να επιβεβαιώσουν τον ισχυρισμό τους με χειραπτικά εργαλεία.

Σχ.3. 18: Οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνα με ξυλάκια στα θρανία τους.

Κατόπιν μεταβάλουμε τη γωνία μεταξύ των ράβδων «3» και «4» (σε άμεση οπτική αντιδιαστολή με τη φυσική καθετότητα της επιφάνειας του υγρού και του νήματος) με ερωτήσεις που απαιτούν τη σύνδεση του μήκους της ράβδου «5» με το χαρακτηρισμό της γωνίας: ορθή (ίση με 5), οξείας (μικρότερης από 5) και αμβλείας (μεγαλύτερης από 5). Τους παρακινούμε να κάνουν το ίδιο και στα τρίγωνα που έχουν σχηματίσει στα θρανία τους για να αποκτήσουν μια οπτική δυναμική εικόνα της αλλαγής που συμβαίνει, ότι δηλαδή «περισσεύει» το μήκος «5» στην οξεία και δε «φτάνει» στην αμβλεία γωνία. Στο τέλος της πρώτης αυτής ενότητας συμπληρώνουν στο φύλλο εργασίας τις 2 πρώτες ερωτήσεις που στοχεύουν στις ίδιες ποιοτικές συνδέσεις μεταξύ της πλευράς μήκους 5 και της απέναντι γωνίας, με τις κατάλληλες εκφράσεις («ίση με», «μικρότερη από» και «μεγαλύτερη από»). Επιπλέον, σε τρίγωνο πλευρών μήκους 3, 4 και 5, ζητείται να καταγραφεί ο ποιοτικός κανόνας που συνδέει το μήκος της πλευράς μήκους 5 με τη γωνία μεταξύ των πλευρών μήκους 3 και 4 και η σχέση της πλευράς μήκους 5 με τις άλλες πλευρές του τριγώνου.

3.8.2.2 2η ενότητα (ποσοτικοποίηση των σχέσεων της 1ης ενότητας)

Στη δεύτερη ενότητα, με τη χρήση αριθμητικών προτύπων στοχεύουμε στην εύρεση Πυθαγορείων Τριάδων. Οι μαθητές καλούνται να προτείνουν Τριάδες, να διατυπώσουν υποθέσεις και κανόνες παραγωγής τέτοιων Τριάδων και να ελέγξουν μόνοι τους τις υποθέσεις αυτές.

Επειδή οι μαθητές προτείνουν συνήθως τις τριάδες 6-7-8 και 6-8-10, όπως και έγινε στην πιλοτική διδασκαλία, βάζουμε τους μισούς μαθητές να βρουν τα ξυλάκια 6-7-8 και τους άλλους μισούς τα ξυλάκια 6-8-10 και να δοκιμάσουν να φτιάξουν ένα τρίγωνο με αυτά τα μήκη για να δουν αν είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση που κάποιος προτείνει την τριάδα 9-12-15, δεν έχουμε κατασκευάσει μεγαλύτερα ξυλάκια από το 10, οπότε υπάρχει η αναγκαιότητα της μέτρησης και συνεχίζουμε στην επόμενη δραστηριότητα στο φύλλο εργασίας.

Έχουμε σχεδιάσει δύο κάθετες ευθείες με διαγραμμίσεις ανά εκατοστό μέχρι το 15 και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 και 4 και υποτείνουσα 5. Τους ζητάμε να δοκιμάσουν να φτιάξουν στο σχήμα αυτό, το τρίγωνο 9-12-15, χρησιμοποιώντας τις διαγραμμίσεις στις κάθετες πλευρές και να μετρήσουν με τους χάρακές τους την τρίτη πλευρά για να δουν αν είναι πράγματι 15. Μετά τον έλεγχο και τη διατύπωση ότι τα πολλαπλάσια της τριάδας 3-4-5, δημιουργούν επίσης ορθογώνιο τρίγωνο, τους ζητάμε να σχεδιάσουν το τρίγωνο με πλευρές 5-12-13, του οποίου οι πλευρές δεν είναι πολλαπλάσια των 3-4-5. Οπότε δημιουργείται η ανάγκη να βρεθεί ένας τρόπος που να «παράγει» τριάδες πλευρών ορθογωνίων τριγώνων, χωρίς αυτές να είναι πολλαπλάσια των αριθμών 3-4-5.

3.8.2.3 3η ενότητα (κανόνας παραγωγής τριάδων)

Στην τρίτη ενότητα ζητάμε από τους μαθητές να μας πουν μια άλλη αναπαράσταση των φυσικών αριθμών. Στο σημείο αυτό είναι καθοριστική η εισαγωγική φάση στην οποία οι μαθητές έχουν ακούσει για τους τετράγωνους αριθμούς. Γράφουμε στον πίνακα τους τετράγωνους αριθμούς 4, 9, 16, 25 και 36 και ζητάμε να μας πουν κάθε πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου 3-4-5 με ποιόν τετράγωνο αριθμό ταιριάζει και γιατί. Στην επόμενη δραστηριότητα του φύλλου εργασίας έχουμε σχεδιάσει ένα πίνακα με τα τρίγωνα 3-4-5, 6-8-10, 9-12-15 και 5-12-13, όπου σε κάθε πλευρά πρέπει να συμπληρώσουν, τον τετραγωνικό αριθμό που ταιριάζει, σχεδιάζοντας συγχρόνως τους

τετράγωνους αριθμούς στο $1^{ο}$ τρίγωνο και το πλήθος των ψηφίδων του αντίστοιχου τετραγωνικού αριθμού. Η ερώτηση είναι αν μπορούν να βρουν κάποια σύνδεση μεταξύ των 3 αυτών αριθμών. Αν δεν απαντήσουν ποιά σχέση συνδέει τους αριθμούς 9, 16 και 25, επαναλαμβάνουμε την ερώτηση για τους αριθμούς 36, 64 και 100. Πάλι από την πιλοτική έρευνα είδαμε ότι εύκολα διαπιστώνουν ότι 36+64=100, οπότε επιβεβαιώνουμε το ίδιο συμπέρασμα και με τις τριάδες, 9-12-15 και 5-12-13. Στη ενότητα αυτή στόχος είναι η διατύπωση του κανόνα «$5^2=3^2+4^2$» ή της επαγωγικής αριθμητικής έκφρασης «$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$».

3.8.3 Αξιολόγηση

Πραγματοποιείται στο τμήμα ελέγχου και στο τμήμα παρέμβασης. Μετά την ολοκλήρωση των ωρών διδασκαλίας στο Πυθαγόρειο θεώρημα, δίνεται ένα τεστ αξιολόγησης των γνώσεών τους, σχεδιασμένο από το διδάσκοντα στο θεώρημα και ακολουθεί και στα δύο τμήματα ένα Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης σχεδιασμένο από τους ερευνητές. Με τα δύο αυτά εργαλεία επιδιώκεται μια ποσοτική ανάλυση της κατανόησης του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Το ερωτηματολόγιο αξιολόγησης αποτελείται από 13 ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, ο στόχος των οποίων είναι να διερευνήσει τη γνώση των μαθητών για:

α) το χαρακτηρισμό ενός τριγώνου (ορθογωνίου, οξυγωνίου, αμβλυγωνίου). Συγκεκριμένα, δίνουμε τρία τρίγωνα που «φαίνονται» ορθογώνια, με μήκη πλευρών τους αριθμούς 3-4-5, 4-5-3 και 6-8-11 («κάθετη» - «κάθετη» - «υποτείνουσα») και τους ζητάμε να τα χαρακτηρίσουν ως προς τις γωνίες τους. Διερευνούμε αν αναγνωρίζουν τις Πυθαγόρειες ή μη τριάδες και ειδικά στη $2^{η}$ ερώτηση αν το οπτικό ερέθισμα είναι πιο ισχυρό από το αριθμητικό, (βλ. Σχ.3.11, § 3.7.3.1).

β) το χαρακτηρισμό μιας γωνίας (ορθή, οξεία, αμβλεία). Συγκεκριμένα, δίνουμε τέσσερα τρίγωνα που «φαίνονται» ορθογώνια, με μήκη πλευρών τους αριθμούς 6-8-10, 5-12-13, 4-3-6 και 5-3-4 («κάθετη» - «κάθετη» - «υποτείνουσα») και τους ζητάμε να χαρακτηρίσουν τη γωνία που περιέχεται στις πλευρές 6-8, 5-12, 4-3 και 5-3. Διερευνούμε αν αναγνωρίζουν πρώτα το είδος του τριγώνου και κατόπιν την ποιοτική σχέση πλευράς και απέναντι γωνίας, (βλ. Σχ.3.12, § 3.7.3.2).

γ) το χαρακτηρισμό μιας πλευράς ενός μη ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με ένα ορθογώνιο τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες με τις δύο πλευρές αυτού του τριγώνου. Δίνουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές 3-4-5 και 4-3-5 («κάθετη» - «κάθετη» - «υποτείνουσα») και δύο άλλα τρίγωνα με την περιεχόμενη γωνία των πλευρών 3-4 και 4-3, οξεία και αμβλεία αντίστοιχα. Ζητάμε να χαρακτηρίσουν την τρίτη πλευρά ΛΜ σε σχέση με την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Διερευνούμε αν συνδέουν το μήκος της τρίτης πλευράς με το είδος της απέναντι γωνίας, (βλ. Σχ.3.13, § 3.7.3.3).

δ) αναγνώριση της Βασικής Πυθαγόρειας Τριάδας. Όπως και στις δύο προηγούμενες ερωτήσεις ζητάμε να χαρακτηρίσουν την τρίτη πλευρά «x» ενός τριγώνου που έχει δύο πλευρές ίσες με ένα άλλο τρίγωνο που όμως πρέπει να το αναγνωρίσουν ότι είναι ορθογώνιο. Δηλαδή να αναγνωρίσουν μία Πυθαγόρεια τριάδα αρχικά και κατόπιν να επιλέξουν την απάντησή τους, (βλ. Σχ.3.14, § 3.7.3.4).

ε) κριτήριο επιλογής χαρακτηρισμού, βάσει οπτικού ή αριθμητικού ερεθίσματος. Δίνουμε ένα τρίγωνο με πλευρές 9-12-15 και ζητάμε να χαρακτηρίσουν με σωστό ή λάθος την υπόθεσή μας ότι η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά 15 είναι οξεία, στηριζόμενοι, στο οπτικό τους ερέθισμα, σε αριθμητικό ερέθισμα ή στην αυθεντία του δασκάλου. Και τέλος τους ζητάμε να διαλέξουν μεταξύ τριών επιλογών ένα σίγουρο τρόπο χαρακτηρισμού ενός τριγώνου ως ορθογώνιο. Οι επιλογές είναι «φαίνεται να είναι», «μετράω τις γωνίες με μοιρογνωμόνιο» και «μετράω τις πλευρές και ελέγχω αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα», (βλ. Σχ.3.15, § 3.7.3.5).

3.8.4 Συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις των μαθητών επιλέγουμε να πραγματοποιηθούν μία περίπου εβδομάδα μετά το Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης. Πραγματοποιούνται στο σχολείο των μαθητών και η διάρκειά τους είναι περίπου 20 λεπτά. Αρχικά η επιλογή των μαθητών γίνεται έτσι ώστε να έχουμε ζεύγη μαθητών με άριστη, μεσαία και χαμηλή επίδοση στο τεστ του διδάσκοντα. Στη συνέχεια, λάβαμε υπόψη μας το ερωτηματολόγιο αξιολόγησης και τις απαντήσεις σε ερωτήσεις που η στατιστική ανάλυση υπέδειξε ότι έχουν στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση.

Στο θρανίο υπάρχουν εκτυπωμένες οι δύο δραστηριότητες σε δύο φύλλα, ένα για το κάθε παιδί, βέργες από το «1» ως και το «15», χαρτί,

μολύβι, γομολάστιχα. Απέναντι από το σημείο που κάθονται οι μαθητές είναι τοποθετημένη σταθερή κάμερα ώστε όλες οι συνεντεύξεις να βιντεοσκοπηθούν για να αναλυθούν αργότερα.

Στο εισαγωγικό μέρος παρουσιάζεται ο ερευνητής στους μαθητές και τους ενημερώνει για το σκοπό αυτών των συνεντεύξεων.

Τους ρωτάμε για τις απόψεις τους για τα τρίγωνα και για κάποια στοιχεία τους, όπως οι γωνίες τους και οι πλευρές τους. Τους διαβεβαιώνουμε ότι δεν είναι κάποιο τεστ γνώσεων, αλλά μας ενδιαφέρει η άποψή τους και τους τονίζουμε ότι δεν θα πάρουν κάποιο βαθμό. Τους ζητάμε να προσπαθήσουν να μας δίνουν όσο πιο αναλυτικές απαντήσεις μπορούν για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τις σκέψεις τους και την άποψή τους.

Τους ρωτάμε αν θυμούνται πώς έγινε η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο σχολείο και στα παιδιά του τμήματος παρέμβασης τι θυμούνται από τη διδασκαλία που κάναμε εμείς, τι τους άρεσε ή δεν τους άρεσε.

Προχωρώντας στις 2 πρώτες δραστηριότητες, τους ζητάμε αφού διαβάσουν προσεκτικά την κάθε ερώτηση να μας πουν ποιά ή ποιές απαντήσεις νομίζουν ότι είναι σωστές ή λάθος και γιατί. Τους υπενθυμίζουμε να προσπαθούν να μας δίνουν όσο πιο αναλυτικές απαντήσεις μπορούν και ότι δεν κρίνονται, ούτε βαθμολογούνται.

Στην πρώτη δραστηριότητα (βλ. Σχ.3.16, §3.7.4.1), διερευνούμε την ερώτηση 10 του Ερωτηματολογίου Αξιολόγησης. Σ' αυτή τη δραστηριότητα υπάρχει μία «οπτική απάτη» στο μέγεθος έτσι όπως δίνεται στους μαθητές. Υπάρχει ένα τρίγωνο που δεν αναφέρεται ότι είναι ορθογώνιο, με πλευρές 5,12 και 13 και ένα άλλο τρίγωνο με δύο πλευρές 5 και 12 και την περιεχόμενη γωνία οξεία, μεγαλύτερο σε μέγεθος. Τους ζητάμε να επιλέξουν αν η τρίτη πλευρά αυτού του τριγώνου είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση με 13. Θέλουμε να διερευνήσουμε αν οι μαθητές αναγνωρίζουν την Πυθαγόρεια Τριάδα 5-12-13, όπως επίσης την ποιοτική σχέση της τρίτης πλευράς με την απέναντι γωνία.

Στη δεύτερη δραστηριότητα (βλ. Σχ.3.17, §3.7.4.2), διερευνούμε την ερώτηση 2 του Ερωτηματολογίου Αξιολόγησης. Σ' αυτή τη δραστηριότητα υπάρχει ένα τρίγωνο με πλευρές 6, 8 και 10 που «μοιάζει» ορθογώνιο. Οι πλευρές που φαίνονται να είναι οι κάθετες πλευρές του, έχουν μήκος 8 και 10 και η πλευρά που φαίνεται να είναι η υποτείνουσα, έχει μήκος 6. Ζητάμε να επιλέξουν, αν η γωνία που περιέχεται στις πλευρές 8 και 10, είναι οξεία, ορθή,

αμβλεία, ίση με την περιεχόμενη γωνία των πλευρών 6 και 8 ή αν δεν μπορούν να απαντήσουν. Διερευνούμε αν αναγνωρίζουν την Πυθαγόρεια Τριάδα και αν η επιλογή της απάντησής τους βασίζεται στο σχήμα που βλέπουν ή χρησιμοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα. Αν δηλαδή το οπτικό ερέθισμα είναι πιο ισχυρό από το αριθμητικό.

Στις επόμενες δύο δραστηριότητες ($3^η$ & $4^η$) (βλ. §3.7.4.3), δίνουμε στους μαθητές τις βέργες «9» και «12» που θέλουμε να αποτελούν τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και τους ζητάμε να βρουν ποιά βέργα χρειαζόμαστε για να φτιάξουμε αυτό το τρίγωνο. Κατόπιν τους δίνουμε τις βέργες «3», «6» και «7» και τους ζητάμε να σχηματίσουν με αυτές, αν μπορούν, ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Τους ρωτάμε, αν είναι σίγουροι ότι το τρίγωνο που κατασκευάζουν είναι ορθογώνιο, αν όχι πώς μπορούν να σιγουρευτούν, πώς θα μπορούσαν να πείσουν κάποιον ότι κάνουν ή δεν κάνουν λάθος, διερευνώντας τον τρόπο που σκέφτονται, που επιχειρηματολογούν και αν χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα ή αρκούνται στο οπτικό αποτέλεσμα.

3.9 Μέθοδος ανάλυσης της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε τόσο η ποιοτική όσο και η ποσοτική ανάλυση των δεδομένων (βλ. Πίνακας 3.2, §3.6). Η ποιοτική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε στη φάση της διδακτικής παρέμβασης ($2^η$ φάση) και των συνεντεύξεων ($4^η$ φάση), ενώ η ποσοτική, στη φάση του ερωτηματολογίου ($3^η$ φάση). Παρακάτω περιγράφουμε αναλυτικά τον τρόπο και το στόχο με τον οποίον έγινε η επιμέρους ανάλυση κάθε φάσης.

3.9.1 Διδασκαλία

Η διδασκαλία που έγινε στο τμήμα παρέμβασης βιντεοσκοπήθηκε από δύο κάμερες όπως αναφέρουμε και στην §3.8. Όταν απομαγνητοφωνήθηκαν τα βίντεο που τραβήχτηκαν και με τις δύο κάμερες, αρχικά εξετάστηκαν στην ολότητά τους. Ο λόγος ήταν για να διαπιστώσουμε αν η διδασκαλία ακολούθησε τη ροή του σχεδιασμού μας, αν δούλεψαν τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε και αν οι μαθητές είχαν μια ενεργή συμμετοχή, δεδομένου ότι δεν γνώριζαν τον ερευνητή και επιθυμούσαμε μια ομαδοσυνεργατική διδασκαλία. Κατόπιν μέσα από μια συστηματική παρακολούθηση και καταγραφή των διαλόγων έγινε η ποιοτική ανάλυση κάθε ενότητας.

Παρακολουθώντας τα πλάνα από το βίντεο που κατέγραφε η φορητή κάμερα, εξετάσαμε αν οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στη χρήση των χειραπτικών υλικών που χρησιμοποιούμε στις δύο πρώτες ενότητες της διδασκαλίας μας (βλ. §3.8.2.1 & §3.8.2.2), αφού μέσα από τη χρήση αυτών των υλικών θέλαμε να οδηγηθούν οι μαθητές σε κάποια πρωταρχικά συμπεράσματα. Επίσης παρατηρήσαμε τη λεκτική και σωματική εμπλοκή των μαθητών (χειρονομίες, λέξεις, κινήσεις) που αφορούσαν τα αναδυόμενα μαθηματικά νοήματα που προέκυψαν με τη χρήση των διαφόρων μεθοδολογικών εργαλείων.

Στόχος μας είναι μέσα από την παρακολούθηση των διαλόγων των μαθητών με τον ερευνητή, να μελετήσουμε τη συλλογιστική πορεία των μαθητών σε σχέση με τις επιμέρους δραστηριότητες σε κάθε στάδιο της διδακτικής μας παρέμβασης και να εξεταστεί αν αυτή η πορεία ανταποκρίνονταν στους στόχους που είχαμε θέσει στα τρία στάδια της διδασκαλίας μας.

3.9.2 Αξιολόγηση

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου σε συνδυασμό με το βαθμό των μαθητών στο τεστ του σχολείου τους, εξετάστηκαν με τη μέθοδο της ποσοτικής ανάλυσης Οι απαντήσεις των μαθητών από τα δύο τμήματα (τμήμα παρέμβασης, τμήμα ελέγχου) στο ερωτηματολόγιο που σχεδιάσαμε (βλ. §3.7.3) κωδικοποιήθηκαν και η ανάλυση των δεδομένων διεξήχθη με το πρόγραμμα IBM SPSS Statistics 20. Αρχικά ταξινομήσαμε τα 13 ερωτήματα σε σωστές και λάθος απαντήσεις των μαθητών και στα δύο τμήματα. Εξετάσαμε αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση των δύο τμημάτων στις απαντήσεις του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης, με τον ακριβή έλεγχο Fisher exact test. Επίσης με τον ακριβή έλεγχο Fisher εξετάσαμε αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση του pattern των απαντήσεων. Δηλαδή αν έχουν διαφορετικού τύπου λάθος στις απαντήσεις τους οι μαθητές των δύο τμημάτων. Τέλος με τον έλεγχο Mann-Whitney εξετάσαμε αν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά των δύο τμημάτων στο τεστ του σχολείου τους και στις απαντήσεις τους στο σύνολο των 11 ερωτημάτων του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης. Οι δύο τελευταίες ερωτήσεις εξαιρέθηκαν από το Ερωτηματολόγιο στον τελευταίο αυτό έλεγχο, γιατί το περιεχόμενό τους δεν αφορά τόσο το γνωστικό αντικείμενο, όσο τη γενικότερη στάση των μαθητών σε αυτό.

Η παραπάνω στατιστική ανάλυση πραγματοποιήθηκε ακριβώς μετά τη διεξαγωγή του τεστ στο σχολείο και τη συμπλήρωση του Ερωτηματολογίου από τους μαθητές. Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης (βλ. §4.2), μας οδήγησαν στο σχεδιασμό των αντίστοιχων δραστηριοτήτων στις συνεντεύξεις.

3.9.3 4η φάση - Συνεντεύξεις

Όπως περιγράψαμε στην §3.8.4 όλες οι συνεντεύξεις των μαθητών βιντεοσκοπήθηκαν και αρχικά το απομαγνητοφωνημένο κείμενο κάθε συνέντευξης εξετάστηκε συνολικά. Όπως ήταν αναμενόμενο πολλοί από τους διαλόγους μεταξύ του ερευνητή και των συμμετεχόντων περιείχαν επισημάνσεις και διευκρινίσεις που δεν είχαν άμεση σχέση με τις δραστηριότητες ή κάλυπταν γνωστικά κενά των μαθητών απαραίτητα όμως για τη συνέχιση της διαδικασίας.

Στη συνέχεια, παρακολουθήσαμε διεξοδικά τους διαλόγους και αναλύθηκε η επιχειρηματολογία των μαθητών και η δυνατότητα ευελιξίας στις απαντήσεις τους. Εξετάσαμε πόσο επηρεάζει ένα σχήμα στη εξαγωγή συμπερασμάτων, αν δηλαδή το οπτικό ερέθισμα αποτελεί ισχυρό κριτήριο απόφανσης ακόμη και αν υπάρχουν αριθμητικά δεδομένα. Τέλος μελετήσαμε τη συνολική εμπλοκή των μαθητών στις δραστηριότητες που διαπραγματεύτηκαν σαν αποτέλεσμα του συνδυασμού, της δικής μας διδακτικής παρέμβασης και του μαθήματος που έγινε στο σχολείο.

Στόχος των συνεντεύξεων ήταν να αποκτήσουμε μια πληρέστερη εικόνα του επιπέδου κατανόησης των μαθητών και με την ανάλυση που αναφέραμε εξήχθησαν τα αποτελέσματα της έρευνας.

3.10 Κύρια σημεία του 3ου κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό συζητήθηκε η μεθοδολογία με την οποία σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα με σκοπό να υποστηρίξει και να απαντήσει το ερευνητικό ερώτημα. Συνοπτικά:

- Υπενθυμίσαμε το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε η διδακτική μας παρέμβαση, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
- Επισημάναμε ξανά τις παιδαγωγικές αρχές με τις οποίες σχεδιάσαμε τη διδασκαλία μας και τους στόχους που θέλουμε να επιτύχουμε.
- Αναφέραμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος, στο υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου. Τις προϋπάρχουσες έρευνες που έχουν προηγηθεί αυτής της έρευνας, την πιλοτική έρευνα που εφαρμόσαμε και μας οδήγησε στον τελικό σχεδιασμό και στην επιλογή των εργαλείων.
- Το μεθοδολογικό σχέδιο της έρευνας και τα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε στις φάσεις της έρευνας.
- Παρουσιάσαμε τους σκοπούς και τις διαδικασίες κάθε φάσης της έρευνας αναλυτικά.
- Στην παρούσα έρευνα υιοθετήθηκε τόσο η ποιοτική όσο και η ποσοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων και η οποία παρουσιάζεται στην τελευταία ενότητα.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα των 3 φάσεων της έρευνας (διδασκαλία, αξιολόγηση, συνεντεύξεις) με σκοπό να συζητήσουμε και να επιχειρήσουμε κάποια συμπεράσματα στο τελευταίο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας στις τρείς φάσεις της, τη διδασκαλία, την αξιολόγηση και τις συνεντεύξεις. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά κομμάτια που συλλέξαμε από την απομαγνητοφώνηση της διδασκαλίας μας. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αξιολόγησης όπως μας τα έδωσε η στατιστική ανάλυση με πίνακες και διαγράμματα. Στο τελευταίο μέρος παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων ανά δραστηριότητα, για τις τρείς ομάδες που χωρίσαμε τους μαθητές και από τα δύο τμήματα.

4.1 Διδασκαλία

Στην 1^{η} ενότητα επιτεύχθηκαν ο στόχοι της παρέμβασής μας στην τάξη, που ήταν σε πρώτο στάδιο, να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν οι μαθητές, τη γωνία που σχηματίζει το νήμα της στάθμης με την επιφάνεια του χρωματισμένου υγρού, να μεταφέρουν αυτή τη φυσική καθετότητα σε ένα τριγωνικό πλαίσιο που σχηματίζεται από ξύλινες ράβδους και να επιτύχουν μια πρώτη ποιοτική σχέση υποτείνουσας - καθέτων πλευρών. Παρακάτω έχουμε το απόσπασμα:

Ερευνητής: Έχουμε κρεμάσει με ένα νήμα ένα βαρίδι και από κάτω υπάρχει ένα χρωματισμένο υγρό. Μπορεί κάποιος να μου βρει τι γωνία σχηματίζει το νήμα που κρέμεται το βαρίδι με την επιφάνεια του υγρού;

Μαθητής: Ορθή

Ε.: Ορθή! γωνία. Μάλιστα. Ποιές θα είναι οι πλευρές αυτής της γωνίας;

Μ.: Είναι το νήμα [δείχνει με το χέρι κατακόρυφα] και η επιφάνεια του νερού και μία που δεν ....

Ε.: Ποιά είναι η .....Πώς λέγεται η γωνία που σχημάτισες; Ποιά είναι εδώ η γωνία;

[Δείχνει]

Ε.: Και είναι;

Μ.: Ορθή

Ε.: Ορθή! Για να δούμε, κλείνει το τρίγωνο; [κρατάει στο χέρι του το ξύλο 4]. Δε φτάνει ε; Αυτό το ξυλάκι δε φτάνει για να κλείσει το τρίγωνο. Μήπως πρέπει να το αλλάξουμε;

[το κορίτσι παίρνει το ξύλο 5 και το δοκιμάζει για τρίτη πλευρά για να σιγουρευτεί ότι κλείνει το τρίγωνο, οπότε το βάζει στη θέση της υποτείνουσας και το αγόρι βάζει το ξύλο 4 παράλληλα στον τοίχο].

Σχ.4. 12: Οι δραστηριότητες των παιδιών με τις ξύλινες ράβδους

Ε.: Μάλιστα. Κλείνει το τρίγωνο. Πώς λέγεται αυτό το τρίγωνο;

Μ.: Ορθογώνιο τρίγωνο.

Ε.: Γιατί;

Μ.: Γιατί έχει ορθή γωνία.

Ε.: Έχει μια ορθή γωνία, η οποία είναι ποιά;

[δείχνει τη γωνία τοίχος-δάπεδο]

Ε.: Αυτή! Ωραία! Αυτό το ... αυτή η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία, πώς λέγεται;

Μ.: Υποτείνουσα;

Ε.: Υποτείνουσα! Και οι πλευρές της ορθής γωνίας, πώς λέγονται;

Μ.: Κάθετες

Ε.: Ωραία! Για να δούμε τώρα. Προφανώς προηγουμένως που δεν έκλεινε το τριγωνάκι, σημαίνει ότι κάποιο ξύλο έχει συγκεκριμένη θέση; από αυτά τα τρία.

Μ.: Ναι

Ε.: Ποιά είναι αυτή η θέση που πρέπει να έχει δηλαδή;

Μ.: Ήταν μεγαλύτερο από την πλευρά, δηλαδή η υποτείνουσα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τις άλλες

Μ.: Και πρέπει να είναι απέναντι από την ορθή γωνία.

Στο επόμενο στάδιο, σκοπεύουμε να συνδέσουν το μήκος της ράβδου 5 με το είδος της περιεχόμενης γωνίας των πλευρών 3 και 4 όταν αυτή γίνεται

οξεία και αμβλεία αντίστοιχα και να δοκιμάζουν αυτή την αλλαγή στα τρίγωνα που έχουν φτιάξει στα θρανία τους. Εύκολα διαπιστώνουν με τη βοήθεια αυτών των χειραπτικών υλικών τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση. Έτσι επιτυγχάνεται και εδώ ο στόχος που έχουμε, τα ξυλάκια να αποτελέσουν τα πραξιακά πρότυπα από τον «πραγματικό κόσμο» του Husserl και να δώσουν νόημα στην έννοια που διαπραγματεύονται οι μαθητές. Έχουμε το απόσπασμα:

> **Ερευνητής:** Βλέπουμε το τρίγωνο που έφτιαξαν εδώ πριν, οι συμμαθητές σας. Να χαλάσουμε λίγο την ορθή γωνία. Τι εννοώ να τη χαλάσουμε; Να την κάνουμε ή πιο κλειστή ή πιο ανοικτή. Και να το δοκιμάσετε κι εσείς στο δικό σας τρίγωνο. Να την κλείσουμε! Την κλείνω τη γωνία. Τι γωνία σχηματίζεται;
>
> **Μαθητής:** Οξεία
>
> **Ε.:** Οξεία! Να δοκιμάσουμε το τρίτο ξυλάκι για το αν κλείνει την 3η πλευρά. ... Τι παρατηρούμε;
>
> **Μ.:** Δεν κλείνει
>
> **Ε.:** Τι είναι το ξύλο αυτό;
>
> ....
>
> **Ε.:** Μεγαλύτερο. Περισσεύει δηλαδή. Η πλευρά λοιπόν αυτού του τριγώνου, σε σχέση με το 5, τι θα ήταν;
>
> ....
>
> **Ε.:** Αυτό είναι 5! [το δείχνει] Η πλευρά λοιπόν αυτού του τριγώνου σε σχέση με το 5 τί θα ήταν;
>
> **Μ.:** Μικρότερη
>
> **Ε.:** Μικρότερη! Ωραία, δείτε το κι εσείς στα τριγωνάκια που έχετε φτιάξει. Κλείστε τη γωνία σας ....
>
> [Δοκιμάζουν]
>
> **Ε.:** και βλέπετε ότι το ξυλάκι 5 περισσεύει;
>
> **Ε.:** Ωραία! Ανοίγω τη γωνία. Θα το πάμε πιο μπροστά για να μπορούμε να την ανοίξουμε αρκετά. [ένας μαθητής δοκιμάζει ήδη και ανοίγει τη γωνία]. Την ανοίγω τη γωνία! Το βλέπουμε όλοι; Τι γωνία σχηματίζεται;
>
> **Μ.:** Αμβλεία
>
> **Ε.:** Αμβλεία! Δοκιμάζω πάλι το τρίτο ξύλο, να δούμε αν κλείνει το τρίγωνο. Τι βλέπω;
>
> **Μ.:** Είναι μικρότερο από την αμβλεία γωνία.....την πλευρά της αμβλείας γωνίας

Ε.: Δεν φτάνει για να κλείσει το τρίγωνο. Άρα η πλευρά αυτού του τριγώνου, αν θέλαμε να το σχηματίσουμε, σε σχέση με το 5 τί είναι;

Μ.: Μεγαλύτερη

Ε.: Μεγαλύτερη! Πολύ ωραία! Το βλέπετε και εσείς στα δικά σας τριγωνάκια; Για δοκιμάστε το και εκεί να το δείτε όλοι πιο κοντά και καλά. Ανοίξτε τη γωνία για να δείτε ότι το 5 δεν φτάνει τώρα.

Σχ.4. 13: Τα παιδιά δοκιμάζουν

Στην επόμενη ενότητα στόχος μας είναι οι μαθητές να προτείνουν τριάδες και να δοκιμάσουν τις εικασίες τους. Είχαμε υποθέσει, από τα ευρήματα της πιλοτικής διδασκαλίας, ότι οι μαθητές θα προτείνουν τις τριάδες 6-7-8, 6-8-10 ή κάτι παρόμοιο. Στην περίπτωσή μας οι μαθητές πρότειναν την τριάδα 2-3-4 (βλ. παρακάτω στο απόσπασμα) και την τριάδα 12-16-20, επειδή κάποιοι είχαν ήδη φτιάξει με τα ξυλάκια στο θρανίο τους το τρίγωνο 6-8-10. Κατόπιν πρότειναν και την τριάδα 9-12-15.

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε τον ισχυρισμό των Lappas και Spyrou (2006) ότι η αντίληψη της κατακορύφου, του ορίζοντα και της ομοιότητας και οι λειτουργίες που συνδέονται με αυτές τις μορφές, πρωτίστως μέσω των αριθμών και κατόπιν μέσω της λογικής, οδήγησαν στα πρώτα αποτελέσματα της γεωμετρίας.

Οι μαθητές δοκίμασαν τις εικασίες τους χρησιμοποιώντας τα ξυλάκια που είχαν στα θρανία τους και κατόπιν στο σχήμα που υπήρχε στο φύλλο εργασίας (βλ. Σχ.3.8, §3.7.2.2). Μ' αυτόν τον τρόπο η διαδικασία της καθετότητας «πέρασε» στο χαρτί και στη διαδικασία της μέτρησης, μετατρέποντας τις ποιοτικές ανακαλύψεις της προηγούμενης ενότητας σε ποσοτικές. Η διαδοχική μετάβαση από τη χρήση των πραξιακών προτύπων στη χρήση των αριθμητικών προτύπων όπως είναι οι τριάδες είναι σύμφωνη με τις παιδαγωγικές αρχές των Harel και Tall (1991) που ισχυρίζονται ότι μια διδακτική αλληλουχία κατάλληλων προτύπων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στη μετάβασή τους στην τυπική αφαίρεση.

Ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα της διδασκαλίας σ' αυτή την ενότητα είναι:

Ερευνητής: Αν έχω λοιπόν ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5 , αυτό είναι ορθογώνιο. Ωραία! Μπορούμε να βρούμε άλλους 3 ακέραιους που τα μήκη, να είναι μήκη πλευρών τριγώνου και να είναι κι αυτό ορθογώνιο; Για πες μου!

Μαθητής: 2-3-4

Ε.: 2-3-4; Πώς το σκέφτηκες;

Μ.: Επειδή είπαμε ότι κατ' αρχήν η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη, ...

Ε.: Ναι!

Μ.: και βρίσκεται στη σειρά, 3-4-5

Ε.: Όπως είναι το 3-4-5, είναι το 2-3-4. Έεε.. άλλος θέλει να πει κάτι άλλο;

Μ.: Θα μπορούσαμε να πούμε και 6-7-8.

Ε.: Για ποιό λόγο;

Μ.: Επειδή όπως είπαμε η υποτείνουσα θα' ναι η μεγαλύτερη, άρα το 8, και οι άλλες δύο θα σχηματίζουν την ορθή γωνία, εφόσον είναι στη σειρά. [σχηματίζει με τα χέρια της την ορθή γωνία]

Σχ.4. 14: Η μαθήτρια ενισχύει την υπόθεσή της με χειρονομίες

Ε.: Και τα πάμε πάλι με την ίδια σειρά, απλώς εσύ πήγες παραπάνω, ενώ εσύ πήγες πιο κάτω. Κάποιοι δοκιμάσανε και κάτι πριν με τα ξυλάκια. Κάποιος μου είπε πριν ότι έφτιαξε το 6-8-10. Κάποιος δεν το έφτιαξε;

Μ.: Εγώ!

Ε.: Ωραία! Λοιπόν οι μισοί θα δοκιμάσετε να φτιάξετε με τα ξυλάκια το 2-3-4, και οι άλλοι μισοί το 6,8, και 10.

[Δοκιμάζουν]

Μ.: Δε βγαίνει!

Μ.: Δε βγαίνει!

Μ.: Δε βγαίνει!

Σχ.4. 15: Τα τρίγωνα με τα ξυλάκια 2-3-4 και 6-8-10

Ε.: Εδώ; το φτιάξατε; Το 6-8-10, σχηματίζεται ακριβώς; [το έχουν φτιάξει]. Ποιό λέτε να είναι; Το 2-3-4 αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου;

Μ.: Όχι

Ε.: Όχι!, το 6-8-10;

Μ.: Ναι

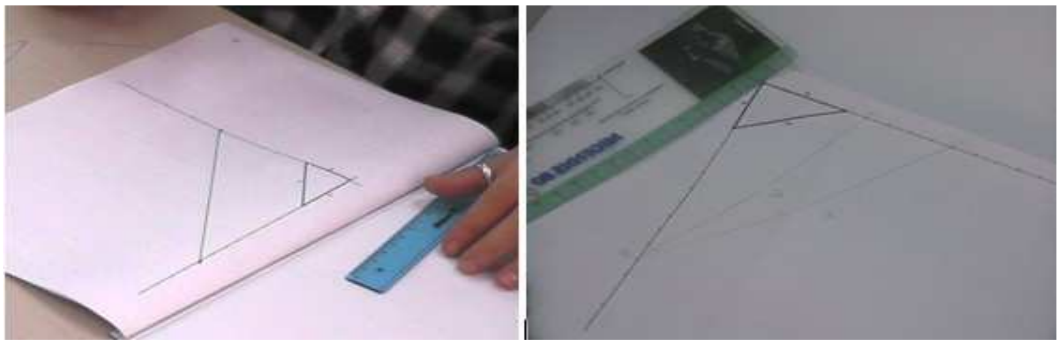
Ε.: Μπορούμε να το διαπιστώσουμε και με κάποιο άλλο τρόπο να είμαστε ακόμα πιο σίγουροι, με βάση αυτά που κάναμε προηγουμένως;

Μ.: Για το 6-8-10 είμαστε πιο σίγουροι επειδή από αυτούς τους αριθμούς που μας έχετε δώσει πριν, αυτά είναι το διπλάσιο. [και με τα χέρια δείχνει να μεγαλώνει]

Τότε τους προτείναμε είτε να πάρουμε το τρίγωνο που είχαν κατασκευάσει και να το τοποθετήσουμε δίπλα στο βαρίδι που ισορροπεί, πράγμα που κάναμε, είτε να δοκιμάσουν να τοποθετήσουν το ξυλάκι 5 μέσα σ' αυτό το τρίγωνο και να δουν αν ταιριάζει. Πράγματι δύο από τα παιδιά το δοκίμασαν φτιάχνοντας μάλιστα το τρίγωνο 3-4-5 «μέσα» στο τρίγωνο 6-8-10.

Σχ.4. 16: Δοκιμές για το αν το τρίγωνο 6-8-10 είναι ορθογώνιο.

Κατόπιν τους ζητήσαμε να δοκιμάσουν να σχεδιάσουν στην δραστηριότητα του φύλλου εργασίας τα τρίγωνα με κάθετες πλευρές 9-12 και έπειτα 5-12 χρησιμοποιώντας τους βαθμολογημένους άξονες που είχαμε σχεδιάσει για αυτό το λόγο και να μετρήσουν με τους χάρακες τις τρίτες πλευρές τους. Το αποτέλεσμα ήταν να διαπιστώνουν μόνοι τους, ότι αυτές έχουν πράγματι μήκος 15 και 13 αντίστοιχα με τη διαδικασία της μέτρησης.



Σχ.4. 17: Τα παιδιά σχηματίζουν τα τρίγωνα 9-12-15 και 5-12-13 στο σχήμα του φύλλου εργασίας

Τέλος στην τελευταία ενότητα θέλουμε με τη βοήθεια των τετράγωνων αριθμών που τους θεωρούμε κατάλληλο γεωμετρικό πρότυπο αφού συνδέουν μια γεωμετρική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών με την έννοια του εμβαδού, να οδηγηθούν οι μαθητές στη διατύπωση της επαγωγικής αλήθειας $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Μ' αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα έχουν μετατρέψει σταδιακά, την υποκειμενική εμπειρία της καθετότητας στην αντικειμενική μαθηματική ιδέα του ορθογωνίου τριγώνου επαναδραστηριοποιώντας την εξαντικειμενίκευσή του.

Έχοντας ακούσει οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης την έννοια των τετράγωνων αριθμών στην εισαγωγική φάσης της έρευνας (βλ. §3.7.1), η έννοια και ο τρόπος παραγωγής αυτών των αριθμών ενσωματώθηκε ομαλά στη διερεύνηση που κάναμε με τη δραστηριότητα 4 του φύλλου εργασίας (βλ. Σχ.3.8, §3.7.2.2) Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα διαλόγων:

Ερευνητής: Θυμάται κανείς, έχει ακούσει πώς μπορούμε να αναπαριστούμε τους φυσικούς αριθμούς με έναν άλλο τρόπο;

...

Ε.: Κάτι είχατε πει με την καθηγήτριά σας, στις επαναλήψεις στην αρχή...., με σχήματα .... Σας είχε πει κάτι....

Μαθητής: Μήπως εννοείται με τους τετραγωνικούς αριθμούς;

Ε.: Δηλαδή...Για πες μου, αν κάνω αυτό το τετραγωνάκι, αυτός είναι ποιός αριθμός;

Μ.: Το 4

Ε.: Ο 4! Τι παρατηρώ; Αυτό είναι ένα τετραγωνάκι που η πλευρά του είναι;

Μ.: Η πλευρά του είναι 2.

Ε.: Αυτή και αυτή είναι 2. Ποιόν επόμενο τετραγωνικό μπορώ να φτιάξω; το ...;

Μ.: Το 9

Ε.: Πώς το βρίσκουμε;

Μ.: Λέμε είναι 2^3 .....

Ε.: Είναι, πόσο είναι η πλευρά του; 3.

Μ.: Ο 8, δηλαδή ...

Ε.: Με 4 ψηφίδες; Δε πρέπει να έχει παντού 4; Και είναι ποιός αριθμός;

Μ.: Το 16

Ε.: Πόσο είναι η πλευρά αυτού;

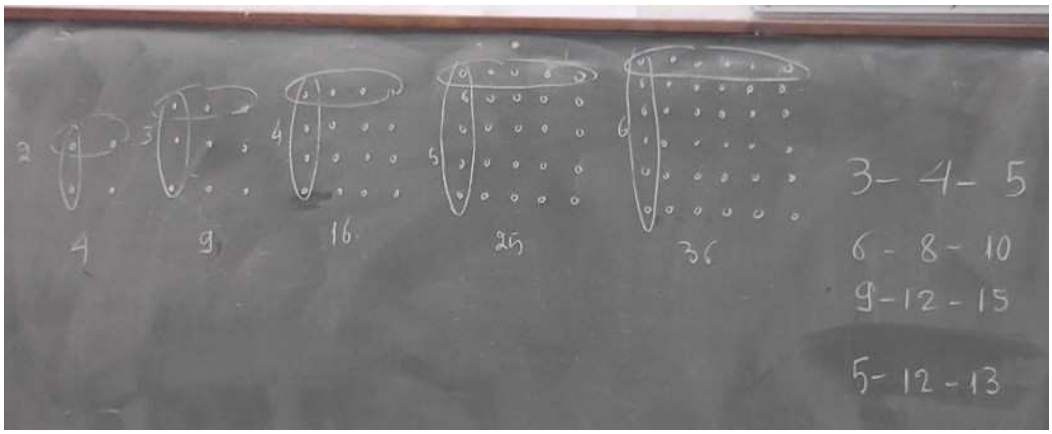
Μ.: 4

Ε.: Ο επόμενος θα είναι;

Μ.: 25. Είναι 5 και είναι ο 25.

Ε.: Είναι 5 και είναι ο αριθμός 25, ας φτιάξουμε και έναν ακόμα. Θα είναι ...

Μ.: 36



Σχ.4. 18: Οι πρώτοι τετράγωνοι αριθμοί όπως γράφτηκαν στον πίνακα με την υπόδειξη των μαθητών.

Αφού γράψαμε στον πίνακα τους πρώτους τετράγωνους αριθμούς ώστε να θυμηθούν όλοι οι μαθητές τον τρόπο παραγωγής τους, τους ζητήσαμε να αντιστοιχίσουν σε κάθε μία από τις πλευρές 3, 4 και 5 του ορθογωνίου τριγώνου τον κατάλληλο τετράγωνο αριθμό και να συμπληρώσουν έναν πίνακα στο φύλλο εργασίας. Έχουμε ισχυριστεί στο σχεδιασμό της διδασκαλίας μας, ότι οι τετράγωνοι αριθμοί ενσωματώνουν τόσο την αριθμητική όσο και τη γεωμετρική αναπαράσταση των Τριάδων. Επομένως,

με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα επιδιώκαμε, οι μαθητές μέσω της διπλής αυτής αναπαράστασης των τετράγωνων αριθμών, κατ' αρχήν να συνδέσουν με κάποιο τρόπο το μαθηματικό αντικείμενο «ορθογώνιο τρίγωνο» με τη μαθηματική έννοια «τετράγωνοι αριθμοί».

Ερευνητής: Λοιπόν βλέπουμε ότι έχουμε το τρίγωνο με πλευρές 3-4 και 5, πείτε μου, στον αριθμό 3, στην πλευρά 3, ποιός από τους τετραγωνικούς που έχουμε γράψει, ταιριάζει;

Μαθητής: Το 9;

Ε.: Το 9! Γιατί;

Μ.: Γιατί είναι τρείς, τρείς εννιά, ..

Ε.: Ή για ποιό λόγο;

Μ.: 2^3

Ε.: Όχι 2^3 , 2^3 κάνει 8. Η πλευρά του τετραγωνικού αριθμού είναι 3.

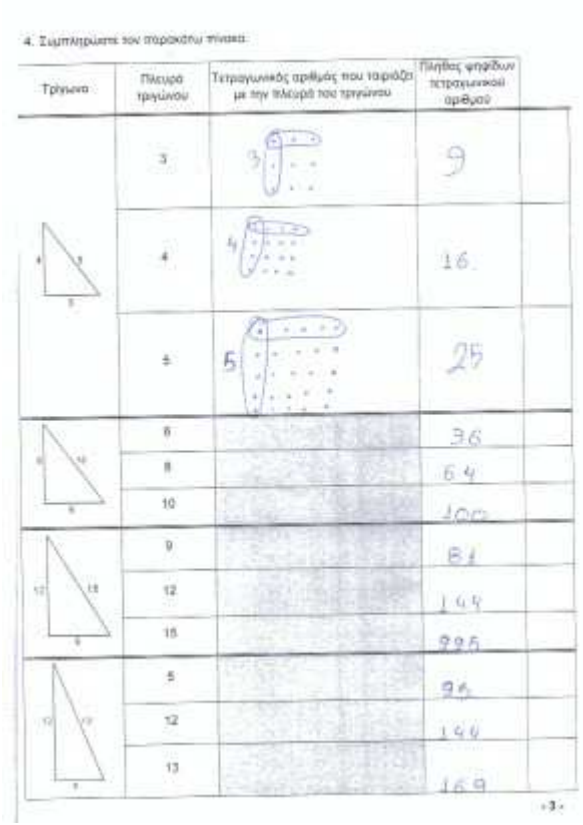
Ε.: Ωραία κάντε κι εσείς με τελίτσες αυτούς τους αριθμούς και γράψτε δίπλα τις ψηφίδες που χρειαζόμαστε, τις τελείες που χρειαζόμαστε. Στο 4 ποιός τετραγωνικός αριθμός ταιριάζει;

Μ.: 16

Ε.: Και στο 5;

Μ.: 25

Ε.: Ωραία! Φτιάξτε τους, τους τετραγωνικούς αριθμούς, και δίπλα γράφουμε και τον αριθμό των ψηφίδων, αυτό που είπατε, το 9, 16 και 25.



4. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Τρίγωνο	Πλευρά τριγώνου	Τετραγωνικός αριθμός που ταιριάζει με την πλευρά του τριγώνου	Πλήθος ψηφίδων τετραγωνικού αριθμού	
	3	3	9	
	4	4	16	
	5	5	25	
	6		36	
	8		64	
	10		100	
	9		81	
	12		144	
	15		225	
	5		25	
	12		144	
	13		169	

Σχ.4. 19: Οι τετράγωνοι αριθμοί όπως συμπληρώθηκαν στο φύλλο εργασίας των μαθητών

Στη συνέχεια ανακαλύπτοντας με ποιόν τρόπο συνδέονται οι σχηματικοί αριθμοί με τις τριάδες και τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, θέλουμε οι μαθητές, να καταλήξουν σε έναν κανόνα που να ισχύει στο συγκεκριμένο ή στα συγκεκριμένα τρίγωνα και τελικά να γενικεύεται σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα. Όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα, οι μαθητές κατάφεραν να βρουν τη σχέση που ζητούσαμε και να διατυπώσουν έναν λεκτικό κανόνα.

Ερευνητής: Μπορείτε να βρείτε τώρα τί, ποιά σύνδεση μπορεί να έχει, να υπάρχει ανάμεσα στους αριθμούς 9, 16 και 25; Βλέπετε να υπάρχει κάποια σχέση;

Μαθητής: Αν προσθέσουμε το 9 και το 16 θα μας βγάλει 25.

Ε.: 9 λες συν 16 ίσον 25. Μάλιστα! Να το γράψουμε να το δούμε. Να το δούμε και στα υπόλοιπα τριγωνάκια χωρίς να κάνουμε τελείες πάλι. Στο 6 ποιός αριθμός ταιριάζει;

Μ.: 36

Ε.: Στο 8;

Μ.: Το 64.

Ε.: Ωραία! στο 10;

Μ.: Το 100

Ε.: Μ' αυτούς τους αριθμούς, ποιά σχέση, ποιά σχέση τους συνδέει;

Μ.: Αν προσθέσουμε το 36 και το 64 μας κάνει 100.

Ε.: Πάλι 36+64=100, επιβεβαιώνεται αυτό που βρήκαμε. Εεε, το ίδιο και στα επόμενα;

Ε.: 9! στο 9 ποιός ταιριάζει;

Μ.: το 81

Ε.: Στο 12;

...

Ε.: 144, θα το πω εγώ, δεν πειράζει.

Ε.: Στο 15;

....

Ε.: 225. Ισχύει το ίδιο;

Μ.:...Ναι

Ε.: Και στο 5-12-13, μια τελευταία επαλήθευση. Στο 5

Μ.: Το 25 [όλοι μαζί]

Ε.: Στο 12

Μ.: Το 144

Ε.: Στο 13;

Ε.: 169!, δεν πειράζει, τα λέω εγώ. Ωραία! ισχύει πάλι;

Μ.: 25+144, 169;

Ε.: Μπορεί λοιπόν κάποιος, αυτό που διαπιστώσαμε, να το πει με λόγια για να γυρίσουμε και στην επόμενη σελίδα και να το συμπληρώσουμε με λόγια;

Μ.: Το πλήθος των ψηφίδων

.....

Ε.: ναι!

Μ.: της υποτείνουσας;

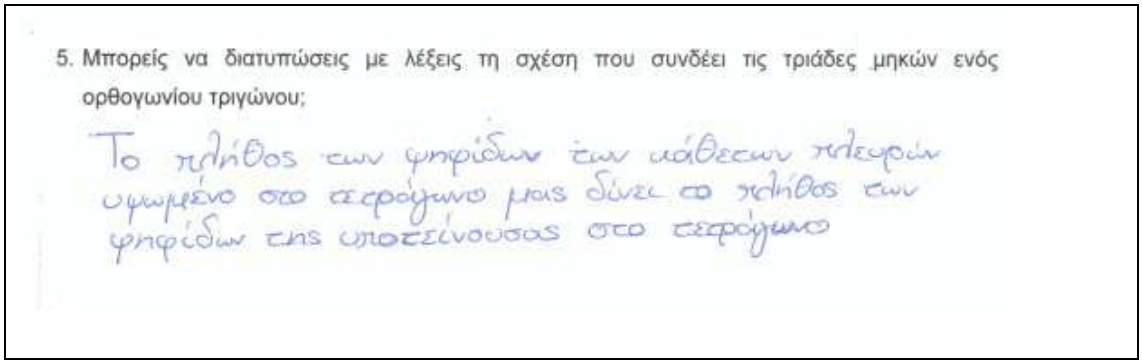
Ε.: ναι!

Μ.: άρα .. αν λέγαμε ότι, αν οι κάθετες πλευρές εε στο τετράγωνο μας δίνουν το πλήθος των ψηφίδων της υποτείνουσας.

Ε.: Ναι. Θα το φτιάξετε λίγο ακόμα;

Μ.: στο τετράγωνο [συμπληρώνει η μαθήτρια που μίλησε προηγουμένως]

Ε.: για να το γράψουμε;...Ωραία! Γυρίστε λοιπόν σελίδα να το συμπληρώσετε...


5. Μπορείς να διατυπώσεις με λέξεις τη σχέση που συνδέει τις τριάδες μηκών ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Το τετράγωνο των ψηφίδων των κάθετων πλευρών υψωμένο στο τετράγωνο μας δίνει το τετράγωνο των ψηφίδων της υποτείνουσας στο τετράγωνο

Σχ.4. 20: Η πρόταση που συμπλήρωσε μία μαθήτρια

Στο τέλος αφού γράψαμε στον πίνακα τα συμπεράσματα στα οποία είχε καταλήξει η κοινότητα της τάξης, για να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα αυτά, σχηματίσαμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές «β» και «γ» και υποτείνουσα «α» και ζητήσαμε από τους μαθητές να μετατρέψουν το λεκτικό κανόνα που είχαν βρει προηγουμένως σε μια σχέση με μαθηματικά σύμβολα.

Ερευνητής: Να το δούμε και με μαθηματικά σύμβολα γενικά; Αυτό που είπαμε με λόγια; Για να δούμε και αυτό.

Ε.: Αν έχω ένα ορθογώνιο τρίγωνο και στην υποτείνουσα βάλουμε α, στις κάθετες πλευρές β και γ, αυτό που βρήκαμε πριν με τους συγκεκριμένους αριθμούς και είπαμε με λόγια, πώς θα το πούμε;

Μαθητής: α στη δευτέρα

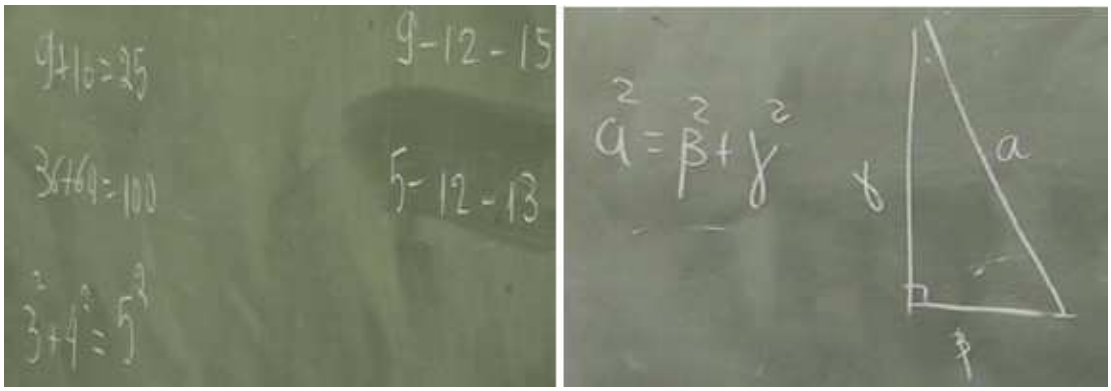
Ε.: Ναι!

Μ.: ίσον β στη δευτέρα και γ στη δευτέρα!.

Ε.: Πες το να το ακούσουνε πάλι όλοι!

Μ.: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

Ε.: Συμπληρώστε το και αυτό στην τελευταία ερώτηση.



Σχ.4. 21: Η επαγωγική σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

4.2 Αξιολόγηση

Τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο αξιολόγησης, εξετάστηκαν σε συνδυασμό με το βαθμό που πήραν οι μαθητές στο σχεδιασμένο από την καθηγήτριά τους τεστ του σχολείου τους και ήταν ανεξάρτητο από τη δική μας διδακτική παρέμβαση. Η σύγκριση των δύο τμημάτων έγινε σε 3 επίπεδα.

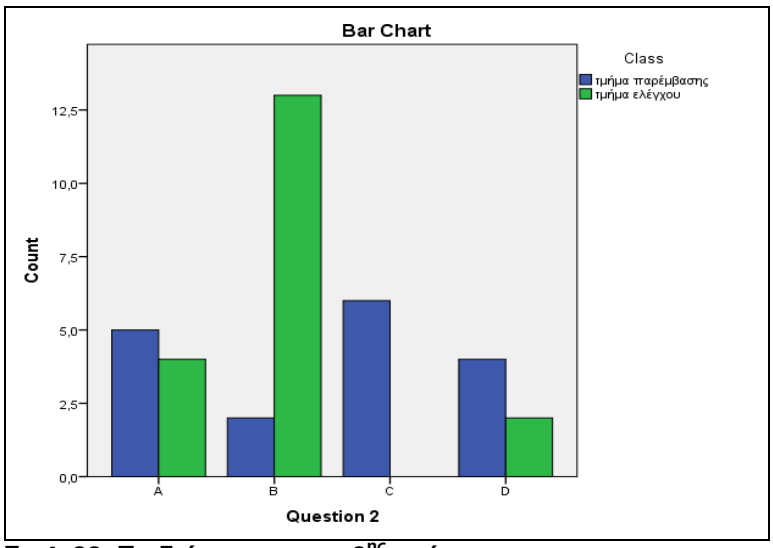
Στο 1^{ο} επίπεδο συγκρίναμε τα δύο τμήματα με τον ακριβή έλεγχο Fisher, ως προς τις απαντήσεις τους σε σωστές και λάθος. Βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση υπέρ του τμήματος ελέγχου στην ερώτηση 2 (*p=0.001, phi=0.574*), στην ερώτηση 10 (*p=0.023, phi=0.398*) και υπέρ του τμήματος παρέμβασης στην ερώτηση 12 (*p=0.031, phi=-0.386*) του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης. Παρακάτω βλέπουμε σε πίνακες τις απαντήσεις αναλυτικά των 2 τμημάτων στις συγκεκριμένες ερωτήσεις και τα σχετικά διαγράμματα.

Question 2 * Class Crosstabulation

Count

		Class		Total
		τμήμα παρέμβασης	τμήμα ελέγχου	
Question 2	A	5	4	9
	B	2	13	15
	C	6	0	6
	D	4	2	6
Total		17	19	36

Πίνακας 4. 1: Οι απαντήσεις στην 2^{η} ερώτηση



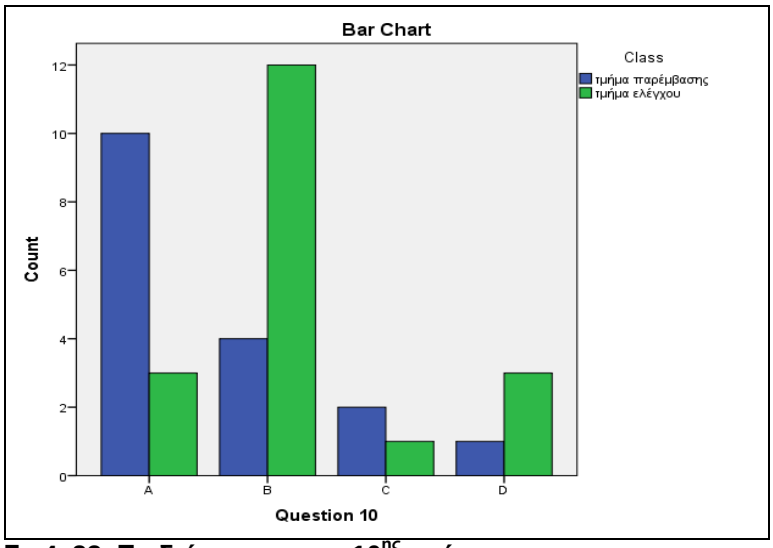
Σχ.4. 22: Το διάγραμμα της 2^{ης} ερώτησης

Question 10 * Class Crosstabulation

Count

		Class		Total
		τμήμα παρέμβασης	τμήμα ελέγχου	
Question 10	A	10	3	13
	B	4	12	16
	C	2	1	3
	D	1	3	4
Total		17	19	36

Πίνακας 4. 2: Οι απαντήσεις στην 10η ερώτηση



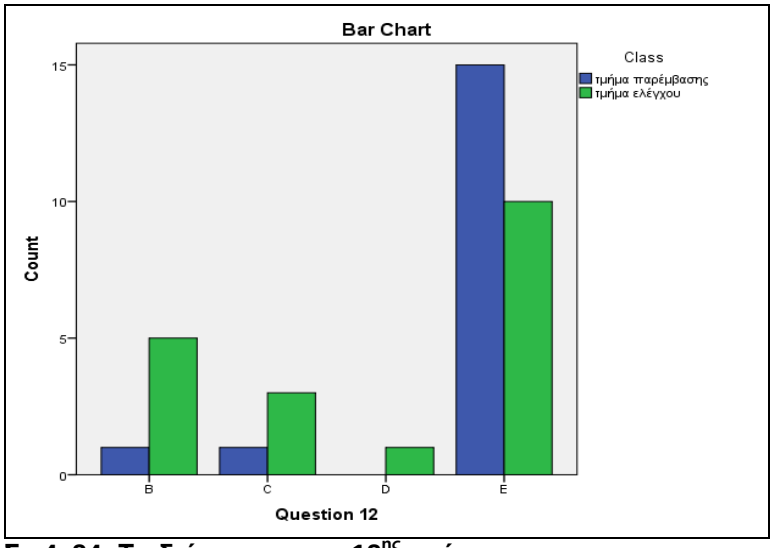
Σχ.4. 23: Το διάγραμμα της 10ης ερώτησης

Question 12 * Class Crosstabulation

Count

		Class		Total
		τμήμα παρέμβασης	τμήμα ελέγχου	
Question 12	B	1	5	6
	C	1	3	4
	D	0	1	1
	E	15	10	25
Total		17	19	36

Πίνακας 4. 3: Οι απαντήσεις στη 12η ερώτηση



Σχ.4. 24: Το διάγραμμα της 12ης ερώτησης

Η 12η ερώτηση (βλ. §3.7.3.5) αφορά το χαρακτηρισμό μιας γωνίας βάσει οπτικού ή αριθμητικού ερεθίσματος ή βάσει της αυθεντίας του δασκάλου. Οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης επέλεξαν σωστά την «Ε» επιλογή εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ οι μαθητές του τμήματος ελέγχου έδωσαν 5 απαντήσεις (επιλογή «Α») βάσει του σχήματος.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης μας οδήγησαν στο να επιλέξουμε τις συγκεκριμένες δραστηριότητες στη διαδικασία των συνεντεύξεων όπως αναφέραμε και στην §3.8.4.

Σε 2ο επίπεδο, έγινε σύγκριση των τμημάτων, πάλι με τον έλεγχο Fisher ως προς το μοτίβο των απαντήσεών τους. Δηλαδή, στα ερωτήματα που οι απαντήσεις ήταν λάθος, αν ήταν λάθος διαφορετικού τύπου ή όχι. Δεν προέκυψε καμία στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση των δύο τμημάτων στο σύνολο των απαντήσεων, παρά μόνο στην ερώτηση 11 (*p=0.042, phi=0.507*), υπέρ του τμήματος ελέγχου.

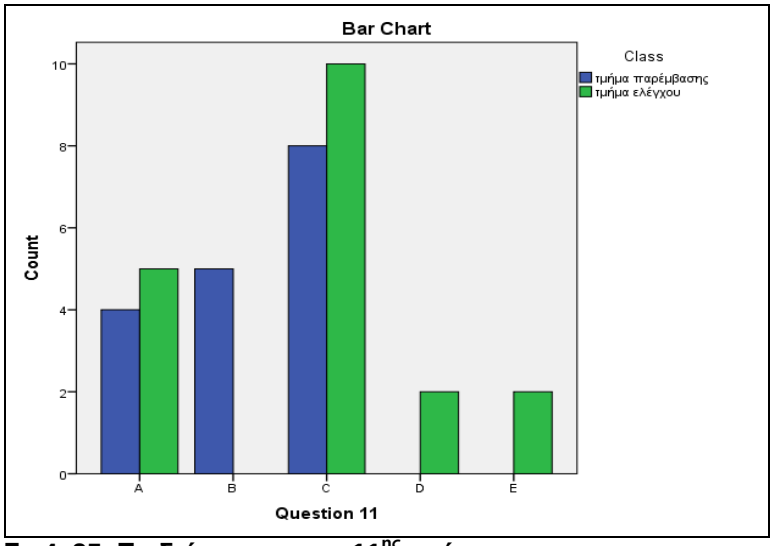
Παρακάτω έχουμε τον πίνακα με τις απαντήσεις αναλυτικά των δύο τμημάτων στην συγκεκριμένη ερώτηση και το διάγραμμα από όπου φαίνεται ότι οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης στις λάθος απαντήσεις τους επιλέγουν μόνο τις επιλογές Α και Β, ενώ στο τμήμα ελέγχου έχουν ένα μεγαλύτερο εύρος απαντήσεων.

Question 11 * Class Crosstabulation

Count

		Class		Total
		τμήμα παρέμβασης	τμήμα ελέγχου	
Question 11	A	4	5	9
	B	5	0	5
	C	8	10	18
	D	0	2	2
	E	0	2	2
Total		17	19	36

Πίνακας 4. 4: Οι απαντήσεις στην 11η ερώτηση



Σχ.4. 25: Το διάγραμμα της 11ης ερώτησης

Τέλος στο 3ο και τελευταίο επίπεδο, έγινε σύγκριση των δύο τάξεων με τον έλεγχο Mann-Whitney και ελέγξαμε (βλ. Πίνακας 4.5), αν υπάρχει συσχέτιση:

α) της συνολικής επίδοσης στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης και στο σχολικό τεστ, από την οποία δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση (*U=135, p>0.05, r=0.14*).

β) της επίδοσης συνολικά στα 11 ερωτήματα του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης. Εδώ υπήρξε μια στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση υπέρ του τμήματος ελέγχου και αυτό εξηγείται από τη στατιστικά σημαντική διαφορά που εμφάνισαν τα δύο τμήματα περισσότερο στην ερώτηση Q2 και λιγότερο στην ερώτηση Q10 (*U=97, p=0.037, r=0.35*).

γ) της επίδοσης των δύο τμημάτων στο τεστ του σχολείου τους από όπου επίσης δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση (*U=129, p>0.05, r=0.13*).

			Τμήμα ελέγχου	**Τμήμα παρέμβασης**
α)	**Συνολική επίδοση**	*Mean*	6.59	7.05
		Median	6	7
		Mode	6	7
		Min	5	4
		Max	12	12
		Inter [a]	*(U = 135, ns, r = 0.14)* [b]	
β)	**Επίδοση στα 11 ερωτήματα**	*Mean*	4.76	5.68
		Median	4	6
		Mode	4	6
		Min	3	3
		Max	10	10
		Inter	*(U = 97, p = 0.037, r = 0.35)*	
		[a]: Inter-group comparisons *[b] :Mann Whitney U test*		
γ)	**Τεστ του σχολείου**	*Mean*	14.16	12.39
		Median	15	15
		Mode	20	15
		Min	5	2
		Max	20	20
		Inter [a]	*(U = 129, ns, r = 0.13)* [b]	
		[a]: Inter-group comparisons *[b] :Mann Whitney U test*		

Πίνακας 4. 5: Συγκρίσεις με τον έλεγχο Mann Whitney

Ερμηνεύοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι τα δύο τμήματα διαφέρουν, αλλά όχι στατιστικά σημαντικά *(U=129, ns, r=0.13)* στο βαθμό που πήραν στο τεστ του σχολείου (μέσες βαθμολογίες 14.16 και 12.39 αντίστοιχα, επικρατούσα τιμή 20 και 15 αντίστοιχα), όμως η συνολική επίδοση στο τεστ του σχολείου *(U=135, ns, r=0.14)* και στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης *(U=97, p=0.037, r=0.35)* δεν φαίνεται να επηρεάζεται από αυτό. Ενδεχομένως το τμήμα ελέγχου εμφανίζεται καλύτερο στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης και η διαφοροποίηση αυτή προέρχεται περισσότερο από την ερώτηση Q2 και λιγότερο από την Q10. Φαίνεται πώς οι μαθητές του τμήματος ελέγχου, έχουν πιο αλγοριθμική εικόνα σε σχέση με τους αριθμούς, ενώ οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης κέρδισαν την ποιοτική σύνδεση πλευρών και γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου, αλλά στις αριθμητικές σχέσεις είχαν μια γνωστική σύγκρουση.

4.3 Συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες και διεξήχθηκαν ανά ζευγάρια. Αποτελούνταν από 4 δραστηριότητες εκ των οποίων, οι 2 πρώτες ήταν ερωτήσεις κλειστού τύπου (τύπου πολλαπλής επιλογής) τυπωμένες σε ένα φύλλο χαρτί για το κάθε παιδί του ζεύγους. Οι άλλες 2 δραστηριότητες απαιτούσαν τη συνεργασία των μαθητών για τη δημιουργία ορθογωνίων τριγώνων με ειδικά κατασκευασμένα ξυλάκια (βλ. § 3.7.4.3).

Χωρίζουμε τα ζεύγη των μαθητών σε 3 ομάδες, τις Α, Β και Γ, ανάλογα με το βαθμό που πήραν στο τεστ του σχολείου τους. Ομάδα Α είναι οι μαθητές με άριστη επίδοση, ομάδα Β οι μαθητές με μεσαία και ομάδα Γ, οι μαθητές με χαμηλή επίδοση. Παρακάτω περιγράφουμε τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα και ανά ομάδα.

4.3.1 1η δραστηριότητα

Στην 1η δραστηριότητα να θυμίσουμε ότι διερευνούμε την ερώτηση 10 του ερωτηματολογίου αξιολόγησης (βλ. §3.7.3.4), την οποία μας υπέδειξε η στατιστική ανάλυση.

<u>Ομάδα Α</u>

Με τα ζεύγη των μαθητών της ομάδας Α, το αποτέλεσμα της 1ης δραστηριότητας ήταν περίπου αναμενόμενο. Δηλαδή εύκολα βρήκαν τη σωστή απάντηση και ακολούθησαν το ίδιο σκεπτικό περίπου στην αιτιολόγησή τους. Η διαφορά όμως με τα παιδιά του τιμήματος παρέμβασης σε σχέση με τα άλλα δύο ήταν, ότι οι πρώτοι, εύκολα αναγνώρισαν την Πυθαγόρεια τριάδα 5-12-13 καθώς επίσης ήταν από την αρχή της συζήτησης σίγουροι και οι δύο για την απάντησή τους. Εδώ βέβαια πρέπει να τονίσουμε ότι κατά τη διάρκεια της διδακτικής μας επέμβασης είχε γίνει μια παρόμοια δραστηριότητα με τα ξυλάκια 3-4-5 από τους μαθητές στα θρανία τους. Επομένως όπως αναφέρουμε και παραπάνω, στα αποτελέσματα της διδασκαλίας μας, οι μαθητές φαίνεται πώς αναγνώρισαν την ποιοτική σχέση της τρίτης πλευράς με την περιεχόμενη γωνία των δύο πλευρών που είναι ίσες και στα δύο τρίγωνα. Παρακάτω έχουμε το απόσπασμα διαλόγων:

Κορίτσι: Θέλετε να κυκλώσουμε κάτι;

Ερευνητής: Ναι, ότι θέλετε. [Το κορίτσι κυκλώνει και μετά από λίγο και το αγόρι]

Ε.: Ωραία. Ποιός θέλει να μου πει; Τι πιστεύετε ότι είναι αυτή η γωνία;

Αγόρι: Είναι μικρότερη από 90 μοίρες. [Το κορίτσι συμφωνεί]

Ε.: Ωραία. Γιατί το λέτε αυτό;

Α.: Επειδή απέναντι από την ορθογώνια [εννοεί υποτείνουσα] και η υποτείνουσα πρέπει να είναι μικρότερη από 13 επειδή η κάθετη πλευρά από κάτω είναι 12.

Ε.: Εεε, εσύ;

Κ.: Εγώ σκέφτηκα ότι εφόσον έχουμε δίπλα ορθογώνιο τρίγωνο που είναι 90 μοίρες η κάθετη, η ορθή γωνία και έχουμε την υποτείνουσα 13, άρα εδώ εφόσον είναι οξεία γωνία σημαίνει θα είναι κάτω από 90 μοίρες άρα και η γωνία υποτείνουσα θα είναι μικρότερη από την αρχική, από τη 13 δηλαδή.

Ε.: Αυτό λες και εσύ;

Α.: Εεε ναι και μπορούμε ακόμα να κάνουμε μια πράξη που είναι 5 και 12 δεν θα βγει 13, είναι μικρότερη.

Ε.: Το θέμα είναι μου είπατε και οι δύο ότι είναι ορθογώνιο το τρίγωνο, το αριστερό. Πώς το ξέρετε; Γιατί το είπατε; Αυτό θέλω να καταλάβω. [Γέλια]

Κ.: Γιατί μπορούμε να το κάνουμε και με την πράξη. Αν δηλαδή πάρουμε την υποτείνουσα και την υψώσουμε στη δευτέρα, θα μας βγάλει, είναι ίση με το άθροισμα των δύο τετραγώνων.

Ε.: Όταν είπατε πριν ότι είναι ορθογώνιο, είχατε κάνει την πράξη ή επειδή το είδατε ας πούμε ορθογώνιο, είπατε θα είναι εντάξει, οπότε συνεχίζω.

Κ.: Έχουμε κάνει αυτό το παράδειγμα στο μάθημα.

Ε.: Α! οπότε ξέρετε.

Α.: Ναι

Αντίθετα στο τμήμα ελέγχου, η μία μαθήτρια δεν απάντησε σωστά από την αρχή και χρησιμοποίησε λάθος συλλογιστική, ενώ βέβαια μετά συμφώνησε με τη συμμαθήτριά της που της εξήγησε το συλλογισμό της. Οι μαθήτριες επίσης, χρειάστηκε να κάνουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να διαπιστώσουν ότι το πρώτο τρίγωνο είναι ορθογώνιο μη αναγνωρίζοντας αμέσως την Πυθαγόρεια τριάδα 5-12-13. Παρακάτω έχουμε δύο χαρακτηριστικά αποσπάσματα διαλόγων από τα δύο ζεύγη:

Κορίτσι 1: να το κυκλώσουμε;

Ερευνητής: ωραία, θέλω να μου πείτε τι απαντήσατε, πως το σκεφτήκατε.

Κορίτσι 2: αν αυτή εδώ στο τρίγωνο είναι 13 η πλευρά αυτή, αν ήταν αυτή η γωνία Α, θα ....ήταν σαν να το έβλεπα λίγο....

Ε.: Δεν άκουσα τι είπες

κ2.: μια στιγμή... αν έκλεινα αυτή την πλευρά θα μίκραινε η ...

Ε.: άρα λες ότι είναι μικρότερη, αν κατάλαβα καλά ε;

κ2.: ναι

κ1.: εγώ θα απαντήσω με διαφορετική λογική . Δηλαδή άμα αυτή είναι οξεία, αυτή πρέπει να είναι η υποτείνουσα, άρα θα είναι μεγαλύτερη από 13.

Ε.: Για ποιό λόγο ... τώρα που άκουσες και την άποψη, άλλαξες γνώμη, εσύ άλλαξες γνώμη;

κ1.: εγώ άλλαξα

Ε.: εσύ, παραμένεις;

κ2.: ναι

Ε.: μάλιστα, εε, αν κατάλαβα καλά η γωνία είναι μικρότερη από τι, η άλλη τί είναι; είναι οξεία, είναι ορθή δεν κατάλαβα.

κ2.: εγώ νομίζω πώς η γωνία Α είναι 90 μοίρες.

κ1.: είναι ορθή

Ε.: σίγουρα; πώς το βλέπουμε αυτό; πού το ξέρουμε;

κ2.: να σημειώσω κάτι; [παίρνει το μολύβι να γράψει κάτι]

κ1.: μπορούμε να κάνουμε πυθαγόρειο θεώρημα, ας πούμε $13^2=5^2+12^2$, θα δούμε αν τα αποτελέσματα θα βγαίνουν ίδια τότε θα καταλάβουμε αν είναι ορθή και μετά θα δούμε και το άλλο τρίγωνο και θα καταλάβουμε.

Ε.: Πριν που το σκεφτήκατε και απαντήσατε, είχατε κάνει πυθαγόρειο θεώρημα; ή το κάνατε στο μυαλό σας, ή το σχήμα μοιάζει με ορθογώνιο;

κ2.: εντάξει

κ1.: εγώ το έκανα με το .. βλέποντάς το.

Ε.: Με το μάτι!

κ1.: ναι

Ομάδα Β

Στα παιδιά της ομάδας Β, το έντονο χαρακτηριστικό ήταν ότι τα παιδιά από το τμήμα παρέμβασης, έκαναν την ίδια κίνηση με τα χέρια τους και το σώμα τους για να δείξουν ότι όταν «κλείνει» η γωνία και από ορθή γίνεται οξεία, η απέναντι πλευρά μικραίνει σε σχέση με το μήκος που θα είχε σαν υποτείνουσα στο αντίστοιχο ορθογώνιο τρίγωνο.

Σχ.4. 26: Το κορίτσι κλείνει τα χέρια όπως «κλείνει» η γωνία

Κ.1: Εγώ αυτό που σκέφτομαι είναι ότι αφού η Κ είναι οξεία , εε είναι μικρότερη από 90 μοίρες είναι πιο μέσα ας πούμε [κλείνει με τα χέρια της], άρα η ΛΜ πρέπει να είναι μικρότερη από 13.

Στο τμήμα ελέγχου, στο ζεύγος των μαθητών με μεσαία επίδοση, το αγόρι απάντησε σωστά, αλλά δεν μπορούσε να δικαιολογήσει την απάντησή του με λογικά επιχειρήματα, όπως φαίνεται στον παρακάτω διάλογο:

α.: ότι άμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η υποτείνουσα είναι 13, αυτό λογικά θα είναι μικρότερο από το 13.
Ε.: Λογικά πώς το σκέφτηκες; Γιατί το λες;
α.: επειδή αυτή εδώ είναι οξεία και η άλλη είναι 180
Ε.: έχεις κάποια εικόνα στο μυαλό σου, έχεις κάποιο σχήμα ή το ξέρεις ότι..
α.: όχι έτσι όπως το βλέπω
Ε.: μμμ, άρα λες η απάντηση είναι;
α.: μικρότερη από 13

Ομάδα Γ

Τα παιδιά της ομάδας Γ του τμήματος παρέμβασης απάντησαν σωστά ότι η πλευρά θα είναι μικρότερη από 13, αλλά δεν μπορούσαν να το δικαιολογήσουν λόγω γνωστικών αδυναμιών. Έκαναν επίσης έντονες κινήσεις με τα χέρια τους για να δείξουν ότι «κλείνει» η γωνία, άρα μικραίνει και η απέναντι πλευρά.

κ.: Εεε ότι αυτό είναι 13, αυτή είναι λογικά μικρότερη από 13
Ε.: Λογικά, γιατί το λες;

κ.: Γιατί είναι ορθή η ΚΛ ενώ κλείνει (και δείχνει με τα χέρια της)

Ε.: Εσύ; τι λες γι' αυτό;

α.: μήπως είναι μακρύτερο; όχι εντάξει

Ε.: Μακρύτερο, πες μου

α.: είναι μικρότερη από αυτό.

Ε.: Γιατί; για τον ίδιο λόγο;

α.: γιατί γέρνει (και δείχνει με το χέρι του)

Σχ.4. 27: Τα παιδιά ενισχύουν τους ισχυρισμούς τους με κινήσεις

Ε.: κι αυτό που είπες για το μακρύτερο πριν σε τι αναφερότανε;

α.: ότι πως η γωνία ΚΛ θα είναι μακρύτερα από το ΑΒ οπότε αυτή πάει πιο ψηλά ..

Ε.: άρα λες πάλι ότι θα είναι μικρότερη;

α.: ναι.

Τέλος τα παιδιά του τμήματος ελέγχου, παρασυρθήκανε και τα δύο από το σχήμα και είπαν:

κ.: το ΛΜ είναι ίσο με το 13

Ε.: πώς το σκέφτηκες αυτό;

κ.: απλά σκέφτηκα ότι το σχήμα απλά εδώ το έχουνε κάνει πιο μεγαλύτερο και.... όμως είναι το ίδιο ..... οπότε πρέπει να είναι το ίδιο.

Σχ.4. 28: Δείχνει με τα χέρια ότι είναι μεγαλύτερο.

Ε.: Εσύ; είπες ότι θα είναι μεγαλύτερη;

α.: ναι

Ε.: Γιατί πώς το σκέφτηκες;

α.: γιατί, φαίνεται μεγαλύτερη

4.3.2 2η δραστηριότητα

Στη 2η δραστηριότητα διερευνούμε την ερώτηση 2 του ερωτηματολογίου αξιολόγησης (βλ. §3.7.3.1) στην οποία η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης είχαν απαντήσει λάθος. Δεδομένου ότι τα παιδιά του τμήματος ελέγχου φαίνεται να είναι καλύτερα σε αυτό το ερώτημα, διερευνούμε μήπως οι απαντήσεις τους είναι πιο μηχανιστικές.

Ομάδα Α

Στο τμήμα ελέγχου τα παιδιά απάντησαν σωστά ότι η ζητούμενη γωνία είναι οξεία, χωρίς όμως να αναγνωρίσουν την Πυθαγόρεια τριάδα 6-8-10. Είναι γεγονός ότι προβληματίστηκαν από το σχήμα (οπτική απάτη με τα μεγέθη των πλευρών), αλλά φαίνεται από τις απαντήσεις τους και την επιχειρηματολογία τους ότι έχουν κατοχυρώσει τη σχέση «υποτείνουσα - μεγαλύτερη πλευρά - απέναντι γωνία ορθή».

Σχ.4. 29: Το αγόρι προβληματίζεται με το σχήμα

Κορίτσι: Να σας πω εγώ τι σκέφτομαι. Εεε. Εγώ σκέφτομαι ένα προς το παρόν πράγμα από εδώ που έχετε βάλει. Ότι είναι οξεία η γωνία. Τώρα θα το δω.

Ερευνητής: Εσύ;

Αγόρι: Το ίδιο μάλλον επειδή η υποτείνουσα 6 δεν μπορεί να είναι

Κ.: ορθή ούτε αμβλεία.

Ε.: Ωραία. Πείτε μου ξανά, πες μου το σκεπτικό σου και μετά μου λες κι εσύ ξανά για να το καταλάβω. Επιλέξατε την πρώτη επιλογή ότι η Β είναι οξεία, με ποιό σκεπτικό;

Α.: Επειδή η πλευρά που είναι από κάτω από ύψος είναι μεγαλύτερη από την υποτείνουσα γι αυτό μάλλον το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο και η Β είναι οξεία.

Ε.: Ωραία. Αν σας έλεγα δίνεται ένα τρίγωνο με πλευρές 6,8 και 10, να δείτε αν είναι ορθογώνιο, τί θα λέγατε;

Α.: Ναι, μπορούμε να βάλουμε αριθμούς, επειδή η υποτείνουσα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη από τις άλλες 10 πρέπει να είναι..

Ε.: Ναι! Σας φαίνεται αυτό το σχήμα, σας ενόχλησε καθόλου έτσι όπως είναι ή δεν έχετε πρόβλημα μ' αυτό το σχήμα;

Α.: Εγώ όταν είδα αριθμούς δεν πίστευα ότι είναι έτσι.

Στο τμήμα ελέγχου η μία μαθήτρια έκανε το Πυθαγόρειο θεώρημα, είδε ότι ισχύει και απάντησε ότι η γωνία που θέλαμε να χαρακτηρίσουν είναι ορθή, χωρίς να σκεφτεί περισσότερο ότι αυτή η γωνία δεν ήταν απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά. Βλέπουμε δηλαδή εδώ μια μηχανιστική απάντηση:

«ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, άρα η - οποιαδήποτε - γωνία είναι ορθή».

Ερευνητής: εσύ; έκανες κι εσύ πυθαγόρειο θεώρημα

Κορίτσι 1: ναι

Ε.: βρήκες ότι ισχύει αν κατάλαβα καλά, 100=100, ωραία;

Κ1.: ότι η Β είναι ορθή γωνία , έκανα το πυθαγόρειο, αα δεν είδα πόσο μακρύ είναι η κάθε μια δηλαδή με αριθμούς, έκανα το πυθαγόρειο και βρήκα.

Ε.: και άρα λες είναι ορθογώνιο το τρίγωνο

Κ1.: ναι

Ε.: και η ορθή είναι η Β;

Κ1.: ναι

Η δεύτερη μαθήτρια του ζεύγους διαπίστωσε επίσης ότι ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, αλλά απάντησε ότι η γωνία είναι οξεία γιατί δεν μπορεί η υποτείνουσα να είναι 6. Στο σημείο αυτό, να πούμε ότι προβληματίστηκε και αυτή ιδιαίτερα από το σχήμα, κοιτάζοντάς το ξανά και ξανά και δίσταζε να δώσει την τελική της απάντηση. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα διαλόγων:

Κορίτσι 2: Αν η Β είναι ορθή, θα έπρεπε αυτή εδώ η γωνία η ΑΓ να είναι 10 και η ΒΓ να είναι 6.

Ε.: Και πως το σκέφτηκες αυτό τί έκανες;

Κ2.: με το πυθαγόρειο θεώρημα

Ε.: οπότε έχεις γράψει εκεί το πυθαγόρειο θεώρημα στο χαρτί.

Κ2.: ναι... στην περίπτωση.... κανονικά η Α θα έπρεπε να είναι ορθή.

Ε.: Πώς το σκέφτεσαι αυτό;

Κ2.: Διότι 8^2+6^2 κάνει 10^2 και όχι 8^2+10^2.

Ε.: άρα τι απάντησες;

Κ2.: το Α. [δηλ. ότι είναι οξεία]

Ε.: ενώ εσύ, λες ότι είναι ορθογώνιο το τρίγωνο;

Κ2.: λέω πως η Β είναι οξεία

Ε.: Ωραία αλλά είναι ορθογώνιο το τρίγωνο; ή όχι τι λες;

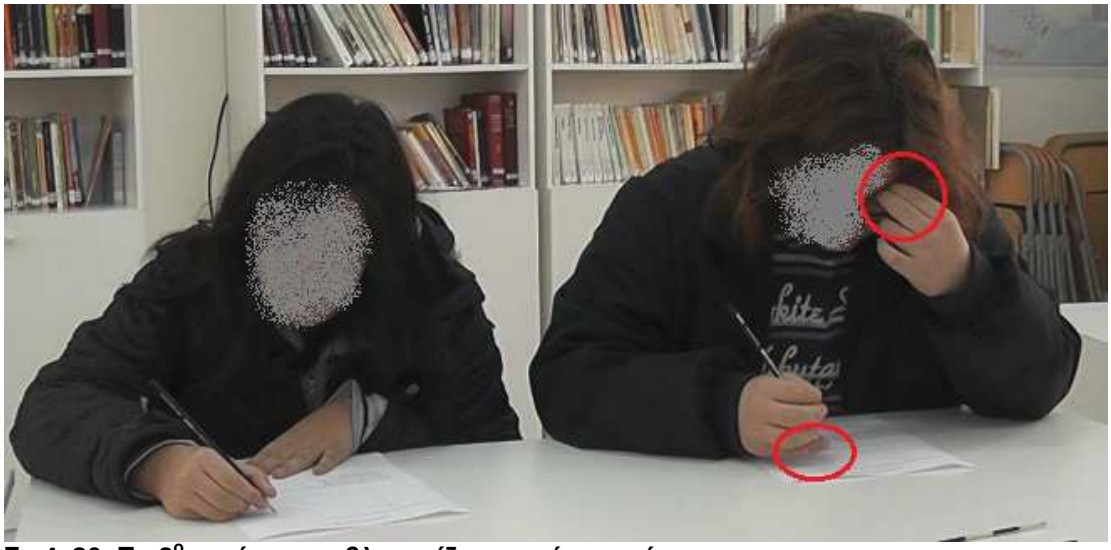
Κ2.: Για να ήταν ορθογώνιο θα έπρεπε η Α να ήταν .... άρα δεν είναι ορθογώνιο

Ε.: Λες η Β είναι οξεία λοιπόν,

Κ2.: ναι

Κ2.: εγώ λέω πώς στο πυθαγόρειο θεώρημα θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το 8 στη δευτέρα και το 6 στη δευτέρα, αλλά το 6

είναι υποτείνουσα γιατί αν η Β είναι ορθή η ΑΓ θα ήταν η απέναντι άρα η υποτείνουσα. Η ΒΓ αφού είναι μεγαλύτερη από την ΑΓ δεν γίνεται να είναι μεγαλύτερη από την ΑΓ, νομίζω.



Σχ.4. 30: Το 2^{ο} κορίτσι προβληματίζεται από το σχήμα.

Ε.: Ωραία, εντάξει νομίζω ότι κατάλαβα, εεε, η ερώτηση η τελική είναι άμα ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα είναι ορθογώνιο το τρίγωνο ναι ή όχι;

Κ1.: ναι

Ε.: εσύ;

Κ2.: μια στιγμή...μπορώ να το δω λίγο ακόμα;

Κ2.: όχι αν η Β είναι ορθή το πυθαγόρειο θα πήγαινε με τους αριθμούς 8 και 10 και 8^2+6^2 δεν κάνει 6^2.

Ε.: Ο.κ. ωραία

Κ2.: Αν η Α ήταν ορθή θα μπορούσε να βγαίνει πυθαγόρειο θεώρημα να ισχύει, αλλά δεν είναι, όπως φαίνεται είναι οξεία.

Ε.: κατάλαβα από το σχήμα φαίνεται ότι δεν είναι

Κ2.: από το σχήμα φαίνεται ότι δεν είναι αλλά κανονικά για να ισχύουν αυτά τα νούμερα θα έπρεπε να' ναι.

<u>Ομάδα Β</u>

Στο τμήμα παρέμβασης το ένα κορίτσι αρχικά είπε ότι η γωνία είναι οξεία γιατί εφάρμοσε το πυθαγόρειο θεώρημα και δεν ίσχυε με τις πλευρές όπως ήταν στο σχήμα. Κατόπιν όμως παρασύρθηκε από τη συμμαθήτριά της που έκανε το πυθαγόρειο χωρίς να αντιστοιχίζει στους αριθμούς τις συγκεκριμένες πλευρές, είδε ότι ισχύει και έτσι απάντησε ότι η γωνία είναι ορθή.

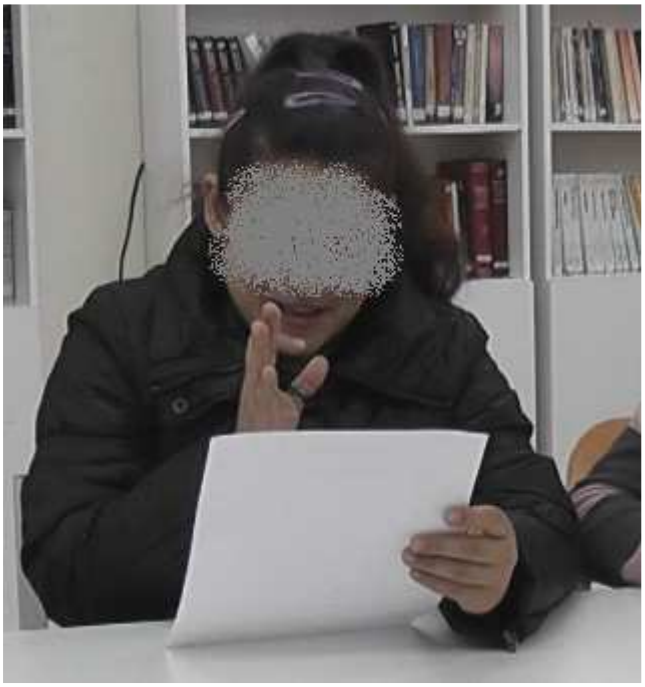
Κορίτσι 2: Δεν μπορώ να καταλάβω αν είναι οξεία ή αν είναι ορθή.

Ερευνητής: Πώς προσπαθείς να το καταλάβεις; Τί έχεις στο μυαλό σου;

Κ2.: Βασικά δεν είναι με τα νούμερα. Με το μάτι. Αυτό δεν μπορώ να καταλάβω.

Ε.: Μ' αυτό που βλέπεις στο σχήμα ή με κάποιο άλλο σχήμα που έχεις φτιάξει στο μυαλό σου.

Κ2.: Μ' αυτό το σχήμα.



Σχ.4. 31: Το κορίτσι σχηματίζει την ορθή γωνία

[το άλλο κορίτσι σβήνει]

Ε.: Γιατί το σβήνεις; τι είχες γράψει;

Κ1.: είχα βάλει μπροστά την υποτείνουσα. δηλαδή ΑΓ=..., τώρα

Κ1.: το βρήκα.

Ε.: τι εννοείς;

Κ1.: Λοιπόν, η απάντηση νομίζω πως είναι η Β επειδή...

Ε.: Δηλαδή ότι η Β είναι ορθή.

Κ1.: έκανα το πυθαγόρειο και βγήκε, 100 = 100, άρα εφόσον είναι ίσα είναι ορθογώνιο.

Ε.: εσύ τις λες γι' αυτό;

Κ2.: Συμφωνώ

Στο τμήμα ελέγχου στην αρχή είπαν και τα δύο παιδιά ότι είναι ορθή η γωνία. Μάλιστα το αγόρι είπε ότι το βλέπουμε και από το σχήμα αλλά και αν κάνουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα το διαπιστώσουμε. Όμως το κορίτσι στο σημείο αυτό πρόσεξε ότι η υποτείνουσα είναι πάντα η μεγαλύτερη και στο σχήμα συμβαίνει κάτι παράδοξο, είναι 6 και δεν είναι η μεγαλύτερη.

Κορίτσι: από το σχήμα το καταλαβαίνουμε, αλλά και άμα κάνω το πυθαγόρειο δηλαδή

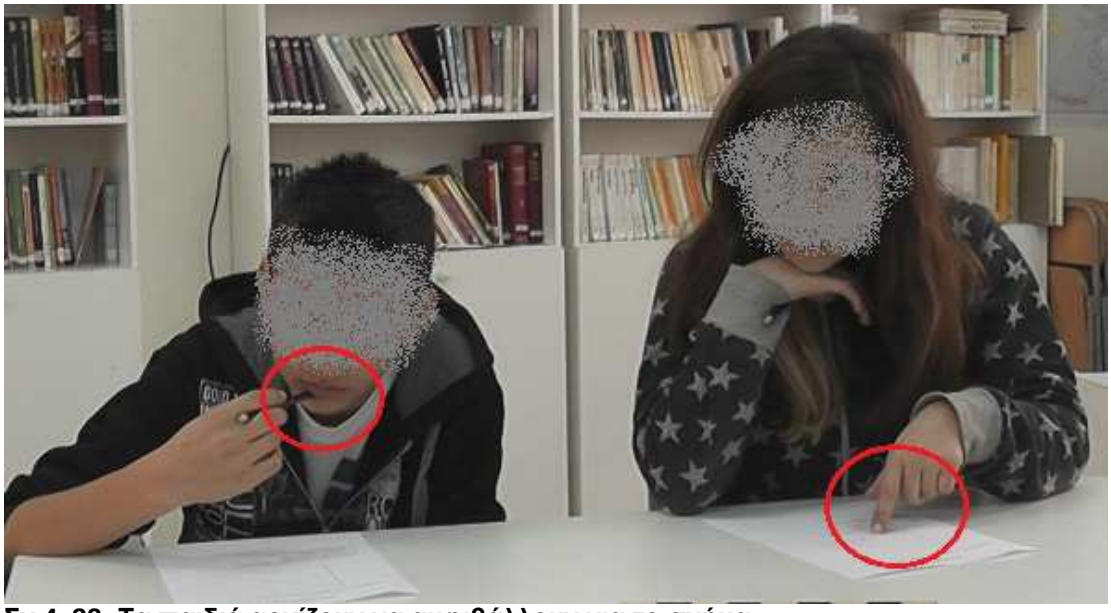
Αγόρι: 8^2επί10^2=6

Κ.: αφού η υποτείνουσα είναι πάντα η μεγαλύτερη, αυτό γιατί είναι 10; Είναι 10 αυτό!

Α.: εγώ λέω ότι είναι ορθή και κυκλώνει την απάντηση

Ερευνητής: εσύ;

Κ.: ναι κι εγώ αυτό αλλά είναι περίεργο γιατί αυτή είναι 6, η υποτείνουσα πιστεύω έπρεπε να είναι πάνω από 10.



Σχ.4. 32: Τα παιδιά αρχίζουν να αμφιβάλλουν για το σχήμα.

Ε.: Και τώρα τι γίνεται;

Κ.: ίσως πρέπει να κάνουμε $6^2=10^2+8^2$ και άμα μας βγούνε ίδια τότε σημαίνει ότι είναι ορθογώνιο αλλά έτσι όπως το βλέπω δεν θα βγούνε.

Ε.: Δεν είναι, το ένα είναι 36 και το άλλο κάνει 164, το 8^2+10^2.

Α.: οπότε δεν είναι ορθή

Κ.: οπότε δεν είναι ορθογώνιο

Ε.: εσύ τι λες; το αλλάζεις τώρα;

Α.: για να είναι η μια 100, πόσο είπατε 116; το 8^2 με 10^2

Ε.: 8^2 κάνει 64, 10^2 κάνει 100, 100 και 64 κάνει 164. Το άλλο είναι 6^2 36.

Κ.: άρα δεν είναι ορθογώνιο, είναι αμβλεία;

Α.: ναι και εγώ αυτό σκεφτόμουνα, άμα είναι μεγαλύτερες αυτές οι δύο

Κ.: ναι, ίσως είναι αμβλεία

Α.: εγώ βάζω αμβλεία και εντάξει, δεν αλλάζω

Ε.: με το σκεπτικό ότι...επειδή είναι μεγαλύτερες πλευρές;

Α.: ναι

Κ.: ναι

Ε.: αυτό;

Κ.: και ότι δεν είναι ορθογώνιο, δεν πρέπει να είναι έτσι κι αλλιώς

Ομάδα Γ

Στο τμήμα παρέμβασης αρχικά τα δύο παιδιά απάντησαν λάθος ότι η γωνία που ψάχνουμε είναι ορθή. Να τονίσουμε εδώ ότι λόγω των γνωστικών ελλείψεων που έχουν τα παιδιά, στηρίζονται συνήθως στο σχήμα και αδυνατούν να διερευνήσουν τι μπορεί πραγματικά να ισχύει, επειδή υπάρχει μια αδυναμία αιτιολόγησης.

Ερευνητής: τι σκέφτηκες (στο κορίτσι)

Κορίτσι: νομίζω ότι είναι ορθή

Ε.: πώς το σκέφτηκες αυτό;

Κ.: Εεε γιατί σχηματίζει ορθή γωνία.

Ε.: Α! από το σχήμα το βλέπεις ότι είναι ορθή. Εσύ;

Αγόρι: κι εγώ το ίδιο, εντάξει.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, όταν ο ερευνητής εισήγαγε ένα είδος αμφιβολίας στην απάντησή τους, πρόσεξαν τους αριθμούς και αφού είδαν ότι δεν μπορεί η πλευρά «6» να είναι υποτείνουσα γιατί δεν είναι η μεγαλύτερη πλευρά, διόρθωσαν τελικά την απάντησή τους. Ας παρακολουθήσουμε το απόσπασμα:

Ε.: Συμφωνείς δεν σε βλέπω να πείθεσαι και τόσο. Απ' το σχήμα κι εσύ ή ...

Α.: από το σχήμα

Ε.: δεν έχεις κάτι άλλο στο μυαλό σου;

Κ.: από τα νούμερα. Α! όχι, πρέπει να είναι λάθος τα νούμερα.

Ε.: Γιατί;

Κ.: γιατί δεν γίνεται η πιο μεγάλη να είναι 6 και η σχετικά πιο μικρή να είναι 10.

Ε.: Οπότε ..

Α.: οπότε είναι οξεία

Κ.: δε μπορώ να απαντήσω

Ε.: εσύ γιατί λες ότι είναι οξεία, πώς το σκέφτηκες; «οπότε είναι οξεία».

Α.: αφού άμα είναι μικρότερη έτσι θα γέρνει το σχήμα.

Ε.: Κατάλαβα έχεις μια εικόνα στο μυαλό σου ότι θα είναι έτσι. Εσύ;

Α.: να το κυκλώσω

Ε.: αποφάσισες, είσαι σίγουρος τώρα;

Α.: ναι

Ε.: δεν είναι ορθή είναι οξεία

Α.: ναι! ναι!

Ε.: εσύ;

Κ.: οξεία κι εγώ.

Κ.: ναι!

Ε.: αμβλεία δεν μπορεί να είναι

Κ.: όχι, η Β;

Ε.: ναι για τη Β μιλάμε

Κ.: όχι οξεία.

Στο τμήμα ελέγχου και τα δύο παιδιά αρκέστηκαν στο σχήμα και είπαν ότι η γωνία είναι ορθή.

Ερευνητής: Τί σκέφτεστε; Εσύ απάντησες [στο αγόρι]

Αγόρι: ότι είναι ορθή

Ε.: Πώς το σκέφτηκες;

Α.: λέει εδώ πέρα ότι είναι οξεία, μετά επειδή τα άλλα δεν είναι γι' αυτό. Ίση με την Α δεν είναι, ούτε αμβλεία.

Ε.: Πώς το ξέρεις ότι είναι ορθή; πώς σκέφτηκες να πεις ότι είναι ορθή;

Α.: γιατί φαίνεται

Ε.: από το σχήμα φαίνεται;

Α.: από το σχήμα

Ε.: εσύ;

Κορίτσι: κι εγώ το β γιατί κάθε τρίγωνο έχει μια ορθή γωνία.

Ε.: Κάθε τρίγωνο έχει μία ορθή γωνία οπότε λες αυτή θα είναι η ορθή.

Κ.: ναι

Σε μια προσπάθεια κινητοποίησής τους από τη μεριά του ερευνητή για να θυμηθούν το Πυθαγόρειο θεώρημα, η απάντησή τους παρέμεινε ίδια γιατί δεν το θυμότανε αλλά δεν είχαν και ιδιαίτερη επιθυμία συνεργασίας.

Ε.: κάτι άλλο κάποια άλλη σκέψη, θυμάστε καθόλου το πυθαγόρειο θεώρημα τί έλεγε;

Α.: εγώ δεν το θυμάμαι

Ε.: εσύ;

Κ.: δεν τα πάω καλά με τα μαθηματικά.

Ε.: Άρα λες εσύ ότι φαίνεται από το σχήμα, εσύ λες ότι κάθε τρίγωνο έχει μια ορθή, οπότε θα είναι αυτή.

Κ.: ναι

4.3.3 3η δραστηριότητα

Στην 3η δραστηριότητα δίνουμε στους μαθητές τα ξυλάκια «9» και «12» οι οποίες αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου και τους ζητάμε να βρουν ένα τρίτο ξυλάκι που θα αποτελεί την υποτείνουσα αυτού του τριγώνου.

Ομάδα Α

Τα παιδιά της ομάδας Α και στα δύο τμήματα βρήκαν σωστά την βέργα με μήκος «15» και μάλιστα κατοχύρωσαν την απάντησή τους εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο τμήμα παρέμβασης επειδή τα ξυλάκια ήταν για αυτούς οικεία εργαλεία, πρώτα διάλεξαν τη βέργα και μετά διαπίστωσαν ότι ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

[Το κορίτσι διαλέγει τη 15, την τοποθετεί και περιμένει].

Ερευνητής: Πώς τη διάλεξες;

Κορίτσι: Εε σκέφτηκα , κάτσε γιατί δεν τη μέτρησα κιόλας. Να σας πω την αλήθεια. Την πρώτη φορά την είδα λίγο με το μάτι και την υπολόγισα. Αλλά .. υπέθεσα ότι θα είναι μεγαλύτερη από αυτές τις δύο, την είδα και τη διάλεξα.

Ε.: Εσύ;

Αγόρι: Εγώ λίγο δεν πρόλαβα, αλλά ναι το ίδιο, επειδή πρέπει να είναι η μεγαλύτερη και μπορούμε να βρούμε από μεγαλύτερο.

Σχ.4. 33: Το αγόρι εξηγεί ότι η υποτείνουσα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη πλευρά.

Ε.: Και γιατί να είναι αυτή και όχι μια άλλη μεγαλύτερη;

Κ.: Γιατί αν πάρουμε μία άλλη μεγαλύτερη μπορεί να βγει κιόλας έξω, το τρίγωνό μας να γίνει αμβλυγώνιο, δε θα είναι ίσο για να βγει ορθογώνιο.

Ε.: Αυτό το τρίγωνο που φτιάξατε εδώ, είμαστε σίγουροι ότι είναι ορθογώνιο;

Α.: Επειδή οι πλευρές ταιριάζουν ακριβώς. Εδώ είναι 90 μοίρες κι αυτό είναι ...

Ε.: Αν για παράδειγμα τα μετράγαμε πόσα κομμάτια είναι η καθεμία, είναι 9, 12 κι αυτή η τρίτη που βάλατε, πόσα κομμάτια είναι;

Α.: 14 πρέπει να είναι.

Κ.: 15

Ε.: 15! Για να είναι ορθογώνιο τρίγωνο τι θα έπρεπε να ισχύει;

Α.: Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή 15 στο τετράγωνο, 9 στο τετράγωνο και 12 στο τετράγωνο.

Ε.: Το χρειάζεστε αυτό για να πείτε ότι είναι ορθογώνιο, ή είστε σίγουρο ότι είναι ορθογώνιο χωρίς να κάνετε το πυθαγόρειο θεώρημα.

Κ.: Το χρειαζόμαστε [συμφωνεί και το αγόρι]. Για να σιγουρευτούμε.

Ε.: Πριν δεν το ζητήσατε όμως, ήσασταν σίγουροι.

Κ.: Ναι, εντάξει.

Αντίθετα στο τμήμα ελέγχου, βρήκαν ποιά βέργα έπρεπε να ψάξουν, αφού εφάρμοσαν πρώτα το θεώρημα.

[το 2^{ο} κορίτσι κάνει πράξεις, ακούγεται κάτι σαν 144]

Ερευνητής: Πώς το σκέφτεστε;

Κορίτσι 2: Λοιπόν, 12 στη δευτέρα, 144, 9 στη δευτέρα κάνει 81, 144+81 κάνει 225; και αυτό στο τετρά.... και η ρίζα του 225 είναι το....

Ε.: 15 σας το λέω εγώ.

Κ.2: οπότε θέλουμε το 15 [ψάχνουν τη βέργα 15]

Σχ.4. 34: Τα κορίτσια βρήκαν τη βέργα «15» με το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ε.: Άρα αυτό που σκεφτήκατε είναι, κάνατε το πυθαγόρειο θεώρημα και ψάχνετε να βρείτε τώρα τη βέργα που είναι 15. Και οι δύο το ίδιο κάνατε ε;

Κορίτσι 1: ναι

Ε.: και λέτε αυτό θα είναι

Κ.2: ναι

Ε.: σίγουρα 100%;

[Ναι και οι δύο]

Ομάδα Β

Τα παιδιά της ομάδας Β και στα δύο τμήματα ξεκίνησαν να ψάχνουν για μία βέργα «μεγάλη» όπως είπαν χαρακτηριστικά. Και τα δύο ζευγάρια είπαν ότι η τρίτη πλευρά θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την «9» και από την «12». Τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης παρέμειναν στην οπτική λύση. Δηλαδή δοκιμάσανε τη βέργα «14», δεν έκλεινε ακριβώς το τρίγωνο και είπαν ότι οι βέργες που διαθέταμε δεν ταιριάζανε. Δεν επιχείρησαν να δοκιμάσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ερευνητής: Πώς ψάχνετε να τη βρείτε;

Κορίτσι 2: μετρώντας τα ....

Κορίτσι 1: θα είναι σίγουρα μεγαλύτερη και από τις δύο πλευρές. Άρα θα είναι πάνω από 12, 13 εεε θα ψάξουμε.

[το κορίτσι 1 παίρνει μία βέργα τη μετράει, 14 τη δοκιμάζει στο τρίγωνο, δεν κλείνει, το άλλο κορίτσι βάζει τη βέργα]

Κ1.: ααα η 14

Ε.: Τι λέτε;

Κ1.: η 14 δεν ... αυτή είναι η 13;

Ε.: Προσπαθήστε, αν κατάλαβα καλά προσπαθείτε να βρείτε κάποια μεγαλύτερη

Κ1.: ναι

Ε.: και με το μάτι, μετά τη βάζετε πάνω να δείτε αν κάνει ορθογώνιο. Και δεν κάνει καμία λέτε; απ΄ αυτές που υπάρχουν εδώ;

Κ1.: αυτή δεν κάνει ακριβώς.

Ε.: άρα λέτε όχι μάλλον εε; ή μήπως γίνεται;

Κ1.: ναι γίνεται σίγουρα, αλλά εντάξει

Ε.: δεν είναι εδώ αυτές οι βέργες.

Κ1.: ναι

Σχ.4. 35: Η πλευρά 15 δεν φαίνεται να τους ταιριάζει ακριβώς

Στο τμήμα ελέγχου είπαν ότι θα ψάξουμε για μία βέργα σίγουρα μεγαλύτερη από 9 και 12 και ίσως επειδή στην προηγούμενη δραστηριότητα δοκίμασαν το Πυθαγόρειο θεώρημα, το αγόρι πρότεινε πάλι πώς ίσως θα χρειαζόταν να δοκιμάσουμε και σ' αυτή την περίπτωση.

Ερευνητής Τί θα κάνετε; πώς το σκέφτεστε;

Κορίτσι: κατ' αρχήν να είναι μεγάλο για να είναι ορθογώνιο

Αγόρι: το ένα 9 το άλλο 12, εγώ πιστεύω είναι το 14 μέχρι και μεγαλύτερο

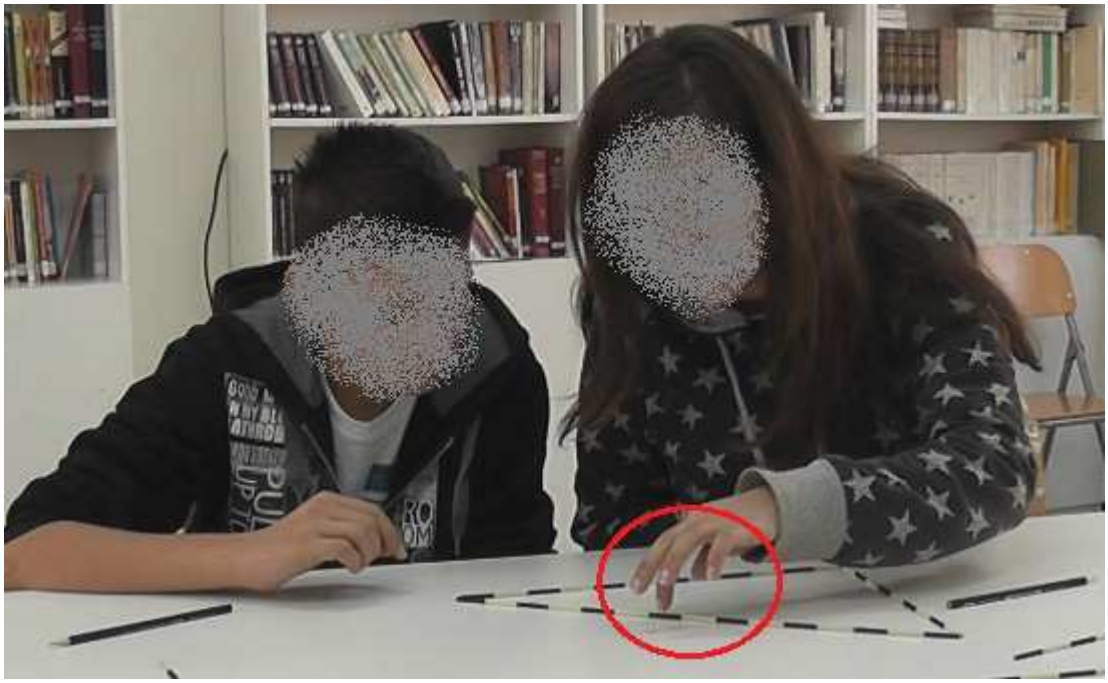
Ε.: Πώς το λες το πιστεύω; πώς το σκέφτεσαι;

Α.: επειδή δεν μπορεί να είναι ας πούμε, 10 ή 11

Κ.: ίσως πρέπει να κάνουμε χ στο τετράγωνο άμα ήτανε σα χαρτί, = 9^2+12^2 και θα το βρίσκαμε.

Ε.: Ααα! Ποιά είναι αυτή τώρα που βρήκατε, πόσο είναι;

[μετράνε] 15! [και οι δύο μαζί]



Σχ.4. 36: Μετράνε την τρίτη πλευρά.

Ε.: 15. άρα αυτή η πλευρά τώρα είναι

Α.: αυτή είναι 14 είπαμε;

Ε.: 12

Α.: 12^2;

Ε.: 144

Α.: 9^2, ίσον 81. 144 και 81;

Ε.: 225 κάνουν και τα δύο

Α.: και 15^2;

Ε.: 225

Α.: ναι οπότε αυτό είναι

Ε.: Είστε σίγουροι ότι...

Α.: σίγουροι, σίγουροι

Ομάδα Γ

Στην ομάδα Γ τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης έψαξαν και αυτά για μια μεγάλη βέργα και βρήκαν τη σωστή «15». Το αγόρι είπε ότι στο συγκεκριμένο τρίγωνο δεν χρειάζεται να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα, γιατί είναι «σίγουρα» ορθογώνιο. Το κορίτσι είπε ότι αν κάνουμε πράξεις θα είμαστε πιο σίγουροι.

[το κορίτσι παίρνει μία βέργα τη βάζει στο τρίγωνο, είναι η 15]

Ερευνητής: Πώς τη διάλεξες;

Κορίτσι: γιατί ήταν μεγάλη

Αγόρι: με το μάτι

Ε.: και; μας κάνει;

Α.: ναι

Ε.: είναι ορθογώνιο τρίγωνο αυτό;

Σχ.4. 37: Το κορίτσι διάλεξε με το μάτι μία «μεγάλη» βέργα.

Α.: Οοοο [παίρνει τις βέργες και τις βάζει 12-9, 12 δηλ η κατακόρυφη]

Ε.: γιατί του άλλαξες θέση;

Α.: τώρα είναι ορθογώνιο

Ε.: γιατί του άλλαξες θέση;

Α.: για να είμαι σίγουρος

Ε.: εσύ είσαι σίγουρη; είναι ορθογώνιο σίγουρα;

Κ.: ναι

Ε.: 100%; αυτός είναι ο πιο σίγουρος τρόπος;

Α.: ναι

Κ.: δεν είναι ο πιο σίγουρος τρόπος, αλλά ...

Ε.: ποιός είναι ο πιο σίγουρος τρόπος;

Κ.: να κάνουμε πράξεις

Ε.: δηλαδή;

Κ.: εε! αφού αυτή είναι 12, αυτή 9, αυτή πόσο είναι; [μετράει], 15.

Ε.: Οπότε να κάνεις πράξεις, λες το πυθαγόρειο θεώρημα

Κ.: ναι

Ε.: εσύ τι λες; χρειάζεται το πυθαγόρειο θεώρημα ή είναι σίγουρα ορθογώνιο;

Α.: αυτό είναι σίγουρο. Σ' αυτό εδώ είναι σίγουρο [δείχνοντας το τρίγωνο]

Ε.: Εσύ λες χρειάζεται το θεώρημα ή είναι σίγουρο;

Κ.: εεε χρειάζεται το πυθαγόρειο θεώρημα

Ε.: θα αλλάξει η σιγουριά μας;

Κ.: θα επιβεβαιωθεί

Στο τμήμα ελέγχου τα παιδιά διατήρησαν και σ' αυτή τη δραστηριότητα μία άρνηση συνεργασίας. Το κορίτσι δοκίμασε δύο βέργες που δεν ταίριαζαν, κατόπιν δοκίμασε την 14 που σχεδόν έκλεινε το τρίγωνο και είπε «εντάξει, αυτή».

[το κορίτσι διαλέγει μία, δεν κάνει, διαλέγει άλλη επίσης]

Κορίτσι: ούτε αυτή

[διαλέγει μία άλλη, σχεδόν κλείνει, εντάξει]

Ερευνητής: Αυτή είναι; Πόσα κομμάτια είναι αυτή; [μετράνε]

Κ.: 14

14;

Κ.: ναι

Σχ.4. 38: Φτιάχνουν το τρίγωνο 9-12-14.

Ε.: άρα είναι σίγουρα αυτό; είναι ορθογώνιο τρίγωνο τώρα αυτό που φτιάξατε; τί λέτε;

Κ.: ναι

Ε.: επειδή φαίνεται; απλά ρωτάω δεν είναι ...εσύ τι λες;

Αγόρι: είναι

4.3.4 4η δραστηριότητα

Στην 4η δραστηριότητα δίνουμε στα παιδιά τα ξυλάκια 3, 6 και 7 και τους ζητάμε να φτιάξουν αν μπορούν με αυτά τα μήκη, ορθογώνιο τρίγωνο. Τα αποτελέσματα ανά ομάδα είναι:

Ομάδα Α

Τα παιδιά της ομάδας Α διαπίστωσαν εύκολα ότι τα μήκη 3, 6 και 7 δεν αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, αφού κατοχύρωσαν τον ισχυρισμό τους εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.

[Το κορίτσι δίνει τα ξυλάκια στο αγόρι. Το αγόρι δημιουργεί την ορθή γωνία, βάζει το μεγαλύτερο ξυλάκι στη θέση της υποτείνουσας αλλά περισσεύει]

Ερευνητής: Είναι ορθογώνιο τρίγωνο αυτό;

Αγόρι: Άμα θα κάνουμε πράξεις, θα ξέρουμε πιο σωστά.

Ε.: Τί λες;

Κορίτσι: Μάλλον

Ε.: Ωραία. Πώς μπορείτε να το ελέγξετε αν είναι ορθογώνιο τρίγωνο σίγουρα;

Κ.: Θα κάνουμε το πυθαγόρειο

Ε.: Και;

Κ.: τις πλευρές

Σχ.4. 39: Εξετάζουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ε.: Είναι;

Α.: Είναι 7, 6 και 3. 9, 6 τετράγωνο... ναι! όχι! Δεν είναι.

Ε.: Τελικά είναι ή δεν είναι;

Α.: Όχι. Είναι 49 και 36 και 9.

Ε.: Δηλαδή παρόλο που το βλέπετε ότι είναι, λέτε δεν είναι;

Ναι [και οι δύο]

Στο τμήμα ελέγχου το ένα κορίτσι μάλιστα, είπε στο τέλος της δραστηριότητας αυτής ότι η περιεχόμενη γωνία των πλευρών 3 και 6 είναι μάλλον αμβλεία.

Κορίτσι 2: έτσι δεν νομίζω [βάζει 3-6 και μετά την 7]

Κορίτσι 1: δεν βγαίνει

[κάνουν πράξεις]

Σχ.4. 40: Κάνουν πράξεις για να ελέγξουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Κ.2: [προς το κορίτσι 1] Το 45 δεν ισχύει με το 49, άρα όχι.

Ερευνητής: όχι ε; ακόμη και αν τα βάλετε έτσι να ακουμπάνε κλπ, δεν είναι ορθογώνιο;

Κ.1: όχι

Κ.2: όχι

Ε.: όχι έτσι; μάλιστα!

Κ.2: νομίζω πως αυτή είναι αμβλεία [και δείχνει την περιεχόμενη γωνία]

Ε.: τί λέτε τελικά;

Κ.2: αυτή είναι αμβλεία

Κ.1: ότι δεν είναι ορθή

Κ.2: ναι δεν γίνεται ορθογώνιο με τίποτα

Ε.: σίγουρα;

Κ.2: ναι [και οι δύο]

Ομάδα Β

Στο τμήμα παρέμβασης το ένα κορίτσι διόρθωσε το άλλο για το πως πρέπει να βάλει την βέργα με το μεγαλύτερο μήκος στη θέση της υποτιθέμενης υποτείνουσας. Τα κορίτσια στην αρχή ήταν πεπεισμένα ότι το τρίγωνο που φτιάξανε ήταν ορθογώνιο.

[το κορίτσι 2 βάζει για κάθετες πλευρές την 7 και 6 αλλά το κορίτσι 1 παίρνει και βάζει για κάθετες τις 3 και 6].

Ερευνητής: Γιατί το λες αυτό;

Κορίτσι 1: Γιατί πιστεύω πως η 7 που είναι η μεγαλύτερη πρέπει να είναι στο έτσι [δείχνοντας πως θα είναι η υποτείνουσα].

Ε.: Εσύ συμφωνείς μ' αυτό; Τι λέτε είναι ορθογώνιο αυτό το τρίγωνο; που φτιάξατε;

Κορίτσι 2: ναι

Ε.: Είμαστε σίγουροι γι' αυτό;

Κ.1: Όταν το στερεώσω θα είναι.

Σχ.4. 41: Τα παιδιά αναρωτιούνται αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ε.: άρα με τις πλευρές 3,6,7 μπορούμε να φτιάξουμε ορθογώνιο τρίγωνο ναι ή όχι τι λέτε;

Κ.1: ναι.

Ε.: Σίγουρα; 100%

Κ.1: 100%

Όταν όμως ο ερευνητής ρώτησε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ η πρώτη τους απάντηση είναι ότι ισχύει, όταν δοκίμασαν με τους αριθμούς διαπίστωσαν ότι δεν ισχύει και έτσι άλλαξαν την απάντησή τους.

Ε.: Ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα σ' αυτό το τρίγωνο; στο 3-6-7;

Κ.1: ναι

Κ.2: ναι

Ε.: τι θα έπρεπε να ισχύει λοιπόν, τι ισχύει; 7^2 αυτό λέμε;

Κ.1: ότι το 7^2 ισούται με το 6^2 και το 3^2.

Ε.: 7^2 κάνει 49, 6^2 και 3^2 κάνει 45.

Κ.1: δεν είναι

Ε.: τελικά είναι ορθογώνιο τρίγωνο ή δεν είναι;

Κ.1: δεν είναι

Κ.2: δεν είναι

Ε.: παρ' όλο που ήμασταν σίγουροι 100% πριν;

Κ.2: ναι

Ε.: τώρα αλλάζουμε;

ναι [και οι δύο].

Στο τμήμα ελέγχου δοκιμάζουν και αυτά τα παιδιά να φτιάξουν τις κάθετες με τα μήκη «3» και «6» και να αφήσουν το μεγαλύτερο ξυλάκι το «7» για τη θέση της υποτείνουσας. Ενώ δεν τους πείθει το σχήμα ότι είναι πράγματι ορθογώνιο, στην αρχή λένε ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει.

Ερευνητής: Πώς τα βάζετε, με ποιό τρόπο;

Κορίτσι: ε! το μεγαλύτερο να είναι η υποτείνουσα

[δεν βγαίνει οπότε το αγόρι αλλάζει τα ξυλάκια]

Κ.: όχι έτσι αυτό πρέπει να είναι

Ε.: Γιατί;

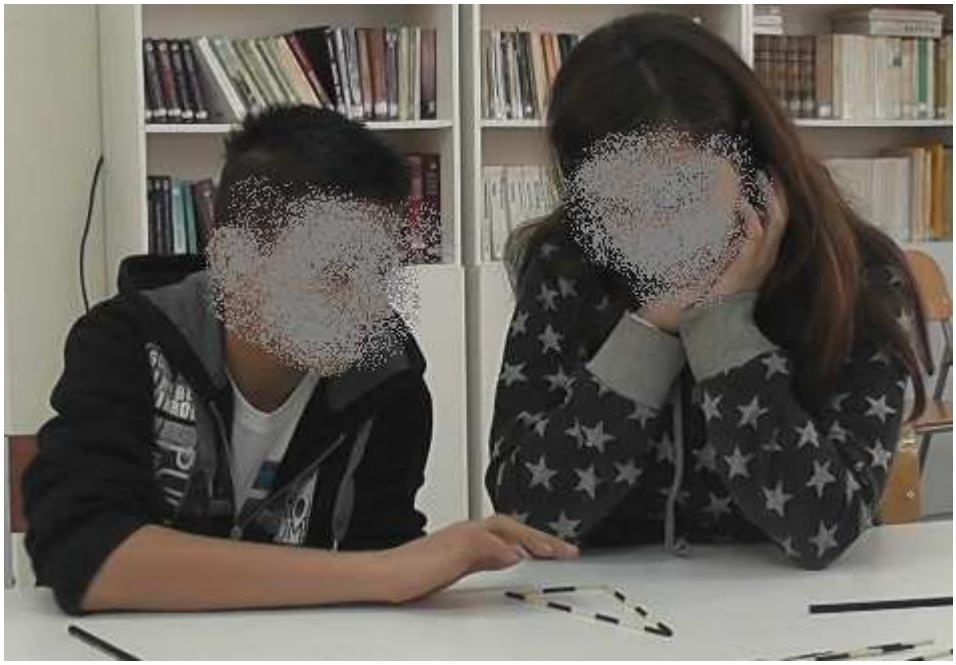
Κ.: γιατί είναι το μεγαλύτερο

Αγόρι: ναι αλλά δεν χωράει

Κ.: δεν είναι ακριβώς, γιατί αυτό είναι μικρό.

Α.: πειράζει να μη βγαίνει ακριβώς;

Ε.: Δεν ξέρω εγώ θέλω να μου πείτε αν μπορούν αυτά τα κομμάτια να κάνουν ορθογώνιο τρίγωνο. Πειράζει λέτε;



Σχ.4. 42: Εξετάζουν αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Κ.: μμμ όχι, πολύ λίγο

Α.: μια χαρά είναι

Κ.: ναι δεν πρέπει να είναι ορθογώνιο

Ε.: Εσύ λες μια χαρά, εσύ λες δεν πρέπει να είναι, τελικά τι ισχύει είναι ή δεν είναι ορθογώνιο τρίγωνο;

Α.: εγώ πιστεύω ότι είναι

Κ.: ναι

Ε.: Σίγουρα; Τελική απόφαση είναι αυτή;

Όμως υποψιασμένοι και από τις προηγούμενες δραστηριότητες που χρειάστηκε να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να αποφασίσουν, δοκιμάζουν και εδώ το ίδιο.

Α.: 3, 6 και 7

Ε.: Ναι 3, 6, 7

Α.: λοιπόν, 6^2 36, 3·3 9

Ε.: Εσύ τι σκέφτεσαι;

Κ.: αυτό που σκέφτεται

Α.: 41 δεν είναι 7·7;

Ε.: 49

Α.: 49 και αυτό πόσο βγαίνει; 36 και όχι μισό μπερδεύτηκα τώρα. Λοιπόν είπαμε 7

Ε.: 49 κάνει αυτό

Α.: 49 είπαμε, 6·6 36 και 9

Κ.: 45 νομίζω κάνει

Ε.: Ναι 45

Α.: 49 όχι δεν είναι

Κ.: ναι

Ε.: Δεν είναι τελικά. άρα τελική απόφαση;

Κ.: δεν είναι

Ε.: Υπάρχει περίπτωση κάποιος να καταφέρει να φτιάξει ορθογώνιο τρίγωνο μ' αυτά;

Α.: όχι

Κ.: άμα δεν έχουνε το ίδιο....

Ε.: με τίποτα;

Κ.: άμα δεν έχουν το ίδιο άθροισμα, το τετράγωνο δεν γίνεται.

Ομάδα Γ

Στο τμήμα παρέμβασης έχοντας εδραιώσει τη γνώση ότι αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, η μεγαλύτερη πλευρά του θα είναι η υποτείνουσα, ξεκινάνε και βάζουν για κάθετες πλευρές τα μήκη «3» και «6». Βλέπουν όμως ότι δεν μπορεί να σχηματιστεί ορθογώνιο τρίγωνο και απαντάνε ανάλογα. Θεωρούν δε ότι δεν χρειάζεται να δοκιμάσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα γιατί «φαίνεται» καθαρά από την κατασκευή τους.

Ερευνητής: Πώς το σκέφτεσαι;

[το κορίτσι βάζει τις 3-6 για κάθετες, βάζει την 7 για υποτείνουσα και περισσεύει]

Σχ.4. 43: Η πλευρά «7» δείχνει να περισσεύει.

Κορίτσι: είναι ελάχιστα πιο μεγάλο

[το αγόρι αλλάζει τις κάθετες 6-3]

Ε.: Μπορούμε; είναι ορθογώνιο τρίγωνο; Βάζεις τη μεγάλη, τι κάνεις; Περισσεύει;

Αγόρι: ναι

Ε.: δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Α.: όχι

Ε.: με τίποτα;

Α.: με τίποτα

Ε.: είναι σίγουρο αυτό; δεν χρειαζόμαστε να ελέγξουμε το πυθαγόρειο θεώρημα ή κάτι τέτοιο;

Α.: όχι

Ε.: εσύ τι λες; [στο κορίτσι]

Κ.: όχι αφού περισσεύει.

Στο τμήμα ελέγχου είναι η μόνη δραστηριότητα που απάντησαν σωστά ότι πράγματι δεν κατασκευάζεται ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3, 6 και 7, αλλά, σε συνδυασμό και με όλη τη στάση τους στη διάρκεια της συνέντευξης, αρκέστηκαν σε αυτό που κατασκεύασαν.

Ερευνητής: Πως θα το κάνετε;

Ε.: Τί λέτε; είναι ορθογώνιο τρίγωνο αυτό;

Αγόρι: όχι

Ε.: Γιατί;

Κορίτσι: ξεφεύγει λίγο

Ε.: Επειδή ξεφεύγει λίγο; Άρα δεν είναι;

Α.: όχι

Κ.: όχι

Σχ.4. 44: Το τρίγωνο που έφτιαξαν με πλευρές 3-6 και 7.

4.4 Κύρια σημεία του 4ου κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας στις τρείς φάσεις της. Τα δεδομένα της διδακτικής μας παρέμβασης και των συνεντεύξεων συλλέχθηκαν με βιντεοσκόπηση, και τα αποτελέσματά τους προκύπτουν από τις απομαγνητοφωνήσεις των παραπάνω βίντεο. Συνοψίζοντας, παρουσιάσαμε:

- χαρακτηριστικά αποσπάσματα διαλόγων του ερευνητή με τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδακτικής μας παρέμβασης στις 3 ενότητες που αυτή αποτελείται και έχει περιγραφεί στις παραγράφους §3.8.2.1 έως και §3.8.2.3 του προηγούμενου κεφαλαίου.

- με πίνακες και διαγράμματα τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης που πήραμε από τα Ερωτηματολόγια αξιολόγησης των δύο τμημάτων.

- τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων ανά δραστηριότητα για τις τρείς ομάδες των μαθητών όπως χωρίστηκαν ανάλογα με την επίδοσή τους στο τεστ του σχολείου τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο} : Συζήτηση & συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε την ερευνητική προσπάθεια μέσα από τα αποτελέσματα όλων των φάσεων όπως περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Γίνεται μια διεξοδική συζήτηση για το κύριο μέρος της έρευνάς μας που ήταν η διδακτική παρέμβαση και για την τελευταία φάση των συνεντεύξεων. Για την τελευταία, η συζήτηση είναι βασισμένη στην κατηγοριοποίηση των μαθητών στις 3 ομάδες ανάλογα με την επίδοσή τους, όπως προέκυψε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Τα ευρήματα της στατιστικής ανάλυσης του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης, συζητούνται τελευταία έχοντας μια σφαιρική εικόνα για τη στάση των μαθητών σε όλες τις φάσεις που προηγήθηκαν. Όλα τα παραπάνω μας οδηγούν σε συμπερασματικά σχόλια που τα παρουσιάζουμε στην τελευταία ενότητα. Τα σχόλια αυτά αφορούν το ερευνητικό ερώτημα και γίνονται αφορμή για εισηγήσεις, για μελλοντικές εφαρμογές και προεκτάσεις.

5.1 Συζήτηση

Από τα ευρήματα της έρευνας υποθέτουμε σε γενικές γραμμές, ότι το ερευνητικό εγχείρημά μας πέτυχε τους στόχους του.

Ξεκινώντας από τη φάση «Τετράγωνοι αριθμοί» αποδείχθηκε ότι καλώς εντάξαμε στο σχεδιασμό της έρευνας τη φάση αυτή. Το ζητούμενο ήταν, να γνωρίζουν οι μαθητές τον τρόπο που «παράγονται» αυτοί οι αριθμοί ώστε η προσοχή τους να επικεντρωθεί στη σχέση που μπορεί να έχουν με τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και όχι στον τρόπο που αυτοί κατασκευάζονται. Δευτερευόντως θέλαμε στην ερώτησή μας «πώς αλλιώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς;» να δώσει την απάντηση κάποιος από τους μαθητές και όχι εμείς. Πράγματι, υπήρξε μια μαθήτρια που τους θυμήθηκε και έτσι αυτή η έννοια εισήχθη στη διαδικασία της διδασκαλίας μας ομαλά.

Στο κύριο μέρος της έρευνας που ήταν η διδακτική μας παρέμβαση, όπως περιγράφηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, φαίνεται πως οι μαθητές ακολούθησαν την επιθυμητή διαδικασία. Η διδακτική παρέμβαση ήταν

χωρισμένη σε 3 στάδια (βλ §3.8.2.1 - §3.8.2.3) και σε κάθε στάδιο υπήρχε ένας βασικός στόχος. Παρακάτω θα συζητήσουμε διεξοδικά αν επιτεύχθηκε και πώς αυτός ο στόχος σε κάθε μια ενότητα. Πρέπει να τονίσουμε όμως ότι παρακολουθώντας τις συνεντεύξεις των μαθητών στο τελευταίο στάδιο της έρευνας, ανακαλύψαμε και επιμέρους στόχους που επετεύχθησαν από τους μαθητές της τμήματος παρέμβασης, σε σχέση με τους μαθητές του τμήματος ελέγχου.

Στην 1η ενότητα αρχικά παρουσιάσαμε στους μαθητές το νήμα της στάθμης που ισορροπεί πάνω από την επιφάνεια ενός χρωματισμένου υγρού. Μέσα από τον χαρακτηρισμό αυτής της γωνίας (ορθή) και ονομάζοντας τις πλευρές της, κανένας μαθητής δεν είχε δυσκολία να αναγνωρίσει ποιές λέγονται κάθετες πλευρές μιας ορθής γωνίας. Σε αντίθεση με το τμήμα ελέγχου, ένα ζευγάρι μαθητών σε μία δραστηριότητα που τους δόθηκε στις συνεντεύξεις (4η φάση), δυσκολεύτηκε να σχηματίσει ορθή γωνία με κάποιες ράβδους που τους προτείναμε. Βλέπουμε λοιπόν ότι επαληθεύεται ο ισχυρισμός μας ότι, το μοντέλο της βαρύτητας και οι μηχανισμοί αναγνώρισής της, μπορούν να συνδεθούν με μια θεμελιώδη γεωμετρική έννοια όπως είναι η καθετότητα

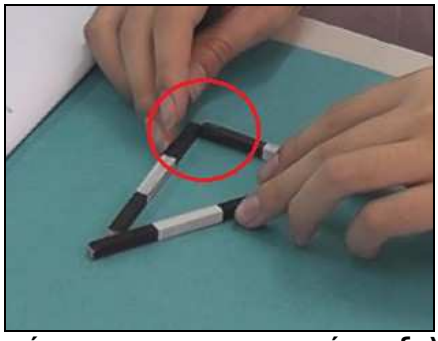
Με τη χρήση των ράβδων που είχε στη διάθεσή του ο ερευνητής οι μαθητές κατάφεραν να μεταφέρουν τη φυσική καθετότητα που προκαλεί η κατακόρυφος με τον ορίζοντα, σε ένα τριγωνικό πλαίσιο και να αντιληφθούν με αυτό τον τρόπο ότι η ορθή γωνία μπορεί να σχηματιστεί οπουδήποτε. Μάλιστα όταν προσπάθησαν να «κλείσουν» το τρίγωνο στην πρώτη προσπάθεια, διαπίστωσαν ότι για να συμβεί αυτό, χρειάζεται στη θέση της υποτείνουσας να τοποθετηθεί η μεγαλύτερη ράβδος. Η πρώτη λοιπόν αυτή ποιοτική σχέση της υποτείνουσας με τις κάθετες πλευρές επετεύχθη από τους μαθητές, όπως φάνηκε αργότερα και στις συνεντεύξεις, με τις δραστηριότητες που είχαν να διαπραγματευθούν. Ακόμη και στις περιπτώσεις που ο μετέπειτα συλλογισμός τους ήταν λάθος, αυτό που παρατήρησαν όλοι, ήταν ότι αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά του.

Στο επόμενο στάδιο γίνεται για πρώτη φορά χρήση των απλών χειραπτικών υλικών (ξύλινες βέργες) που έχουμε σχεδιάσει για τις επόμενες δραστηριότητες. Σκοπός μας ήταν τα συγκεκριμένα εργαλεία να λειτουργήσουν ως πραξιακά πρότυπα και να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες που θέλαμε, με την δική τους ενεργή συμμετοχή.

Θέλαμε τα πρότυπα αυτά να λειτουργήσουν σαν πρότυπα από τον «πραγματικό κόσμο» του Husserl, από τον κόσμο που οι άνθρωποι βιώνουν και οι μαθητές να ανακαλύψουν τις έννοιες που θέλαμε με τη χρήση προ-επιστημονικών υλικών (prescientific materials). Τους ζητήσαμε να βρουν τα ξυλάκια 3, 4 και 5 και να φτιάξουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο θρανίο τους και κατόπιν να μεταβάλλουν την περιεχόμενη γωνία των πλευρών 3 και 4, ώστε να συνδέσουν το μήκος «5» με την απέναντι γωνία. Χαρακτηριστικό είναι ότι κατάφεραν να εμπεδώσουν ότι, όταν η περιεχόμενη γωνία των πλευρών 3 και 4 γίνεται οξεία, η απέναντι πλευρά είναι μικρότερη από 5, ενώ όταν είναι αμβλεία είναι μεγαλύτερη από 5. Αυτό επιβεβαιώθηκε και στις συνεντεύξεις, όταν στην 1η δραστηριότητα, οι μαθητές και των τριών ομάδων (άριστη, μεσαία και χαμηλή επίδοση) του τμήματος παρέμβασης, απάντησαν σωστά, ανεξαρτήτως αν μπορούσαν κατόπιν να επιχειρηματολογήσουν με ικανοποιητικό τρόπο ή όχι.

Στη 2η ενότητα θέλαμε καταρχήν οι μαθητές να βρουν τριάδες αριθμών που να μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Να δοκιμάσουν με τη βοήθεια των χειραπτικών εργαλείων τις εικασίες τους και να τις ελέγξουν ποιοτικά με οπτικό τρόπο. Όταν τα χειραπτικά εργαλεία δεν επαρκούσαν γι' αυτόν τον έλεγχο, χρειάστηκε οι μαθητές να δοκιμάσουν τις υποθέσεις τους σε φύλλο εργασίας με τη διαδικασία της μέτρησης. Με τον τρόπο αυτό έγινε ομαλά η μετάβαση από τη χρήση των πραξιακών προτύπων στη χρήση των αριθμητικών προτύπων με σκοπό να επιτευχθεί σταδιακά η αφαιρετική διαδικασία των μαθητών και να οδηγηθούν στη γενική αφαίρεση σύμφωνα με τους Harel και Tall (1991).

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Ζητήσαμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν το τρίγωνο με πλευρές τα ξυλάκια με μήκη 2, 3 και 4 και να διαπιστώσουν αν αυτό είναι ορθογώνιο. Οι μαθητές σχημάτισαν πρώτα μια ορθή γωνία με τα ξυλάκια 2 και 3, κρατώντας για τρίτη πλευρά το ξυλάκι με το μεγαλύτερο μήκος και κατόπιν το τοποθέτησαν στη θέση της υποτείνουσας και είδαν ότι περίσσευε.



Σχ.5. 1: Ο τρόπος που χρησιμοποιούν τα ξυλάκια οι μαθητές για να σχηματίσουν το τρίγωνο.

Βλέπουμε δηλαδή ότι έχουν έντονα εδραιωμένη την εικόνα της ορθής γωνίας και μάλιστα με τη διεύθυνση κατακόρυφος-ορίζοντας. Την ίδια διαπίστωση κάναμε παρατηρώντας και τα βίντεο από τις συνεντεύξεις στην 4η δραστηριότητα των συνεντεύξεων.

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι τα πραξιακά πρότυπα που ενσωματώσαμε στη διδασκαλία μας κινητοποίησαν τους μαθητές στο να δοκιμάζουν τις εικασίες και τις υποθέσεις που έκαναν. Τους προτείναμε να τοποθετήσουν μέσα στο τρίγωνο 6-8-10 που είχαν κατασκευάσει, το ξυλάκι 5 για να δουν αν ταιριάζει και να σιγουρευτούν μ' αυτόν τον τρόπο ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Δύο παιδιά δοκίμασαν αυτό τον τρόπο επιβεβαίωσης της κατασκευής τους. Το ένα παιδί τοποθέτησε το τρίγωνο 3-4-5 μέσα στο τρίγωνο 6-8-10 έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να έχουν παράλληλες τις κάθετες πλευρές τους 4 και 8 (με κατακόρυφο προσανατολισμό). Το άλλο παιδί τα τοποθέτησε έτσι ώστε τα τρίγωνα να έχουν παράλληλες τις υποτείνουσές τους 5 και 10.

Στην 3η ενότητα στόχος μας είναι η χρήση των τετράγωνων αριθμών να αποτελέσει τη σύνδεση των αριθμητικών με τα γεωμετρικά πρότυπα με σκοπό οι μαθητές να διατυπώσουν τελικά, τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ και να επιτύχουν την εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου.

Αναγράφοντας στον πίνακα τους πρώτους τετράγωνους αριθμούς μέχρι το 36, εύκολα οι μαθητές αντιστοίχισαν στην κάθε πλευρά του τριγώνου 3-4-5 τον κατάλληλο τετράγωνο αριθμό. Μέσα από τη δραστηριότητα που είχαν να συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας τους, μία μαθήτρια είπε ότι «αν προσθέσουμε το 9 και το 16 μας κάνει 25». Έτσι ακολούθησε όλη η τάξη αυτό το συλλογισμό και κατέληξαν ότι το ίδιο ίσχυε και στα υπόλοιπα τρίγωνα που είχαμε σχεδιάσει. Οπότε δεν ήταν ιδιαίτερα δύσκολο κατόπιν να διατυπώσουν ένα λεκτικό κανόνα για τη σχέση που συνδέει το πλήθος των ψηφίδων των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με το πλήθος των ψηφίδων της

υποτείνουσας. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, ότι ο ερευνητής βοήθησε στη διατύπωση του λεκτικού κανόνα αφού τα παιδιά είχαν μια δυσκολία στη διατύπωση με σχετική σαφήνεια του νοήματος που αντιλήφθηκαν, σε αντίθεση με την μετέπειτα διατύπωση από αυτούς ότι $3^2+4^2=5^2$. Τέλος γενικεύοντας τα συμπεράσματα στα οποία είχε καταλήξει η κοινότητα της τάξης, σχηματίσαμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές α, β και γ και γράψαμε την επαγωγική αλήθεια «$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$». Βλέπουμε λοιπόν ότι η επιλογή μας να χρησιμοποιήσουμε τους τετράγωνους αριθμούς σαν αριθμητικό και γεωμετρικό πρότυπο συγχρόνως, ικανοποίησε το στόχο που είχαμε θέσει. Η διττή αυτή αναπαράσταση των τετράγωνων αριθμών που ενσωματώνουν τόσο την αριθμητική όσο και τη γεωμετρική αναπαράσταση, βοήθησε τους μαθητές να βιώσουν την επαναδραστηριοποίηση του 1^{ου} επιπέδου εξαντικειμενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Duval (2006) η διπλή μετάβαση από τη μία σημειωτική αναπαράσταση στην άλλη μπορεί τελικά να συντελέσει στην κατανόηση στα μαθηματικά. Επιπλέον η χρήση και αλληλουχία των προτύπων που επιλέξαμε να εισάγουμε στη διδακτική μας παρέμβαση (πραξιακά, αριθμητικά και γεωμετρικά) δημιούργησαν στους μαθητές, σύμφωνα με τους Harel και Tall (1991), τις εμπειρίες που τους οδήγησαν σε μια ουσιαστική κατανόηση της κατάστασης που βιώσανε και τους οδήγησε σταδιακά σε γενικεύσεις με στόχο την γενική αφαίρεση.

Στο τελευταίο μέρος της έρευνάς μας που ήταν το στάδιο των συνεντεύξεων, προέκυψαν επίσης ενδιαφέροντα αποτελέσματα πάνω στα οποία ακολουθεί η παρακάτω συζήτηση.

Όπως έχουμε αναφέρει και στην §4.3, χωρίσαμε τα ζεύγη των μαθητών σε 3 ομάδες ανάλογα με την επίδοση των μαθητών στο τεστ του σχολείου, τις ομάδες Α, Β και Γ (άριστη, μεσαία και χαμηλή επίδοση).

Τα παιδιά της ομάδας Α και των δύο τμημάτων (παρέμβασης και ελέγχου), είχαν περίπου την αναμενόμενη αντίδραση στις δραστηριότητες που τους προτείναμε με επιμέρους διαφορές τις οποίες αναλύουμε παρακάτω. Να σημειώσουμε όμως ότι, στην ομάδα Α του τμήματος παρέμβασης, που αποτελούνταν από ένα αγόρι και ένα κορίτσι, το αγόρι ήταν αλλοδαπός με λίγα χρόνια στην Ελλάδα, δεν μιλούσε με μεγάλη ευχέρεια τη γλώσσα, με αποτέλεσμα να έχει μια δυσκολία στη διατύπωση των συμπερασμάτων του. Δηλαδή ενώ φαινόταν ότι γνώριζε πως να δικαιολογήσει τις επιλογές του, η συμμαθήτριά του τον προλάβαινε με τις

απαντήσεις της και κάποια φορά τον «παρέσυρε» κιόλας με τη δική της αιτιολόγηση.

Η στατιστική ανάλυση (§4.2), μας έδειξε ότι οι μαθητές των δύο τμημάτων είχαν μια στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση υπέρ του τμήματος ελέγχου, στις ερωτήσεις 2 και 10 του Ερωτηματολογίου αξιολόγησης. Στις δύο πρώτες δραστηριότητες των συνεντεύξεων που διερευνούμε το επίπεδο κατανόησης των μαθητών σε σχέση με τις δύο αυτές ερωτήσεις, έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Στην ομάδα Α, τα παιδιά απάντησαν σωστά στην 1η δραστηριότητα, ότι αφού η περιεχόμενη γωνία των πλευρών 5 και 12 είναι οξεία, η τρίτη πλευρά του τριγώνου θα είναι μικρότερη από 13. Η διαφορά στα δύο τμήματα ήταν ότι τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης αναγνώρισαν την Πυθαγόρεια τριάδα 5-12-13, ενώ τα παιδιά του τμήματος ελέγχου χρειάστηκε να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα. Είχε γίνει άλλωστε παρόμοια δραστηριότητα στη διδασκαλία μας στην τάξη και είχαν αναγνωρίσει την ποιοτική σχέση πλευράς και απέναντι γωνίας. Στη 2η δραστηριότητα όμως, ενώ από τις απαντήσεις τους φάνηκε ότι έχουν κατοχυρώσει τη σχέση «υποτείνουσα → μεγαλύτερη πλευρά → απέναντι γωνία ορθή» και ενώ απάντησαν σωστά, ότι η ζητούμενη γωνία είναι οξεία, είπαν τελικά ότι στο συγκεκριμένο τρίγωνο δεν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Αντίθετα στο τμήμα ελέγχου, η μία από τις δύο μαθήτριες εφάρμοσε το Πυθαγόρειο θεώρημα, είδε ότι ισχύει και είπε ότι η γωνία είναι ορθή. Βλέπουμε δηλαδή μια μηχανιστική απάντηση ότι αφού ισχύει το θεώρημα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, άρα η οποιαδήποτε γωνία είναι ορθή. Η συμμαθήτριά της εφάρμοσε και εκείνη το θεώρημα, αλλά έβλεπε ότι η υποτείνουσα δεν μπορεί να ήταν η πλευρά με μήκος «6». Αμφιταλαντεύτηκε αρκετές φορές με την απάντησή της γιατί την παραπλανούσε το σχήμα, αλλά τελικά από τις απαντήσεις της φαίνεται ότι καταλάβαινε την οπτική απάτη, απλώς δεν μπορούσε να διατυπώσει με σαφήνεια τα επιχειρήματά της. Και αυτό ενισχύεται από το ότι χρησιμοποίησε πολλές φορές στις απαντήσεις της, την έκφραση «**αν** ήταν ορθογώνιο, **θα έπρεπε**....., οπότε **θα ήταν** .....».

Στις επόμενες δύο δραστηριότητες που έπρεπε τα παιδιά να κατασκευάσουν με χειραπτικά υλικά κάποια τρίγωνα, οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης ήταν σαφώς πιο εξοικειωμένοι με τη χρήση τους αφού τα είχαν χρησιμοποιήσει και κατά τη διάρκεια της διδακτικής μας παρέμβασης. Το

γεγονός αυτό βέβαια, τους έκανε να προτρέξουν στη χρήση τους στην 3η δραστηριότητα και κατόπιν να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να σιγουρέψουν την επιλογή τους. Αντίθετα τα κορίτσια του άλλου τμήματος, πρώτα βρήκαν με το Πυθαγόρειο θεώρημα το μήκος της τρίτης πλευράς και μετά διάλεξαν την αντίστοιχη βέργα.

Στην τελευταία δραστηριότητα επίσης που τους ζητήσαμε να κατασκευάσουν, αν γίνεται, ορθογώνιο τρίγωνο με τα μήκη 3,6 και 7, όλοι οι μαθητές σε όλες τις ομάδες σχημάτισαν πρώτα την ορθή γωνία με τα ξυλάκια 3 και 6 και μετά τοποθέτησαν τη βέργα με μήκος 7. Οπότε σε όλες αυτές τις κατασκευές το μήκος 7 «περίσσευε». Μόνο το κορίτσι της ομάδας Α του τμήματος ελέγχου που προβληματίστηκε ιδιαίτερα στη 2η δραστηριότητα, σχημάτισε τελικά το τρίγωνο χρησιμοποιώντας ολόκληρο το μήκος από τα ξυλάκια και είπε ότι μάλλον αυτό το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Στην ομάδα Β, τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης απάντησαν σωστά στην 1η και 4η δραστηριότητα, ενώ του τμήματος ελέγχου στην 1η, 3η και 4η. Στην 1η δραστηριότητα η απάντησή τους ήταν διαισθητική και μάλιστα το κορίτσι από το τμήμα παρέμβασης έκανε την κίνηση με τα χέρια της όταν μικραίνει η γωνία μεταξύ δύο πλευρών. Στη 2η δραστηριότητα τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης εφαρμόζοντας μηχανιστικά και αυτά το Πυθαγόρειο θεώρημα, είπαν ότι αφού ισχύει τελικά το θεώρημα, η γωνία θα είναι ορθή. Τα παιδιά του τμήματος ελέγχου ασχολήθηκαν πιο διεξοδικά με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους παραξένεψε το γεγονός ότι η υποτείνουσα δεν θα μπορούσε να έχει μήκος 6, αλλά τελικά είπαν πως η γωνία θα είναι αμβλεία.

Στις δραστηριότητες με τα ξυλάκια ξεκίνησαν όλοι ψάχνοντας ένα «μεγάλο» ξυλάκι όπως χαρακτηριστικά είπαν. Τα κορίτσια του τμήματος παρέμβασης ενώ είχαν τοποθετήσει το ξυλάκι μήκους 15, είπαν ότι δεν ταιριάζει ακριβώς αλλά δεν δοκίμασαν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να το ελέγξουν. Στο τμήμα ελέγχου, ίσως γιατί η εμπλοκή τους με τα ξυλάκια, τους κινητοποίησε να ψάξουν και να μετρήσουν, εφάρμοσαν το θεώρημα και επιβεβαίωσαν την απάντησή τους. Στην τελευταία δραστηριότητα χρησιμοποίησαν όλοι τελικά το Πυθαγόρειο θεώρημα και διαπίστωσαν σωστά, ότι τα μήκη 3,6 και 7 δεν μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Στο σημείο αυτό να πούμε ότι η χρήση αυτών των απλών χειραπτικών υλικών ώθησε τα παιδιά του τμήματος ελέγχου να περάσουν από την ποιοτική στην ποσοτική επαλήθευση μέσω των αριθμών και της χρήσης του θεωρήματος. Αντίθετα τα παιδιά του τμήματος

παρέμβασης ενώ φαίνεται πως έχουν κατοχυρώσει τις ποιοτικές συσχετίσεις πλευρών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου, αρκέστηκαν και παρέμειναν σ' αυτό το επίπεδο κατανόησης.

Παρόμοια συμπεράσματα, αλλά διαφοροποιημένα ως προς τα τμήματα, προκύπτουν και από τις συνεντεύξεις των παιδιών της ομάδας Γ.

Στο τμήμα παρέμβασης τα παιδιά απάντησαν σωστά και στις 4 δραστηριότητες. Ακόμη και στη 2η δραστηριότητα που τα περισσότερα παιδιά προβληματίστηκαν, το αγόρι ήταν σίγουρο ότι η γωνία που ζητούσαμε να χαρακτηρίσουν, ήταν οξεία. Οι απαντήσεις τους ήταν περισσότερο διαισθητικές αν και δύο φορές το κορίτσι είπε ότι αν κάνουμε πράξεις, εννοώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα επιβεβαιώσουμε τους ισχυρισμούς μας. Παρ' όλα αυτά δεν έκαναν πράξεις αλλά από τις απαντήσεις τους, φαίνεται ότι έχουν αντιληφθεί τις ποιοτικές σχέσεις που συνδέουν τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου. Η ουσιαστικότερη όμως κατανόηση και εμπέδωση αυτών των εννοιών προϋποθέτει μια πιο συστηματική δουλειά από τη μεριά τους, που μάλλον δεν έχει γίνει, για αυτό και εμφανίζουν χαμηλή επίδοση στο τεστ του σχολείου τους.

Στο τμήμα ελέγχου αυτής της ομάδας, τα αποτελέσματα ήταν μάλλον απογοητευτικά και φαίνεται πώς ούτε η χρήση των χειραπτικών εργαλείων μπόρεσε να τους κινητοποιήσει. Η συμμετοχή τους ήταν κάτω του μετρίου και δεν είχαν κάποιου είδους επικοινωνία μεταξύ τους. Οι απαντήσεις τους αρκέστηκαν στην πρώτη εντύπωση που τους δημιουργούσε κάθε φορά το σχήμα και απάντησαν σωστά μόνο στην τελευταία δραστηριότητα. Πιο συγκεκριμένα, στην 1η δραστηριότητα το κορίτσι είπε ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες θα έχουν ίσες και τις τρίτες τους πλευρές. Επομένως η ζητούμενη πλευρά είναι 13 και στο συγκεκριμένο σχήμα έχει γίνει μεγέθυνση. Το αγόρι αντιθέτως είπε ότι θα είναι μεγαλύτερη από 13 αφού έτσι φαίνεται από το σχήμα. Στη 2η δραστηριότητα το αγόρι είπε ξανά πως φαίνεται από το σχήμα ότι η γωνία που ζητάμε είναι ορθή, ενώ το κορίτσι είπε ότι, αφού κάθε τρίγωνο έχει μία ορθή γωνία, η απάντηση είναι ορθή. Στην 3η δραστηριότητα, κατ' αρχήν δεν μπορούσαν να τοποθετήσουν τις βέργες 9 και 12 κάθετα μεταξύ τους και τους βοήθησε ο ερευνητής. Να πούμε εδώ, ότι ήταν τα μόνα από τα παιδιά που δεν αναγνώριζαν τις κάθετες πλευρές μιας ορθής γωνίας, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές αυτοί είχαν πολλά γνωστικά κενά. Ίσως αν ήταν στο τμήμα παρέμβασης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, να είχαν καταφέρει να καλύψουν αυτά τα στοιχειώδη γνωστικά

κενά και να ήταν πιο συμμετοχική η παρουσία τους. Όσον αφορά τη δραστηριότητα τώρα, αφού δοκίμασαν 2-3 βέργες κατέληξαν στη βέργα μήκους 14, η οποία ταίριαζε περίπου και απάντησαν ότι αυτή είναι που σχηματίζει το τρίγωνο. Στην ερώτησή μας, αν θυμούνται τι λέει το Πυθαγόρειο θεώρημα, η απάντησή τους ήταν αρνητική. Τέλος στην 4η δραστηριότητα τοποθέτησαν τα ξυλάκια όπως και όλα τα προηγούμενα παιδιά με κάθετες τις πλευρές 3 και 6, το ξυλάκι μήκους 7 περίσσευε, οπότε είπαν ότι πράγματι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο με αυτά τα ξυλάκια. Πάντως βλέποντας την προηγούμενη παρέμβαση του ερευνητή, που τους βοήθησε να «στήσουν» αρχικά την ορθή γωνία, «αντέγραψαν» την κίνησή του σ' αυτή την τελευταία δραστηριότητα και μπόρεσαν να έχουν μια πιο ενεργή συμμετοχή στο σημείο αυτό. Για το λόγο αυτό ενισχύεται η υπόθεση που κάναμε προηγουμένως ότι αν τα παιδιά αυτά είχαν, είτε λίγο περισσότερο χρόνο, είτε είχαν μια πρώτη επαφή πιο χειραπτική με τις έννοιες που διαπραγματεύτηκαν, θα είχαν καλύτερη απόδοση και ίσως περισσότερη αυτοπεποίθηση.

5.2 Συμπερασματικά σχόλια

Στην παρούσα έρευνα προσπαθήσαμε να δημιουργήσουμε και να εφαρμόσουμε ένα ολοκληρωμένο μαθησιακό περιβάλλον σχεδιασμένο έτσι ώστε, να λειτουργεί συμπληρωματικά στο υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα στη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Οι μαθητές εισήχθησαν στο Πυθαγόρειο θεώρημα μέσα από ιδέες, έννοιες και παραδείγματα που συνδέονται με τον «πραγματικό κόσμο». Η εμπειρική αντίληψη της βαρύτητας οδηγεί σε γεωμετρικές εικόνες και προτάσεις και οι μαθητές οδηγούνται στον αντικειμενικό προσδιορισμό αυτών των εννοιών μέσα από τη χρήση αριθμητικών και γεωμετρικών προτύπων. Μ' αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές συμμετέχουν στη σταδιακή αυτή κατασκευή της νέας γνώσης και εισάγονται στον «κόσμο των μαθηματικών» όχι με έναν αυθαίρετο τρόπο, αλλά έτσι ώστε οι γεωμετρικές αυτές έννοιες να έχουν νόημα για αυτούς.

Προσπαθήσαμε να ακολουθήσουμε στην εισαγωγή των μαθητών στο Πυθαγόρειο θεώρημα, την εξελικτική πορεία του έτσι όπως την πληροφορούμαστε από τα ιστορικά στοιχεία. Οι πρώτες γεωμετρικές ιδέες δημιουργούνται από την ανάγκη αντιμετώπισης πρακτικών και καθημερινών καταστάσεων. Οι πρωτο-μαθηματικές αυτές ιδέες αρχίζουν να παίρνουν μια

πιο αντικειμενική μορφή, μέσα από τη χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών και αριθμητικών προτύπων για να καταλήξουν σε μια πιο αυστηρή γεωμετρική παρουσίαση μέσα από υψηλό βαθμό αφαίρεσης και γενίκευσης.

Συμπερασματικά, να πούμε πως οι μαθητές μας φαίνεται πως ανέπτυξαν τις ποιοτικές συνδέσεις στις οποίες στοχεύαμε. Στην ποιοτική σχέση δηλαδή, των αριθμών με τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και στο χαρακτηρισμό ενός τριγώνου ως ορθογώνιο. Και ενώ η στατιστική ανάλυση μας έδειξε ότι σε δύο ερωτήσεις εμφανίζεται καλύτερο το τμήμα ελέγχου, παρακολουθώντας τις συνεντεύξεις των μαθητών, παρατηρούμε ότι η διδακτική μας παρέμβαση κινητοποίησε τους μέτριους ή και αδύνατους μαθητές. Για μας αυτό θεωρείται επιτυχία, αφού οι μαθητές με άριστη ή πολύ καλή επίδοση, σε γενικές γραμμές θα συνεχίσουν να είναι έτσι. Ενώ, για παράδειγμα η ομάδα των μαθητών με χαμηλή επίδοση του τμήματος παρέμβασης, απάντησε σωστά και στις 4 δραστηριότητες των συνεντεύξεων. Για κάποιες μάλιστα απαντήσεις τους ήταν απόλυτα πεπεισμένοι ότι η απάντησή τους ήταν σωστή, αλλά είχαν βέβαια μια αδυναμία επιχειρηματολογίας. Αντίθετα οι μαθητές της ίδιας ομάδας του τμήματος ελέγχου, πέραν των γνωστικών κενών που είχαν, διαπιστώσαμε ότι η απροθυμία τους να συμμετέχουν περισσότερο ενεργά στις δραστηριότητες, οφειλόταν περισσότερο στην αδυναμία κατανόησης απλών γεωμετρικών εννοιών και στη συνέχεια στη χρήση των απλών χειραπτικών υλικών που τους προτείναμε. Με αφορμή μάλιστα το συγκεκριμένο ζεύγος μαθητών, θα ήταν ενδιαφέρον, παρότι αυτό δεν αποτελεί μέρος της δικής μας έρευνας, να μελετηθούν οι συναισθηματικές στάσεις των μαθητών στον τομέα του μαθήματος, όπως επίσης και ο τρόπος δημιουργίας κινήτρων.

Κλείνοντας, θα λέγαμε ότι θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να μπορούσαμε να παρακολουθήσουμε την πορεία αυτών των μαθητών ή κάποιων από αυτούς, στις επόμενες τάξεις του σχολείου και ιδιαίτερα, να δούμε πώς θα αντιμετωπίσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και τη γενίκευσή του, στη διδασκαλία της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου. Δυστυχώς αυτό είναι δύσκολο να γίνει γιατί οι μαθητές αλλάζουν σχολείο ή τμήμα στο Λύκειο. Παρ’ όλα αυτά, η συντάκτρια της παρούσας διπλωματικής, θα προσπαθήσει τον επόμενο χρόνο, να δοκιμάσει με μια τροποποιημένη μορφή την συγκεκριμένη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος, στο Λύκειο που διδάσκει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ. & Σιδέρης, Π. (2001). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου* (έκδοση α΄). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 111-129.

Αρτεμιάδης, Ν. (2000). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ακαδημία Αθηνών.

Βασιλείου, Ε. (2009). *Γεωμετρία για τη Διδακτική*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών (Σημειώσεις).

Bell, E.T. (1995). *ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ, Από τον Ζήνωνα έως τον Gauchy.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Brown, T., & Haywood, D. (2011). Geometry, subjectivity and the seduction of language: the regulation of spatial perception. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 351-367.

Γιαννακούλιας Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ. έως και το 19ο αιώνα*. Αθήνα : Εκδόσεις Συμμετρία.

D' Amore, B. (2006). Oggretti matematici e senso. Le transformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La Matematica e la sua Didattica, 20(4),* 557-583.

Davis, D. (2007). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Derrida, J. (1989). *Edmund Husserl's Origin of Geometry: An Introduction.* Lincoln: Bison/University of Nebraska Press.

Duval, R. (2000a). *Basic issues for research in mathematics education*. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds). Proceedings of the 24th Conference of PME, 1, Nishiki Print Co. Ltd, Hiroshima, 55-69

Duval R. (2000b). "Ecriture, raisonnement et decouverte de la demonstration en mathematiques", *Recherches en Didactique des Mathematiques 20(20),* 135-170.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131.

Εξαρχάκος, Θ. (2001). *Ευκλείδη «Στοιχεία», Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό.* Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Fynn, A.B. (2007). A climbing class' reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 19–35.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-b Press.

Gray, E.M. & Tall, D. O (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal For Research in Mathematics Education, 25 2,* 115-141.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics*. For the Learning of Mathematic, 11 (1)*, 38-42.

Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

Husserl, E. (1989). *The Origin of Geomtry. In Edmund Husserl's Origin of Geometry: An Introduction*. Lincoln: Bison/University of Nebraska Press.

Θωμαΐδης, Γ., Ξένος, Θ., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α. & Στάμου, Γ.(Ανάδοχος έργου: Εκδόσεις ΖΗΤΗ) (1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου (έκδοση α΄).* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71 (3),* 235-261.

Lakoff, G. & Nunez R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books

Lappas, D., & Spyrou, P. (2006). A reading of Euclid's elements as embodied mathematics and its educational implications. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5(1)*, 1-16.

Manno, G. (2006). *Embodiement and a-didactical situation in the teaching-learning of the perpendicular straight lines concept*. Unpublished PhD thesis, Comenius University in Bratislava, Slovakia

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem*. New Jersey: Princeton University Press.

McIntyre, J., Zago, M., Berthoz, A. & Lacquaniti, F. (2001). Does the brain model Newton‟s laws?. *Nature Neuroscience, 4(7),* 693-694.

Merfeld, D. M., Zupan, L. & Peterka, R. J. (1999). Humans use internal models to estimate gravity and linear acceleration. *Nature, 398,* 615-618.

Νεγρεπόντης, Σ. (2009*). Ιστορία των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών (Σημειώσεις).

Noback, C.R., Strominger, N.L., Demarest, R.J., & Ruggiero, D.A. (2005). *The Human Nervous System*. Totowa, NJ: Humana Press.

Πρόκλος, Σχόλια Εις Το Πρώτον Βιβλίο Των Ευκλείδου Στοιχείων, TLG Mussaios.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17(1)*, 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization*. Mathematical thinking and Learning. 5(1),* 37-70.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61(1-2),* 39-65.

Radford, L (2008). *A cultural theory of learning.* In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger F. (Eds) Semiotics in Mathematics Education (215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education, 40,* 317-327.

Σπύρου, Π. (2006). *Επιστημολογίες για την διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών (Σημειώσεις).

Spyrou, P., Moutsios-Rentzos, A., & Triantafyllou, D. (2009). *Teaching for the objectification of the Pythagorean Theorem.* In L. Paditz & A. Rogerson (Eds.), Proceedings of the 10th International Conference of the MEC21 Project (530-534). Dresden: MEC21.

Σπύρου, Π. & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2011). *Η εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου σε μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος.* Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.), Πρακτικά του 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (σελ. 459-468). Ιωάννινα, Ελλάδα: Εν.Ε.Δι.Μ.- Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Στράντζαλος, Χ. (1989). *Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Santi. G, (2011). *Meaning of Mathematical objects: A comparison between semiotic perspectives.* In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), Proceedings of the

7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2503-2512). Rzeszow: Poland.

Szabo*, A. (1978).* The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht –Holland, Boston USA: Reidel Pub. Com.*

Tall, D. (1995a). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Conference of international Group for the Psychology of Learning Mathematics, Brazil, Vol. I*, 171-175.

Tall, D. (1995b). Cognitive development, representations and proof, Justifying and Proving in Schools Mathematics, *Institute of Education, London, pp. 27 – 38*.

Tall, D. (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. In P. Gates (Ed.), Proceedings of the 28th Conference of the IGPME (Vol. 4, 281-288). Bergen: PME.

Tall, D., Gray, E., Ali B, M., Growley, L., De Marois, P., Mc Gowen, M., Pinto, M., Pitta, D. & Yusof, Y. (2000). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1,* 81-104.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μαθηματική Εκπαίδευση στην Προσχολική Ηλικία: Μία Πρόκληση. 6ο* Πανελλήνιο *Συνέδριο* ΟΜΕΡ. Η γλώσσα ως μέσο και ως αντικείμενο μάθησης στην προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία. 1-3 Ιουνίου 2007. Πάτρα: Πολιτιστικό και Συνεδριακό Κέντρο Παν. Πατρών.

Τζεκάκη, Μ. (2011) *Μαθηματική δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα*. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.), Πρακτικά του 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (σελ. 51-66). Ιωάννινα, Ελλάδα: Εν.Ε.Δι.Μ.- Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Ullmann, S. (1962). *Semantica. Introduccion a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar

Van der Waerden, B. (2000). *Η αφύπνιση της επιστήμης*, *μετάφραση Γ. Χριστιανίδης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Varela, F., Thompson, E & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive science and Human Experience*, Cambridge, MA: MIT Press.

Χούσερλ, Ε. (2003). *Η προέλευση της Γεωμετρίας, μετάφραση Κοντός Π.* Αθήνα: Εκδόσεις Εκκρεμές.

Zervos, S. (1972). On the Development of Mathematical Intuition; On the Genesis of Geometry; *Tensor, N. S. Vol. 26*, 397-467.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

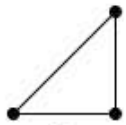
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Σχηματικοί αριθμοί

(κατά τη διάρκεια της φάσης «Τετράγωνοι αριθμοί»)

Με την ευκαιρία της επανάληψης στους ακέραιους και ρητούς αριθμούς, ας επιστρέψουμε στους φυσικούς αριθμούς και σε κάποιες αναπαραστάσεις τους. Οι Πυθαγόρειοι παρατήρησαν ότι κάποιοι φυσικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή κάποιου γνωστού γεωμετρικού σχήματος, καθώς και ότι κάποια γνωστά γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν κάποιους αριθμούς. Αυτή την γεωμετρική παράσταση των φυσικών αριθμών την ονόμασαν 'σχηματικούς αριθμούς'.

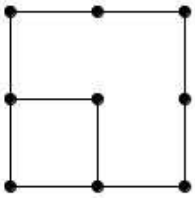
Για παράδειγμα, ο αριθμός 3 μπορεί να παρασταθεί ως ένα τρίγωνο που σχηματίζεται με 3 ψηφίδες. Έτσι, ο αριθμός 3 μπορεί να παρασταθεί ως ένας τριγωνικός αριθμός.



Με τον ίδιο τρόπο, ο αριθμός 4 μπορεί να παρασταθεί ως ένα τετράγωνο που σχηματίζεται με 4 ψηφίδες. Έτσι, ο αριθμός 4 μπορεί να παρασταθεί ως ένας τετραγωνικός αριθμός (πλευράς 2 ψηφίδων).

Δραστηριότητα

1. Μπορείτε να βρείτε τους δύο επόμενους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια τετραγωνικών αριθμών και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;

Φυσικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί ως τετραγωνικός αριθμός	**4**	**9**		
Τετραγωνικός αριθμός				
Πλήθος ψηφίδων πλευράς τετραγωνικού αριθμού	**2**	**3**		
Πλήθος ψηφίδων τετραγωνικού αριθμού	**4**	**9**		
Σχέση τετραγωνικού αριθμού με το πλήθος ψηφίδων	$\mathbf{2^2}$			

2. Μπορείτε να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση;

   «Για να βρω το πλήθος των ψηφίδων ενός τετραγωνικού αριθμού βρίσκω το …….. ψηφίδων της πλευράς του τετραγωνικού αριθμού και την …… στο ……»

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α Β

Φ Υ Λ Λ Ο Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α Σ

(στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης)

1. Με βάση αυτά που συζητήσαμε, να συμπληρώσετε τις παρακάτω φράσεις με τις λέξεις: «ΙΣΗ με», «ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ από», «ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ από»,

   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΟΡΘΗ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΟΞΕΙΑ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

   Αν έχω τρίγωνο με δύο πλευρές με μήκος 3 και 4 και την περιεχόμενη γωνία ΑΜΒΛΕΙΑ, τότε η τρίτη πλευρά είναι 5

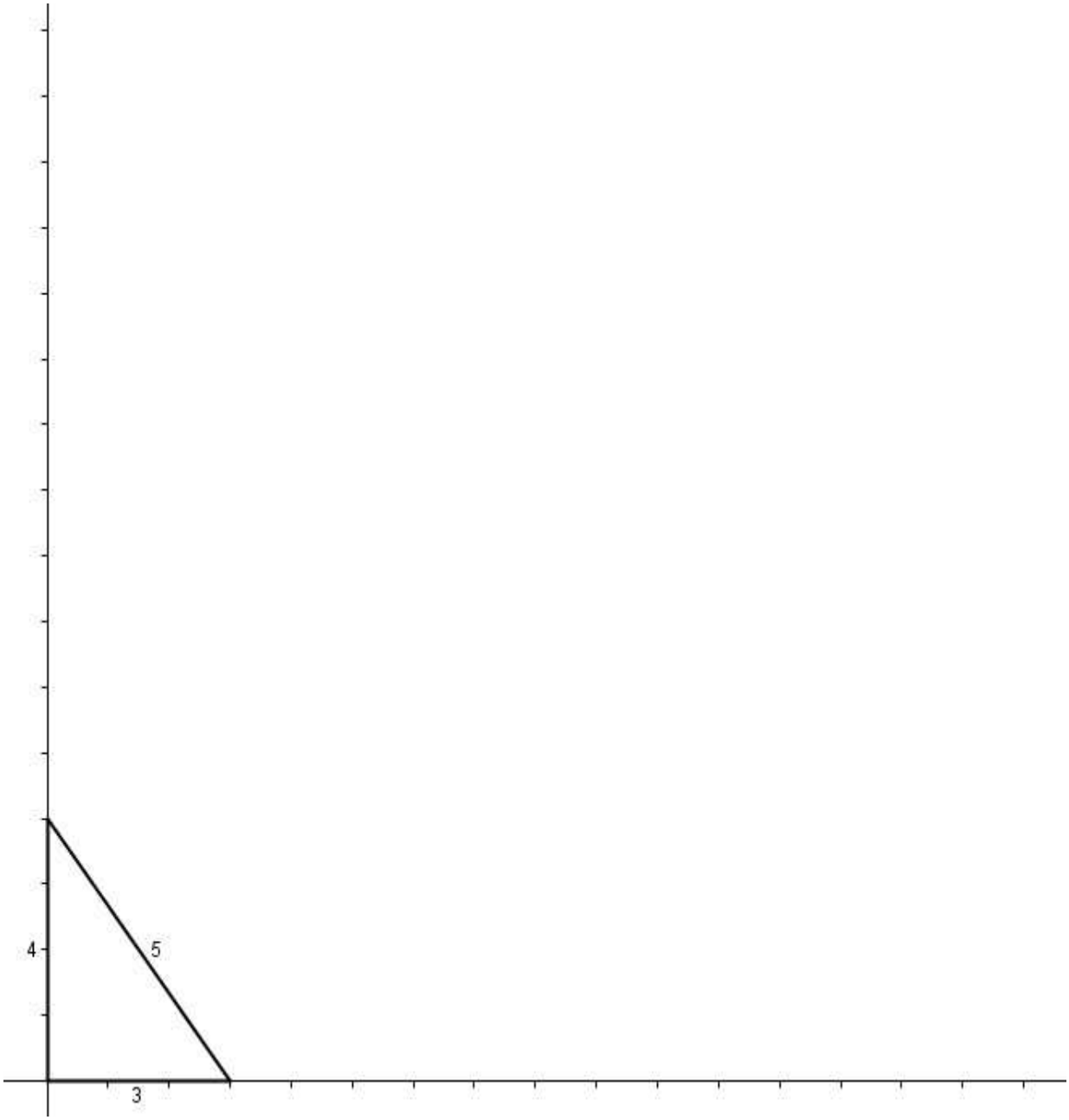
2. Αν έχεις ένα τρίγωνο και οι πλευρές του έχουν μήκος 3, 4 και 5, τότε το τρίγωνο είναι ..... και η ορθή γωνία βρίσκεται ..... από την πλευρά μήκους 5, που είναι η ..... πλευρά του τριγώνου.

3. Διαπιστώσαμε ότι ένα τρίγωνο με πλευρές (3, 4, 5) είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

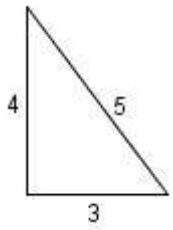
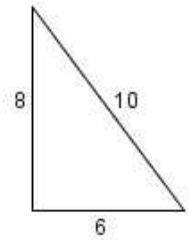
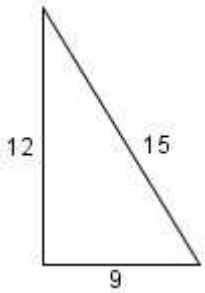
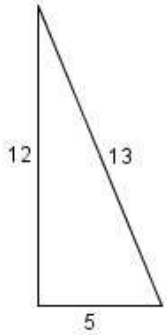
   Μπορείς να μαντέψεις άλλη τριάδα μηκών που να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο; Ποιά;

   Πώς το σκέφτηκες;

   Απέναντι από ποιά πλευρά θα είναι η ορθή γωνία;


4
5
3

4. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Τρίγωνο	Πλευρά τριγώνου	Τετραγωνικός αριθμός που ταιριάζει με την πλευρά του τριγώνου	Πλήθος ψηφίδων τετραγωνικού αριθμού	
	3			
	4			
	5			
	6			
	8			
	10			
	9			
	12			
	15			
	5			
	12			
	13			

5. Μπορείς να διατυπώσεις με λέξεις τη σχέση που συνδέει τις τριάδες μηκών ενός ορθογωνίου τριγώνου;

6. Μπορείς να διατυπώσεις αυτή τη σχέση με μαθηματικά σύμβολα;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

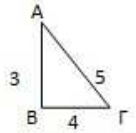
(στη διάρκεια της αξιολόγησης)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:…… ΤΜΗΜΑ:……..

Στις επόμενες ερωτήσεις να ΚΥΚΛΩΣΕΙΣ την απάντηση που είναι κατά τη γνώμη σου Η ΠΙΟ ΣΩΣΤΗ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

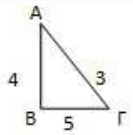
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι:



Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

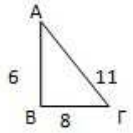
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι:



Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

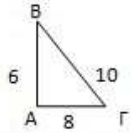
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι:



Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

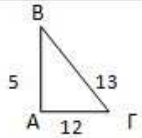
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ,
η γωνία $\widehat{A}$ είναι:



Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

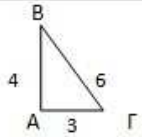
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ,
η γωνία $\widehat{A}$ είναι:



Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 6

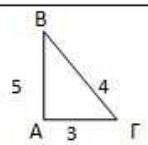
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ,
η γωνία $\widehat{A}$ είναι:



Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 7

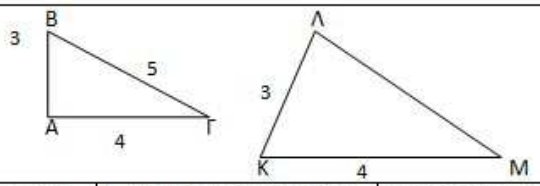
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ,
η γωνία $\widehat{A}$ είναι:



Α. ορθή	**Β.** αμβλεία	**Γ.** οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** ίση με τη γωνία $\widehat{B}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 8

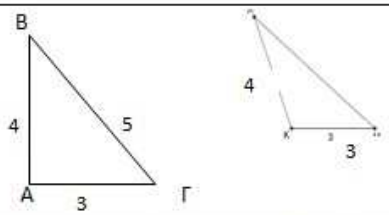
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία $\widehat{K}$ είναι οξεία.
Η πλευρά ΛΜ είναι:



Α. ίση με 5	**Β.** μεγαλύτερη από 5	**Γ.** μικρότερη από 3	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** μικρότερη από 5

ΕΡΩΤΗΣΗ 9

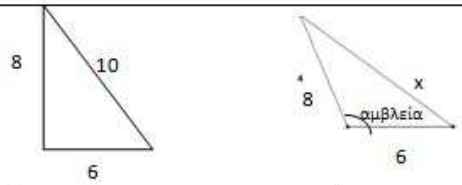
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία $\widehat{K}$ είναι αμβλεία.
Η πλευρά ΛΜ είναι:



Α. ίση με 5	**Β.** μεγαλύτερη από 5	**Γ.** μικρότερη από 3	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** μικρότερη από 5

ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα.
Για το 'x' γνωρίζουμε ότι:



Α. $x = 10$	**Β.** $x > 10$	**Γ.** $x < 10$	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** $x < 8$

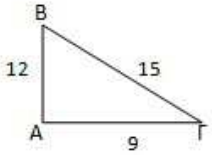
ΕΡΩΤΗΣΗ 11

Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα.
Για το 'x' γνωρίζουμε ότι:

Α. $x = 10$	**Β.** $x > 10$	**Γ.** $x < 10$	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** $x > 11$

ΕΡΩΤΗΣΗ 12

Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ ο δάσκαλος λέει ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία. Εσύ λες ότι:



Α. «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί φαίνεται με το μάτι ότι είναι ορθή»	**Β.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί θυμάμαι ότι είχαμε πει στην τάξη ότι είναι ορθή»	**Γ.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί αν μετρήσω τη γωνία με το μοιρογνωμόνιο θα βρω ότι είναι ορθή»	**Δ.** «Ο δάσκαλος είναι σωστός, γιατί δεν κάνει ποτέ λάθος»	**Ε.** «Ο δάσκαλος είναι λάθος, γιατί είναι $15^2 = 9^2 + 12^2$ »

ΕΡΩΤΗΣΗ 13

Αν θέλεις να πεις σε ένα φίλο σου τον **πιο σίγουρο** τρόπο για να βρίσκει ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τι θα του έλεγες;

Α. «Όταν κοιτάξεις το τρίγωνο με το μάτι, αν μια γωνία του τριγώνου είναι ορθή φαίνεται»	**Β.** «Μέτρησε τις πλευρές και έλεγξε αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα»	**Γ.** «Μέτρησε τις γωνίες με το μοιρογνωμόνιο για να ελέγξεις αν κάποια είναι ορθή»

Μην ξεχάσεις να ελέγξεις αν έχεις απαντήσεις σε ΟΛΕΣ τις ερωτήσεις!

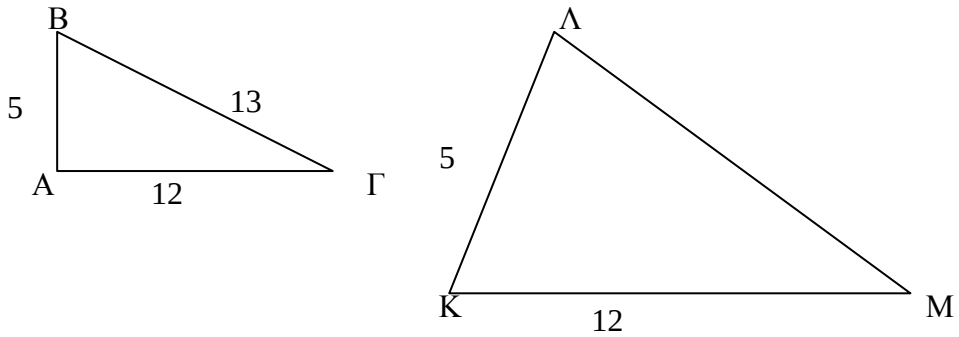
Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α Δ

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

(στη διάρκεια των συνεντεύξεων)

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Α 1η

Δίνονται τα παρακάτω τα τρίγωνα.



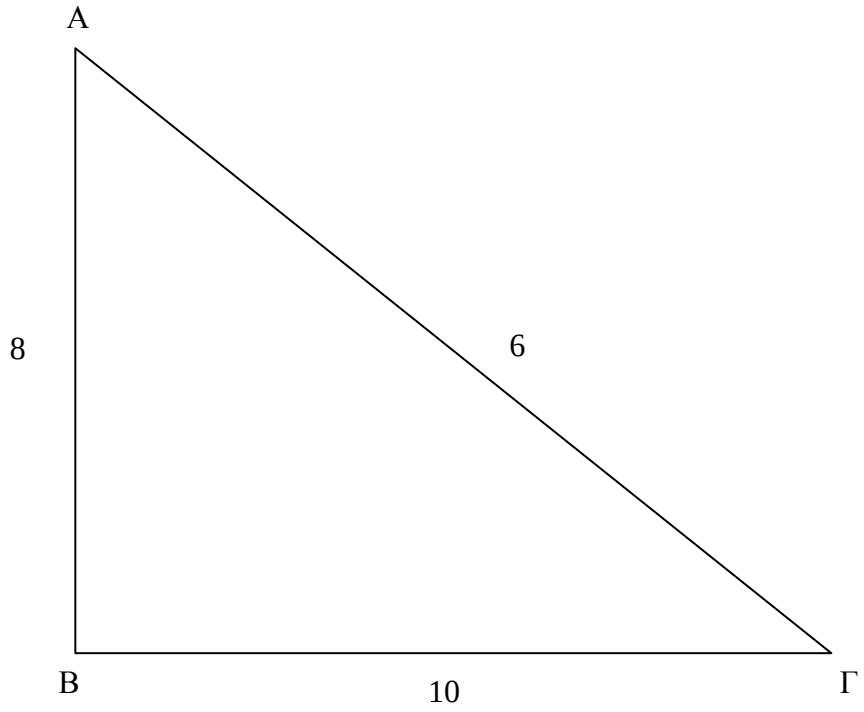
Γνωρίζουμε ότι η γωνία Κ είναι οξεία.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

1. Η ΛΜ είναι μικρότερη από 13.
2. Η ΛΜ είναι μεγαλύτερη από 13.
3. Η ΛΜ είναι ίση με 13.

Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Α 2η

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 8, ΒΓ = 10 και ΑΓ = 6.



Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι κατά τη γνώμη σου η σωστή;

Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι οξεία.

Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι ορθή.

Γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι αμβλεία.

Δ. Δεν μπορώ να απαντήσω.

Ε. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι ίση με την Α.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α Ε

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΣΤ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΤΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΣΤ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ															
code	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**	**q7**	**q8**	**q9**	**q10**	**q11**	**q12**	**q13**	**GRADE TEST**	**Παρόντες στη διδακτική παρέμβαση**
101	2	1	3	1	1	2	3	5	2	2	3	5	2	20	✓
102	2	4	4	1	1	4	4	1	2	1	2	5	2	απών	✓
103	2	4	4	1	1	4	1	1	2	1	2	5	2	10	✓
104	2	4	4	1	1	1	2	1	2	1	2	5	3	12	
105	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	3	5	2	5	✓
106	2	1	1	1	1	3	3	1	1	4	3	2	1	10	✓
107	2	3	1	1	1	3	3	1	2	1	2	5	2	12	✓
108	2	2	1	2	1	3	2	5	3	2	4	2	3	5	
109	1	3	1	1	2	3	1	5	2	2	3	5	2	14	✓
110	2	3	1	1	1	3	2	1	2	1	2	5	2	20	✓
111	2	3	1	1	1	1	1	5	5	2	5	3	2	9	
112	2	3	1	1	1	3	2	2	3	1	2	5	2	15	✓
113	2	1	1	1	1	3	2	1	1	1	1	5	2	20	✓
114	2	4	1	2	1	3	2	5	2	2	3	5	2	6	✓
115	2	3	1	1	1	3	2	2	1	3	3	5	2	19,5	✓
116	2	1	1	1	5	2	1	1	1	1	1	5	2	17	✓
117	2	2	4	1	1	4	1	2	1	1	1	3	2	8	✓
118	2	4	2	1	1	1	1	5	2	2	3	5	2	20	✓
119	2	2	5	1	1	1	1	1	1	1	1	5	2	15	✓
120	2	1	1	1	1	3	3	1	2	3	3	5	2	15	✓

πίνακας excel 1: Πίνακας στο excel για τους βαθμούς των μαθητών του τμήματος παρέμβασης.

Οι κωδικοί 101 έως 120 είναι οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης όπως κωδικοποιήθηκαν για να εισαχθούν οι βαθμοί τους στο SPSS και να γίνει η στατιστική ανάλυση. “Grade test” είναι ο βαθμός που πήραν οι μαθητές στο τεστ του σχολείου τους. Στη στήλη με τους παρόντες είναι (γκρι) σκιασμένα 3 κελιά με τους 3 μαθητές που απουσίαζαν την ημέρα της διδακτικής μας παρέμβασης.

Τα σκιασμένα κίτρινα κελιά είναι οι σωστές απαντήσεις σε κάθε ερώτηση.

ΤΟ ΤΜΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΤΕΣΤ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ														
code	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**	**q7**	**q8**	**q9**	**q10**	**q11**	**q12**	**q13**	**GRADE TEST**
201	2	2	4	1	1	3	1	1	1	2	3	2	2	17
202	2	4	1	1	1	3	4	1	2	2	1	5	2	20
203	2	2	1	1	1	3	1	5	2	2	4	5	2	15
204	2	2	4	4	1	4	1	1	1	4	3	2	2	15
205	2	2	1	1	1	3	1	5	2	4	1	5	2	10
206	2	2	1	1	1	3	1	1	1	2	3	3	2	5
207	2	2	1	1	1	3	1	1	2	3	3	5	2	20
208	2	2	1	1	2	3	1	4	2	1	3	2	1	5
209	2	2	1	1	1	3	1	1	2	2	3	5	2	20
210	2	2		1	1	1	1	5	2	2	3	5	2	2
211	3	4	5	1	1	5	5	5	1	1	5	3	2	3
212	2	2	1	1	1	3	1	1	1	2	3	3	2	15
213	2	1	1	1	2	3	4	5	5	2	5	2	2	18
214	2	1	1	1	2	3	4	5	5	2	4	2	2	16
215	2	2	3	1	3	1	2	2	2	2	1	5	1	8
216	2	2	2	1	1	1	5	2	2	1	1	5	2	5
217	2	1	3	1	1	2	3	5	2	2	3	5	2	19,5
218	2	2	2	2	3	2	1	2	2	2	1	5	2	7
219	2	1	1	1	2	1	2	5	2	4	3	4	1	15

πίνακας excel 2: Πίνακας στο excel για τους βαθμούς των μαθητών του τμήματος ελέγχου.

Οι κωδικοί 201 έως 219 είναι οι μαθητές του τμήματος ελέγχου όπως κωδικοποιήθηκαν για να εισαχθούν οι βαθμοί τους στο SPSS και να γίνει η στατιστική ανάλυση. “Grade test” είναι ο βαθμός που πήραν οι μαθητές στο τεστ του σχολείου τους. Το κελί 210-q3 είναι σκιασμένο (ροζ) γιατί δεν υπήρχε απάντηση σ’ αυτή την ερώτηση (missing value).

Τα σκιασμένα κίτρινα κελιά είναι οι σωστές απαντήσεις σε κάθε ερώτηση.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α Σ Τ

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ

(Πλήρεις απομαγνητοφωνήσεις των διαλόγων του ερευνητή με τους μαθητές σε δύο επιλεγμένες συνεντεύξεις)

1η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ (ΟΜΑΔΑ Α - τμήμα παρέμβασης)

Ερευνητής: Θυμάστε πώς έγινε η διδασκαλία του Πυθαγορείου στην τάξη, όχι από εμάς, πώς το έκανε η καθηγήτρια. Μπορείτε να μου πείτε 2-3 λόγια πώς το είχε κάνει;

Κορίτσι: Να σας πω...

Ε.: Πείτε μου

Κ.: Μας είχε σχεδιάσει ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ένα τετράγωνο και μας βοήθησε να βρούμε τη σχέση της κάθετης πλευράς, των κάθετων πλευρών με την υποτείνουσα. Μας έγραψε δηλαδή, για να σας δώσω ένα παράδειγμα ότι $β^2+γ^2=α^2$ [και το γράφει νοητά με το χέρι της στο θρανίο].

Ε.: Ναι

Κ.: Εεε και από κει κάναμε την, βάλαμε αριθμούς και μπορέσαμε και κάναμε μια κανονική άσκηση.

Ε.: Ωραία. Από τη διδασκαλία που κάναμε εμείς τι θυμάστε;

Αγόρι: Εγώ θυμάμαι ότι είχαμε δημιουργήσει με τα ξυλάκια τα τρίγωνα και από χρώματα εμείς κάπως εμείς ξέρετε πως θα γίνουν.

Ε.: Ωραία. Υπήρχε κάτι που σας άρεσε ή δεν σας άρεσε σ' αυτό που κάναμε εμείς;

Κ.: Εγώ βρήκα πολύ ενδιαφέρον αυτό που μας δείξατε στον τοίχο που σχεδιάσαμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, μας είπατε δηλαδή ότι η υποτείνουσα πρέπει να είναι πιο μεγάλη αλλά να μην ξεπερνάει κιόλας το τρίγωνο και βγαίνει αμβλυγώνιο.

Ε.: Α! εννοείς με τα ξυλάκια που κάναμε. Το σχέδιο ή αυτό που κάναμε με τα ξύλα τα ίδια;

Κ.: το' χαμε κάνει αυτό που λέτε με τα ξύλα και στον τοίχο μας είχατε δείξει και το βρήκα ενδιαφέρον γιατί μπορούσαμε να δούμε όλοι από κοντά πώς το εφαρμόζαμε.

Ε.: Κάτι που δεν σας άρεσε;

Κ.: Εεεε, εντάξει δεν θα το λέγαμε, όχι. Το αγόρι συμφωνεί.

Ε.: Εσύ κάτι που σου άρεσε περισσότερο; (απευθυνόμενος στο αγόρι)

Α.: Μου άρεσε το παράδειγμα με τα ξυλάκια επειδή ήταν πιο εύκολο και όλοι μπορούσαν να δουν πώς σχεδιάζουμε.

Ε.: Ωραία. Λοιπόν αυτά έτσι σαν πρώτη συζήτηση. Τώρα θα σας δώσω κάποιες έτσι μικρές δραστηριότητες, επιμένω εμένα μ' ενδιαφέρει να μου λέτε συνέχεια πώς σκέφτεστε να τις αντιμετωπίσετε. Δηλαδή δεν μ' ενδιαφέρει να μου πείτε αυτό είναι. Απλά να μου πείτε τι νομίζετε ότι αυτό είναι σωστό ή λάθος αλλά γιατί. Το γιατί μ' ενδιαφέρει. Εντάξει; Η ίδια δραστηριότητα είναι, απλά ρίξτε μια ματιά έτσι ένα λεπτάκι ο καθένας μόνος του.

[Διαβάζουν]

Κ.: Θέλετε να κυκλώσουμε κάτι;

Ε.: Ναι, ότι θέλετε.

[Το κορίτσι κυκλώνει και μετά από λίγο και το αγόρι.]

Ε.: Ωραία. Ποιός θέλει να μου πει; Τι πιστεύετε ότι είναι αυτή η γωνία;

Α.: Είναι μικρότερη από 90 μοίρες. Το κορίτσι συμφωνεί.

Ε.: Ωραία. Γιατί το λέτε αυτό;

Α.: Επειδή απέναντι από την ορθογώνια (εννοεί υποτείνουσα) και η υποτείνουσα πρέπει να είναι μικρότερη από 13 επειδή η κάθετη πλευρά από κάτω είναι 12.

Ε.: Εεε, εσύ;

Κ.: Εγώ σκέφτηκα ότι εφόσον έχουμε δίπλα ορθογώνιο τρίγωνο που είναι 90 μοίρες η κάθετη, η ορθή γωνία και έχουμε την υποτείνουσα 13, άρα εδώ εφόσον είναι οξεία γωνία σημαίνει θα είναι κάτω από 90 μοίρες άρα και η γωνία υποτείνουσα θα είναι μικρότερη από την αρχική, από τη 13 δηλαδή.

Ε.: Αυτό λες και εσύ;

Α.: Εεε ναι και μπορούμε ακόμα να κάνουμε μια πράξη που είναι 5 και 12 δεν θα βγει 13, είναι μικρότερη.

Ε.: Το θέμα είναι μου είπατε και οι δύο ότι είναι ορθογώνιο το τρίγωνο, το αριστερό. Πώς το ξέρετε;

[Γέλια.]

Ε.: Γιατί το είπατε; Αυτό θέλω να καταλάβω.

Κ.: Γιατί μπορούμε να το κάνουμε και με την πράξη. Αν δηλαδή πάρουμε την υποτείνουσα και την υψώσουμε στη δευτέρα, θα μας βγάλει, είναι ίση με το άθροισμα των δύο τετραγώνων.

Ε.: Όταν είπατε πριν ότι είναι ορθογώνιο, είχατε κάνει την πράξη ή επειδή το είδατε ας πούμε ορθογώνιο, είπατε θα είναι εντάξει, οπότε συνεχίζω.

Κ.: Έχουμε κάνει αυτό το παράδειγμα στο μάθημα.

Ε.: Α! οπότε ξέρετε.

Α.: Ναι

Ε.: Μάλιστα. Ωραία. Αυτό για αυτή τη δραστηριότητα, πάμε τώρα στην επόμενη. Δώστε τα μου τα χαρτιά. Πάλι από ένα φύλλο.

[Διαβάζουν. Προβληματίζονται.]

Ε.: Τι σκέφτεστε;

Κ.: Να σας πω εγώ τι σκέφτομαι. Εεε. Εγώ σκέφτομαι ένα προς το παρόν πράγμα από εδώ που έχετε βάλει. Ότι είναι οξεία η γωνία. Τώρα θα το δω.

Ε.: Εσύ;

Α.: Το ίδιο μάλλον επειδή η υποτείνουσα 6 δεν μπορεί να είναι

Κ.: ορθή ούτε αμβλεία.

Ε.: Ωραία. Πείτε μου ξανά, πες μου το σκεπτικό σου και μετά μου λες κι εσύ ξανά για να το καταλάβω. Επιλέξατε την πρώτη επιλογή ότι η Β είναι οξεία, με ποιό σκεπτικό;

Α.: Επειδή η πλευρά που είναι από κάτω από ύψος είναι μεγαλύτερη από την υποτείνουσα γι αυτό μάλλον το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο και η Β είναι οξεία.

Ε.: Αν κατάλαβα καλά. Λες, δεν είναι ορθογώνιο τελικά το τρίγωνο παρόλο που μοιάζει, αυτό λέμε; και άρα θα είναι οξεία. Εσύ; [στο κορίτσι]

Κ.: Συμφωνώ.

Ε.: Τι ίδιο επιχείρημα. έτσι;

Κ.: Ναι.

Ε.: Ωραία. Αν σας έλεγα δίνεται ένα τρίγωνο με πλευρές 6,8 και 10, να δείτε αν είναι ορθογώνιο, τί θα λέγατε;

Κ.: Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις.

Α.: Ναι, μπορούμε να βάλουμε αριθμούς

Κ.: Να σας πω. Κατ' αρχήν μπορούμε να ονομάσουμε 6 τη μία

Ε.: Όχι σ' αυτό σε άλλο τρίγωνο.

Κ.: Ναι, όχι γιατί το έχω μπροστά μου. Τη μία πλευρά, την άλλη 8 και την υποτείνουσα 10, οπότε εκεί μάλλον θα βγει ορθογώνιο το τρίγωνο. Άλλη περίπτωση είναι να πούμε 8 τη μία κάθετη, εεε, όχι συγνώμη, 10 την άλλη πλευρά και 6. Εκεί δεν θα βγει ορθογώνιο. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις γι το τρίγωνο.

Α.: Εεε το ίδιο επειδή η υποτείνουσα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη από τις άλλες 10 πρέπει να είναι..

Ε.: Ναι! Σας φαίνεται αυτό το σχήμα, σας ενόχλησε καθόλου έτσι όπως είναι ή δεν έχετε πρόβλημα μ' αυτό το σχήμα;

Α.: Εγώ όταν είδα αριθμούς δεν πίστευα ότι είναι έτσι.

Κ.: Εγώ κοιτάω πάντα όταν συναντάω σε μια άσκηση ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πρώτη μου σκέψη είναι δεν κοιτάω τους αριθμούς κοιτάω το ορθογώνιο. Αλλά μετά αν κοιτάξεις και τους αριθμούς και κάνεις τις πράξεις μπορεί και να μην βγει αυτό που έχει εδώ πέρα.

Ε.: Ωραία. Άρα τελικά αυτό το τρίγωνο το ΑΒΓ, τι λέτε είναι ορθογώνιο ή δεν είναι ορθογώνιο;

Α.: Δεν είναι [συμφωνούν και οι δύο]

Ε.: Άμα ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα σ' ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή όχι, τί λέτε;

Κ.: Είναι ορθογώνιο.

Ε.: Εσύ; [στο αγόρι]

Α.: Ναι

Ε.: Σ' αυτό ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα;

Κ.: Όχι!

Α.: Όχι.

Ε.: Ωραία. Πάει και αυτό, οπότε πάμε στην τελευταία δραστηριότητα.

Κ.: Ελπίζω να μην σας σοκάραμε!

Ε.: Λοιπόν, παίρνετε δύο βέργες, αυτή που είναι 9 και αυτή που είναι 12. Θυμάστε τι εννοούμε 12; Βρείτε και την 9. Ωραία. Έχετε λοιπόν τις βέργες 9 και 12 και σας λέει κάποιος: αν αυτές είναι πλευρές, κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, ποιά βέργα θα χρειαζόμαστε για να κάνουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο από τις υπόλοιπες που υπάρχουν εκεί;

[Το κορίτσι διαλέγει τη 15, την τοποθετεί και περιμένει.]

Ε.: Πώς τη διάλεξες;

Κ.: Εε σκέφτηκα , κάτσε γιατί δεν τη μέτρησα κιόλας. Να σας πω την αλήθεια. Την πρώτη φορά την είδα λίγο με το μάτι και την υπολόγισα. Αλλά .. υπέθεσα ότι θα είναι μεγαλύτερη από αυτές τις δύο, την είδα και τη διάλεξα.

Ε.: Εσύ;

Α.: Εγώ λίγο δεν πρόλαβα, αλλά ναι το ίδιο, επειδή πρέπει να είναι η μεγαλύτερη και μπορούμε να βρούμε από μεγαλύτερο.

Ε.: Και γιατί να είναι αυτή και όχι μια άλλη μεγαλύτερη;

Κ.: Γιατί αν πάρουμε μία άλλη μεγαλύτερη μπορεί να βγει κιόλας έξω, το τρίγωνό μας να γίνει αμβλυγώνιο, δε θα είναι ίσο για να βγει ορθογώνιο.

Ε.: Αυτό το τρίγωνο που φτιάξατε εδώ, είμαστε σίγουροι ότι είναι ορθογώνιο;

Α.: Επειδή οι πλευρές ταιριάζουν ακριβώς. Εδώ είναι 90 μοίρες κι αυτό είναι ...

Ε.: Αν για παράδειγμα τα μετράγαμε πόσα κομμάτια είναι η καθεμία, είναι 9, 12 κι αυτή η τρίτη που βάλατε, πόσα κομμάτια είναι;

Α.: 14 πρέπει να είναι.

Κ.: 15

Ε.: 15! Για να είναι ορθογώνιο τρίγωνο τι θα έπρεπε να ισχύει;

Α.: Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή 15 στο τετράγωνο, 9 στο τετράγωνο και 12 στο τετράγωνο.

Ε.: Το χρειάζεστε αυτό για να πείτε ότι είναι ορθογώνιο, ή είστε σίγουρο ότι είναι ορθογώνιο χωρίς να κάνετε το πυθαγόρειο θεώρημα.

Κ.: Το χρειαζόμαστε [συμφωνεί και το αγόρι]

Κ.: Για να σιγουρευτούμε.

Ε.: Πριν δεν το ζητήσατε όμως, ήσασταν σίγουροι.

Κ.: Ναι, εντάξει.

Ε.: Ωραία. Λοιπόν και η τελευταία δραστηριότητα πάλι με τις βέργες. Έχετε τις βέργες που είναι 3, 6 και 7.Με αυτές τις 3 βέργες μπορείτε να φτιάξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο;

[Το κορίτσι δίνει τα ξυλάκια στο αγόρι. Το αγόρι δημιουργεί την ορθή γωνία, βάζει το μεγαλύτερο ξυλάκι στη θέση της υποτείνουσας αλλά περισσεύει.]

Ε.: Είναι ορθογώνιο τρίγωνο αυτό;

Α.: Άμα θα κάνουμε πράξεις, θα ξέρουμε πιο σωστά.

Ε.: Τί λες;

Κ.: Μάλλον

Ε.: Ωραία. Πώς μπορείτε να το ελέγξετε αν είναι ορθογώνιο τρίγωνο σίγουρα;

Κ.: Θα κάνουμε το πυθαγόρειο

Ε.: Και;

Κ.: τις πλευρές

Ε.: Είναι;

Α.: Είναι 7, 6 και 3. 9, 6 τετράγωνο... ναι! όχι!

Α.: Δεν είναι.

Ε.: Τελικά είναι ή δεν είναι;

Α.: Όχι. Είναι 49 και 36 και 9.

Ε.: Δηλαδή παρόλο που το βλέπετε ότι είναι, λέτε δεν είναι;

Α.: Ναι.

Ε.: Ωραία. αυτό! τέλος, ευχαριστώ πολύ.

Κ.: Κι εμείς ευχαριστούμε.

5η ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ (ΟΜΑΔΑ Β - τμήμα ελέγχου)

Ερευνητής: Λοιπόν κάποια εισαγωγικά. Θυμάστε πώς έγινε η διδασκαλία του Πυθαγορείου στην τάξη;

Αγόρι: ναι πώς μας έκανε μάθημα;

Ε.: δηλαδή πώς ξεκίνησε θυμάστε;

Α.: μας είπε κάτι από το βιβλίο και μας το εξήγησε.

Κορίτσι: μας είπε κατ' αρχήν γιατί λέγεται πυθαγόρειο και μετά άρχισε να μας το εξηγεί με βάση το βιβλίο πιο πολύ.

Ε.: όπως ήτανε στη σειρά του βιβλίου δηλαδή, έτσι;

Κ.: ναι

Ε.: Ωραία, εγώ τώρα θα σας δώσω από μία δραστηριότητα, υπενθυμίζω ότι δεν μ' ενδιαφέρει αν είναι σωστό ή λάθος αλλά μ' ενδιαφέρει πάρα πολύ να μου λέτε τί σκέφτεστε για να την απαντήσετε την ερώτηση. εντάξει; Είναι το ίδιο πράγμα και για τους δύο, ρίξτε μια ματιά και μετά μου λέτε τι σκέφτεστε. Άμα θέλετε να γράψετε κάτι το χαρτί δικό σας είναι.

Κ.: πρέπει να βρούμε τη σωστή απάντηση;

Ε.: ναι, να επιλέξετε κάτι, όποιο νομίζετε εσείς αλλά εμένα με ενδιαφέρει να μου λέτε πώς το σκέφτεστε έτσι;

Κ.: να ρωτήσω κάτι;

Ε.: ναι

Κ.: η ΛΜ είναι υποτείνουσα;

Ε.: Η γωνία Κ τί γωνία είναι;

Κ.: οξεία

Ε.: άρα τί λέτε; είναι υποτείνουσα;

Κ.: όχι

Ε.: εσύ; Γιατί το ρώτησες αν είναι υποτείνουσα;

Κ.: γιατί η υποτείνουσα είναι πάντα μεγαλύτερη από τις άλλες

Α.: ναι, οπότε είναι υποτείνουσα;

Ε.: Για να είναι υποτείνουσα τί τρίγωνο πρέπει να είναι;

Κ.: ορθογώνιο;

Ε.: Είναι ορθογώνιο αυτό το τρίγωνο;

Κ.: όχι

Ε.: τί σκέφτεστε;

Α.: ότι άμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η υποτείνουσα είναι 13, αυτό λογικά θα είναι μικρότερο από το 13.

Ε.: Λογικά πώς το σκέφτηκες; Γιατί το λες;

Α.: επειδή αυτή εδώ είναι οξεία και η άλλη είναι 180

Ε.: έχεις κάποια εικόνα στο μυαλό σου, έχεις κάποιο σχήμα ή το ξέρεις ότι..

Α.: όχι έτσι όπως το βλέπω

Ε.: μμμ, άρα λες η απάντηση είναι;

Α.: μικρότερη από 13

Ε.: εσύ τι λες, συμφωνείς, διαφωνείς; σκέφτεσαι κάτι άλλο;

Κ.: αφού η ΛΚ είναι 5, είναι όπως αυτό και η 12 είναι όπως αυτό έ; Νομίζω είναι ίση.

Ε.: Γιατί;

Κ.: γιατί έτσι είναι και στο πρώτο.

Ε.: μμμ! εσύ λες όχι

Α.: ναι

Ε.: τι λες γι αυτό που λέει ο συμμαθητής σου; Λέει ότι είναι ορθή η αριστερή γωνία, εδώ είναι οξεία,

Κ.: άρα είναι μικρότερη

Ε.: ναι

Κ.: σωστό μου ακούγεται και αυτό, ναι , ίσως είναι μικρότερη.

Ε.: Τι θα απαντούσες τελικά; Στην αρχή από ότι κατάλαβα θα απαντούσες ίση.

Κ.: μμμ ναι

Ε.: εσύ δεν αλλάζεις γνώμη;

Α.: όχι

Ε.: εσύ;

Κ.: μικρότερη

Ε.: μικρότερη; το αλλάζεις δηλαδή την απόφασή σου; σε έπεισε;

Κ.: ναι

Ε.: μάλιστα, ωραία, μου δίνετε αυτό, να σας δώσω το επόμενο, δείτε και αυτό το τρίγωνο.

Κ.: είναι το β. Γιατί είναι ορθογώνιο τρίγωνο

Α.: ναι κι εγώ αυτό λέω

Κ.: άρα η Β είναι ορθή.

Ε.: Γιατί είναι ορθογώνιο το τρίγωνο;

Κ.: γιατί η Β είναι ορθή;

Ε.: ναι εννοώ πού το ξέρουμε; το βλέπουμε από το σχήμα, το ....

Κ.: από το σχήμα το καταλαβαίνουμε, αλλά και άμα κάνω το πυθαγόρειο δηλαδή

Α.: 8^2επί10^2=6

Κ.: αφού η υποτείνουσα είναι πάντα η μεγαλύτερη, αυτό γιατί είναι 10;

Ε.: Μμμμ

Κ.: είναι 10 αυτό!

Ε.: άρα;

Α.: δεν έχει σημασία η υποτείνουσα

Κ.: όχι η υποτείνουσα

Α.: η Β να΄ ναι ορθή

Κ.: ναι αλλά η Β μπορεί να μην είναι ορθή άμα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.

[το αγόρι κάτι δείχνει]

Ε.: Τί εννοείς με αυτό που έκανες;

Α.: δηλαδή δεν έχει σημασία πόσο θα είναι η 10, 10 να' ναι, 2 να' ναι , άμα είναι η Β ορθή όλο το τρίγωνο

Ε.: εσύ τι λες;

Α.: εγώ λέω ότι είναι ορθή και κυκλώνει την απάντηση

Ε.: από το σχήμα;

Α.: ναι

Ε.: εσύ;

Κ.: ναι κι εγώ αυτό αλλά είναι περίεργο γιατί αυτή είναι 6, η υποτείνουσα πιστεύω έπρεπε να είναι πάνω από 10.

Ε.: Και τώρα τι γίνεται;

Κ.: ίσως πρέπει να κάνουμε $6^2=10^2+8^2$ και άμα μας βγούνε ίδια τότε σημαίνει ότι είναι ορθογώνιο αλλά έτσι όπως το βλέπω δεν θα βγούνε.

Ε.: Δεν είναι, το ένα είναι 36 και το άλλο κάνει 164, το 8^2+10^2.

Α.: οπότε δεν είναι ορθή

Κ.: οπότε δεν είναι ορθογώνιο

Ε.: εσύ τι λες; το αλλάζεις τώρα;

Α.: για να είναι η μια 100, πόσο είπατε 116; το 8^2 με 10^2, 8^2 κάνει 64, 10^2 κάνει 100, 100 και 64 κάνει 164. Το άλλο είναι 6^2 36.

Κ.: άρα δεν είναι ορθογώνιο, είναι αμβλεία;

Α.: ναι και εγώ αυτό σκεφτόμουνα, άμα είναι μεγαλύτερες αυτές οι δύο

Κ.: ναι, ίσως είναι αμβλεία

Α.: εγώ βάζω αμβλεία και εντάξει, δεν αλλάζω

Ε.: με το σκεπτικό ότι...επειδή είναι μεγαλύτερες πλευρές;

Α.: ναι

Κ.: ναι

Ε.: αυτό;

Κ.: και ότι δεν είναι ορθογώνιο, δεν πρέπει να είναι έτσι κι αλλιώς

Ε.: ωραία, δώστε τα μου αυτά, λοιπόν μπροστά σας έχετε κάποια ξυλάκια, που είναι χωρισμένα σε κομματάκια άσπρο μαύρο, ωραία; Σας λένε τώρα βρείτε κάποια ξυλάκια τα οποία να είναι 9 και 12 κομμάτια. Βρείτε τα αυτά...

Ε.: Βρήκες το 12 και το 9, ωραία! Λοιπόν αυτές σου λένε ότι είναι οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Βάλτε τες κάθετες πλευρές, κάτω στο τραπέζι, ωραία. Θέλετε τώρα, να βρείτε ένα τρίτο ξυλάκι που να κλείνει το ορθογώνιο τρίγωνο δηλαδή να βρείτε την υποτείνουσα. Τί θα κάνετε; πώς το σκέφτεστε;

Κ.: κατ' αρχήν να είναι μεγάλο για να είναι ορθογώνιο

Α.: το ένα 9 το άλλο 12, εγώ πιστεύω είναι το 14 μέχρι και μεγαλύτερο

Ε.: Πώς το λες το πιστεύω; πώς το σκέφτεσαι;

Α.: επειδή δεν μπορεί να είναι ας πούμε, 10 ή 11

Κ.: ίσως πρέπει να κάνουμε χ στο τετράγωνο άμα ήτανε σα χαρτί, = 9^2+12^2 και θα το βρίσκαμε.

Ε.: Ααα! Ποιά είναι αυτή τώρα που βρήκατε, πόσο είναι;

[μετράνε] 15 και οι δύο μαζί.

Ε.: 15. άρα αυτή η πλευρά τώρα είναι

Α.: αυτή είναι 14 είπαμε;

Ε.: 12

Α.: 12^2

Ε.: 144

Α.: 9^2, ίσον 81. 144 και 81

Ε.: 225 κάνουν και τα δύο

Α.: και 15^2

Ε.: 225

Α.: ναι οπότε αυτό είναι

Ε.: Είστε σίγουροι ότι...

Α.: σίγουροι, σίγουροι

Ε.: 100% έτσι; Ωραία δεν το χρειαζόμαστε πια αυτό το τρίγωνο, Μετά σας λένε, έστω ότι παίρνετε τα ξυλάκια που έχουν 3, 6 και 7 κομμάτια. Λοιπόν μ' αυτά τα τρία ξυλάκια πώς θα φτιάξετε, συγνώμη μπορείτε να φτιάξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο;

Πώς τα βάζετε, με ποιό τρόπο;

Κ.: ε! το μεγαλύτερο να είναι η υποτείνουσα

[δεν βγαίνει οπότε το αγόρι αλλάζει τα ξυλάκια]

Κ.: όχι έτσι αυτό πρέπει να είναι

Ε.: Γιατί;

Κ.: γιατί είναι το μεγαλύτερο

Α.: ναι αλλά δεν χωράει

Κ.: δεν είναι ακριβώς, γιατί αυτό είναι μικρό.

Α.: πειράζει να μη βγαίνει ακριβώς;

Ε.: Δεν ξέρω εγώ θέλω να μου πείτε αν μπορούν αυτά τα κομμάτια να κάνουν ορθογώνιο τρίγωνο. Πειράζει λέτε;

Κ.: μμμ όχι, πολύ λίγο

Α.: μια χαρά είναι

Κ.: ναι δεν πρέπει να είναι ορθογώνιο

Ε.: Εσύ λες μια χαρά, εσύ λες δεν πρέπει να είναι, τελικά τι ισχύει είναι ή δεν είναι ορθογώνιο τρίγωνο;

Α.: εγώ πιστεύω ότι είναι

Κ.: ναι

Ε.: Σίγουρα; Τελική απόφαση είναι αυτή;

Α.: 3, 6 και 7

Ε.: Ναι 3, 6, 7

Α.: λοιπόν, 6^2 36, $3 \cdot 3$ 9

Ε.: Εσύ τι σκέφτεσαι;

Κ.: αυτό που σκέφτεται

Ε.: 41 δεν είναι 7·7, 49

Α.: 49 και αυτό πόσο βγαίνει; 36 και όχι μισό μπερδεύτηκα τώρα. Λοιπόν είπαμε 7

Ε.: 49 κάνει αυτό

Α.: 49 είπαμε, 6·6 36 και 9

Κ.: 45 νομίζω κάνει

Ε.: Ναι 45

Α.: 49 όχι δεν είναι

Κ.: ναι

Ε.: Δεν είναι τελικά. άρα τελική απόφαση;

Κ.: δεν είναι

Ε.: Υπάρχει περίπτωση κάποιος να καταφέρει να φτιάξει ορθογώνιο τρίγωνο μ'

αυτά;

Α.: όχι

Κ.: άμα δεν έχουνε το ίδιο....

Ε.: με τίποτα;

Κ.: άμα δεν έχουν το ίδιο άθροισμα, το τετράγωνο δεν γίνεται

Ε.: ωραία, αυτό τελειώσαμε.