ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
& ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ιωάννης Ι. Πρίντεζης

Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΑΠΟΨΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ VAN HIELE ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΟΙΚΟΥΜΕΝΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπων : Αναπλ. Καθηγητής Ιωάννης Αραχωβίτης

Αθήνα 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……. από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ιωάννη Αραχωβίτη (επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητής	…….
2) Ευστάθιο Βασιλείου	Αναπλ. Καθηγητής	…….
3) Λεώνη Ευαγγελάτου – Δάλλα	Αναπλ. Καθηγήτρια	…….

Ευχαριστώ

- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Ιωάννη Αραχωβίτη που με εμπιστεύτηκε, μου πρότεινε το θέμα της διπλωματικής και με καθοδήγησε αποτελεσματικά κατά την εκπόνησή της.

- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Ευστάθιο Βασιλείου για το ενδιαφέρον που έδειξε και τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί του.

- Την αναπληρώτρια καθηγήτρια κα Λεώνη Ευαγγελλάτου – Δάλλα για το ενδιαφέρον που έδειξε και τις λεπτομερείς υποδείξεις της για τη σύνταξη της διπλωματικής.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη ……..… 7

Abstract ……..... 8

Κεφάλαιο 1 : Η θεωρία των Van Hiele ……..…….…….. 9

1.1 Τα επίπεδα κατανόησης …….……..... 10

1.2 Οι φάσεις της μάθησης ……..……... 14

1.3 Η ενόραση ……...……..... 17

1.4 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στη Σοβιετική Ένωση ….. 18

1.5 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στις Ηνωμένες Πολιτείες . 19

1.6 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στην Ελλάδα ……... 22

1.7 Μερικά αποτελέσματα των ερευνών ……... 25

Κεφάλαιο 2 : Η κατηγορική άποψη ……... 35

2.1 Τα επίπεδα κατανόησης σαν κατηγορίες ……..……... 35

2.2 Τα επίπεδα κατανόησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών . 40

2.2.1 Επίπεδο 0 ……..……..……...…… 41

2.2.2 Επίπεδο 1 ……...…….. 48

2.2.3 Επίπεδο 2 ……..……..……. 52

2.2.4 Επίπεδο 3 ……...…….……..... 55

2.2.5 Επίπεδο 4 ……. 58

2.2.51 Η γεωμετρία της χελώνας …….. 59

2.2.52 Οι συγγραμμικότητες της προβολικής γεωμετρίας … 61

Κεφάλαιο 3 : Η ιεραρχική άποψη ……..….. 65

3.1 Η γεωμετρία στο Γυμνάσιο ……..……..... 66

3.2 Η γεωμετρία στο Λύκειο ……..……..... 68

3.3 Μια άλλη διδακτική πρόταση ……...……..….. 70

Κεφάλαιο 4 : Το χαοτικό δυναμικό μοντέλο λυτικής προβλήματος . 73

4.1 Fractals και χάος ……... 73

4.2 Οι διανοητικές διαδικασίες ……...… 76

4.3 Το Μοντέλο της Δυναμικής Λυτικής Προβλήματος …… 79

Επίλογος ……...….. 83

Παράρτημα Ι : Η θεωρία κατηγοριών ……..... 85

Παράρτημα ΙΙ : Η ιεραρχία …….……..… 90

Παράρτημα ΙΙΙ : Οι γεωμετρίες Klein …….……..... 95

Παράρτημα IV : Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert …….. 96

Παράρτημα V : Η προοπτική στη ζωγραφική …….. 100

Ευρετήριο …….…… 105

Βιβλιογραφία ……... 107

Περίληψη

Στα τέλη της δεκαετίας του 50 οι Van Hiele διατύπωσαν τη θεωρία των πέντε επιπέδων κατανόησης για τη γεωμετρία. Η θεωρία συνοδευόταν από άλλα δύο μέρη. Τα μέρη αυτά ήταν η ανάγκη για ενόραση και οι φάσεις της μάθησης, με τη βοήθεια των οποίων ο μαθητής μπορεί να περάσει από ένα επίπεδο στο επόμενο. Η θεωρία έγινε γρήγορα γνωστή στην πρώην Σοβιετική Ένωση και στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής και μια πληθώρα ερευνών απέδειξαν όχι μόνο την ισχύ της αλλά και τα πολυάριθμα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Παρόμοιες έρευνες έχουν γίνει και στην Ελλάδα.

Τα επίπεδα Van Hiele δεν έχουν εφαρμογή μόνο στη γεωμετρία. Αν τα δούμε σαν κατηγορίες, μπορούμε να τα εφαρμόσουμε σε οποιοδήποτε κλάδο των Μαθηματικών. Αποτελούν συνεπώς μια μέθοδο οικουμενικής προσέγγισης των Μαθηματικών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών πάνω στους οποίους στηρίζεται ο ορισμός της γεωμετρίας κατά Klein.

Μπορούμε επίσης να δούμε τα επίπεδα Van Hiele σαν ιεραρχία και να τα χρησιμοποιήσουμε για να διαρθρώσουμε τη αναλυτικό πρόγραμμα είτε της γεωμετρίας είτε οποιουδήποτε άλλου αντικειμένου. Η ιεραρχική άποψη είναι επίσης μια οικουμενική προσέγγιση των Μαθηματικών.

Τέλος μια τρίτη οικουμενική μέθοδος είναι το χαοτικό μοντέλο λυτικής προβλήματος, που προτείνει ο Torre, και μας βοηθάει να κατανοήσουμε τον τρόπο λειτουργίας του εγκεφάλου όταν προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα είτε αυτό αφορά τα μαθηματικά είτε όχι.

Η γνώση αυτών των οικουμενικών μεθόδων είναι πολύ σημαντική για το σχεδιασμό οποιασδήποτε διδασκαλίας.

Abstract

At the end of the 50's Van Hieles formulated the theory of the five levels of understanding for geometry. This theory had also two other parts. These parts were the need for insight and the five phases of learning that would help the students to pass from one level to the next. The theory was soon spread in the former Soviet Union and the United States of America and numerous researches confirmed not only its validity but also the problems that appear in the teaching of geometry. Similar researches took place in Greece.

The Van Hiele's levels do not apply only in geometry. If we see them as categories, we can adapt them in any branch of Mathematics. Therefore they constitute a universal method of approach for Mathematics. The understanding of geometric transformations upon which is based Klein's definition of geometry, is a characteristic example.

We can also see the Van Hiele's levels as a classification (hierarchy) and use them to construct the curriculum either of geometry, or of any other discipline. This perspective is also a universal approach of Mathematics.

A third universal approach is Torre's chaotic model of problem solving that helps us to understand the way in which human brain operates when we try to solve a problem either in mathematics, or in any other domain.

The knowledge of these universal methods is very important for the planning of any teaching.

Κεφάλαιο 1

Η θεωρία των Van Hiele

Στα τέλη της δεκαετίας του 50 στην Ολλανδία οι Pierre Van Hiele και η σύζυγός του Dina Van Hiele-Geldof, καθηγητές στη μέση εκπαίδευση, προβληματίζονταν με τις δυσκολίες των μαθητών τους στην γεωμετρία. Μελετώντας τις εργασίες του Piaget ο Pierre Van Hiele συνειδητοποίησε ότι, όπως ακριβώς συμβαίνει με τα γνωστικά στάδια του Piaget, τα προβλήματα ή οι εργασίες που ζητούνται από τους μαθητές απαιτούν λεξιλόγιο ή ιδιότητες που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο της σκέψης τους.

Αν η διδασκαλία λαμβάνει χώρα σε επίπεδο πάνω από αυτό του μαθητή, τότε η διδασκόμενη ύλη δεν αφομοιώνεται σωστά και δεν συγκρατείται μακροπρόθεσμα. Όπως είπε και ο Freudental όσο το παιδί δεν μπορεί να αναλογιστεί πάνω στις ίδιες του τις δραστηριότητες, δεν μπορεί να φτάσει στο επόμενο επίπεδο. Το ανώτερο αυτό επίπεδο μπορεί τότε να διδαχθεί μόνο σαν τυπικός αλγόριθμος αλλά χωρίς πραγματική κατανόηση δεν μπορεί να κατακτηθεί μόνιμα.

Η ίδια ιδέα εμφανίζεται και στο έργο του σοβιετικού Vygotsky με τη **Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης** (ΖΕΑ). Η ΖΕΑ είναι η απόσταση ανάμεσα σε αυτά που ο μαθητής είναι ικανός να καταφέρει μόνος του χωρίς καμία εξωτερική βοήθεια, από αυτά που μπορεί να εκτελέσει με τη βοήθεια ενός ενηλίκου ή μιας ομάδας συνομηλίκων του. Καθήκον του δασκάλου είναι να βοηθήσει το μαθητή να διασχίσει τη ΖΕΑ έτσι ώστε να μπορεί να κάνει μόνος του αυτά για τα οποία προηγουμένως χρειαζόταν κάποια βοήθεια. Με τον τρόπο αυτό διευρύνεται η κατακτημένη γνώση και γύρω από αυτήν σχηματίζεται μια καινούργια ΖΕΑ η οποία με τη σειρά της πρέπει να ξεπεραστεί. Αν η διδασκαλία γίνεται εκτός της ΖΕΑ, τότε ο μαθητής δεν έχει

καμία επαφή με αυτήν, νιώθει αποκομμένος και αποθαρρύνεται από οποιαδήποτε προσπάθεια βελτίωσης.

Οι Van Hiele δεν διατύπωσαν μόνο τα γνωστά πέντε επίπεδα κατανόησης στα οποία θα αναφερθούμε αναλυτικά παρακάτω. Αυτή είναι μία από τις τρεις συνιστώσες του μοντέλου των Van Hiele. Οι άλλες δύο είναι οι φάσεις της μάθησης και η ενόραση.

Στις συναφείς διδακτορικές τους εργασίες στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το 1957, οι Van Hiele μελέτησαν τη δομή των επιπέδων κατανόησης και πειραματίστηκαν με αυτά για να βελτιώσουν την ενόραση των μαθητών στη γεωμετρία. Ο P. Van Hiele διαμόρφωσε το σχήμα και τις ψυχολογικές αρχές ενώ η D. Van Hiele-Geldof εστίασε τη δουλειά της στα διδακτικά πειράματα για να ανυψώσει το επίπεδο κατανόησης των μαθητών. Περίπου το ήμισυ της διδακτορικής θέσης της D. Van Hiele-Geldof αποτελείται από το λεπτομερές και εξαιρετικά ενδιαφέρον ημερολόγιο των διδακτικών πειραμάτων της.

1.1 Τα επίπεδα κατανόησης

Ο P. Van Hiele (1959) κατέληξε στη διατύπωση των πέντε επιπέδων κατανόησης και των φάσεων της μάθησης, που τράβηξαν αμέσως τη προσοχή της παγκόσμιας επιστημονικής κοινότητας. Τα επίπεδα αυτά όσον αφορά τη σχολική γεωμετρία είναι τα εξής :

- ***Επίπεδο 0 :***

  Οι μαθητές αναγνωρίζουν σχήματα από τη συνολική μορφή τους, σαν μια ολότητα. Μπορούν να τα κατονομάσουν π.χ. ως *τρίγωνα, τετράγωνα* ή *κύβους* αλλά δεν μπορούν να διατυπώσουν τις ιδιότητές τους. Για την περιγραφή τους χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα π.χ. ένα σχήμα είναι ορθογώνιο όταν μοιάζει με πόρτα κ.λ.π.

- ***Επίπεδο 1 :***

  Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν ένα σχήμα από τις ιδιότητές του π.χ. ένα σχήμα είναι ορθογώνιο γιατί έχει τέσσερις ορθές γωνίες. Μπορούν επίσης να αναφέρουν άλλες ιδιότητες των σχημάτων π.χ. «τα ορθογώνια έχουν ίσες διαγώνιες» ή «ένας ρόμβος έχει τις διαγώνιες κάθετες» αλλά δεν μπορούν να τα ορίσουν τυπικά ή να αποδείξουν τις ιδιότητες.

- ***Επίπεδο 2 :***

  Οι μαθητές συνδέουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους και τα ταξινομούν σε κατηγορίες π.χ. «κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο». Αρχίζουν να κατανοούν το ρόλο του ορισμού. Μπορούν να κάνουν απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν ή να συνθέσουν πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών τους.

- ***Επίπεδο 3 :***

  Οι μαθητές αναπτύσσουν συλλογισμούς για να αποδείξουν μια πρόταση χρησιμοποιώντας δεδομένα π.χ. πώς το αξίωμα της παραλληλίας συνεπάγεται ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180°. Δεν αναγνωρίζουν όμως την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη και δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων αξιωματικών συστημάτων. Στο Λύκειο η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινάει από αυτό το επίπεδο.

- ***Επίπεδο 4 :***

  Οι μαθητές είναι σε θέση να αναλύσουν διάφορα αξιωματικά συστήματα με μεγάλη αυστηρότητα συγκρίσιμη με την προσέγγιση του Hilbert στη θεμελίωση της γεωμετρίας. Γνωρίζουν την ύπαρξη και άλλων αξιωματικών θεμελιώσεων για την Ευκλείδεια Γεωμετρία εκτός από αυτή του Hilbert. Κατανοούν ιδιότητες όπως η συνέπεια, η ανεξαρτησία και η πληρότητα των αξιωμάτων. Μπορούν για παράδειγμα να συγκρίνουν την Ευκλείδεια και τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Μία μειοψηφία μαθητών φτάνει στο επίπεδο αυτό κατά τη

διάρκεια της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι περισσότεροι δεν φτάνουν ποτέ.

Συνοπτικός πίνακας των επιπέδων κατανόησης	
Επίπεδο 0	Αναγνώριση ή Οπτικοποίηση
Επίπεδο 1	Περιγραφή ή Ανάλυση ιδιοτήτων
Επίπεδο 2	Σύνδεση ή Άτυπη παραγωγή
Επίπεδο 3	Απόδειξη ή Τυπική παραγωγή
Επίπεδο 4	Αυστηρότητα ή Αξιωματικοποίηση

Ας δούμε πώς διαμορφώνεται σταδιακά στο νου του μαθητή η έννοια του ρόμβου ανάλογα με το επίπεδο που βρίσκεται. Στο επίπεδο 0 (τρίτη ή τετάρτη Δημοτικού) η έκφραση «αυτό το σχήμα είναι ρόμβος» σημαίνει «μου θυμίζει το σχήμα που το βιβλίο ονομάζει ρόμβο». Η αναγνώριση στηρίζεται σ΄ ένα οπτικό πρότυπο. Αυτό σημαίνει ότι αν αλλάξει ο προσανατολισμός μπορεί να μην είναι πια ρόμβος ή ότι ένα τετράγωνο αποκλείεται να είναι ρόμβος. Στο επίπεδο 1 (έκτη Δημοτικού) σημαίνει ότι έχει μια σειρά από ιδιότητες όπως πλευρές ίσες, διαγώνιες κάθετες κ.λ.π. Η αναγνώριση βασίζεται σ΄ ένα δίκτυο σχέσεων. Ακόμα και αν το σχήμα δεν είναι κατασκευασμένο με ακρίβεια, ο μαθητής μπορεί να αποφανθεί αν είναι ρόμβος ή όχι. Στο επίπεδο 2 (Β΄ Γυμνασίου) συνειδητοποιεί ότι το σχήμα είναι ρόμβος αν ικανοποιεί τον ορισμό (έχει τέσσερις πλευρές ίσες) και ότι οι ιδιότητές του είναι συνέπεια του γεγονότος ότι έχει άξονες συμμετρίας. Μπορεί επίσης να τον «ταξινομήσει» μέσα στο σύνολο των τετραπλεύρων. Στο επίπεδο 3 (Α’ Λυκείου) μπορεί με βάση τον ορισμό και άλλες γνωστές προτάσεις να αποδείξει πλήρως τις ιδιότητές του αλλά και να διατυπώσει κριτήρια ικανά να χαρακτηρίσουν ένα τετράπλευρο ως ρόμβο. Στο επίπεδο 4 (όπως αναφέραμε παραπάνω μάλλον θα είναι ήδη φοιτητής!) μπορεί να αναγνωρίσει αν ένα σχήμα είναι ρόμβος ή όχι σε άλλα αξιωματικά

συστήματα π.χ. αν υπάρχουν ρόμβοι στην επιφάνεια μιας σφαίρας (Van Hiele 1986).

Τα επίπεδα κατανόησης ενός συγκεκριμένου θέματος είναι εκ φύσεως επαγωγικά. Στο επίπεδο ν μελετώνται περιορισμένες εκδοχές των αντικειμένων. Κάποιες από τις μεταξύ τους σχέσεις διατυπώνονται κατηγορηματικά ενώ άλλες, αν και προσιτές, δεν εκφράζονται ρητά αλλά υπάρχουν σε λανθάνουσα κατάσταση. Στο επίπεδο ν+1 μελετώνται οι σχέσεις των αντικειμένων που είχαν διαπιστωθεί με σιγουριά στο επίπεδο ν ενώ διατυπώνονται ρητά αυτές που ήταν απλώς υπονοούμενες στο προηγούμενο επίπεδο. Στην πραγματικότητα τα αντικείμενα του επιπέδου ν+1 είναι προεκτάσεις των αντικειμένων του επιπέδου ν.

Δεν είναι δυνατόν να περάσει κανείς κατευθείαν από το επίπεδο ν στο επίπεδο ν+2 οποιαδήποτε εκπαίδευση και να λάβει. Το πέρασμα από όλα τα επίπεδα διαδοχικά είναι υποχρεωτικό. Εκείνο που μπορεί να μειωθεί είναι ο χρόνος της παραμονής σε κάθε επίπεδο. Ο κύριος τρόπος για να διακρίνει κανείς το επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές είναι να αναγνωρίζει τα γνωστικά εμπόδια που συναντούν. Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά. Αν ένας μαθητής που βρίσκεται στο επίπεδο ν συναντήσει ένα πρόβλημα που απαιτεί λεξιλόγιο, έννοιες και συλλογισμούς του επιπέδου ν+1, δεν μπορεί να προχωρήσει στην επεξεργασία του, με αποτέλεσμα να νιώθει άγχος, απογοήτευση ακόμα και θυμό. Η διδασκαλία λοιπόν πρέπει πάντα να είναι προσαρμοσμένη στο επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές και όχι σε αυτό που ο δάσκαλος νομίζει ή επιθυμεί να βρίσκονται.

Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν γίνεται αυτόματα με την πάροδο του χρόνου αλλά κάτω από την επίδραση συγκεκριμένου προγράμματος διδασκαλίας-μάθησης. Το επίπεδο λοιπόν που βρίσκεται ο καθένας δεν έχει άμεση σχέση με την ηλικία του (Κολέζα 2000)

1.2 Οι φάσεις της μάθησης

Για να βοηθήσει τους μαθητές να μεταπηδήσουν από ένα επίπεδο κατανόησης στο επόμενο μέσα σε ένα γνωστικό αντικείμενο, ο Van Hiele (1959) πρότεινε μία ακολουθία πέντε φάσεων για τη μάθηση, κατά κάποιο τρόπο μια συνταγή για τη διδασκαλία. Οι φάσεις αυτές της μάθησης εκτείνονται από πολύ συγκεκριμένες οδηγίες προς τους μαθητές μέχρι την πλήρη ανεξαρτησία τους από τον δάσκαλο και είναι οι εξής :

- ***Φάση 1 : Πληροφόρηση***

  Ο δάσκαλος συζητά (αμφίδρομα!) με τους μαθητές για το αντικείμενο της μελέτης, ανταλλάσσει δηλαδή πληροφορίες μαζί τους. Μαθαίνει πώς οι μαθητές ερμηνεύουν το σχετικό λεξιλόγιο και τους δίνει οδηγίες για το θέμα που θα μελετήσουν. Προκύπτουν ερωτήματα και γίνονται παρατηρήσεις που χρησιμοποιούν τη σχετική ορολογία και καθορίζουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα γίνει η μελέτη. Έτσι οι μαθητές εξοικειώνονται με το αντικείμενο.

- ***Φάση 2 : Καθοδηγούμενος προσανατολισμός.***

  Ο δάσκαλος οργανώνει προσεκτικά μια ακολουθία δραστηριοτήτων με την οποία οι μαθητές αρχίζουν να συνειδητοποιούν την κατεύθυνση που παίρνει η μελέτη και να εξοικειώνονται με τις σχετικές δομές. Πολλές από τις δραστηριότητες της φάσης αυτής είναι απλά βήματα που απαιτούν συγκεκριμένη απάντηση.

- ***Φάση 3 : Έκφραση-Ανάλυση***

  Οι μαθητές, βασιζόμενοι στις προηγούμενες εμπειρίες τους, με την ελάχιστη δυνατή παρακίνηση από το δάσκαλο, ξεκαθαρίζουν τη χρήση της ορολογίας και εκφράζουν τη γνώμη τους για τις δομές που υπεισέρχονται στη μελέτη. Οι μαθητές

κατά τη διάρκεια της φάσης αυτής αρχίζουν να διαμορφώνουν το σύστημα των σχέσεων ανάμεσα στις υπό μελέτη έννοιες. Από κάποιους συγγραφείς η φάση αυτή ονομάστηκε *επεξήγηση*. Είναι όμως βασικό οι μαθητές να κάνουν μόνοι τους παρατηρήσεις και όχι να δέχονται επεξηγήσεις από το δάσκαλο.

- ***Φάση 4 : Ελεύθερος προσανατολισμός.***

  Οι μαθητές τώρα συναντούν εργασίες με πολλά βήματα ή εργασίες που μπορούν να ολοκληρωθούν με περισσότερους από έναν τρόπους. Αποκτούν εμπειρία στο να βρίσκουν μόνοι τους τον τρόπο εκτέλεσης της εργασίας. Με το να προσανατολίζονται μόνοι τους στο πεδίο της έρευνας, αποσαφηνίζουν πολλές από τις σχέσεις μεταξύ των υπό μελέτη αντικειμένων.

- ***Φάση 5 : Αφομοίωση.***

  Οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις μεθόδους που έχουν τώρα στη διάθεσή τους και κάνουν μία σύνοψη. Τα αντικείμενα και οι σχέσεις συνενώνονται και ενσωματώνονται σε ένα γνωστικό σχήμα. Ο δάσκαλος βοηθάει αυτή τη διαδικασία παρέχοντας σφαιρικές απόψεις των γνώσεων που έχουν ήδη οι μαθητές, προσέχοντας να μην παρουσιάσει νέες ή άσχετες ιδέες.

Συνοπτικός πίνακας των φάσεων της μάθησης	
Φάση 1	Πληροφόρηση
Φάση 2	Καθοδηγούμενος προσανατολισμός
Φάση 3	Έκφραση-Ανάλυση
Φάση 4	Ελεύθερος προσανατολισμός
Φάση 5	Αφομοίωση

Για να περάσει ο μαθητής από το ένα επίπεδο στο άλλο πρέπει να παρακολουθήσει μία διδασκαλία που περνάει διαδοχικά από αυτές τις πέντε φάσεις. Ακολουθούν δύο παραδείγματα προτάσεων διδασκαλίας για την έννοια του ρόμβου.

Πρόταση 1

- Φάση 1 : Επιδεικνύονται διάφορα σχήματα στους μαθητές και ακολουθεί συζήτηση ποια είναι ρόμβοι και ποια όχι.
- Φάση 2 : Ο ρόμβος διπλώνεται για την ανακάλυψη των αξόνων συμμετρίας και γίνονται κάποιες παρατηρήσεις για τις διαγώνιες και τις γωνίες.
- Φάση 3 : Οι μαθητές διατυπώνουν ιδέες για τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του.
- Φάση 4 : Ζητείται από τους μαθητές η κατασκευή ενός ρόμβου από ορισμένα στοιχεία του.
- Φάση 5 : Οι ιδιότητες ανακεφαλαιώνονται και εντάσσεται λειτουργικά μέσα στην οικογένεια των υπολοίπων τετραπλεύρων ιδιαίτερα σε σχέση με τα υπόλοιπα είδη παραλληλογράμμων.

Πρόταση 2

- Φάση 1 : Σε ένα φύλλο τετραγωνισμένο χαρτί και με τη βοήθεια δίπλωσης υποδεικνύεται ο τρόπος εύρεσης του συμμετρικού Α΄ ενός σημείου Α ως προς ευθεία ε.
- Φάση 2 : Δίνονται στους μαθητές διάφορα σχήματα και τους ζητείται να βρουν τα συμμετρικά τους. Προκαλείται συζήτηση για το σχήμα που προκύπτει από την εύρεση του συμμετρικού ισοσκελούς τριγώνου ως προς τη βάση του.
- Φάση 3 : Συζητούνται διάφοροι τρόποι αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων με κριτήριο τους άξονες συμμετρίας τους. Οι μαθητές εξοικειώνονται με τις μεθόδους και το λεξιλόγιο.
- Φάση 4 : Δίνονται στους μαθητές ασκήσεις πάνω σε σχήματα με άξονα συμμετρίας π.χ. να συμπληρώσουν την τέταρτη κορυφή ισοσκελούς τραπεζίου. Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν μόνοι τους την κατάλληλη προσέγγιση.

– Φάση 5 : Ανακεφαλαίωση των ιδιοτήτων των σχημάτων με άξονα συμμετρίας, Εφαρμογή στο ρόμβο και τελική διατύπωση των ιδιοτήτων.

Οι φάσεις της διδασκαλίας κατά Van Hiele μπορούν να συγκριθούν με την *αρχή των διαδοχικών φάσεων* του Polya που αποτελείται από την εξερεύνηση, την τυποποίηση και την αφομοίωση. Μπορούν επίσης να συγκριθούν με τους *κύκλους μάθησης* του Dienes. Κοινό στοιχείο όλων αυτών των προσεγγίσεων είναι ο συνεχής τρόπος με τον οποίο οι ιδέες γεννιούνται, ξεκαθαρίζονται και επεκτείνονται.

1.3 Η ενόραση

Οι Van Hiele θεωρούσαν πολύ σημαντική την ανάπτυξη της ενόρασης στους μαθητές τους. Οι ίδιοι οι Van Hiele ορίζουν την ***ενόραση*** *(insight)* ως εξής : Ένα άτομο δείχνει ενόραση αν (α) είναι ικανό να λειτουργήσει σε μία κατάσταση με την οποία δεν είναι εξοικειωμένο· (β) εκτελεί ικανοποιητικά (σωστά και με ακρίβεια) τις ενέργειες που απαιτεί η κατάσταση αυτή· και (γ) εκτελεί συνειδητά και μετά από σκέψη μία διαδικασία που επιλύει το πρόβλημα.

Ένας μαθητής δείχνει ενόραση αν καταλαβαίνει τι ακριβώς κάνει, γιατί το κάνει και πότε το κάνει. Μπορεί να εφαρμόσει τις γνώσεις του ώστε να λύσει προβλήματα. Είναι προφανές ότι ο δάσκαλος πρέπει να προσπαθεί να διευρύνει τη ενόραση των μαθητών του αλλά πώς μπορεί να το πετύχει αυτό; Το ερώτημα απαντήθηκε εν μέρει από τους Van Hiele με την εισαγωγή των φάσεων της μάθησης. Εξακολουθεί όμως να είναι το κύριο ζητούμενο σε όλες τις έρευνες γύρω από τη διδακτική είτε αυτές αφορούν τα μαθηματικά είτε όχι (Hoffer 1983)

Ο P. Van Hiele συνέχισε τις έρευνες ακόμα και μετά το θάνατο της συζύγου του. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις δομές που κατά τον ίδιο δεν περιορίζονται σε αλγεβρικές ή γεωμετρικές. Τον ενδιέφεραν οι δομές που έχουν βαθιά σχέση με τη διδασκαλία και τη μάθηση και σχηματίζουν μια βάση για την επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα ένα φύλλο τετραγωνισμένο χαρτί προσφέρει την υποδομή για να

ασχοληθούμε με επίπεδα και στερεά σχήματα αλλά και για να δουλέψουμε με κλάσματα, εμβαδά κ.λ.π. Οι έρευνές του είχαν μεγάλη επίδραση στη διδακτική των μαθηματικών αλλά και άλλων επιστημών.

1.4 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στη Σοβιετική Ένωση.

Στην πρώην Σοβιετική Ένωση οι ψυχολόγοι και οι εκπαιδευτικοί ασχολήθηκαν πολύ με τη βελτίωση των σχολικών προγραμμάτων και των μεθόδων διδασκαλίας. Υιοθέτησαν γρήγορα τις ιδέες των Van Hiele γιατί οι δυσκολίες των μαθητών με τη γεωμετρία ήταν ίδιες στη Σοβιετική Ένωση όπως και στον υπόλοιπο κόσμο. Ο σοβιετικός A. M. Pyshkalo αναρωτιέται το 1968 «Γιατί τόσο πολλά παιδιά, που τα καταφέρνουν καλά σε άλλα σχολικά μαθήματα, δεν μπορούν να προχωρήσουν στη μελέτη της Γεωμετρίας; »

Ο Pyshkalo προσπαθεί να δώσει μια απάντηση στο θέμα αυτό. *«Η διδασκαλία της γεωμετρίας στα σχολεία αρχίζει αργά και ασχολείται σχεδόν αμέσως με μετρήσεις προσπερνώντας την ποιοτική φάση του μετασχηματισμού των χωροταξικών λειτουργιών σε λογικές. Είναι όμως γνωστό ότι η ανάπτυξη των γεωμετρικών χειρισμών στα παιδιά γίνεται ανάποδα, δηλαδή οι πρώτες τους γεωμετρικές πράξεις είναι ποιοτικές και όχι ποσοτικές. Γι΄ αυτό, στο σύστημα που προτείνουμε, η εξοικείωση των μαθητών με τα γεωμετρικά αντικείμενα αρχίζει με το σχηματισμό των ποιοτικών εννοιών όπως τη μελέτη των σχημάτων, των σχετικών θέσεων και των συσχετισμών μεταξύ τους. Αργότερα εισάγονται σταδιακά οι ποσοτικές σχέσεις όπως οι μετρήσεις. Μια τέτοια προσέγγιση επιτρέπει να ξεκινήσει νωρίτερα η μελέτη της γεωμετρίας».*

Ο Pyshkalo χρησιμοποιεί με μικρές τροποποιήσεις τα επίπεδα Van Hiele (για παράδειγμα τα αριθμεί από 1 μέχρι 5 αντί για 0-4) για να διαμορφώσει το σχολικό πρόγραμμα της γεωμετρίας για παιδιά από 7 μέχρι 15 ετών. Οι έρευνές του κατά τη δεκαετία του 60 έδειξαν τα εξής :

1. Μέχρι την ηλικία των 12 ετών ένας σημαντικός αριθμός παιδιών βλέπουν τα σχήματα σαν «ολότητες».
2. Οι μαθητές παραμένουν στο πρώτο επίπεδο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην ηλικία των 12 ετών μόνο ένα 10-15% έχουν περάσει στο δεύτερο επίπεδο (το επίπεδο 1 κατά Van Hiele) που είναι απαραίτητο για την παραπέρα μελέτη της γεωμετρίας.
3. Όσον αφορά τα στερεά σχήματα η καθυστέρηση είναι ακόμα μεγαλύτερη, δηλαδή φτάνει μέχρι και τα 14 χρόνια.
4. Η ανάπτυξη των παιδιών μπορεί να επηρεαστεί με τη μελέτη κατάλληλου γεωμετρικού υλικού. Μαθητές 8 ετών που έχουν εξοικειωθεί με τα στερεά μπορούν να φτάσουν στο δεύτερο επίπεδο προσπερνώντας παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας.

Σαν αποτέλεσμα αυτών των ερευνών οι σοβιετικοί σχεδίασαν γεωμετρικό υλικό που επέτρεπε στους μαθητές να περάσουν στο δεύτερο επίπεδο στην ηλικία των 9 ετών έχοντας κατακτήσει ένα σημαντικό αριθμό γεωμετρικών εννοιών. Ο Pyshkalo αναφέρει «Δείξαμε ότι η ικανότητα των μαθητών του δημοτικού για συγκεκριμένους συλλογισμούς είναι μεγαλύτερη από ότι πιστεύαμε μέχρι τώρα και πάνω από το επίπεδο που αρχίζει συνήθως η παραδοσιακή διδασκαλία».

1.5 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Οι ιδέες των Van Hiele έφτασαν στην Αμερική στα μέσα της δεκαετίας του 70 με τα έργα των H. Freudental (1973) και I. Wirszup (1976). Ο πρώτος έδωσε ένα παράδειγμα των επιπέδων κατανόησης στην περίπτωση της μαθηματικής επαγωγής και επιβεβαίωσε ότι αυτή πράγματι αναπτύσσεται ακολουθώντας τα. Ο δεύτερος παρουσίασε τις πρωτότυπες έρευνες των Van Hiele και ανέφερε τα αποτελέσματα των σοβιετικών που είχαν προηγηθεί. Έτσι τράβηξε την προσοχή των αμερικανών εκπαιδευτικών και πολλοί από αυτούς ενθουσιάστηκαν με την απλότητα των ιδεών αυτών.

Είναι συνηθισμένο το φαινόμενο, όταν δουλεύει κανείς με τη δομή των επιπέδων, να φτιάχνει μια συλλογή ερωτήσεων και

προβλημάτων και να προσπαθεί να προσδιορίσει το ελάχιστο επίπεδο που απαιτείται για να απαντήσει κάποιος μία ερώτηση ή να λύσει ένα πρόβλημα. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι απογοητευτικό πόσο συχνά υπερεκτιμά κανείς το επίπεδο αυτό. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτό που αναμένει ο καθηγητής. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλοί μαθητές γυμνασίου βρίσκονται ακόμα στο πρώτο επίπεδο, αντίθετα με ότι περιμένει κανείς ανάλογα με την ηλικία τους. Πόσες φορές δεν έχουμε ακούσει την ερώτηση « το τετράγωνο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; » Λίγοι μαθητές σ΄ αυτή την ηλικία καταλαβαίνουν τη διαφορά ανάμεσα σε έναν ορισμό, ένα αξίωμα και ένα θεώρημα. Δυστυχώς δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι και οι διδάσκοντες κατανοούν τις έννοιες αυτές. Επιβάλλεται όμως να τις γνωρίζουν για να τις μεταδώσουν σωστά στους μαθητές τους.

Αν εξετάσει κανείς τα σχολικά βιβλία θα διαπιστώσει την ασυνέπεια ανάμεσα στα επίπεδα κατανόησης των ερωτήσεων και των μαθητών στους οποίους απευθύνονται. Υπάρχουν δηλαδή ερωτήσεις πολύ χαμηλότερου επιπέδου από αυτό που υποτίθεται ότι βρίσκεται η πλειοψηφία των μαθητών της τάξης ή σπανιότερα ερωτήσεις υψηλότερου επιπέδου. Μετά τη δημοσίευση του έργου του Wirszup στην Αμερική έγινε μια προσπάθεια συγγραφής βιβλίων γεωμετρίας που θα λάμβαναν υπόψη τα επίπεδα Van Hiele αλλά χωρίς να απομακρύνονται δραστικά από το υπάρχον σχολικό πρόγραμμα. Για παράδειγμα το βιβλίο του Hoffer (1979) αφιέρωνε το πρώτο μισό του χρόνου σε δραστηριότητες και εξερευνητικές εργασίες που προετοίμαζαν τους μαθητές να δουλέψουν σε αφαιρετικό επίπεδο (Van Hiele επίπεδο 3). Οι τυπικές αποδείξεις εμφανίζονται στο δεύτερο μισό του βιβλίου. Το υλικό διδάχτηκε πειραματικά και στο τέλος του χρόνου ένα ειδικό τεστ δόθηκε στους μαθητές των πειραματικών τμημάτων και παράλληλα σε μαθητές που είχαν ακολουθήσει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές στα πειραματικά τμήματα μπορούσαν να διατυπώσουν αποδείξεις τουλάχιστον το ίδιο καλά με αυτούς των παραδοσιακών αλλά οι καθηγητές των πρώτων πίστευαν ότι οι μαθητές τους ήξεραν «περισσότερη γεωμετρία» ιδιαίτερα όσον αφορά τα εμβαδά, τους όγκους και τους μετασχηματισμούς (Hoffer 1983). Κάποιοι καθηγητές, που αρχικά ήταν διστακτικοί, έγιναν ενθουσιώδεις υποστηρικτές. Την επόμενη χρονιά υπήρξαν μαρτυρίες

ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν το καινούργιο βιβλίο ήταν πιο ικανοί στη λύση προβλημάτων από τους υπόλοιπους.

Ένα πλήθος άλλων ερευνών έγιναν στην Αμερική με βάση τα επίπεδα Van Hiele. Τα αποτελέσματά τους σήμερα είναι πάρα πολύ γνωστά. Το σχέδιο Oregon είχε στόχο να διερευνήσει κατά πόσο τα επίπεδα Van Hiele μπορούν να χρησιμεύσουν σαν μοντέλο για να προσεγγίσει κανείς την κατανόηση της γεωμετρίας. Αποτελείτο από δύο σειρές δραστηριοτήτων και ερωτήσεων που δόθηκαν σε 70 μαθητές από 6 μέχρι 12 ετών. Οι ερευνητές πήραν προφορική συνέντευξη από κάθε μαθητή μαγνητοφωνώντας τις απαντήσεις. Ακολουθούσαν τη σειρά των ερωτήσεων όσο ο μαθητής μπορούσε να ανταποκριθεί. Οι αρχικές ερωτήσεις κάθε σειράς ήταν ανοικτής και διερευνητικής φύσης ενώ οι τελικές ήταν πιο εξειδικευμένες και απαιτούσαν υψηλότερο επίπεδο σκέψης. Για παράδειγμα στη σειρά του τετραπλεύρου ζητήθηκε αρχικά από τους μαθητές να σχεδιάσουν μερικά τετράπλευρα που να διαφέρουν σε κάτι μεταξύ τους. Προς το τέλος της σειράς τους ζητήθηκε να εξηγήσουν (να αποδείξουν) γιατί οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες και αν μπορούν να εξηγήσουν τη διαφορά ανάμεσα σε έναν ορισμό, ένα αξίωμα και ένα θεώρημα. Υπήρχε μία ανάλογη σειρά για τα τρίγωνα. Οι ερευνητές προσπάθησαν να κατανοήσουν τις αντιλήψεις των υποκειμένων της έρευνας όπως επίσης και να τοποθετήσουν τις απαντήσεις τους στο κατάλληλο επίπεδο κατανόησης.

Το σχέδιο Brooklyn είχε σαν στόχο να διερευνήσει αν το μοντέλο Van Hiele περιγράφει τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν γεωμετρία. Επικεντρώθηκε στην επίδραση του αστικού και ιδιαίτερα του μειονοτικού περιβάλλοντος. Το σχέδιο αξιολόγησε τα σχολικά βιβλία ανάλογα με το επίπεδο των δραστηριοτήτων κατά Van Hiele. Περιελάμβανε ατομικές συνεντεύξεις που βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν με σκοπό να διαπιστωθεί κατά πόσο συγκεκριμένα βοηθήματα βελτίωναν το επίπεδο των μαθητών.

Ο στόχος του σχεδίου Chicago που έγινε από τον καθηγητή Usiskin την τριετία 1979-1982 ήταν να διαπιστώσει την επίδραση του γνωστικού και λειτουργικού επιπέδου των μαθητών σε ένα τεστ προαπαιτούμενων για την επιτυχία στις τυπικές γεωμετρικές έννοιες και αποδείξεις. Δόθηκε σε 2900 μαθητές Λυκείου και αποτελείτο από

τέσσερα τεστ. Το πρώτο ήταν ένα τεστ πολλαπλών απαντήσεων (P) πάνω στις προαπαιτούμενες γνώσεις για τη μελέτη της γεωμετρίας στο Λύκειο. Το δεύτερο, επίσης πολλαπλών απαντήσεων (V), συνέδεε κατευθείαν κάθε ερώτηση με το αντίστοιχο ελάχιστο επίπεδο Van Hiele που ήταν απαραίτητο για να απαντηθεί. Το τρίτο τεστ (Pr) είχε να κάνει με την ικανότητα απόδειξης. Κάθε μαθητής έπρεπε να λύσει δύο προβλήματα που απαιτούσαν να συμπληρώσει μέρη αποδείξεων και τέσσερις τυπικές αποδείξεις. Τέλος το τέταρτο ήταν ένα συνηθισμένο τεστ (A) που αξιολογούσε την επίδοση των μαθητών στη γεωμετρία. Τα τεστ P και V δόθηκαν στην αρχή της χρονιάς και στο τέλος της ξαναδόθηκαν μαζί με τα τεστ Pr και A.

Η έρευνα προσπάθησε να απαντήσει σε ερωτήματα όπως : Πώς κατανέμονται οι μαθητές που ξεκινούν το μάθημα της γεωμετρίας σε σχέση με τα επίπεδα στο σχήμα Van Hiele; Ποιες αλλαγές λαμβάνουν χώρα στα επίπεδα Van Hiele μετά από ένα σχολικό έτος σπουδής της γεωμετρίας; Σε ποια έκταση σχετίζονται τα επίπεδα Van Hiele με την τρέχουσα επίδοση στη γεωμετρία; Σε ποια έκταση προβλέπουν τα επίπεδα Van Hiele την επίδοση στη γεωμετρία μετά από μαθήματα ενός έτους; Σε ποια έκταση είναι η γεωμετρία που διδάσκεται στους μαθητές κατάλληλη για το δικό τους επίπεδο Van Hiele; Σε ποια έκταση διαφέρουν οι τάξεις της γεωμετρίας σε διαφορετικά σχολεία και κοινωνικο-οικονομικά περιβάλλοντα ως προς την καταλληλότητα της ύλης του μαθήματος στο επίπεδο Van Hiele του μαθητή;

1.6 Η επίδραση της θεωρίας Van Hiele στην Ελλάδα.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ελλάδα, για ιστορικούς κυρίως λόγους, ήταν πάντα στενά συνδεδεμένη με το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη. Στη χώρα μας κατά τη δεκαετία του 80 έγινε μια προσπάθεια εισαγωγής των νέων μαθηματικών της σχολής των Bourbaki αλλά η μεταρρύθμιση αυτή δεν επηρέασε ποτέ τη διδασκαλία της γεωμετρίας δηλαδή δεν εφαρμόστηκε ποτέ η περίφημη ρήση του J. Dieudonne *«Καταργήστε τον Ευκλείδη».* Αντίθετα υπερίσχυσε η άποψη που διατυπώθηκε ρητά από τον Βαρουχάκη, συμβούλο του Π.Ι., ότι *«δεν θα γίνουμε ποτέ εθνικοί μειοδότες καταργώντας την Ευκλείδεια γεωμετρία».* Ανεξάρτητα όμως

από το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης, ο καθηγητής πρέπει να γνωρίζει την ύπαρξη και το περιεχόμενο και άλλων αξιωματικών θεμελιώσεων. Για παράδειγμα το γαλλικό κράτος απαιτεί από τους καθηγητές, που θα διδάξουν γεωμετρία, να γνωρίζουν τουλάχιστον δύο αξιωματικές θεμελιώσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στη χώρα μας η διδασκαλία παρέμεινε παραδοσιακή και δεν έλαβε ποτέ υπόψη τα επίπεδα Van Hiele. Το αποτέλεσμα είναι να παρουσιάζονται και στη χώρα μας οι ίδιες δυσκολίες στην κατανόηση της γεωμετρίας που εμφανίζονται και διεθνώς. Το πρόβλημα εμφανίζεται αρχικά στην Γ΄ Γυμνασίου όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις αυστηρές αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ιδιαίτερα έντονο στην Α΄ Λυκείου όπου η γεωμετρία είναι ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Πολλοί μαθητές προτιμούν να ασχοληθούν με μια αρκετά δύσκολη άσκηση άλγεβρας παρά με μια σχετικά απλούστερη άσκηση γεωμετρίας. Φυσικό επακόλουθο είναι να αναπτύσσεται μια σχετική απέχθεια για το μάθημα αυτό και οι επιδόσεις των μαθητών να είναι χαμηλότερες. Η πίεση της κοινής γνώμης έχει αναγκάσει τους υπευθύνους να μειώσουν τη έκταση τις διδακτέας ύλης της γεωμετρίας και τη γενικότερη σπουδαιότητά της μέσα στο σύστημα. Εδώ και πάρα πολλά χρόνια δεν εξετάζεται στις εισαγωγικές εξετάσεις των Ανωτέρων και Ανωτάτων Σχολών.

Το αναλυτικό πρόγραμμα υποχρεώνει τους διδάσκοντες να λειτουργήσουν σε ένα επίπεδο διαφορετικό από αυτό των μαθητών. Οι περισσότεροι περιορίζουν αυτόβουλα τις απαιτήσεις τους σε χαμηλότερο επίπεδο για να μπορέσουν να επικοινωνήσουν με τους μαθητές τους. Υπάρχουν όμως και ορισμένοι που για να δείξουν ότι παράγουν έργο ή για να αυξήσουν τη «φήμη» τους επιβάλουν συνειδητά στους μαθητές τους ασκήσεις που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο κατανόησης των τελευταίων. Επιβάλλεται λοιπόν μία έρευνα για το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές και ενδεχομένως μία προσαρμογή του αναλυτικού προγράμματος.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια σχετική κινητικότητα με άρθρα και έρευνες που ασχολούνται με το θέμα. Ο Ζάχος το 2000 έθεσε δύο ερευνητικά ερωτήματα που είχαν θεωρητικό, αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον. Βρίσκονται τα τέσσερα επίπεδα Van Hiele σε γραμμική διάταξη μεταξύ τους; Δηλαδή το πρώτο επίπεδο κατακτάται

πριν από το δεύτερο, το δεύτερο πριν από το τρίτο, κ.λ.π. ; Ποια είναι η κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα; Με βάση τη θεωρία Van Hiele, είναι σε θέση οι μαθητές να παρακολουθήσουν μαθήματα θεωρητικής Γεωμετρίας; Το δείγμα του αποτέλεσαν 458 μαθητές της δευτέρας Λυκείου τεσσάρων Γενικών Λυκείων της Αθήνας. Το πειραματικό του υλικό ήταν ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών βασισμένο στο ερωτηματολόγιο του καθηγητή Usiskin.

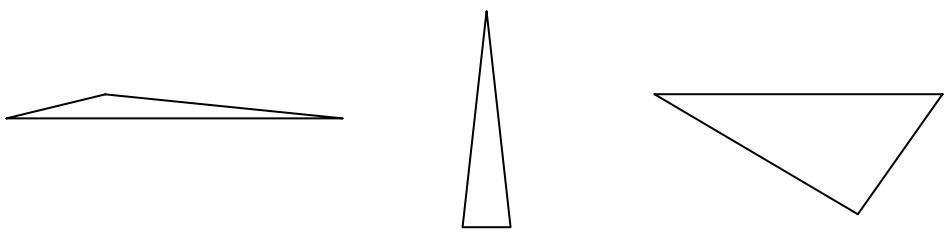
Οι Β. Ντζιαχρήστος και Ν. Ζαράνης το 2001 προσπάθησαν να διερευνήσουν αν η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού σε Η/Υ βοηθάει τη μετάβαση στο επόμενο επίπεδο Van Hiele περισσότερο από ότι η παραδοσιακή διδασκαλία. Το δείγμα της έρευνας τους αποτέλεσαν μαθητές στης Α΄ τάξης του 5^{ου} Γυμνασίου Αμαρουσίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν θετικά.

Έρευνα για τα επίπεδα Van Hiele έγινε και από τον Ν. Τζίφα το 2005 στα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας για το μεταπτυχιακό δίπλωμα στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1838 μαθητές που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων από διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Για τον εντοπισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών (Test Van Hiele). Το ερωτηματολόγιο αυτό ήταν του καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο των ΗΠΑ Usiskin (1982) και μεταφράστηκε στα ελληνικά από τον ερευνητή. Στην έρευνα έγινε προσπάθεια κατάταξης των μαθητών στα τέσσερα πρώτα επίπεδα Van Hiele γιατί η κατάκτηση του πέμπτου επιπέδου είναι δύσκολο να ελεγχθεί και σε κάθε περίπτωση δεν αφορά τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εξετάστηκαν ακόμα τα ερωτήματα αν υπάρχουν διαφορές λόγω φύλου, αν υπάρχει βελτίωση των επιπέδων van Hiele στις μεταβάσεις από τάξη σε τάξη και αν υπάρχει διαφορά μεταξύ δημοσίων και ιδιωτικών σχολείων.

1.7 Μερικά αποτελέσματα των ερευνών.

Τα σχέδια Oregon και Brooklyn διαπίστωσαν ότι ακόμα και οι μαθητές του δημοτικού είναι εξοικειωμένοι με λέξεις όπως *τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο* και *κύκλος*. Οι μαθητές του γυμνασίου επίσης ήταν συνηθισμένοι σε εκφράσεις όπως *ορθές γωνίες* και *παράλληλες ευθείες*. Όμως ένας αρκετά μεγάλος αριθμός συγχέει σχήματα όπως το *ρόμβο* και το *ισοσκελές τραπέζιο*. Το σχέδιο Chicago βρήκε ότι αρκετοί μαθητές φτάνουν στο Λύκειο και δεν μπορούν να διακρίνουν απλά σχήματα όπως *τρίγωνα, τετράγωνα, ορθογώνια* και *παραλληλόγραμμα*. Οι μαθητές μπορεί να γνωρίζουν τις λέξεις αλλά έχουν μεγάλες παρανοήσεις ή εντελώς λανθασμένες αντιλήψεις για το νόημά τους.

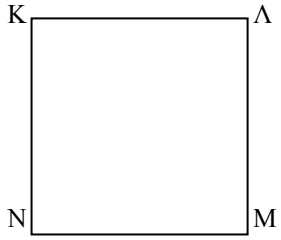
Για παράδειγμα πολλοί μαθητές αποδέχονται σαν *τρίγωνο* μόνο ένα ισόπλευρο τρίγωνο με την κάτω πλευρά οριζόντια. Στην πραγματικότητα αρκετοί μαθητές περιστρέφουν το χαρτί ή το αντικείμενο για να βλέπουν το τρίγωνο σε μια θέση που θα μπορούσαμε να περιγράψουμε σαν τη «θέση του βιβλίου». Άλλοι μαθητές στις πρώτες τάξεις του Λυκείου δέχονται σαν *τρίγωνα* και όσα έχουν καμπύλες πλευρές. Φαίνεται να θεωρούν σημαντικότερη την ύπαρξη τριών κορυφών από την ύπαρξη τριών ευθύγραμμων πλευρών. Πολλοί μαθητές Λυκείου διστάζουν ή αρνούνται να αναγνωρίσουν σαν *τρίγωνα* αυτά που έχουν μία πλευρά σημαντικά μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος ή αντιστρόφως. Τα θεωρούν πολύ «λοξά» ή πολύ «στενά» για να είναι τρίγωνα. Παρόμοιες παρανοήσεις υπάρχουν και για τα τετράπλευρα.



Μη αποδεκτά τρίγωνα

Οι μαθητές χρησιμοποιούν διάφορες καθημερινές εκφράσεις για να περιγράψουν τα σχήματα. Λένε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι «τέλειο». Άλλα τρίγωνα είναι «πατημένα», «μακρουλά», «μυτερά», «σχεδόν ισοσκελή». Ένα μη κυρτό τετράπλευρο περιγράφεται σαν «μύτη βέλους». Επίσης ορισμένοι, ενώ καταλαβαίνουν μια έννοια, την περιγράφουν με αντισυμβατικό λεξιλόγιο όπως αναφέρονται σε παράλληλες γραμμές σαν «τελείως ίσιες» ή περιγράφουν τις κάθετες ευθείες σαν κατακόρυφες. Για το θέμα αυτό είναι χαρακτηριστική η ερώτηση 6 από το τεστ της έρευνας Τζίφα (2006).

6. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής σε όλα τα τετράγωνα ;

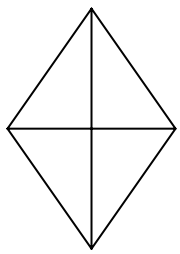


α. Τα ΚΜ και ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος
β. Τα ΚΜ και ΛΝ είναι κάθετα
γ. Τα ΚΝ και ΛΜ είναι κάθετα
δ. Τα ΚΝ και ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος
ε. Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ

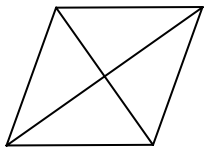
Στην ερώτηση αυτή απαντάει σωστά (δηλαδή το β) το 46,9% αλλά ένα ποσοστό 33% επιλέγει την απάντηση γ μπερδεύοντας εμφανώς τις εκφράσεις «κατακόρυφος» και «κάθετος». Η σύγχυση ανάμεσα στις δύο αυτές λέξεις είναι γνωστή αλλά αυτό δεν μειώνει την ευθύνη των διδασκόντων για τη σωστή χρήση της ορολογίας. Θα πρέπει πάντα να δίνεται μεγάλη έμφαση στην επιλογή των σωστών λέξεων για την περιγραφή κάθε έννοιας ώστε να διαλύονται παρανοήσεις όπως η παραπάνω.

Το λεξιλόγιο των μαθητών δείχνει πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν οπτικά στοιχεία για να αναγνωρίσουν σχήματα. Είτε αποκλείουν αναγκαίες ιδιότητες π.χ. δεν θεωρούν το ευθύγραμμο των πλευρών απαραίτητη προϋπόθεση για τον χαρακτηρισμό του τριγώνου, είτε προσθέτουν άλλες μη απαραίτητες όπως ότι οι πλευρές του τριγώνου πρέπει να είναι ίσες. Αρκετοί μαθητές που δεν έχουν πάει στο Λύκειο δεν θεωρούν τρίγωνα όσα δεν είναι ισόπλευρα. Κάποιος μαθητής επέμενε ότι υπάρχουν τεσσάρων ειδών τρίγωνα, αυτά που «κοιτάζουν» πάνω, αυτά που «κοιτάζουν» κάτω αυτά που «κοιτάζουν» αριστερά και αυτά που «κοιτάζουν» δεξιά. Επιπλέον όλα τα τρίγωνα που σχεδίασε ήταν ισόπλευρα.

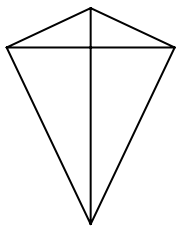
Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών επηρεάζεται από τον προσανατολισμό των σχημάτων χαρακτηρίζοντας για παράδειγμα σαν *τρίγωνα* μόνο όσα έχουν την τυπική θέση που έχουν συνήθως τα τρίγωνα στα σχολικά βιβλία. Οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες σε μία τοποθέτηση του σχήματος ενώ δεν είναι σε μία άλλη. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν έχει μια διαγώνιο κατακόρυφη αλλά δεν είναι όταν έχει μια πλευρά οριζόντια. Σε ένα ρομβοειδές οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι απέναντι γωνίες ίσες. Ακόμα και ενήλικες επιμένουν ότι ένα ορθογώνιο δεν είναι παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο. Η πιο περίεργη άποψη είναι ότι ένα ορθογώνιο έχει μόνο μία ορθή γωνία, την κάτω αριστερά, ίσως γιατί αυτή συνήθως σημειώνεται σαν ορθή στα σχολικά βιβλία.



Είναι ρόμβος



Δεν είναι ρόμβος !



ρομβοϊδές

Από τον τρόπο που οι μαθητές απαντούν τις ερωτήσεις ή εκτελούν τις εργασίες, μπορούμε να αναλύσουμε τα βήματα του συλλογισμού τους με βάση τα επίπεδα. Τα προαναφερόμενα παραδείγματα δείχνουν ως επί το πλείστον σκέψη επιπέδου 0. Ακόμα και όταν οι μαθητές αναλύουν ιδιότητες των σχημάτων (δηλαδή σκέφτονται στο επίπεδο 1) και διατυπώνουν τις απόψεις τους, επιτρέπουν σε μία καθαρά οπτική αντίληψη του σχήματος να επηρεάζει την περιγραφή τους, όπως στο παρακάτω παράδειγμα. «Ένα παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες αλλά οι δύο από αυτές πρέπει να είναι μακρύτερες από τις άλλες (… για να μην είναι ρόμβος !) και δεν έχει καμία ορθή γωνία (… γιατί αλλιώς θα ήταν ορθογώνιο !) Ένας συγκεκριμένος μαθητής Λυκείου (που θα έπρεπε να βρίσκεται τουλάχιστον στο επίπεδο 3) όρισε το παραλληλόγραμμο σαν «τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δεν έχει ορθές γωνίες». Στη συνέντευξη ο μαθητής αναγνώρισε ότι αυτός είναι «κακός ορισμός» γιατί δεν ταυτίζεται με αυτόν του βιβλίου αλλά παρόλα αυτά ήταν σαφές ότι δεν θεωρούσε τα ορθογώνια σαν παραλληλόγραμμα. (Hoffer 1983)

Μαθητές όλων των ηλικιών έχουν την τάση να αντιστρέφουν κατά κάποιο τρόπο τους συλλογισμούς μετατρέποντας τις αναγκαίες συνθήκες σε ικανές. Ο συλλογισμός μοιάζει να είναι κάπως έτσι : *Αφού τα σχήματα τύπου Χ έχουν αυτές τις ιδιότητες, τότε ένα σχήμα που έχει αυτές τις ιδιότητες είναι αναγκαστικά του τύπου Χ.* Για παράδειγμα στο σχέδιο Oregon σε μία δραστηριότητα με τίτλο «Ποιο είναι το σχήμα;» οι μαθητές έπαιρναν μια διαδοχή πληροφοριών και συνέχιζαν να ζητούν στοιχεία μέχρι να βεβαιωθούν για ποιο σχήμα πρόκειται. Σε μια τέτοια διαδοχή το πρώτο στοιχείο ήταν «Έχει τέσσερις πλευρές.». Η αυθόρμητη απάντηση αρκετών μαθητών ήταν «Είναι τετράγωνο.» με προφανή συλλογισμό *«αφού το τετράγωνο έχει τέσσερις πλευρές , τότε ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές είναι τετράγωνο.»* Σε άλλες παρόμοιες περιπτώσεις οι μαθητές θεώρησαν τα τετράπλευρα με δύο πλευρές παράλληλες σαν παραλληλόγραμμα και αυτά με ίσες διαγώνιες σαν ορθογώνια. Χαρακτηριστικές είναι απαντήσεις στην ερώτηση 15 του τεστ Τζίφα (2006).

15. Τι ισχύει σε όλα τα ορθογώνια ενώ δεν ισχύει σε όλα τα παραλληλόγραμμα ;

α. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες
β. Οι διαγώνιες είναι ίσες
γ. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες
δ. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες
ε. Τίποτα από τα παραπάνω

Μόνο ένα 36,6% επιλέγει τη σωστή απάντηση β. Από τους υπόλοιπους ένα 30,1% επιλέγει την απάντηση ε. Είναι φανερό ότι οι περισσότεροι δεν κατανοούν το ερώτημα.

Ακόμα και οι λεπτομερείς εξηγήσεις ή οι κανόνες της λογικής δεν πείθουν πάντα τους μαθητές. Για παράδειγμα ένας μαθητής, που είχε χαρακτηριστεί από τους δασκάλους του σαν ένας από τους καλύτερους της τάξης, δεν αναγνώριζε σαν τραπέζια όσα δεν έμοιαζαν με ισοσκελή. Όταν του έδειξαν ένα ορθογώνιο τραπέζιο επέμενε ότι δεν ήταν τραπέζιο. Ο διάλογος είναι χαρακτηριστικός (Ε ο ερευνητής, Μ ο μαθητής)

Ε – Είναι αυτό ένα τραπέζιο ; (δείχνει ένα ορθογώνιο τραπέζιο)
Μ – Όχι.
Ε – Γιατί δεν είναι ;
Μ – Επειδή δεν είναι.
Ε – Τι είναι ένα τραπέζιο ;
Μ – Είναι ένα τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.
Ε – Και γι΄ αυτό το τετράπλευρο τι λες ; (ξαναδείχνει το ίδιο σχήμα)
Μ – Αυτό έχει δύο πλευρές παράλληλες ενώ οι άλλες δύο δεν είναι.
Ε – Λοιπόν είναι ένα τραπέζιο ;
Μ – Όχι δεν είναι.

Ο μαθητής υποτίθεται ότι λειτουργούσε σε περιβάλλον επιπέδου 3 αλλά στην πραγματικότητα βρισκόταν το πολύ στο επίπεδο 1 και αναγνώριζε τα σχήματα καθαρά οπτικά. Έτσι αν και μπορούσε να διατυπώσει τον ορισμό και να ελέγξει αν ένα σχήμα τον

ικανοποιούσε, δεν αποδεχόταν κάτι σαν τραπέζιο αν δεν του θύμιζε το πρότυπο τραπέζιο που είχε στο μυαλό του.

Είναι επίσης πολύ γνωστή η σύγχυση ανάμεσα σε *ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα.* Οι μαθητές λένε χαρακτηριστικά :

- «Ποτέ δεν μπόρεσα να καταλάβω τι διαφορά ανάμεσα σε ένα θεώρημα και ένα αξίωμα»
- «νομίζω ότι αξίωμα είναι κάτι που αποδεικνύεται από τους ορισμούς»
- «κάτι έχω ακούσει σχετικά αλλά δεν θυμάμαι ακριβώς»
- «θεώρημα είναι η απόδειξη ενός αξιώματος»
- «τα θεωρήματα είναι αποδειγμένα αξιώματα που προέρχονται από τους ορισμούς»
- «αξίωμα είναι ένας κανόνας που μπορεί να είναι αληθινός»

Αν ένας μαθητής, ακόμα και στο τέλος του Λυκείου, κληθεί να αναφέρει ένα αξίωμα είναι πιθανότερο να αναφέρει ένα αξίωμα της Άλγεβρας όπως την προσεταιριστική ή την αντιμεταθετική ιδιότητα ή ακόμα συχνότερα μια αλγεβρική ταυτότητα όπως $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$. Ελάχιστοι μαθητές, τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, έχουν κατανοήσει πραγματικά τι είναι ένα επαγωγικό σύστημα, δηλαδή έχουν κατακτήσει πλήρως το επίπεδο 3.

Ένα βασικό συμπέρασμα για τη γεωμετρία ήταν ότι οι μαθητές πιστεύουν αυτό που βλέπουν σε ένα βιβλίο και όχι αυτό που διαβάζουν. Θυμίζουμε το παράδειγμα του μαθητή που γνώριζε ότι ο ορισμός που έδωσε για το παραλληλόγραμμο ήταν «κακός», αφού διέφερε από το κείμενο του βιβλίου, αλλά απέρριπτε αυτό το γραπτό ορισμό γιατί ερχόταν σε σύγκρουση με το οπτικό πρότυπο που είχε για το παραλληλόγραμμο. Είδαμε επίσης το παράδειγμα όπου ο μαθητής μπορούσε να αναπαράγει σωστά τον ορισμό του τραπεζίου αλλά αρνιόταν να δεχτεί τραπέζιο με ορθή γωνία, επειδή πάλι δεν συμφωνούσε με την εικόνα που είχε συνηθίσει (Hoffer 1983).

Οι ισχυρισμοί του Pyshkalo ότι οι κατάλληλες εκπαιδευτικές δραστηριότητες αυξάνουν το επίπεδο κατανόησης των παιδιών επιβεβαιώνονται από αμερικανικές έρευνες. Τα εκπαιδευτικά βοηθήματα που αναπτύχθηκαν από το σχέδιο Brooklyn όντως

συνέβαλαν στη βελτίωση των επιπέδων των μαθητών ιδιαίτερα στα χαμηλά επίπεδα. Επίσης στη διάρκεια των συνεντεύξεων του σχεδίου Oregon μερικοί μαθητές άρχισαν να σκέφτονται στο επόμενο επίπεδο αναλογιζόμενοι τις ίδιες τους τις απαντήσεις. Για παράδειγμα μια μαθήτρια δεν αναγνώριζε τα τετράγωνα ως ορθογώνια. Όταν όμως τις ζητήθηκε να περιγράψει τα σχήματα το έκανε με τέτοιο τρόπο ώστε όταν ξανασκέφτηκε τις απαντήσεις της δέχθηκε ότι τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και τα ορθογώνια είναι παραλληλόγραμμα. Αυτό είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα που η ρητή και κατηγορηματική διατύπωση κάποιων προτάσεων βοηθάει στην κατανόησή τους. Στην έρευνα του Σικάγου (Usiskin 1982) εμφανίστηκε μετρήσιμη βελτίωση του επιπέδου των μαθητών μετά από ένα χρόνο διδασκαλίας.

Άλλα αποτελέσματα από τις έρευνες στην Αμερική αναφέρουν τα εξής. *«Τα επίπεδα που αντιστοιχίζονται στους μαθητές είναι ένας καλός προγνώστης της τρέχουσας απόδοσης του μαθητή στη γεωμετρία και ένας αρκετά καλός προγνώστης της μετέπειτα απόδοσής του. Η χαμηλή απόδοση πολλών μαθητών είτε σε ένα τεστ στην ύλη της γεωμετρίας ή στη γραφή αποδείξεων σχετίζεται στενά με την κατάταξη στα χαμηλότερα επίπεδα Van Hiele. Συνεπώς αυτή η μελέτη επιβεβαιώνει τη χρήση της θεωρίας των επιπέδων Van Hiele για να εξηγήσει γιατί πολλοί μαθητές έχουν πρόβλημα μάθησης και απόδοσης στο μάθημα της γεωμετρίας. Το μάθημα της γεωμετρίας δεν είναι ωφέλιμο για πολλούς μαθητές. Στο τέλος του έτους σπουδής της γεωμετρίας πολλοί μαθητές δεν κατέχουν ούτε καν τετριμμένες πληροφορίες για την ορολογία της γεωμετρίας και τη μέτρηση. Οι ερωτήσεις που αφορούν στα μαθηματικά συστήματα απαντώνται με ουσιαστικά τυχαίο τρόπο. Οι μισοί μαθητές που εγγράφονται σε ένα μάθημα προσανατολισμένο στην απόδειξη βιώνουν πολύ μικρή ή καμιά επιτυχία στην απόδειξη. Ο μείζων λόγος φαίνεται να είναι η έλλειψη γνώσης στην έναρξη του έτους. Αυτή η μελέτη επιβεβαιώνει την ανάγκη για συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας πριν το Λύκειο αν επιθυμούμε μεγαλύτερη γεωμετρική γνώση και επιτυχία στη γραφή αποδείξεων για τους μαθητές μας (Usiskin 1982).»*

Στην Ελλάδα βρέθηκε ότι «*το 75% των μαθητών του δείγματος ήταν κάτω από το επίπεδο 3 που σύμφωνα με την θεωρία Van Hiele είναι απαραίτητο για να είναι σε θέση ένας μαθητής να παρακολουθήσει μαθήματα θεωρητικής γεωμετρίας (γεωμετρικές*

αποδείξεις θεμελιωμένες σε ένα αξιωματικό σύστημα), άρα δεν μπορούσαν αυτοί οι μαθητές να παρακολουθήσουν με ευκολία τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο (Ζάχος 2000).»

Τα συνοπτικά αποτελέσματα της έρευνας του Τζίφα (2006) έχουν ως εξής.

		επίπεδο 0 και 1		άλλα επίπεδα		μη κατηγοριοποιήσιμοι		Σύνολο	
	ΤΑΞΗ	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%
Ελαστικό κριτήριο	Γ΄Γυμν.	259	61,8	90	21,5	70	16,7	419	100,0
	Α΄Λυκ	365	47,8	285	37,3	114	14,9	764	100,0
	Β΄Λυκ	269	41,1	282	43,1	104	15,8	655	100,0
Αυστηρό κριτήριο	Γ΄Γυμν.	284	67,8	93	22,2	42	10,0	419	100,0
	Α΄Λυκ	480	62,8	202	26,4	82	10,7	764	100,0
	Β΄Λυκ	350	53,4	212	32,4	93	14,2	655	100,0

N=1838

Το ελαστικό κριτήριο σημαίνει ότι απάντησαν 3 στις 5 ερωτήσεις του αντίστοιχου επιπέδου ενώ το αυστηρό ότι απάντησαν 4 στις 5. Παρατηρούμε ότι το 41,1% των μαθητών της Β΄ Λυκείου με το ελαστικό κριτήριο ή το 53,4% με το αυστηρό βρίσκονται στα δύο πρώτα επίπεδα. Η διαπίστωση είναι πραγματικά απογοητευτική. Επιπλέον το 60,6% των μαθητών δηλαδή 1114 από τους 1838 μαθητές, βρίσκονται στα επίπεδα 0 και 1 με το αυστηρό κριτήριο και το 48,6% δηλαδή 893 μαθητές με το ελαστικό κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι σε μεγάλο ποσοστό δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία στο επίπεδο που διδάσκεται στο Λύκειο. Αυτό εξηγεί γιατί οι μαθητές συναντούν τόσα εμπόδια στη μελέτη της.

Στην έρευνα αυτή δεν βρέθηκε σχέση ανάμεσα στο φύλο και στο επίπεδο που βρίσκονται. Βρέθηκε όμως ότι οι μαθητές των ιδιωτικών σχολείων υπερέχουν απέναντι στους συμμαθητές τους των δημοσίων. Όσον αφορά τη σχέση επιπέδων και τάξης φοίτησης βρέθηκε ότι με την μετάβαση των μαθητών σε μεγαλύτερες τάξεις

υπάρχει μια μεταβολή των επιπέδων Van Hiele των μαθητών προς τα πάνω. Η διδασκαλία λοιπόν βελτιώνει το επίπεδο των μαθητών έστω και αν δεν είναι προσαρμοσμένη στο πνεύμα των επιπέδων αυτών (Τζίφας 2006).

Βέβαια σε όλες αυτές τις έρευνες υπάρχει πάντα ένα ερωτηματικό για τη σοβαρότητα με την οποία οι μαθητές συμπληρώνουν τα ερωτηματολόγια. Η εμπειρία μας λέει ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι μαθητές αντιμετωπίζουν το θέμα επιπόλαια και απαντούν βιαστικά ή στην τύχη, αφού ξέρουν ότι το τεστ δεν θα επηρεάσει τη βαθμολογία τους. Το φαινόμενο ενισχύεται αν το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο. Ο ερευνητής πρέπει λοιπόν να καταβάλει ιδιαίτερη προσπάθεια για να πείσει τους μαθητές να βάλουν τα δυνατά τους.

Το μοντέλο Van Hiele αποκαλύπτει μια ανησυχητική δυσαρμονία ανάμεσα στη διδασκαλία και στη μάθηση. Τα παιδιά σκέφτονται το καθένα σε διαφορετικό επίπεδο από τα άλλα και από τον καθηγητή. Λέξεις και αντικείμενα χρησιμοποιούνται από τα παιδιά με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που εμφανίζεται στα βιβλία ή από αυτόν που χρησιμοποιούν οι καθηγητές όπως είδαμε με το παράδειγμα του τριγώνου προηγουμένως. Τέτοια προβλήματα βεβαίως δεν εμφανίζονται μόνο στη γεωμετρία. Ορίστε ένα άλλο παράδειγμα από τη διδασκαλία των κλασμάτων στο Δημοτικό. Ο δάσκαλος ζητάει από τα παιδιά να φανταστούν ότι κόβουν ένα πεπόνι στα δύο και στη συνέχεια το ένα από τα δύο μισά πάλι στα δύο. Τι τμήμα το πεπονιού έχουν τώρα ; Η ερώτηση μπερδεύει τους μαθητές μέχρις ότου κάποιος προτείνει να κόψουν και το άλλο μισό στα δύο οπότε έχουν ένα τέταρτο. Οι μαθητές ένοιωθαν την ανάγκη να έχουν τέσσερα κομμάτια για να μιλήσουν για «τέταρτο». Άλλη παρεξήγηση που εμφανίζεται στο Γυμνάσιο είναι ότι ο μαθητής πιστεύει ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι 1,4 ή 1,414 ενώ ο καθηγητής θεωρεί ότι είναι ένας αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει 2.

Φαίνεται να υπάρχουν πάρα πολλές ενοχλητικές παρεμβολές στη διαδικασία της μάθησης. Μπορεί κανείς να τις διαπιστώσει από τα λάθη των μαθητών. Παρακάτω φαίνονται τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

(α) $\begin{array}{r} 147 \\ \underline{-23} \\ 114 \end{array}$ κρατούμενο εκεί που δεν χρειάζεται

(β) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{x}{y}$ απλοποίηση εκεί που δεν επιτρέπεται

(γ) $\dfrac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x} = 2$ μη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Αυτή η έλλειψη κατανόησης μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη ή στην λανθασμένη επιλογή παραδειγμάτων στα βιβλία, στις ανεπαρκείς εξηγήσεις του δασκάλου, στην προβληματική διαδοχή του εκπαιδευτικού υλικού ή σε πολλούς άλλους λόγους. Οι λανθασμένες αντιλήψεις από τη στιγμή που θα εγκατασταθούν είναι πολύ δύσκολο να ξεριζωθούν και γι΄ αυτό διατηρούνται και στην ενήλικη ζωή. Με την πάροδο της ηλικίας δηλαδή δεν περνάει κανείς αυτόματα στο επόμενο επίπεδο κατανόησης (Hoffer 1983). Αν μάλιστα το υποκείμενο έχει και άλλα μαθησιακά προβλήματα όπως δυσλεξία ή δυσαριθμησία, η κατάστασή του θα επιδεινωθεί αν ο διδάσκων δεν είναι επαρκώς ενημερωμένος για τις μαθηματικές αρχές και τον τρόπο διδασκαλίας τους.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο Van Hiele δεν είναι παρά μία «χαραμάδα» μέσα από την οποία μπορούμε να ρίξουμε μια κλεφτή ματιά στην αλληλεπίδραση των παιδιών με τα Μαθηματικά. Η γενικότητα και η σφαιρικότητα του μοντέλου μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα σαν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του.

Κεφάλαιο 2
Η κατηγορική άποψη

Η δομή των επιπέδων Van Hiele μπορεί να ερμηνευθεί και στα πλαίσια της **θεωρίας κατηγοριών.** Η θεωρία αυτή ασχολείται ακριβώς με τη μελέτη της δομής κάποιων συνόλων. Μία *κατηγορία* συνίσταται από μία συλλογή στοιχειωδών αντικειμένων που καλούνται *αντικείμενα* και από μία συλλογή σχέσεων ανάμεσα στα αντικείμενα που καλούνται *μορφισμοί* και ικανοποιούν κάποια αξιώματα. Για παράδειγμα σε μία κατηγορία τα αντικείμενα μπορεί να είναι σύνολα και οι μορφισμοί να είναι συναρτήσεις ανάμεσα στα σύνολα. Σε μία άλλη κατηγορία τα αντικείμενα μπορεί να είναι ομάδες και οι μορφισμοί να είναι οι ομοιομορφισμοί μεταξύ των ομάδων. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη θεωρία κατηγοριών θα βρείτε στο παράρτημα Ι.

2.1 Τα επίπεδα κατανόησης σαν κατηγορίες

Θα μπορούσαμε να δούμε τα επίπεδα Van Hiele σαν κατηγορίες και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη δομή αυτή και σε άλλες περιοχές εκτός της γεωμετρίας. Τα αντικείμενα για κάθε ένα από τα επίπεδα μπορεί να είναι τα εξής :

- *Επίπεδο 0 :* Τα αντικείμενα είναι τα βασικά στοιχεία της περιοχής που μελετάμε.
- *Επίπεδο 1 :* Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναφέρονται στα βασικά στοιχεία.
- *Επίπεδο 2 :* Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις προηγούμενες ιδιότητες.

- *Επίπεδο 3 :* Τα αντικείμενα είναι οι μερικές ταξινομήσεις των κανόνων.
- *Επίπεδο 4 :* Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναφέρονται στις μερικές ταξινομήσεις.

Είναι αξιοσημείωτη η ομοιότητα και η αναδρομικότητα του συστήματος στις περιγραφές των επιπέδων 1 και 4. Καθορίζοντας μόνο τα αντικείμενα και όχι τους μορφισμούς, δεν έχουμε καθορίσει πλήρως κάθε κατηγορία αλλά αυτό μπορούμε να το παραβλέψουμε προς το παρόν.

Είναι γεγονός ότι τα επίπεδα επιβάλλουν ένα οργανωτικό σχήμα για το υλικό που πρέπει να μάθουν οι μαθητές. Οι στόχοι και οι μαθηματικές προσδοκίες για τη μάθηση ενυπάρχουν μέσα στην ίδια τη δομή των επιπέδων. Για παράδειγμα τα επίπεδα στη γεωμετρία, έτσι όπως περιγράφηκαν νωρίτερα, στοχεύουν στην ανάπτυξη της σκέψης για τα σχήματα με απώτερο σκοπό την απόδειξη των προτάσεων που εμφανίζονται μέσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα (επίπεδο 4). Αν και οι συλλογισμοί γίνονται όλο και πιο αφηρημένοι όσο ανεβαίνουμε στα επίπεδα, ακολουθούμε ένα συγκεκριμένο πρότυπο που υπαγορεύεται από την τρέχουσα αντίληψη που έχουμε για τα μαθηματικά ή για οποιαδήποτε άλλη επιστήμη. Στην Ολλανδία τα επίπεδα χρησιμοποιήθηκαν για να υλοποιηθούν μαθήματα στη Χημεία και στα Οικονομικά (Hoffer 1983).

Με τον τρόπο αυτό, έχοντας ορίσει καθαρά τους στόχους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω περιγραφές των επιπέδων, που είναι ανεξάρτητες από οποιαδήποτε επιστημονική περιοχή, για να οργανώσουμε τουλάχιστον τα αντικείμενα σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Υπενθυμίζουμε όμως και πάλι ότι για να καθορίσουμε πλήρως μία κατηγορία, πρέπει να ορίσουμε και τους κατάλληλους μορφισμούς. Ακολουθούν τρία παραδείγματα.

Λογική

Επίπεδο 0 : Τα αντικείμενα είναι προτάσεις και οι συμβολικές αναπαραστάσεις τους.

Επίπεδο 1 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες των προτάσεων όπως αν είναι αληθείς ή όχι και αν αναλύονται σε απλούστερες μέσω της σύζευξης, της διάζευξης και της άρνησης.

Επίπεδο 2 : Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις προτάσεις όπως ο κανόνας της αλυσίδας, ο modus ponens, ο modus tolens και η λογική ισοδυναμία.

Επίπεδο 3 : Τα αντικείμενα είναι ακολουθίες προτάσεων όπως οι αποδείξεις που στηρίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων.

Επίπεδο 4 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναλύουν το λογικό σύστημα συγκρίνοντάς το με άλλες λογικές.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη λογική και τους όρους που αναφέρονται παραπάνω παραπέμπουμε στο βιβλίο του Μυτιληναίου (2004).

Πραγματικοί αριθμοί

Επίπεδο 0 : Τα αντικείμενα είναι σύμβολα που αναπαριστούν για παράδειγμα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε έναν άξονα.

Επίπεδο 1 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες αυτών των συμβόλων όπως είναι η διάταξη, η προσέγγιση από ρητούς και το πεπερασμένο ή άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Επίπεδο 2 : Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις ιδιότητες όπως η ύψωση σε δύναμη, η εξαγωγή ρίζας και οι βασικές συνέπειες των αξιωμάτων ενός σώματος.

Επίπεδο 3 : Τα αντικείμενα είναι ακολουθίες δηλώσεων στο εσωτερικό ενός συστήματος όπως η θεώρηση των πραγματικών σαν τομές Dedekind ή όρια ρητών

ακολουθιών και η συνεπαγωγή κανόνων όπως (-α)(-β) = αβ.

Επίπεδο 4 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες ενός πλήρους διατεταγμένου σώματος συγκρινόμενες με αυτές ενός σώματος γενικά.

Μία αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και αναλυτική παρουσίαση των ιδιοτήτων τους υπάρχει στο βιβλίο των Νεγρεπόντη – Γιωτόπουλου – Γιαννακούλια (1999).

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Επίπεδο 0 : Τα αντικείμενα είναι οι μετασχηματισμοί των σχημάτων όπως μεταφορά, κατοπτρισμός, στροφή, κάμψη, έκταση, διαστολή κ.λ.π.

Επίπεδο 1 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες των μετασχηματισμών όσον αφορά την επίδρασή τους στο σχήμα δηλαδή αν διατηρούν τις αποστάσεις, αν αλλάζουν τον προσανατολισμό, αν στρεβλώνουν τη μορφή κ.λ.π.

Επίπεδο 2 : Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις ιδιότητες των μετασχηματισμών όπως ότι η σύνθεση δύο κατοπτρισμών ισοδυναμεί με μια στροφή ή μια μεταφορά.

Επίπεδο 3 : Τα αντικείμενα είναι ακολουθίες προτάσεων όπως οι αποδείξεις ότι οι κατοπτρισμοί παράγουν τις ισομετρίες και ότι οι κατοπτρισμοί και οι διαστολές παράγουν τις ομοιότητες.

Επίπεδο 4 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναλύουν τις ομάδες των μετασχηματισμών στο πνεύμα του προγράμματος Klein-Erlangen.

Στη θεωρία κατηγοριών (βλέπε παράρτημα Ι) ένας *συναρτητής (functor)* αντιστοιχεί τα αντικείμενα και τους μορφισμούς μιας κατηγορίας στα αντικείμενα και τους μορφισμούς μιας άλλης έτσι ώστε να ικανοποιούνται ορισμένα αξιώματα. Οι φάσεις της μάθησης κατά Van Hiele διαμορφώνουν ένα συναρτητή. Ο σκοπός είναι να μεταφερθεί ο μαθητής από την κατηγορία (επίπεδο) $E_{\nu-1}$ στην κατηγορία E_ν με τέτοιο τρόπο ώστε τα αντικείμενα και οι μορφισμοί (σχέσεις) του επιπέδου ν-1, μετά τη φάση 5 της αφομοίωσης, να ερμηνεύονται και να γίνονται αντιληπτά σαν τα αντικείμενα και οι μορφισμοί του επιπέδου ν. Έτσι οι αρχικές απλοϊκές ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στις λέξεις και στις σχέσεις στο επίπεδο ν-1 γίνονται πιο πολύπλοκες και εμβαθύνονται στο υψηλότερο επίπεδο. Ας θυμηθούμε ότι αυτό που διακρίνει ένα επίπεδο από το επόμενό του είναι ότι αυτά που είναι υπονοούμενα στο επίπεδο ν-1 αποσαφηνίζονται και εκφράζονται κατηγορηματικά στο επίπεδο ν.

Αν πρόκειται να δούμε τα επίπεδα Van Hiele σαν κατηγορίες δεν αρκεί να καθορίσουμε τα αντικείμενα όπως περιγράψαμε παραπάνω αλλά πρέπει να καθορίσουμε και τους μορφισμούς. Στο θέμα αυτό έχουμε μια σχετική ελευθερία κινήσεων γιατί υπάρχουν περισσότερες από μια επιλογές. Με τον καθορισμό διαφορετικών συνόλων μορφισμών τεχνικά ορίζουμε διαφορετικές κατηγορίες που μπορεί να συνδέονται με ένα συναρτητή. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μορφισμοί επιλέγονται με το πιο «φυσικό» τρόπο όπως αναφέρει και ο MacLane (1971). Αν θεωρήσουμε σαν αντικείμενα του πρώτου επιπέδου τα γεωμετρικά σχήματα όπως εμφανίζονται στη επίπεδη σχολική γεωμετρία, τότε στο πνεύμα του προγράμματος Klein-Erlangen, οι μορφισμοί θα μπορούσαν να είναι οι μετασχηματισμοί του επιπέδου. Παρατηρείστε ότι οι μετασχηματισμοί που είναι μορφισμοί στις γεωμετρικές κατηγορίες είναι αντικείμενα στις κατηγορίες μετασχηματισμών. Επίσης οι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται διαφορετικά σε κάθε επίπεδο.

Ας δούμε πιο αναλυτικά τα επίπεδα των γεωμετρικών μετασχηματισμών σαν κατηγορίες.

2.2 Τα επίπεδα κατανόησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών

Όταν μιλάμε για γεωμετρία του επιπέδου συνήθως εννοούμε την Ευκλείδεια γεωμετρία η οποία θεμελιώθηκε για πρώτη φορά από τον συγκεκριμένο μαθηματικό και καταγράφηκε στα Στοιχεία του περί το 300 π.Χ. Το βιβλίο αυτό είναι το ευρύτερα διαδεδομένο επιστημονικό σύγγραμμα στην ιστορία και χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Με την πάροδο του χρόνου ανακαλύφθηκαν και ορισμένες ατέλειες που χρειάστηκε να διορθωθούν και να συμπληρωθούν όπως έγινε από τον Hilbert στην αρχή του προηγούμενου αιώνα. Σήμερα θα ήταν πιο σωστό να μιλάμε για τη γεωμετρία του επιπέδου όπως διαμορφώθηκε από τους Ευκλείδη-Hilbert. Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert αναφέρεται στο παράρτημα IV. Σήμερα επίσης γνωρίζουμε ότι αυτή δεν είναι η μοναδική γεωμετρία, υπάρχουν και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες όπως είναι η υπερβολική γεωμετρία που θεμελιώθηκε από τους Bolyai-Lobatsefski-Gauss και η ελλειπτική γεωμετρία που θεμελιώθηκε από το Riemman.

Η γεωμετρία των Ευκλείδη-Hilbert όμως εξακολουθεί να κυριαρχεί στην καθημερινή ζωή και στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην ιστορία είναι γνωστή η απάντηση του Ευκλείδη στο βασιλιά Πτολεμαίο όταν τον ρώτησε αν υπάρχει πιο εύκολος τρόπος για την κατανόηση της γεωμετρίας. Η απάντηση ήταν «Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη γεωμετρία !» και εννοούσε ότι δεν υπάρχει πιο εύκολος τρόπος κατανόησης από την αξιωματική θεμελίωση που χρησιμοποιείται στα Στοιχεία. Αν ζούσε όμως σήμερα ο Ευκλείδης ίσως να αναθεωρούσε την απάντησή του. Η μελέτη της γεωμετρίας μέσω των μετασχηματισμών μπορεί να είναι μία «βασιλική οδός» δηλαδή ένας τρόπος προσέγγισης ευκολότερος από τον παραδοσιακό (Martin 1982).

Ένας **μετασχηματισμός (transformation)** του επιπέδου είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση των σημείων του επιπέδου στον εαυτό του. Αυτό σημαίνει ότι αν f είναι ένας μετασχηματισμός, τότε για κάθε σημείο Α του επιπέδου υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Β ώστε f(Α)=Β και αντίστοιχα για κάθε σημείο Δ του επιπέδου υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Γ ώστε f(Γ)=Δ. Για να καταλάβει κανείς ένα μαθηματικό σύστημα πρέπει να καταλάβει τους μετασχηματισμούς του

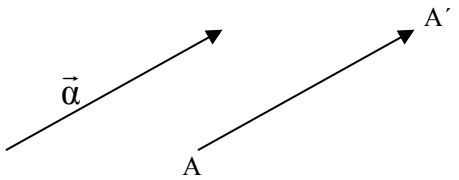
συστήματος και πιο συγκεκριμένα αυτούς που αφήνουν κάποια στοιχεία ή ιδιότητες αναλλοίωτες. Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών του επιπέδου είναι πολύ ευρύ για να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντίθετα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον το σύνολο των μετασχηματισμών που έχουν την ιδιότητα να απεικονίζουν τις ευθείες σε ευθείες δηλαδή αν ε είναι μία ευθεία, τότε και το f(ε) να είναι μία ευθεία. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται **συγγραμμικότητα (collineation)** και η συνήθης γεωμετρία βασίζεται σε τέτοιου είδους μετασχηματισμούς.

Ας εξετάσουμε τώρα πιο αναλυτικά τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου και την κατανόησή τους από την κατηγορική άποψη των επιπέδων Van Hiele που αναφέραμε παραπάνω.

2.2.1 Επίπεδο 0

«Τα αντικείμενα είναι οι μετασχηματισμοί των σχημάτων όπως μεταφορά, κατοπτρισμός, στροφή, κάμψη, έκταση, διαστολή κ.λ.π.»

Αν $\vec{\alpha}(x_o,y_o)$ ένα διάνυσμα του επιπέδου, τότε **μεταφορά (translation)** κατά $\vec{\alpha}$ είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο Α στο Α΄ ώστε $\overrightarrow{AA'}=\vec{\alpha}$. Θα συμβολίζουμε τη μεταφορά αυτή με τ_α .



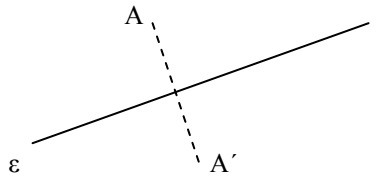
Αν Α(x,y) και Α΄(x΄,y΄) τότε :

$$\begin{cases} x'=x+x_o \\ y'=y+y_o \end{cases}$$

$$\text{ή} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε η τ_α είναι η ταυτοτική απεικόνιση ι. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε η τ_α δεν αφήνει σταθερό κανένα σημείο του επιπέδου και αφήνει σταθερές όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες με το $\vec{\alpha}$. Η μεταφορά δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Αν ε είναι μία ευθεία του επιπέδου, τότε **κατοπτρισμός (reflection)** ως προς ε είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο Α στο Α΄ ώστε η ε να είναι μεσοκάθετη του ΑΑ΄. Τον κατοπτρισμό αυτόν θα τον συμβολίζουμε με σ_ε.



Οι εξισώσεις που περιγράφουν τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία ε:Ax+By+Γ=0 είναι :

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax+By+\Gamma)}{A^2+B^2} \\[2ex] y' = y - \dfrac{2B(Ax+By+\Gamma)}{A^2+B^2} \end{cases}$$

$$\text{ή} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \left[\begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2-B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2A\Gamma \\ -2B\Gamma \end{pmatrix} \right]$$

Αν η ευθεία ε ταυτίζεται με τον άξονα x΄x, τότε οι εξισώσεις γίνονται

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

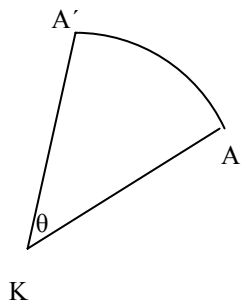
και αν η ευθεία ε ταυτίζεται με τον y΄y, τότε γίνονται

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ο κατοπτρισμός αφήνει σταθερά όλα τα σημεία της ευθείας ε. Επίσης αφήνει σταθερές την ίδια την ευθεία ε και όλες όσες είναι κάθετες σ΄ αυτήν. Ο κατοπτρισμός είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Αν $K(x_o,y_o)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου και θ μία γωνία, τότε **στροφή (rotation)** γύρω από το Α κατά γωνία θ είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το Α στο Α΄ ώστε το ΑΑ΄ να είναι τόξο ανοίγματος θ του κύκλου (Κ,ΚΑ). Τη στροφή αυτή θα τη συμβολίζουμε με $\rho_{K,\theta}$.



Οι εξισώσεις που περιγράφουν την στροφή αυτή είναι :

$$\begin{cases} x' = (x-x_o)\sigma\upsilon\nu\theta - (y-y_o)\eta\mu\theta + x_o \\ y' = (x-x_o)\eta\mu\theta + (y-y_o)\sigma\upsilon\nu\theta + y_o \end{cases}$$

$$\text{ή}\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ -\eta\mu\theta & 1-\sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Αν θ=2κπ τότε η στροφή $\rho_{K,2\kappa\pi}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση *ι*. Αν θ≠2κπ τότε η στροφή αφήνει σταθερό μόνο το σημείο Κ. Αν επιπλέον θ≠κπ δεν αφήνει σταθερή καμία ευθεία του επιπέδου.

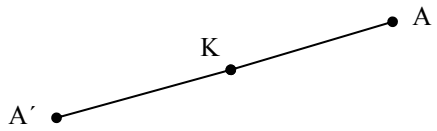
Όταν το Κ είναι το Ο(0,0) τότε οι εξισώσεις αυτές γίνονται :

$$\begin{cases} x' = x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta \\ y' = x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

$$\text{ή}\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Η στροφή με κέντρο το Ο(0,0) είναι προφανώς γραμμικός μετασχηματισμός.

Αν $K(x_o,y_o)$ και θ=(2κ+1)π, τότε έχουμε την ειδική περίπτωση της **ημιπεριστροφής (halfturn)** ή όπως είναι πιο γνωστή της **κεντρικής συμμετρίας**.



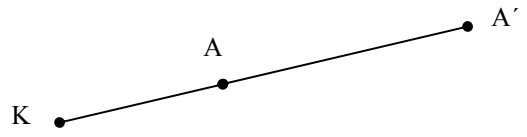
Οι εξισώσεις που την περιγράφουν είναι :

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_o \\ y' = -y + 2y_o \end{cases}$$

$$\text{ή}\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Η ημιπεριστροφή αφήνει σταθερό το σημείο Κ και οποιαδήποτε ευθεία περνάει από αυτό.

Αν $K(x_o,y_o)$ είναι σημείο του επιπέδου και $\lambda \in R$ $(\lambda \neq 0)$ τότε **διαστολή (dilation)** με λόγο λ και κέντρο K είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το σημείο A στο A΄ ώστε $\overrightarrow{KA'} = \lambda \overrightarrow{KA}$. Η διαστολή αυτή συμβολίζεται με $\delta_{K,\lambda}$. Αν $|\lambda|<1$ τότε στην πραγματικότητα δεν έχουμε διαστολή αλλά συστολή αφού το μέγεθος των εικόνων θα είναι μικρότερο του αρχικού. Για ευκολία στην ορολογία όμως χρησιμοποιούμε τον όρο διαστολή $\forall \lambda \neq 0$.



Οι εξισώσεις που την περιγράφουν είναι :

$$\begin{cases} x' = \lambda(x-x_o) + x_o \\ y' = \lambda(y-y_o) + y_o \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$

Αν λ=1 τότε η διαστολή είναι η ταυτοτική απεικόνιση ενώ αν λ=-1 η διαστολή είναι ημιπεριστροφή. Για όλες τις άλλες τιμές του λ η διαστολή αφήνει σταθερό το K και τις ευθείες που περνούν από αυτό.

Αν το K είναι το O(0,0) τότε οι εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά και γίνονται :

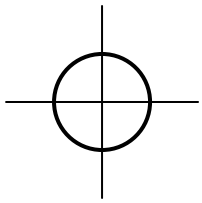
$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

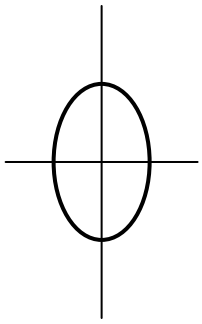
Αν $\lambda \in R$ ($\lambda \neq 0$) τότε **έκταση (strain)** με λόγο λ κατά τον άξονα **x΄x** είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το σημείο A(x,y) στο σημείο A΄(x΄,y΄) ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



σχήμα (α)



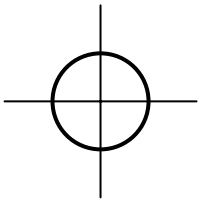
σχήμα (β)

Το σχήμα (β) είναι ο μετασχηματισμός του σχήματος (α) μετά από μία τέτοια έκταση. Για λ=1 η έκταση είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός *ι*. Για λ=-1 η έκταση είναι κατοπτρισμός ως προς τον άξονα x΄x. Για $\lambda \neq \pm 1$ η έκταση αφήνει σταθερά τα σημεία του άξονα x΄x, τον ίδιο τον x΄x και τις ευθείες που είναι κάθετες σ΄ αυτόν.

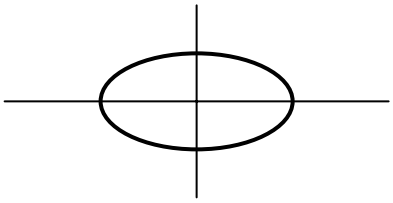
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε **έκταση** με λόγο λ κατά τον άξονα **y΄y** τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το σημείο A(x,y) στο σημείο A΄(x΄,y΄) ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



σχήμα (α)



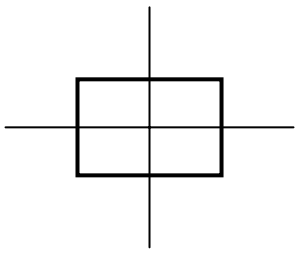
σχήμα (β)

Το σχήμα (β) είναι ο μετασχηματισμός του σχήματος (α) μετά από μία τέτοια έκταση. Για λ=1 η έκταση είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός *ι*. Για λ=-1 η έκταση είναι κατοπτρισμός ως προς τον άξονα y΄y. Για λ≠±1 η έκταση αφήνει σταθερά τα σημεία του άξονα y΄y, τον ίδιο τον y΄y και τις ευθείες που είναι κάθετες σ΄ αυτόν.

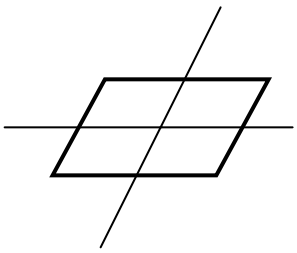
Αν λ∈R τότε **κάμψη (shear)** με λόγο λ κατά τον άξονα **x΄x** είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το σημείο A(x,y) στο σημείο A΄(x΄,y΄) ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\begin{cases} x' = x + \lambda y \\ y' = y \end{cases}$$

ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



σχήμα (α)



σχήμα (β)

Το σχήμα (β) είναι ο μετασχηματισμός του σχήματος (α) μετά από μία τέτοια κάμψη. Για λ=0 η κάμψη είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός *ι*. Για λ≠0 η έκταση αφήνει σταθερά τα σημεία του άξονα x΄x, τον ίδιο τον x΄x και τις ευθείες που είναι παράλληλες σ΄ αυτόν.

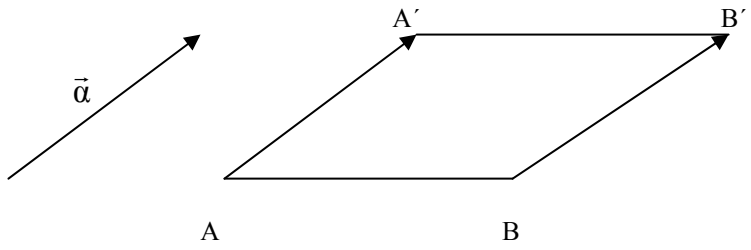
Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε **κάμψη** με λόγο λ κατά τον άξονα **y΄y**.

2.2.2 Επίπεδο 1

«Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες των μετασχηματισμών όσον αφορά την επίδρασή τους στο σχήμα δηλαδή αν διατηρούν τις αποστάσεις, αν αλλάζουν τον προσανατολισμό, αν στρεβλώνουν τη μορφή κ.λ.π.»

Ένας μετασχηματισμός f καλείται **ισομετρία (isometry)** αν για κάθε A,B, και A΄,B΄ με f(A)=A΄ και f(B)=B΄ ισχύει (A΄B΄)=(AB). Με (AB) συμβολίζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB που υπολογίζεται με το γνωστό τύπο της απόστασης δύο σημείων δηλαδή αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τότε (AB) = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Μια ισομετρία είναι εξ ορισμού 1-1. Αν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε η ισομετρία είναι και επί. Ο χώρος που εξετάζουμε είναι το ευκλείδειο επίπεδο με διάσταση 2, άρα οι ισομετρίες είναι 1-1 και επί. Η μεταφορά, ο κατοπτρισμός και η στροφή είναι ισομετρίες.

Για τη μεταφορά θα το αποδείξουμε και γεωμετρικά και αλγεβρικά.



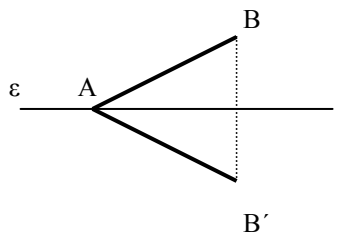
Επειδή από τον ορισμό της μεταφοράς $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ το σχήμα ABB΄A΄ είναι παραλληλόγραμμο άρα AB=A΄B΄.

Αλγεβρικά από τους τύπους της μεταφοράς έχουμε

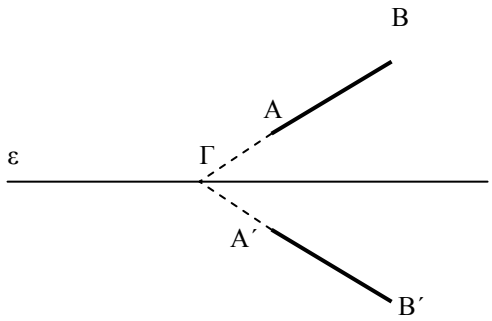
$x_1'-x_2' = (x_1-x_o)-(x_2-x_o) = x_1-x_2$ και $y_1'-y_2' = (y_1-y_o)-(y_2-y_o) = y_1-y_2$ και συνεπώς $\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Για τον κατοπτρισμό η αλγεβρική απόδειξη λόγω της μορφής των τύπων είναι μακροσκελής. Παραθέτουμε την γεωμετρική απόδειξη.

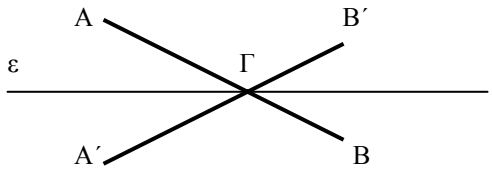
Αν το ένα άκρο Α του ΑΒ βρίσκεται πάνω στη ε τότε ΑΒ=ΑΒ΄ αφού η ε είναι μεσοκάθετος του ΒΒ΄.



Αν η προέκταση του ΑΒ τέμνει την ε στο Γ τότε Α΄Β΄ = ΓΒ΄ - ΓΑ΄ = ΓΒ - ΓΑ=ΑΒ.

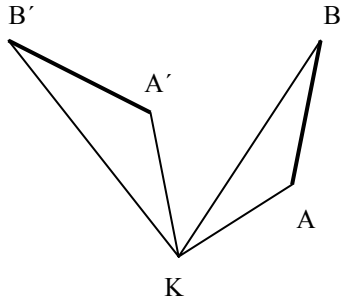


Αν το ΑΒ τέμνει την ε στο Γ τότε Α΄Β΄ = ΓΒ΄ + ΓΑ΄ = ΓΒ + ΓΑ=ΑΒ.



Αν το ΑΒ ανήκει στην ε ή είναι παράλληλο ή κάθετο σ΄ αυτήν, η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Για τη στροφή η γεωμετρική απόδειξη είναι επίσης πολύ ευκολότερη από την αλγεβρική. Αν ο φορέας του ΑΒ δεν περνάει από το Κ, τότε τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΑ΄Β΄ είναι ίσα γιατί έχουν ΚΑ=ΚΑ΄, ΚΒ=ΚΒ΄ και ∠ΑΚΒ = ∠Α΄ΚΒ΄ = θ-∠ΒΚΑ΄.



Αν ο φορέας της ΑΒ περνάει από το Κ, η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Μια ισομετρία διατηρεί τη διάταξη με την έννοια ότι αν Β βρίσκεται μεταξύ των Α και Γ, τότε ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ άρα Α΄Β΄+Β΄Γ΄=Α΄Γ΄ άρα Β΄ βρίσκεται μεταξύ των Α΄ και Γ΄. Αυτό σημαίνει ότι μία ισομετρία απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο Α΄Β΄ και την ευθεία ΑΒ στην Α΄Β΄ είναι δηλαδή συγγραμμικότητα. Όταν μάλιστα Β μέσο του ΑΓ τότε Β΄ μέσο του Α΄Γ΄. Επίσης μια ισομετρία απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο Α΄Β΄Γ΄ που έχει ίσες πλευρές με το αρχικό και συνεπώς και ίσες γωνίες. Άρα μια ισομετρία διατηρεί το άνοιγμα των γωνιών, συνεπώς διατηρεί την καθετότητα. Τέλος μια ισομετρία διατηρεί την παραλληλία αφού αν ε//ζ υπάρχει ευθεία η ώστε ε⊥η⊥ζ άρα ε΄⊥η΄⊥ζ΄ δηλαδή ε΄//ζ΄.

Ένας μετασχηματισμός f καλείται **ομοιότητα (similarity)** με λόγο λ>0, αν για κάθε Α,Β, και Α΄,Β΄ με f(A)=A΄ και f(B)=B΄ ισχύει (Α΄Β΄)=λ(ΑΒ). Μια ισομετρία είναι ομοιότητα με λ=1.

Μια διαστολή με λόγο λ είναι ομοιότητα με λόγο $|\lambda|$. Πράγματι $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'K} + \overrightarrow{KB'} = \lambda\overrightarrow{AK} + \lambda\overrightarrow{KB} = \lambda(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}) = \lambda\overrightarrow{AB}$ άρα

$|\overrightarrow{A'B'}| = |\lambda\overrightarrow{AB}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{AB}|$ δηλαδή (Α΄Β΄)=$|\lambda|$(ΑΒ).

Μια ομοιότητα δεν διατηρεί τις αποστάσεις. Όμως όπως και η ισομετρία διατηρεί τη διάταξη με την έννοια ότι αν Β βρίσκεται μεταξύ των Α και Γ, τότε ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ άρα λΑΒ+λΒΓ=λΑΓ άρα Α΄Β΄+Β΄Γ΄=Α΄Γ΄ άρα Β΄ βρίσκεται μεταξύ των Α΄ και Γ΄. Αυτό σημαίνει ότι μία ομοιότητα απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο Α΄Β΄ και την ευθεία ΑΒ στην Α΄Β΄ δηλαδή είναι επίσης συγγραμμικότητα. Όταν μάλιστα Β μέσο του ΑΓ τότε Β΄ μέσο του Α΄Γ΄. Επίσης μια ομοιότητα απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο Α΄Β΄Γ΄ που έχει πλευρές ανάλογες με το αρχικό και συνεπώς ίσες γωνίες με αυτό . Άρα μια ομοιότητα διατηρεί το άνοιγμα των γωνιών, συνεπώς διατηρεί την καθετότητα και την παραλληλία.

Μία έκταση με λόγο λ κατά τον άξονα x΄x δεν διατηρεί ούτε τις αποστάσεις ούτε το άνοιγμα των γωνιών. Απεικονίζει όμως τις ευθείες σε ευθείες και πιο συγκεκριμένα την ευθεία Ax+By+Γ=0 στην $Ax+\frac{B}{\lambda}y+\Gamma=0$ γιατί $Ax'+\frac{B}{\lambda}y'+\Gamma = Ax+\frac{B}{\lambda}\lambda y+\Gamma = Ax+By+\Gamma = 0$ δηλαδή είναι συγγραμμικότητα. Επίσης αν Β μέσο του ΑΓ, τότε Β΄ μέσο του Α΄Γ΄ γιατί $x_B' = x_B = \frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{x_A'+x_\Gamma'}{2}$ και $y_B' = \lambda y_B = \lambda\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\lambda\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{y_A'+y_\Gamma'}{2}$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν Β εσωτερικό του ΑΓ τότε Β΄ εσωτερικό του Α΄Γ΄ και συνεπώς απεικονίζει τα ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα. Διατηρεί επίσης την παραλληλία γιατί αν ε//ζ και ε΄ δεν ήταν παράλληλη της ζ΄ τότε θα υπήρχε σημείο Α΄=ε΄∩ζ΄ άρα θα υπήρχε Α=ε∩ζ άτοπο. Τα συμπεράσματα είναι ίδια για την έκταση κατά τον άξονα y΄y.

Μία κάμψη με λόγο λ κατά τον άξονα x΄x δεν διατηρεί επίσης ούτε τις αποστάσεις ούτε το άνοιγμα των γωνιών. Απεικονίζει όμως τις ευθείες σε ευθείες και πιο συγκεκριμένα την ευθεία Ax+By+Γ=0 στην Ax+(B-λA)y+Γ=0 γιατί Ax΄+(B-λA)y΄+Γ = A(x+λy)+(B-λA)y+Γ = Ax+λAy+By-λAy+Γ = Ax+By+Γ = 0 άρα είναι συγγραμμικότητα. Ακόμα αν Β μέσο του ΑΓ, τότε Β΄ μέσο του Α΄Γ΄ γιατί $x_B' = x_B+\lambda y_B = \frac{x_A+x_\Gamma}{2}+\lambda\frac{y_A+y_\Gamma}{2} = \frac{x_A+\lambda y_A+x_\Gamma+\lambda y_\Gamma}{2} =$

$\frac{x_A'+x_\Gamma'}{2}$ και $y_{B'} = y_B = \frac{y_A+y_\Gamma}{2} = \frac{y_A'+y_\Gamma'}{2}$. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι αν Β εσωτερικό του ΑΓ τότε Β΄ εσωτερικό του Α΄Γ΄ δηλαδή η κάμψη απεικονίζει τα ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα. Διατηρεί επίσης την παραλληλία με τον ίδιο τρόπο όπως η έκταση.

2.2.3 Επίπεδο 2

«Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις ιδιότητες των μετασχηματισμών όπως ότι η σύνθεση δύο κατοπτρισμών ισοδυναμεί με μια στροφή ή μια μεταφορά.»

Το σύνολο $\mathcal{M}$ των μετασχηματισμών του επιπέδου αποδεικνύεται ότι είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση ι.

- Αν α,β είναι δύο τέτοιοι μετασχηματισμοί τότε $\alpha(\beta(A))=\alpha(\beta(B)) \Leftrightarrow \beta(A) = \beta(B) \Leftrightarrow A=B$ άρα η $\alpha\circ\beta$ είναι 1-1. Επίσης για κάθε Α στο επίπεδο υπάρχει Β ώστε $\alpha(B) = A$ και συνεπώς υπάρχει Γ ώστε $\beta(\Gamma) = B$ δηλαδή $\alpha(\beta(\Gamma)) = \alpha(B) = A$ άρα η $\alpha\circ\beta$ είναι επί. Έτσι η $\alpha\circ\beta$ είναι μετασχηματισμός και το σύνολο Μ είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση.

- Γνωρίζουμε ότι για τη σύνθεση ισχύει η προσεταιριστική δηλαδή $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)= (\alpha\circ\beta)\circ\gamma$.

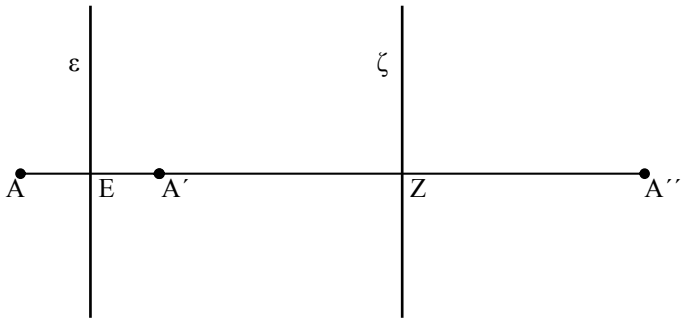
- Για την ταυτοτική απεικόνιση ι ισχύει $\alpha\circ\iota = \iota\circ\alpha = \alpha$

- Εφόσον α είναι 1-1 και επί υπάρχει α^{-1} που είναι επίσης 1-1 και επί άρα ανήκει στο Μ, ώστε $\alpha\circ\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\circ\alpha = \iota$.

Μέσα στην ομάδα αυτή μπορούμε να διακρίνουμε διάφορες υποομάδες. Μπορούμε ακόμα να βγάλουμε αρκετά χαρακτηριστικά συμπεράσματα για τη σύνθεση συγκεκριμένων μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 1 : Η σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς ευθείες παράλληλες είναι μια μεταφορά

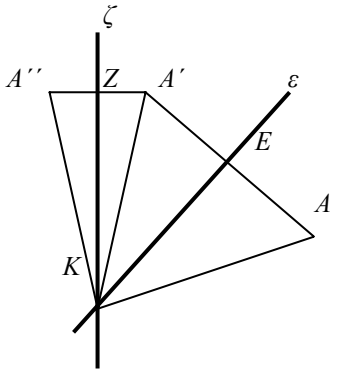
Έστω δύο παράλληλες ευθείες ε,ζ και τυχαίο σημείο Α. Αν $\sigma_\varepsilon(A)=A'$ και $\sigma_\zeta(A')=A''$ τότε $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=2\overrightarrow{EA'}+2\overrightarrow{A'Z}=2\overrightarrow{EZ}$ άρα $(\sigma_\zeta \circ \sigma_\varepsilon)(A) = A'' = \tau_{2EZ}(A)$ όπου $\overrightarrow{EZ}$ είναι το κάθετο διάνυσμα από την ε προς τη ζ.



Η πρόταση ισχύει και αντίστροφα δηλαδή αν τ είναι μία μεταφορά τότε αν επιλέξουμε οποιαδήποτε ευθεία ε κάθετη στο $\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια μία δεύτερη ευθεία ζ που να απέχει από την πρώτη προσανατολισμένη απόσταση ίση με $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}$, τότε η τ γράφεται $\sigma_\zeta \circ \sigma_\varepsilon$.

Παράδειγμα 2 : Η σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς ευθείες τεμνόμενες είναι μια στροφή.

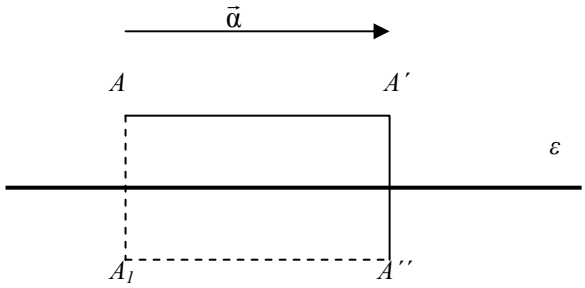
Έστω δύο ευθείες ε,ζ που τέμνονται στο Κ και τυχαίο σημείο του επιπέδου Α. Αν $\sigma_\varepsilon(A)=A'$ και $\sigma_\zeta(A')=A''$ τότε $KA = KA'=KA''$ και $\angle AKA'' = \angle AKA'+\angle A'KA'' = 2\angle EKA'+2\angle A'KZ = 2\angle EKZ$ δηλαδή $(\sigma_\zeta \circ \sigma_\varepsilon)(A) = A'' = \rho_{K,2EKZ}$ όπου $\angle EKZ$ η γωνία των δύο ευθειών (όλες οι παραπάνω γωνίες θεωρούνται προσανατολισμένες)



Η πρόταση ισχύει και αντίστροφα δηλαδή αν ρ είναι μία στροφή τότε αν επιλέξουμε οποιαδήποτε ευθεία ε που να περνάει από το κέντρο Κ της στροφής και στη συνέχεια μία δεύτερη ευθεία ζ που να περνάει επίσης από το Κ και να σχηματίζει με την ε προσανατολισμένη γωνία θ/2, τότε η ρ γράφεται $\sigma_{\zeta} \circ \sigma_{\varepsilon}$.

Άμεσο συμπέρασμα αυτού είναι ότι δύο διαδοχικές ανακλάσεις κατά ευθείες κάθετες μεταξύ τους είναι μια στροφή με κέντρο το σημείο τομής τους και γωνία π, δηλαδή είναι μια ημιπεριστροφή ή κεντρική συμμετρία.

Η σύνθεση μιας μεταφοράς και ενός κατοπτρισμού κατά ευθεία ε παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ της μεταφοράς είναι ένας **κατοπτρισμός με ολίσθηση (glide reflection).** Ένας κατοπτρισμός με ολίσθηση δεν αφήνει σταθερό κανένα σημείο, αφήνει όμως σταθερή την ευθεία ε. Επίσης σαν σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία.



Όπως φαίνεται από το σχήμα στην περίπτωση αυτή $\sigma_{\varepsilon} \circ \tau_{\alpha} = \tau_{\alpha} \circ \sigma_{\varepsilon}$. Αποδεικνύεται επίσης ότι μία μεταφορά με ολίσθηση είναι σύνθεση μίας ανάκλασης και μιας ημιπεριστροφής.

Η σύνθεση μιας έκτασης με λόγο λ κατά τον άξονα x΄x με μία έκταση με τον ίδιο λόγο κατά τον άξονα y΄y είναι μία διαστολή με κέντρο το Ο(0,0) και λόγο λ.

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \lambda y' \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{σημαίνει} \quad \begin{cases} x'' = \lambda x \\ y'' = \lambda y \end{cases}$$

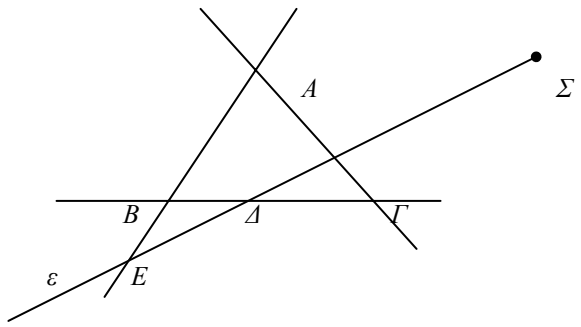
2.2.4 Επίπεδο 3

«Τα αντικείμενα είναι ακολουθίες προτάσεων όπως οι αποδείξεις ότι οι κατοπτρισμοί δημιουργούν τις ισομετρίες και ότι οι κατοπτρισμοί και οι διαστολές δημιουργούν τις ομοιότητες.»

Μέσα στην ομάδα των μετασχηματισμών υπάρχουν πολλές υποομάδες. Η μελέτη των υποομάδων αυτών μας βοηθάει να κατανοήσουμε τη δομή της ομάδας των μετασχηματισμών. Οι μεταφορές αποτελούν ομάδα αφού $\tau_\alpha \circ \tau_\beta = \tau_{\alpha+\beta}$ και μάλιστα αβελιανή. Οι στροφές γύρω από συγκεκριμένο σημείο είναι ομάδα αφού $\rho_{K,\varphi} \circ \rho_{K,\omega} = \rho_{K,\varphi+\omega}$. Οι ισομετρίες αποτελούν ομάδα αφού η σύνθεση ισομετριών αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ισομετρία. Ας συμβολίσουμε με I την ομάδα αυτή των ισομετριών.

Στο επίπεδο ισχύει το θεώρημα Cartan-Dieudonne που λέει ότι κάθε ισομετρία μπορεί να γραφεί σαν σύνθεση το πολύ τριών κατοπτρισμών. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω αν μια ισομετρία αφήνει σταθερά δύο διαφορετικά σημεία Α,Β, αφήνει σταθερά και όλα τα σημεία της ευθείας ΑΒ. Αυτό συμβαίνει γιατί αν Γ είναι ένα σημείο της ΑΒ και Γ΄ η εικόνα του, πρέπει το Γ΄ να ανήκει στην ΑΒ αφού οι ισομετρίες είναι συγγραμμικότητες και ΑΓ=ΑΓ΄, ΒΓ=ΒΓ΄ άρα Γ=Γ΄.

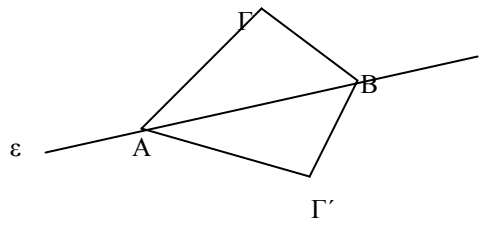
Αν τώρα μια ισομετρία αφήνει σταθερά τρία μη συγγραμμικά σημεία, τότε είναι η ταυτοτική. Αν Α,Β,Γ σταθερά τότε και όλα τα σημεία των ευθειών ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ είναι σταθερά.



Αν τώρα Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου μπορώ να φέρω ευθεία ε που να περνάει από το Σ και να τέμνει τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Δ,Ε που είναι σταθερά άρα και όλα τα σημεία της ε (συμπεριλαμβανομένου του Σ) είναι σταθερά.

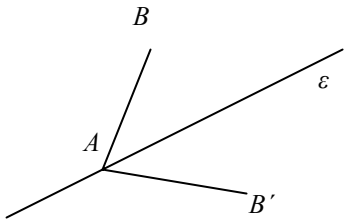
Στη συνέχεια αν α,β είναι δύο ισομετρίες που απεικονίζουν τρία μη συγγραμμικά σημεία Α,Β,Γ ώστε α(Α)=β(Α), α(Β)=β(Β), α(Γ)=β(Γ) τότε η $\beta^{-1}\circ\alpha$ αφήνει τα τρία αυτά σημεία σταθερά και συνεπώς $\beta^{-1}\circ\alpha=\iota$ άρα α=β.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι αν μια ισομετρία α αφήνει δύο σημεία Α,Β σταθερά τότε είναι η ταυτοτική ή ένας κατοπτρισμός.



Αν δεν είναι η ταυτοτική, τότε υπάρχει σημείο Γ ώστε α(Γ)≠Γ δηλαδή το Γ δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ. Έστω α(Γ)=Γ΄. Τότε ΑΓ=ΑΓ΄ και ΒΓ=ΒΓ΄ δηλαδή τα Α,Β βρίσκονται στην μεσοκάθετο ε του ΓΓ΄. Τότε όμως $\alpha(A)=\sigma_\varepsilon(A)=A$, $\alpha(B)=\sigma_\varepsilon(B)=B$ και $\alpha(\Gamma)=\sigma_\varepsilon(\Gamma)=\Gamma'$. Σύμφωνα όμως με τα προηγούμενα αφού οι α και σ_ε απεικονίζουν τρία μη συγγραμμικά σημεία στην ίδια θέση, τότε $\alpha=\sigma_\varepsilon$.

Αν μια ισομετρία α αφήνει σταθερό μόνο ένα σημείο Α, τότε είναι γινόμενο δύο κατοπτρισμών. Έστω σημείο Β≠Α και α(Β)=Β΄ και ε η μεσοκάθετος του ΒΒ΄.



Τότε $\sigma_\varepsilon\alpha(A)=\sigma_\varepsilon(A)=A$ και $\sigma_\varepsilon\alpha(B)=\sigma_\varepsilon(B')=B$ δηλαδή η $\sigma_\varepsilon\alpha$ αφήνει σταθερά τα Α και Β άρα είναι η ταυτοτική ή ένας κατοπτρισμός σ_{AB}. Αν όμως $\sigma_\varepsilon\alpha=\iota$ τότε $\alpha=\sigma_\varepsilon$ και θα άφηνε όλα τα σημεία της ε σταθερά. Έτσι $\sigma_\varepsilon\alpha= \sigma_{AB} \Leftrightarrow \alpha=\sigma_\varepsilon\sigma_{AB}$ δηλαδή γινόμενο δύο κατοπτρισμών.

Συνέπεια όλων των παραπάνω είναι ότι αν μια ισομετρία αφήνει τουλάχιστον ένα σημείο σταθερό, τότε είναι γινόμενο το πολύ δύο κατοπτρισμών, γιατί αν το σημείο είναι ακριβώς ένα τότε είναι γινόμενο ακριβώς δύο κατοπτρισμών (αποδεικνύεται ότι είναι στροφή), αν είναι δύο τότε είναι ένας κατοπτρισμός (και αφήνει αμετάβλητα και όλα τα συγγραμμικά τους) και αν είναι τρία ή παραπάνω μη συγγραμμικά τότε είναι η ταυτοτική που είναι σύνθεση δύο οποιονδήποτε ίδιων κατοπτρισμών.

Έστω τώρα ισομετρία α. Αν α είναι η ταυτοτική τότε είναι γινόμενο δύο ισομετριών. Αν α δεν είναι η ταυτοτική, τότε υπάρχει σημείο Α ώστε $\alpha(A)=B\neq A$. Έστω ε η μεσοκάθετος του ΑΒ. Τότε $\sigma_\varepsilon\alpha(A)=A$ δηλαδή η $\sigma_\varepsilon\alpha$ αφήνει σταθερό το Α και συνεπώς είναι ίση με μια ισομετρία β που είναι γινόμενο το πολύ δύο κατοπτρισμών. Όμως $\sigma_\varepsilon\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha=\sigma_\varepsilon\beta$ δηλαδή καταλήξαμε ότι κάθε ισομετρία α είναι γινόμενο το πολύ τριών κατοπτρισμών.

Από όλα τα προηγούμενα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια ισομετρία είναι σύνθεση ενός, δύο ή τριών κατοπτρισμών. Στη δεύτερη περίπτωση είναι στροφή ή μεταφορά και στην τρίτη κατοπτρισμός ή κατοπτρισμός με ολίσθηση. Έτσι καταλήγουμε στο γνωστό συμπέρασμα είναι ότι η ομάδα των ισομετριών αποτελείται από τους κατοπτρισμούς, τις μεταθέσεις, τις στροφές και τους κατοπτρισμούς με ολίσθηση. Ουσιαστικά δηλαδή παράγεται από τους κατοπτρισμούς αφού όλοι οι προαναφερόμενοι μετασχηματισμοί είναι κατοπτρισμοί ή σύνθεση κατοπτρισμών.

Ας δούμε τώρα το σύνολο O των ομοιοτήτων. Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι υποομάδα των μετασχηματισμών $\mathcal{M}$. Αν α,β ομοιότητες με λόγους κ,λ αντίστοιχα, για κάθε Α,Β σημεία του επιπέδου $\beta(A)=A'$, $\beta(B)=B'$, $(A'B')=\lambda(AB)$, $\alpha(A')=A''$, $\alpha(B')=B''$, $(A''B'')=\kappa(A'B')$. Τότε $(\alpha\circ\beta)(A)=A''$, $(\alpha\circ\beta)(B)=B''$ και $(A''B'')=\kappa\lambda(AB)$ συνεπώς $\alpha\circ\beta$ είναι ομοιότητα και μάλιστα με λόγο

ίσο με κλ. Το σύνολο O είναι κλειστό. Επίσης για κάθε $\alpha \in O$ με λόγο λ, ο μετασχηματισμός α^{-1} είναι επίσης ομοιότητα με λόγο $\frac{1}{\lambda}$ γιατί $\alpha^{-1}(A')=A$, $\alpha^{-1}(B')=B$ και $(AB)=\frac{1}{\lambda}(A'B')$. Έτσι το σύνολο O των ομοιοτήτων είναι υποομάδα του $\mathcal{M}$. Εφόσον δε κάθε ισομετρία είναι ομοιότητα το σύνολο I των ισομετριών είναι υποομάδα της O.

Κάθε ομοιότητα είναι σύνθεση μιας ισομετρίας και μιας διαστολής. Ας υποθέσουμε ότι α είναι μια ομοιότητα με λόγο λ. Τότε για οποιοδήποτε σημείο Κ του επιπέδου μπορούμε να ορίσουμε τη διαστολή $\delta_{K,\lambda}$ και στη συνέχεια την αντίστροφή της τη διαστολή $\delta_{K,\lambda}^{-1} = \delta_{K,1/\lambda}$. Τότε έχουμε $\alpha = \alpha \circ \iota = \alpha \circ (\delta^{-1} \circ \delta) = (\alpha \circ \delta^{-1}) \circ \delta$. Αλλά α, δ^{-1} είναι ομοιότητες με λόγους λ και 1/λ αντίστοιχα άρα η $\alpha \circ \delta^{-1}$ είναι ομοιότητα με λόγο 1 δηλαδή ισομετρία.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι μια ομοιότητα που δεν έχει κανένα σταθερό σημείο είναι ισομετρία. Στηριζόμενοι σ΄ αυτήν μπορούμε να βρούμε τα είδη των μετασχηματισμών από τα οποία αποτελείται το σύνολο O των ομοιοτήτων. Αν α είναι μια ομοιότητα τότε ή είναι ισομετρία ή όχι. Αν δεν είναι ισομετρία, τότε έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο Κ. Παίρνοντας αυτό ακριβώς το σημείο σαν κέντρο μιας διαστολής δ έχουμε $\alpha=\beta \circ \delta$ όπου β ισομετρία. Τότε $K = \alpha(K) = (\beta \circ \delta)(K) = \beta(\delta(K)) = \beta(K)$ άρα β είναι μια ισομετρία που έχει σταθερό το Κ δηλαδή η ταυτοτική ή ένας κατοπτρισμός ή μια στροφή. Έτσι καταλήγουμε ότι μια οποιαδήποτε ομοιότητα είναι ισομετρία ή διαστολή ή διαστολή με κατοπτρισμό ή διαστολή με στροφή. **Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι αφού οι ισομετρίες παράγονται από τους κατοπτρισμούς, τότε οι ομοιότητες παράγονται από τους κατοπτρισμούς και τις διαστολές.**

2.2.5 Επίπεδο 4

«Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναλύουν τις ομάδες των μετασχηματισμών στο πνεύμα του προγράμματος Klein-Erlangen και ιδιαίτερα αυτών που ορίζουν γεωμετρίες διάφορες της ευκλείδειας.»

Ο ορισμός της δράσης μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X και ο αντίστοιχος ορισμός μιας γεωμετρίας Klein αναφέρονται στο παράρτημα III. Ας δούμε κάποια παραδείγματα μη ευκλείδειων γεωμετριών.

2.2.51 Η γεωμετρία της χελώνας

Είναι σε όλους γνωστή η γλώσσα LOGO που χρησιμοποιούμε για να διδάξουμε στοιχειώδη προγραμματισμό και βασικές μαθηματικές έννοιες σε μικρούς μαθητές. Στη γλώσσα αυτή ο «κέρσορας» της οθόνης έχει τη μορφή μιας χελώνας η οποία μπορεί να κινηθεί εμπρός-πίσω και να στρίψει δεξιά-αριστερά ακολουθώντας συγκεκριμένες οδηγίες του προγραμματιστή. Κατά την κίνησή της αφήνει πίσω της ένα ίχνος και έτσι σχεδιάζει διάφορα σχήματα.

Η θέση και ο προσανατολισμός της χελώνας καθορίζονται από μια τριάδα (x,y,α) όπου x,y είναι οι συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες με αρχή το κέντρο της οθόνης και α η γωνία που σχηματίζει ο προσανατολισμός της χελώνας με το «Βορρά» δηλαδή το πάνω μέρος της οθόνης. Η μονάδα μέτρησης για τους άξονες x και y είναι το pixel δηλαδή η στοιχειώδης κουκίδα που μπορεί να απεικονιστεί στην οθόνη. Η μονάδα μέτρησης γωνιών είναι η μοίρα και οι γωνίες υπολογίζονται κατά τη συνήθη θετική φορά. Η γωνία α θα πρέπει προφανώς να θεωρηθεί σαν α mod 360.

Για τη κίνηση της χελώνας αρκούν δύο μόνο μετασχηματισμοί. Ο ένας είναι ο μετασχηματισμός «μπροστά», ας τον συμβολίσουμε με φ, που δίνει εντολή στη χελώνα να προχωρήσει κατά ένα pixel προς την κατεύθυνση που είναι προσανατολισμένη. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει τύπο

$$\varphi\,(x\,,\,y\,,\,\alpha) = (x+\eta\mu\alpha\,,\,y+\sigma\upsilon\nu\alpha\,,\,\alpha)$$

και είναι 1-1 και επί. Στην πράξη βέβαια η οθόνη δεν έχει άπειρα σημεία και συνεπώς πρέπει να γίνονται διάφορες προσεγγίσεις κατά τον υπολογισμό της θέσης της χελώνας. Ας υποθέσουμε όμως ότι δεν έχουμε τέτοιους περιορισμούς δηλαδή εργαζόμαστε σε μία οθόνη με άπειρες διαστάσεις και άπειρη ανάλυση. Αν θέλουμε η χελώνα να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

περισσότερες από μια φορές. Για παράδειγμα για να κινηθεί η χελώνα κατά 10 pixel μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $\varphi^{10}=\varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ\ldots\circ\varphi$ που έχει τύπο

$$\varphi^{10}(x, y, \alpha) = (x+10\eta\mu\alpha, y+10\sigma\upsilon\nu\alpha, \alpha)$$

Ο άλλος μετασχηματισμός που μας χρειάζεται είναι ο μετασχηματισμός «αριστερά», ας τον συμβολίσουμε ρ, που δίνει εντολή στη χελώνα να στρίψει αριστερά κατά μια μοίρα και έχει τύπο

$$\rho(x, y, \alpha) = (x, y, \alpha+1)$$

και επίσης είναι 1-1 και επί. Αν θέλουμε η χελώνα να στρίψει αριστερά κατά 10 μοίρες, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $\rho^{10} = \rho\circ\rho\circ\rho\circ\ldots\circ\rho$ που έχει τύπο

$$\rho(x, y, \alpha) = (x, y, \alpha+10)$$

Για να δώσουμε εντολή στη χελώνα να στρίψει δεξιά κατά μια μοίρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ρ^{359} και για να στρίψει δεξιά κατά μ μοίρες τον $\rho^{360-\mu}$.

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι φανερό ότι $\rho^{360} = \iota$ (η ταυτοτική συνάρτηση). Ακόμα αφού ο ρ είναι 1-1 και επί, τότε είναι αντιστρέψιμος και αφού $\rho^{359}\circ\rho = \rho\circ\rho^{359} = \rho^{360} = \iota$ έχουμε $\rho^{-1} = \rho^{359}$. Με τον ίδιο τρόπο ο φ είναι 1-1 και επί άρα είναι και αυτός αντιστρέψιμος και ισχύει $(\rho^{180}\varphi\,\rho^{180})\,\varphi = \varphi\,(\rho^{180}\varphi\,\rho^{180}) = \iota$ άρα $\varphi^{-1} = \rho^{180}\varphi\,\rho^{180}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να περιγράψουμε οποιαδήποτε κίνηση στην οθόνη με τη βοήθεια των μετασχηματισμών φ και ρ και των συνδυασμών τους. Έστω λοιπόν X το σύνολο των μετασχηματισμών που γράφονται σαν σύνθεση πεπερασμένου πλήθους φ και ρ. Το σύνολο αυτό είναι ομάδα με τη συνήθη πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων γιατί :

i) Είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων εξ ορισμού.

ii) Η σύνθεση συναρτήσεων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα

iii) Το σύνολο X περιέχει την ταυτοτική $\iota = \rho^{360}$.

iv) Κάθε μετασχηματισμός $f \in \mathcal{X}$ είναι 1-1 και επί (αφού είναι σύνθεση μετασχηματισμών που είναι 1-1 και επί), υπάρχει ο αντίστροφός του και ανήκει και αυτός στο $\mathcal{X}$. Για παράδειγμα αν $f = \varphi^{\nu}\rho^{\mu}$ τότε $f^{-1} = (\varphi^{\nu}\rho^{\mu})^{-1} = (\rho^{-1})^{\mu}(\varphi^{-1})^{\nu}$.

Καταλήγουμε συνεπώς ότι η «γεωμετρία της χελώνας» δηλαδή αυτή που περιγράφει την κίνηση της χελώνας στη γλώσσα LOGO καθορίζεται από τη δράση της ομάδας $\mathcal{X}$ που παράγεται από τους μετασχηματισμούς φ και ρ.

2.2.52 Οι συγγραμμικότητες της προβολικής γεωμετρίας

Η προβολική γεωμετρία είναι από τις πιο γνωστές μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Ποια είναι η ομάδα που όταν δρα στο προβολικό επίπεδο καθορίζει την προβολική γεωμετρία ;

Καλούμε μορφισμό μεταξύ δύο προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ και $(\mathcal{P}',\mathcal{L}',\mathcal{I}')$ ένα ζεύγος απεικονίσεων (φ,ψ) όπου $\varphi:\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{P}'$, $\psi:\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}'$ και αν $(P,l)\in\mathcal{I} \Rightarrow (\varphi(P),\psi(l))\in\mathcal{I}'$ δηλαδή απεικονίζει τα συγγραμμικά σημεία σε συγγραμμικά σημεία. Ένας μορφισμός που είναι 1-1 και επί ονομάζεται ισομορφισμός. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι αν (φ,ψ) είναι ισομορφισμός τότε και η αντίστροφη απεικόνιση (φ^{-1},ψ^{-1}) είναι ισομορφισμός. Αν τα δύο προβολικά επίπεδα ταυτίζονται, τότε έχουμε ένα αυτομορφισμό του $\mathcal{P}$ που τον ονομάζουμε **συγγραμμικότητα**.

Το σύνολο των συγγραμμικοτήτων ενός προβολικού επιπέδου είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση γιατί :

- Είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση
- Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα
- Περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση
- Περιέχει τις αντίστροφες απεικονίσεις

Την ομάδα αυτή θα την συμβολίζουμε με Aut(P). Είναι όμως πολύ μεγάλη και πολύ «γενική» για να μας βοηθήσει να βγάλουμε

συμπεράσματα για το προβολικό επίπεδο και γι΄ αυτό πρέπει να αναζητήσουμε κατάλληλες υποομάδες που θα είναι πιο εύκολες στη μελέτη.

Μια συγγραμμικότητα καλείται κεντρική αν υπάρχει σημείο A, το κέντρο, έτσι ώστε : $[\ \forall \kappa \in \mathcal{L} : A \in \kappa\ ] \Rightarrow [\ \psi(\kappa)=\kappa\ ]$ δηλαδή όλες οι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο A να μένουν σταθερές. Αντίστοιχα μια συγγραμμικότητα καλείται αξονική αν υπάρχει ευθεία l, ο άξονας, έτσι ώστε : $[\ \forall P \in \mathcal{P} : P \in l\ ] \Rightarrow [\ \varphi(P)=P\ ]$ δηλαδή όλα τα σημεία της ευθείας l να μένουν σταθερά. Είναι προφανές ότι το κέντρο και ο άξονας είναι σταθερά στοιχεία. Αποδεικνύεται ότι μια κεντρική συγγραμμικότητα είναι και αξονική και αντίστροφα άρα δεν έχει νόημα η διάκριση μεταξύ τους.

Συμβολίζουμε με L(A,l) το σύνολο των συγγραμμικοτήτων με κέντρο A και άξονα l. Αν $A \notin l$, τότε ονομάζουμε την κεντρική συγγραμμικότητα **ομολογία (homology)** και αν $A \in l$, τότε την ονομάζουμε **έπαρση (elation).** Το σύνολο των ομολογιών με κέντρο A και άξονα l το συμβολίζουμε με H(A,l) και αντίστοιχα το σύνολο των επάρσεων με E(A,l). Επιπλέον συμβολίζουμε με E(l) το σύνολο των επάρσεων με κοινό άξονα l και οποιοδήποτε κέντρο A, με L(l) το σύνολο των αξονικών συγγραμμικοτήτων με κοινό άξονα l και με L(P) το σύνολο όλων των αξονικών συγγραμμμικοτήτων του προβολικού επιπέδου ανεξαρτήτως άξονα. Τότε ισχύουν τα εξής (◄ το σύμβολο της υποομάδας) :

$$\left.\begin{array}{l} H(A,l) \\ \\ E(A,l) \blacktriangleleft E(l) \end{array}\right\} \blacktriangleleft L(l) \blacktriangleleft L(P) \blacktriangleleft Aut(P)$$

(Stevenson 1972)

Σε ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$, με A,X,X΄ σημεία του $\mathcal{P}$ και l ευθεία του $\mathcal{P}$, θα λέμε ότι η τετράδα (A,l,X,X΄) είναι μια προσδιοριστική τετράδα αν α) τα A,X,X΄ είναι συγγραμμικά και διάφορα μεταξύ τους και β) τα X και X΄ δεν ανήκουν στην l. Ένα προβολικό επίπεδο λέγεται επίπεδο του Desargues αν για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A,l,X,X΄) του $\mathcal{P}$ με $A \notin l$, υπάρχει μια (μοναδική) $(\varphi,\psi) \in H(A,l)$ ώστε $\varphi(X)=X'$, υπάρχουν δηλαδή όλες οι δυνατές ομολογίες. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε προβολικό επίπεδο του Desargues υπάρχουν επίσης όλες οι δυνατές επάρσεις. Τέλος ισχύει

ότι σε ένα επίπεδο του Desargues η ομάδα E(l) είναι αβελιανή. Αυτό προφανώς σημαίνει ότι και κάθε ομάδα E(A,l) είναι αβελιανή.

Ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$ λέγεται επίπεδο του Πάππου αν είναι επίπεδο Desargues και επιπλέον για κάθε (A,l) $\in$ ($\mathcal{P}$,$\mathcal{L}$) με A$\notin$l, η ομάδα των ομολογιών H(A,l) είναι αβελιανή.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε λοιπόν ότι η δομή ενός προβολικού επιπέδου καθορίζεται από τη δομή των ομάδων των ομολογιών και των επάρσεων.

Η ανάγκη για τη μελέτη της προβολικής γεωμετρίας δημιουργήθηκε κατά την Αναγέννηση όταν οι ζωγράφοι και οι σχεδιαστές προσπάθησαν να απεικονίσουν στον δισδιάστατο καμβά τους τρισδιάστατα αντικείμενα με ρεαλιστικό τρόπο. Οι μελέτες τους έθεσαν τις βάσεις του κλάδου της προβολικής γεωμετρίας. Μερικές λεπτομέρειες αναφέρονται στο Παράρτημα V. Ο Klein εφάρμοσε τη θεωρία του πρώτα στην προβολική γεωμετρία και μετά στην Ευκλείδεια.

Κεφάλαιο 3

Η ιεραρχική άποψη

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να εξετάσουμε τα επίπεδα Van Hiele είναι η ιεραρχική άποψη. Μια **ιεραρχία** είναι μια σειρά διαδοχικών καλύψεων ενός συνόλου Χ. Με τον όρο *κάλυψη* εννοούμε ένα υποσύνολο Υ του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ τέτοιο ώστε αν $Y=\{ Y_i / i\in I \}$ με $Y_i\neq\emptyset$, να ισχύει $X=\bigcup_{i\in I} Y_i$. Σύμφωνα με τον ορισμό της ιεραρχίας αν το επίπεδο ν αντιστοιχεί στο σύνολο $X=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\}$ τότε το επίπεδο ν+1 θα αντιστοιχεί σε μία κάλυψη του , το επίπεδο ν+2 θα αντιστοιχεί σε μια κάλυψη της κάλυψης κ.ο.κ. Κατασκευάζοντας μια ιεραρχία πετυχαίνουμε μια *ιεραρχική ανάλυση* του συνόλου που μας ενδιαφέρει. Περισσότερες λεπτομέρειες για την έννοια της ιεραρχίας υπάρχουν στο παράρτημα ΙΙ.

Κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας αλλά και πολλών άλλων μαθημάτων είναι λογικό να σκεφτόμαστε τα επίπεδα κατανόησης σαν μία ιεραρχία. Στο πρώτο επίπεδο θα βρίσκονται τα απλούστερα σχήματα και έννοιες και όσο ανεβαίνουμε προς τα πάνω θα συναντάμε πιο γενικά σχήματα και πιο πολύπλοκες έννοιες. Βέβαια από τη μια μεριά δεν είναι πάντα δυνατόν να κατασκευαστεί με μαθηματική ακρίβεια μια ιεραρχία που να καλύπτει το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων και εννοιών και ταυτόχρονα να εξυπηρετεί τις εκπαιδευτικές ανάγκες και να πληρεί όλες τις απαιτήσεις μιας θεωρίας μάθησης. Από την άλλη όμως σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική άποψη, ο κάθε μαθητής οικοδομεί σταδιακά τη γνώση ξεκινώντας από τις απλούστερες έννοιες και κατασκευάζοντας διαδοχικά τις πιο σύνθετες, ακολουθεί δηλαδή κάποια ιεραρχία. Η μάθηση δηλαδή θα διευκολυνθεί αν ακολουθήσουμε κατά τη διδασκαλία μία «φυσιολογική» ιεραρχία. Αντίθετα θα προκαλέσουμε σύγχυση στο μαθητή αν η ιεραρχία που θα του προτείνουμε αντίκειται

στη λογική του ή αν ακολουθήσουμε μια χαοτική πορεία χωρίς εμφανή ιεραρχία.

Ας δούμε τι ισχύει αυτή τη στιγμή στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

3.1 Η γεωμετρία στο Γυμνάσιο

Στο Γυμνάσιο η έμφαση δίνεται στην πρακτική χρησιμοποίηση μεθόδων και τύπων και όχι στη θεωρητική θεμελίωση. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτό θα διευκόλυνε τη σωστή ιεράρχηση των διδασκομένων εννοιών. Από την άλλη στο Γυμνάσιο η γεωμετρία δεν είναι ανεξάρτητο μάθημα αλλά διδάσκεται μέσα στο πλαίσια των μαθηματικών που αντιμετωπίζονται σαν ενιαίο μάθημα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των κεφαλαίων της γεωμετρίας από τα υπόλοιπα κεφάλαια της άλγεβρας και συνεπώς τον περιορισμό της ελευθερίας οργάνωσής τους. Επίσης έχει σαν αποτέλεσμα μια ορισμένη υποβάθμιση και εκ μέρους των μαθητών και εκ μέρους των καθηγητών. Για τους καθηγητές ο κυριότερος λόγος της υποτίμησης αυτής είναι η σκέψη ότι οι μαθητές θα ξαναδιδαχθούν τη γεωμετρία στο Λύκειο «από την αρχή» χωρίς να προαπαιτούνται γνώσεις του γυμνασίου. Αντίθετα κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας στο Λύκειο θεωρούνται γνωστές όλες οι έννοιες που έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο και μόνο σύντομες επαναλήψεις επί αυτών μπορούν να γίνουν.

Ας δούμε τη διάρθρωση της διδακτέας ύλης. Μία λογική ιεράρχηση είναι να θεωρήσουμε ότι ένα επίπεδο κατανόησης αντιστοιχεί σε κάθε τάξη. Έτσι έχουμε

Επίπεδο 1 : Ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, κύκλος, γωνία, τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο.

Οι μαθητές στην Α΄ Γυμνασίου διδάσκονται τις βασικές έννοιες δηλαδή σημείο, ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, την έννοια της απόστασης, της παραλληλίας και της καθετότητας, τον κύκλο, τη γωνία και τις σχετικές ιδιότητες, την ισότητα τριγώνων αλλά μόνο το κριτήριο ΠΠΠ (τρεις πλευρές ίσες), τα παραλληλόγραμμα, τους

τύπους των εμβαδών τριγώνων, παραλληλογράμμων και τραπεζίων και τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Επίπεδο 2 : Συμμετρικά σχήματα, εγγεγραμμένα σχήματα, κανονικά πολύγωνα, μέτρηση κύκλου, πρίσματα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος, σφαίρα.

Οι μαθητές στη Β΄ Γυμνασίου διδάσκονται το πυθαγόρειο θεώρημα, αξονική και κεντρική συμμετρία, εγγεγραμμένες γωνίες, υπολογισμούς σε κανονικά πολύγωνα αλλά μέσω τριγωνομετρίας, μέτρηση του κύκλου και τμημάτων αυτού και τύπους για τον όγκο και την επιφάνεια των βασικών στερεών χωρίς αποδείξεις. Συνήθως λόγω έλλειψης χρόνου η στερεομετρία δεν διδάσκεται.

Επίπεδο 3 : Τρίγωνα, ομοιότητα, σφαίρα.

Οι μαθητές στην Γ΄ Γυμνασίου διδάσκονται ισότητα τριγώνων, το θεώρημα του Θαλή, ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων (παραδόξως μόνο τα δύο από τα τρία κριτήρια ομοιότητας τριγώνων), τη σχέση των εμβαδών και των όγκων ομοίων σχημάτων και σφαιρικές συντεταγμένες. Το τελευταίο αυτό κεφάλαιο περί σφαίρας δεν διδάσκεται ποτέ λόγω έλλειψης χρόνου.

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο 2 θα μπορούσε να θεωρηθεί μια κάλυψη του επιπέδου 1 αφού περιέχει ευρύτερα σύνολα γεωμετρικών σχημάτων και πιο προχωρημένες έννοιες. Αντίθετα το επίπεδο 3 δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν κάλυψη του επιπέδου 2. Το επίπεδο 3 είναι φανερά υποβαθμισμένο σε σχέση μα τα άλλα δύο. Η ισότητα τριγώνων έχει ξαναδιδαχθεί στο επίπεδο 1 (εδώ προστίθενται απλά τα άλλα δύο κριτήρια ισότητας). Η σφαιρική γεωμετρία στην πράξη δεν διδάσκεται και η μόνη καινούργια έννοια είναι αυτή της ομοιότητας.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι δεν έχουμε μια ιεραρχική δομή στη διδακτέα ύλη της γεωμετρίας του Γυμνασίου.

3.2 Η γεωμετρία στο Λύκειο

Στο Λύκειο η έμφαση δίνεται στην αξιωματική θεμελίωση και στη λογική οικοδόμηση της γεωμετρίας. Πρακτικές εφαρμογές υπάρχουν αλλά δεν είναι ο κύριος στόχος. Η γεωμετρία είναι ανεξάρτητο μάθημα και αυτό είναι σαφώς ένα πλεονέκτημα. Οι μαθητές όμως καλούνται να ξεχάσουν όποια γεωμετρική έννοια έχουν μάθει στο γυμνάσιο και να ξαναρχίσουν από την αρχή. Αυτό δημιουργεί αρκετή σύγχυση. Πως να πείσεις ένα μαθητή ότι δεν ξέρουμε πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ή το πυθαγόρειο θεώρημα; Στο Λύκειο η γεωμετρία είναι υποβαθμισμένη γιατί μαθητές και καθηγητές γνωρίζουν ότι δεν διδάσκεται στη Γ΄ Λυκείου, συνεπώς δεν εξετάζεται στις πανελλαδικές εξετάσεις και δεν μετράει για την εισαγωγή των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το αποτέλεσμα είναι οι περισσότεροι να θεωρούν το μάθημα αγγαρεία που πρέπει να περιμένουν απλά να τελειώσει.

Πέρα από αυτές τις διαπιστώσεις ας δούμε τη διάρθρωση της διδακτέας ύλης. Επειδή όπως είδαμε διδάσκεται μόνο στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου και για να μην έχουμε μόνο δύο επίπεδα, ας θεωρήσουμε ότι η ύλη κάθε τετραμήνου αποτελεί ένα επίπεδο.

Επίπεδο 1 : Οι βασικές έννοιες, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, τρίγωνα, παραλληλία, παραλληλόγραμμα, τραπέζια.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές διδάσκονται πράξεις με ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες, τις βασικές γνώσεις για τον κύκλο και τα τόξα, την ισότητα τριγώνων, τις βασικές ιδιότητες των τριγώνων, τις συμμετρίες, την παραλληλία και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων.

Επίπεδο 2 : Εγγεγραμμένα σχήματα, αναλογίες, ομοιότητα.

Σ΄ αυτό το επίπεδο οι μαθητές διδάσκονται τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων σχημάτων, τα θεωρήματα του Θαλή και των διχοτόμων και την ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων.

Επίπεδο 3 : Μετρικές σχέσεις, εμβαδά, κανονικά πολύγωνα, κύκλος.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές διδάσκονται τις μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα και στον κύκλο, την έννοια και τους τύπους του εμβαδού, τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων και τη μέτρηση του κύκλου και των τμημάτων του.

Επίπεδο 4 : Ευθείες και επίπεδα στο χώρο, πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα, κανονικά πολύεδρα.

Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό θα έπρεπε να διδάσκονται (στην πράξη δεν φτάνουν ποτέ στο επίπεδο αυτό) τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο, τις ιδιότητες και τους τύπους των επιφανειών και των όγκων των βασικών στερεών σχημάτων και τις ιδιότητες των κανονικών πολυέδρων.

Όπως είναι αναμενόμενο παρατηρούμε ότι η διδακτέα ύλη του Λυκείου έχει μία αρκετά καλή ιεραρχική δομή. Σε κάθε επίπεδο συναντάμε πιο σύνθετα σχήματα και έννοιες από το προηγούμενο. Τα τρία πρώτα μάλιστα θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελούν μια ιεραρχία με την αυστηρή μαθηματική έννοια του όρου. Οι ενστάσεις είναι ελάχιστες όπως για παράδειγμα ότι τα κανονικά πολύγωνα θα μπορούσαν να είναι πιο χαμηλά στην ιεραρχία. Το επίπεδο 4 δηλαδή η στερεομετρία θα μπορούσε να είναι μια ξεχωριστή ιεραρχία παράλληλη με την προηγούμενη.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα της διάρθρωσης αυτής είναι ότι δεν μπορεί να διδαχθεί ολόκληρη λόγω έλλειψης χρόνου. Η ύλη των δύο πρώτων επιπέδων δεν είναι εφικτό να ολοκληρωθεί μέσα σε ένα σχολικό έτος με τις προβλεπόμενες $2^1/_2$ ώρες εβδομαδιαίως. Ένα μέρος της ολοκληρώνεται στη Β' Λυκείου. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ολοκλήρωση των δύο τελευταίων επιπέδων, με 2 ώρες εβδομαδιαίως που προβλέπονται για την τάξη αυτή, να γίνεται εξωπραγματική. Η κατάσταση αυτή αναγνωρίζεται ευθέως από το Υπουργείο και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο που έχουν θέσει το επίπεδο 4 εκτός εξεταστέας (και συνεπώς και διδακτέας) ύλης. Έτσι ένας μαθητής όταν ολοκληρώσει το Λύκειο γνωρίζει από

στερεομετρία μόνο ότι έχει ενδεχομένως διδαχτεί βιαστικά στο τέλος της Β΄ Γυμνασίου δηλαδή δεν θυμάται σχεδόν τίποτα!

3.3 Μια άλλη διδακτική πρόταση

Μπορούμε να φτιάξουμε μια καλύτερη ιεραρχική ανάλυση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ; Η ανάλυση αυτή θα ανταποκρίνεται στις διδακτικές ανάγκες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ; Θα βοηθούσε τους μαθητές στη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών περισσότερο από την υπάρχουσα ;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι καταφατική. Στη συνέχεια προτείνουμε μία δομή της επιπεδομετρίας που είναι πολύ κοντά στην αυστηρή μαθηματική ιδέα της ιεραρχίας καθώς κάθε επίπεδο είναι μια κάλυψη του προηγούμενου.

Επίπεδο 1 : Σημείο, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, γωνία

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις αρχικές έννοιες του σημείου και της ευθείας, το ευθύγραμμο τμήμα και τις αντίστοιχες πράξεις, τη γωνία και τις αντίστοιχες πράξεις, την παραλληλία και τις ιδιότητές της, την καθετότητα, την απόσταση και την ισότητα σχημάτων, ιδιαίτερα των τριγώνων.

Επίπεδο 2 : Κύκλος, τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να μελετήσουν τον κύκλο και τα τμήματά του, τα τρίγωνα με έμφαση στις ιδιότητες του ισοσκελούς, τις ανισοτικές σχέσεις, τα διάφορα είδη παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους και τέλος το τραπέζιο.

Επίπεδο 3 : Εγγεγραμμένα σχήματα, περιγεγραμμένα σχήματα, όμοια σχήματα, κανονικά πολύγωνα.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να μελετήσουν τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα και ιδιαίτερα τους χαρακτηριστικούς κύκλους του τριγώνου, το θεώρημα του Θαλή, την ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων, τις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο και στον κύκλο και τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.

Επίπεδο 4 : Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να ασχοληθούν με τον υπολογισμό και τις ιδιότητες των εμβαδών πολυγωνικών, καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων χωρίων.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να φτιάξουμε μια ιεραρχική ανάλυση της στερεομετρίας. Η δομή της μπορεί να είναι η εξής :

Επίπεδο 1 : Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τη σχετική θέση ευθειών και επιπέδων στο χώρο καθώς και την έννοια της στερεάς γωνίας.

Επίπεδο 2 : Πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδρος, κώνος.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τα βασικά στερεά σχήματα και τις ιδιότητές τους.

Επίπεδο 3 : Σφαίρα, κανονικά πολύεδρα.

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τη σφαίρα (ενδεχομένως να διδαχθούν και στοιχειώδη σφαιρική γεωμετρία) και τα κανονικά πολύεδρα.

Επίπεδο 4 : Επιφάνειες και όγκοι στερεών σχημάτων

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές πρέπει να ασχοληθούν με τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων διαφόρων στερεών σχημάτων.

Η ιεραρχική αυτή ανάλυση πιστεύουμε ότι εξυπηρετεί πολύ καλά τις διδακτικές ανάγκες τις γεωμετρίας. Ίσως δεν διαφέρει και τόσο πολύ από την υπάρχουσα κατάσταση. Αυτό είναι αλήθεια γιατί δεν μπορούμε να απομακρυνθούμε τελείως από την αξιωματική θεμελίωση και την λογική οικοδόμηση που τόσο σοφά διατύπωσε ο Ευκλείδης πριν από 2.300 χρόνια. Όμως περιέχει και κάποιες καινοτομίες όπως τη μελέτη των κανονικών πολυγώνων πριν τα εμβαδά και την αυστηρότερη κατηγοριοποίηση των διαφόρων σχημάτων.

Για να είναι πιο αποδοτική θα πρέπει να συνοδευτεί και από ορισμένα άλλα μέτρα όπως :

- Ενιαίο αναλυτικό πρόγραμμα γεωμετρίας σε Γυμνάσιο-Λύκειο στα πρότυπα της Άλγεβρας ώστε να μην ξαναρχίζουμε από την αρχή στο Λύκειο όπως γίνεται σήμερα.
- Παράλληλη διδασκαλία επιπεδομετρίας και στερεομετρίας ώστε να μην υποβαθμίζεται ή να παραλείπεται η δεύτερη.
- Διάθεση των αναγκαίων ωρών διδασκαλίας που να καλύπτουν την έκταση της διδακτέας ύλης.

Όσον αφορά το τρίτο ερώτημα, αν δηλαδή η ιεραρχική αυτή ανάλυση θα βοηθούσε τους μαθητές στη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών περισσότερο από την υπάρχουσα, η απάντηση μπορεί να δοθεί μόνο μετά από εκτεταμένες δοκιμές, έρευνες και πιλοτικές εφαρμογές. Το ερώτημα συνεπώς παραμένει ανοικτό και προσφέρεται για παραπέρα διερεύνηση. Είναι όμως σίγουρο ότι όλα τα στοιχεία μας δείχνουν ότι σήμερα η διδασκαλία της γεωμετρίας έχει προβλήματα και χρειάζεται επειγόντως βελτίωση.

Κεφάλαιο 4

Το χαοτικό δυναμικό μοντέλο λυτικής προβλήματος

Μέχρι τώρα είδαμε ότι η κατηγορική και η ιεραρχική άποψη των επιπέδων Van Hiele μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν οικουμενικές μέθοδοι προσέγγισης των Μαθηματικών, δηλαδή σαν μέθοδοι που είναι ανεξάρτητες από το αντικείμενο που θέλουμε να διδάξουμε και συνεπώς μπορούν να εφαρμοστούν στη διδασκαλία οποιουδήποτε θέματος. Μια άλλη τέτοια οικουμενική μέθοδος είναι το **δυναμικό μοντέλο λυτικής προβλήματος** που προτάθηκε από τον C.A.Torre το 1994.

4.1 Fractals και χάος

Η πρόταση του Torre είναι μια εφαρμογή της **χαοτικής δυναμικής** και των **fractals**, στη Λυτική Προβλήματος. Μια απόδοση της λέξης fractal στα ελληνικά θα μπορούσε να είναι κλασμοειδές. Δεν υπάρχει ορισμός για το fractal. Οι δύο πιο γνωστές ιδιότητες που μπορεί να έχει ένα fractal σύνολο είναι η **μη ακέραια διάσταση** (ρητή ή άρρητη) και η **αυτοομοιότητα** (αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε τμήμα του συνόλου είναι όμοιο με το αρχικό). Υπάρχουν όμως και σύνολα που δημιουργούνται με επαναληπτικές μεθόδους ανάλογες με αυτές που κατασκευάζονται τα fractals και δεν έχουν τις παραπάνω ιδιότητες.

Πολλοί έχουν προτείνει μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων με συγκεκριμένα βήματα. Ίσως ο πιο γνωστός από όλους να είναι ο Polya. Όμως ένα χαοτικό μοντέλο για την επίλυση προβλημάτων έχει πολλές πιθανότητες να είναι πιο κοντά στην

πραγματικότητα αφού πολλοί υποστηρίζουν ότι η λειτουργία του εγκεφάλου μας είναι χαοτική. Ο Ilya Prigogine (βραβείο Nobel) επισημαίνει με έμφαση *« ... ο εγκέφαλος πρέπει να είναι σε μεγάλο βαθμό μη κανονικός ... η μη κανονικότητα, το χάος, οδηγεί σε πολύπλοκα συστήματα. Δεν πρόκειται για τέλεια αταξία, το αντίθετο ... το χάος καθιστά δυνατή τη ζωή και τη νοημοσύνη. Ο εγκέφαλος έχει επιλεγεί να γίνει τόσο ασταθής, ώστε η παραμικρή επίδραση να μπορεί να οδηγεί σε σχηματισμό τάξης».*

Πριν ασχοληθούμε με το χαοτικό μοντέλο, ας προσπαθήσουμε να μιλήσουμε για το «χάος». Δεν υπάρχει ορισμός του ίδιου του χάους, που να είναι αποδεκτός από όλους. Μπορούμε όμως να περιγράψουμε τι είναι ένα χαοτικό δυναμικό σύστημα. Σύμφωνα με την ελληνική έκδοση της ηλεκτρονικής εγκυκλοπαίδειας wikipedia ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά αν :

α) είναι τοπολογικά μεταβατικό

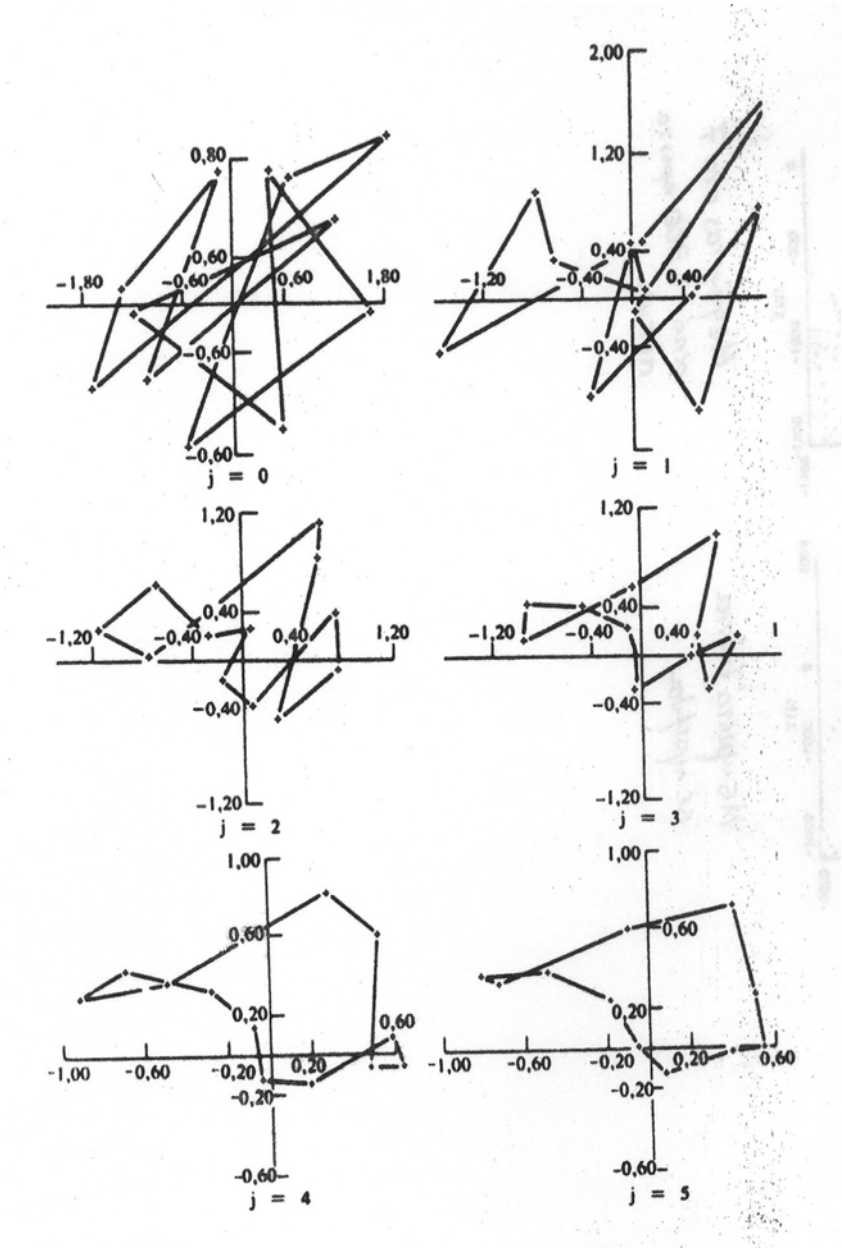
β) οι περιοδικές τροχιές του είναι πυκνές

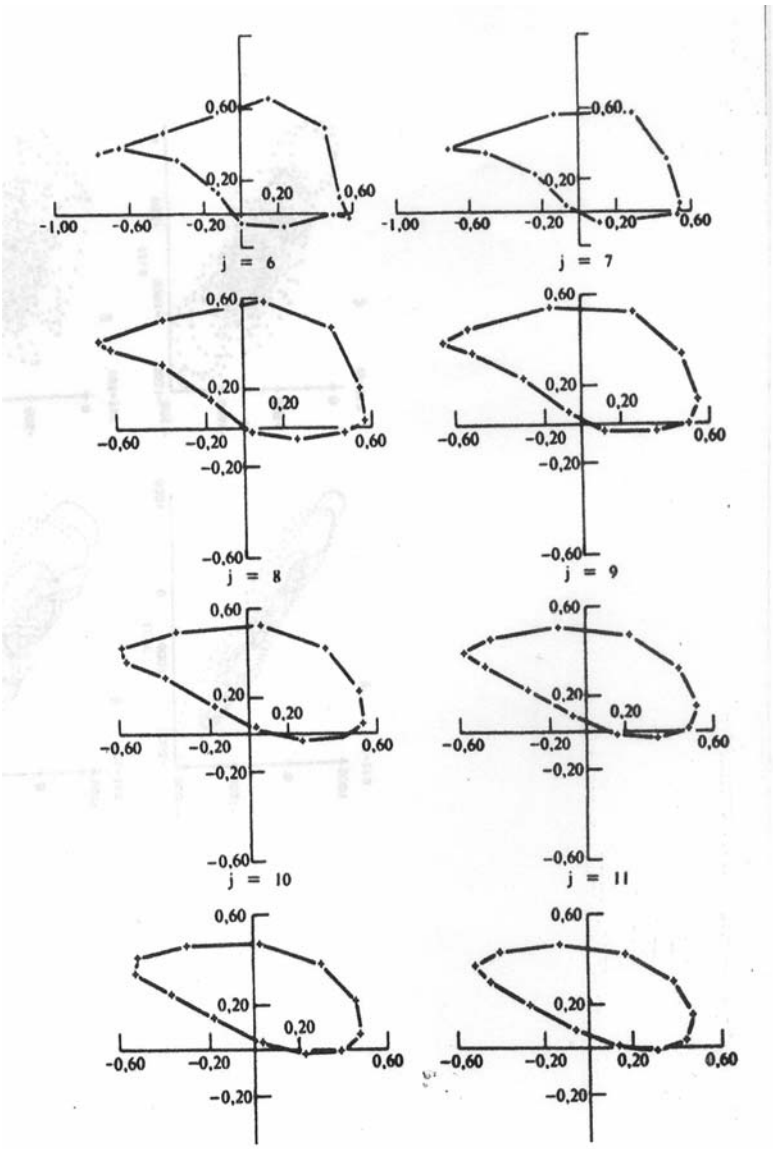
γ) παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες

Τελευταία έχει αποδειχθεί ότι οι δύο πρώτες συνθήκες συνεπάγονται την τρίτη (wikipedia 2006).

Το χάος είναι απρόβλεπτο αλλά δεν παρουσιάζει τυχαιότητα. Είναι όπως όταν λέμε : «είναι τόσο απρόβλεπτος που δεν ξέρω αν την άλλη βδομάδα θα είναι στην Αθήνα, στη Ρώμη ή στο Παρίσι» αντί να πούμε «δεν ξέρω που θα βρίσκεται την άλλη βδομάδα». Ένα δέντρο όταν το κοιτάμε από πάνω φαίνεται σαν ένα χάος από κλαδιά. Αυτό το χάος όμως έχει προκύψει με ένα πολύ τακτικό τρόπο, πρόκειται για μια συνεχή διαδοχή από διχάλες. Όσο για το σχηματισμό τάξης από το χάος, που υποστηρίζει για τον εγκέφαλο ο Prigogine, δεν είναι κάτι αδύνατο ή πρωτοφανές. Αν για παράδειγμα ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο πολύγωνο (δεν είναι καν ανάγκη να είναι κυρτό), κατασκευάσουμε το πολύγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του προηγούμενου και συνεχίσουμε τη διαδικασία, εμφανίζεται πάντοτε ένα κυρτό σχήμα που μοιάζει όλο και περισσότερο με μια έλλειψη. Η διαδικασία φαίνεται στα επόμενα

σχήματα. Έτσι βλέπουμε ότι από την τυχαιότητα μπορεί να προκύψει τάξη.





4.2 Οι διανοητικές διαδικασίες

Το Χαοτικό Δυναμικό Μοντέλο για τη Λυτική Προβλήματος στηρίζεται στην **τριαδική θεωρία** για τη διανοητική λειτουργία. Κατά τη θεωρία αυτή υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στη **γνωστική**, στη **συγκινησιακή / αντιληπτική** και στη **πραγματιστική** διανοητική διαδικασία. Κάθε μια από αυτές τις διαδικασίες είναι εφοδιασμένη με το δικό της τρόπο γνώσης και επαλήθευσης αυτού που μαθαίνεται.

I. **Οι γνωστικές διαδικασίες :** Οι γνώσεις αποκτώνται με πείραμα, παρατήρηση, εφαρμογή της λογικής και με αναγωγή του όλου στα μέρη του. Με τις γνωστικές διαδικασίες ο σκοπός προσεγγίζεται βήμα-βήμα σχεδόν γραμμικά. Κατηγοριοποιούν τις έννοιες, αφού τους δώσουν νόημα, ώστε να μπορούν να εξηγηθούν και να περιγραφούν. Οι γνωστικές διαδικασίες στη Λυτική Προβλήματος προϋποθέτουν 3 επιμέρους εργασίες α) *Διατύπωση του Προβλήματος* β) *Συλλογή πληροφοριών* και γ) *Διάγνωση* από την ανάλυση των πληροφοριών.

II. **Οι συγκινησιακές/αντιληπτικές διαδικασίες** συνεπάγονται συναισθηματικό τρόπο σκέψης όπου επεμβαίνει η αγάπη, το μίσος, ο φόβος, η ανασφάλεια, η αμφιβολία καθώς επίσης και η διαισθητική αντίληψη ακόμα και μέσω προαισθημάτων. Οι διαδικασίες αυτές προϋποθέτουν 3 επιμέρους εργασίες α) *Πρόγνωση* β) *Παραγωγή λύσεων* για ανεπιθύμητες καταστάσεις και γ) *Λήψη απόφασης* για την καλύτερη λύση.

III. **Οι πραγματιστικές διαδικασίες** αποτελούν πειραματικούς ή παρατηρησιακούς τρόπους μάθησης όπως για παράδειγμα να μαθαίνεις χορό παρατηρώντας τους άλλους και δοκιμάζοντας να τους μιμηθείς και όχι κάνοντας επίσημα μαθήματα. Προϋποθέτουν 3 επιμέρους εργασίες α) *Σχεδιασμό* για την επίτευξη των επιθυμητών αποτελεσμάτων και τον καθορισμό των προσόντων και των ικανοτήτων αυτού που θα αναλάβει β) *Εκτέλεση* των εργασιών που σχεδιάστηκαν και γ) *Εκτίμηση* των αποτελεσμάτων.

Οι τρεις αυτές διανοητικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται όλες για διδασκαλία και μάθηση αλλά σε διαφορετικές περιπτώσεις και με διαφορετικό τρόπο. Οι διαδικασίες της ομάδας Ι χρησιμοποιούν σαν εργαλεία τα Μαθηματικά, τις Θετικές Επιστήμες, τη Λογική κ.λ.π. Οι διαδικασίες της ομάδας ΙΙ έχουν να κάνουν με τις ιδιαίτερες ανθρώπινες εμπειρίες και βοηθούν κάποιον να διδάξει και να μάθει σχέσεις και αναλογίες μεταξύ πραγμάτων και κοινωνικές δεξιότητες. Τέλος οι διαδικασίες της ομάδας ΙΙΙ βοηθούν κάποιον να διδάξει και να μάθει επιδεξιότητες, επάρκειες, ικανότητες, εμπειρικές γνώσεις κ.λ.π. Έτσι για παράδειγμα στη μελέτη των Θετικών Επιστημών δίνουμε έμφαση στην ομάδα Ι και ειδικότερα στους γραμμικούς συλλογισμούς (αίτιο – αποτέλεσμα), στις τέχνες η έμφαση είναι στην ομάδα ΙΙ σαν πηγή έμπνευσης και δημιουργίας ενώ στις επιχειρήσεις

το βάρος δίνεται στην ομάδα ΙΙΙ και στην εμπειρία του παρελθόντος (Αραχωβίτης 2001).

Αυτές οι διαδικασίες επιδρούν μεταξύ τους κατά 3 τρόπους : **ενεργοποίηση, περιορισμός** και **ολοκλήρωση.** Η ολοκλήρωση προσπαθεί να συμβιβάσει τις δύο αντίθετες δυνάμεις της ενεργοποίησης και του περιορισμού έτσι ώστε να επιτευχθεί ο στόχος.

Η ενεργοποίηση σημαίνει ότι κάποια από τις τρεις διανοητικές διαδικασίες επιδρά ώστε να παρακινηθεί η σκέψη και η συμπεριφορά προς κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Για παράδειγμα η αντιληπτική/συγκινησιακή διαδικασία δημιουργεί σε ένα κοινωνικό λειτουργό την επιθυμία να συγκεντρώσει ένα μεγάλο ποσό χρημάτων που απαιτείται για την θεραπεία ενός άρρωστου παιδιού.

Ο περιορισμός αντιδρά στην ενεργοποίηση και συγκρατεί το άτομο από το να ενεργήσει αυθόρμητα για την επίτευξη του σκοπού. Προκαλείται έτσι μία αμφιβολία, ένας δισταγμός για την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθηθεί (μία **διχάλωση** στην ορολογία της Μη Γραμμικής Δυναμικής). Στο παράδειγμα ο κοινωνικός λειτουργός σκέφτεται ότι θα είναι εξαιρετικά δύσκολο να συγκεντρώσει ένα τόσο μεγάλο ποσό στη μικρή επαρχιακή πόλη όπου ζει. Εδώ έχουμε επίδραση της πραγματιστικής διανοητικής λειτουργίας.

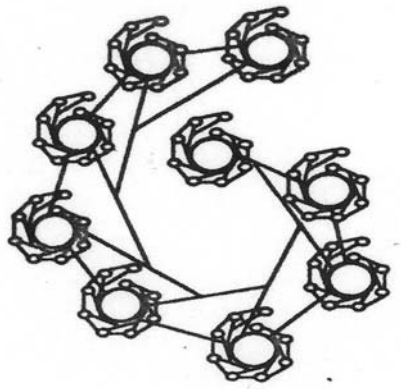
Η ολοκλήρωση ρυθμίζει τις δύο αντιτιθέμενες δυνάμεις ενεργοποίησης – περιορισμού ώστε να παρθεί μια απόφαση και να υπάρξει κάποιο αποτέλεσμα. Ο κοινωνικός λειτουργός πριν αποφασίσει αν θα υλοποιήσει ή θα εγκαταλείψει το σχέδιό του κάνει έναν υπολογισμό (γνωστική διαδικασία). Πόσους κατοίκους έχει η πόλη; Μπορούν οι μισοί να συνεισφέρουν και με ποιο ποσό; Αν συμβεί αυτό πλησιάζει το στόχο ή όχι; Παρόλα αυτά οι απόπειρες ολοκλήρωσης και συμβιβασμού των αντιθέτων τάσεων μπορούν να αποτύχουν και να οδηγήσουν σε χάος αν δεν υπάρχουν επαρκείς ικανότητες αντιμετώπισης της κατάστασης. Η υπερβολική ενεργοποίηση μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες αποφάσεις, χαμένο κόπο και χρόνο και καταστροφικά αποτελέσματα. Ο ανυπέρβλητος περιορισμός από την άλλη μπορεί να οδηγήσει σε αποπροσανατολισμό, απάθεια, χαμηλή αυτοεκτίμηση, απομόνωση που μπορεί να φτάσει μέχρι την κατάθλιψη.

Η αλληλεπίδραση των τριών διανοητικών λειτουργιών μοιάζει με αυτή ενός ιστιοφόρου με τον αέρα και τη θάλασσα. Ο αέρας ενεργοποιεί το ιστιοφόρο και το σπρώχνει σε μια κατεύθυνση. Η θάλασσα και η αδράνεια του σκάφους περιορίζουν αυτή την ενεργοποίηση. Ο χειρισμός των πανιών και του πηδαλίου συμβιβάζει τα πράγματα και ολοκληρώνει την προσπάθεια να κινηθεί το πλοίο προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Σε κάθε άτομο η αλληλεπίδραση των τριών αυτών διανοητικών διαδικασιών καθορίζει την κλίμακα της συμπεριφοράς του, από τη στατικότητα (σταθερό σημείο) στην κυκλικότητα (περιοδικότητα) και στη χαοτική κίνηση μέσα από τις παρεμβαλλόμενες διχαλώσεις, καθώς κάθε μία ενεργεί σαν ελκυστής που προσπαθεί να οδηγήσει το άτομο σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.

4.3 Το Μοντέλο της Δυναμικής Λυτικής Προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα κάθε μια από τις τρεις διανοητικές διαδικασίες παραπέμπει σε τρεις επιμέρους εργασίες στη Λυτική Προβλήματος. Αυτές οι 9 εργασίες συναποτελούν το δυναμικό μοντέλο της Λυτικής Προβλήματος. Δηλαδή το μοντέλο αυτό συμπεριλαμβάνει τη διατύπωση του προβλήματος, τη συλλογή πληροφοριών, τη διάγνωση, την πρόγνωση, την παραγωγή λύσεων, τη λήψη απόφασης, το σχεδιασμό, την εκτέλεση και την εκτίμηση. Αυτές οι 9 εργασίες μπορούν να εμφανιστούν σαν περιοχές σ΄ έναν χώρο, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά οι ακολουθούμενες διαδρομές δεν παρουσιάζουν γραμμική διάταξη. Εμφανίζονται σαν τυχαίες διαδρομές με την πρόθεση να αναδείξουν τον ιδιαίτερο σκοπό της διαδικασίας της οποίας αποτελούν μέρος. Για παράδειγμα για να διατυπώσει κανείς ένα πρόβλημα μπορεί να συγκεντρώσει πληροφορίες ή να κάνει διάγνωση με βάσει τις υπάρχουσες. Ο λύτης λοιπόν μπορεί να επισκεφθεί οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιοχές ανεξαρτήτως σειράς. Η τροχιές που δημιουργούνται από τη σκέψη του λύτη, δεν ακολουθούν μια γραμμική αλλά μια χαοτική διαδικασία καθώς οι τρεις διανοητικές λειτουργίες αλληλεπιδρούν.

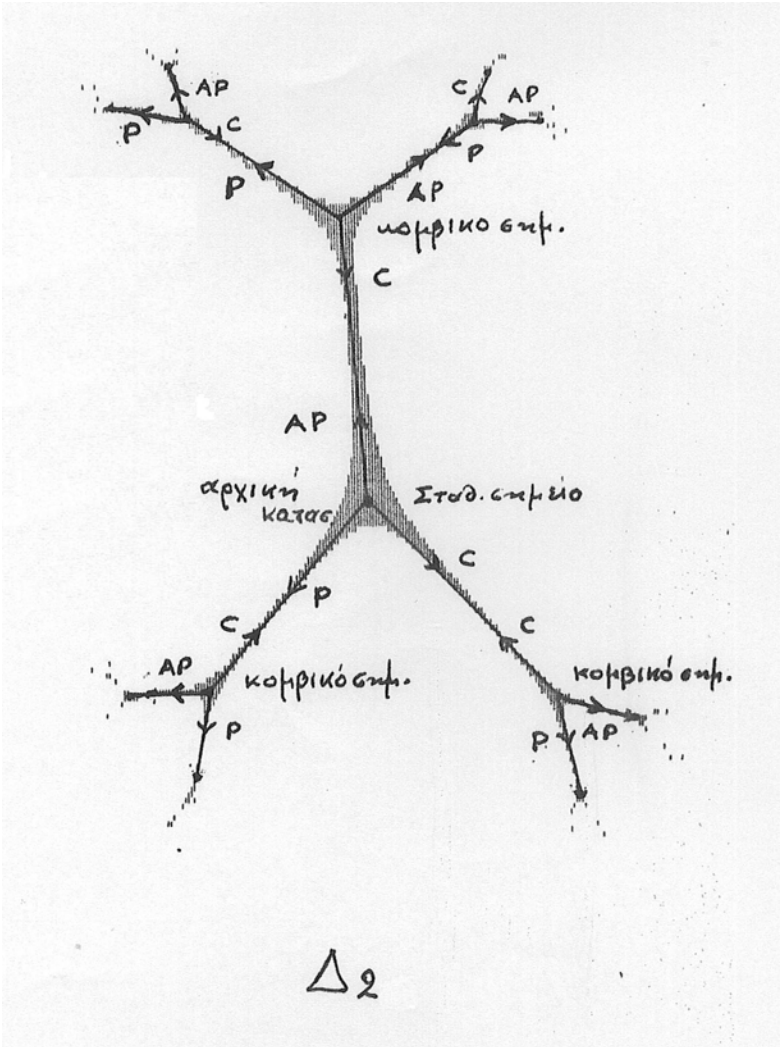
Αυτό φαίνεται στο απλουστευμένο σχέδιο Δ1 όπου φαίνονται οι διάφορες τροχιές που μπορούν να προκύψουν μεταξύ των 9 εργασιών. Οι εργασίες αυτού του μοντέλου παρουσιάζουν αναδρομή και επαναληπτικότητα δηλαδή κάθε εργασία συνδέεται με οποιαδήποτε άλλη με μια διαδικασία επανατοφοδότησης. Για την πραγμάτωση του σκοπού κάθε εργασίας μπορεί να παρεμβληθεί οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες. Αν μπορούσαμε λοιπόν να μεγεθύνουμε μια εργασία από τις 9 του μοντέλου θα φαινόταν σαν μία μικρογραφία ολόκληρου του μοντέλου και αν συνεχίζαμε τη μεγέθυνση θα παρατηρούσαμε το ίδιο πράγμα. Συνεπώς το μοντέλο παρουσιάζει αυτοομοιότητα δηλαδή μπορεί να χαρακτηριστεί ως fractal (Αραχωβίτης 2001).



Δ1

Ο Stewart περιγράφει τη Λυτική προβλήματος ως εξής : *«Ένας μαθηματικός ασχολούμενος με ένα πρόβλημα παραδέρνει σε ένα κυκεώνα από απλά παραδείγματα, μέχρι να αποφασίσει να μπει σε ένα δρόμο και να ακολουθήσει ένα χνάρι και σε λίγο θα στραφεί σε μια πιο γενική άποψη και θα ασχοληθεί λίγο με αυτή αλλά και πάλι θα αναζητήσει κάποια άλλα, λίγο διαφορετικά παραδείγματα και θα θέσει κάποιες άλλες λίγο διαφορετικές ερωτήσεις. Μετά θα αρχίσει να ενοχλεί όλους τους άλλους συναδέλφους μαθηματικούς αναζητώντας βοήθεια. Αν βρεθεί πραγματικά σε αδιέξοδο, τότε θα τα παρατήσει και θα ασχοληθεί με κάτι άλλο άσχετο αλλά συχνά την τελευταία στιγμή θα έχει μία έμπνευση που θα τον βοηθήσει να συνεχίσει τη διαδικασία»*

Αυτό το χαοτικό δυναμικό μοντέλο παρουσιάζει την εικόνα που φαίνεται στο σχήμα Δ_2, όπου οι τρεις διανοητικές διαδικασίες συμβολίζονται η γνωστική με C, η συγκινησιακή / αντιληπτική με A/P και η πραγματιστική με P. Σε κάθε κομβικό σημείο επιλέγεται μία από τις τρεις. Φαίνεται επίσης η αλληλεπίδρασή τους και οι τρόποι με τους οποίους οι διάφορες περιοχές εναρμονίζονται (ενεργοποίηση), ανταγωνίζονται (περιορισμός) και συμβιβάζονται (ολοκλήρωση). Η σκέψη ακολουθεί μια τυχαία πορεία ακολουθώντας τις διχαλώσεις του διαγράμματος και το σχήμα που προκύπτει είναι πάλι ένα fractal.



Η εικόνα του διαγράμματος Δ_2 μπορεί να προκύψει και ως το συμπληρωμένο (filled) σύνολο Julia της μιγαδικής επαναληπτικής εξίσωσης $z_n = z_{n-1}^2 + b\bar{z}_{n-1} + c$. Οι αριθμοί b,c είναι σταθεροί μιγαδικοί και ένας αριθμός $z_o=x_o+iy_o$ ανήκει στο σύνολο Julia αν η ακολουθία

z_n που προκύπτει από αυτόν είναι φραγμένη. Το σχήμα Δ_2 έχει προκύψει με b=1+0,2i και c=0 (Αραχωβίτης 2001).

Μελετώντας τη λυτική προβλήματος προσπαθούμε να μάθουμε πως λειτουργεί το μυαλό για να λύνει προβλήματα, ώστε να το μιμηθούμε είτε εκπαιδεύοντας άλλους να σκέφτονται με τον ίδιο τρόπο, είτε δημιουργώντας τεχνητή νοημοσύνη που θα λειτουργεί παρόμοια. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η λυτική προβλήματος πρέπει να διδάσκεται από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης των παιδιών αλλιώς οι αποσπασματικές στρατηγικές που ακολουθεί το κάθε παιδί γίνονται σταθερές συμπεριφορές (belief systems) και λειτουργούν σαν ελκυστές. Έτσι δεν του επιτρέπουν στη συνέχεια να αποκλίνει από αυτές, δηλαδή να δημιουργήσει μία διχάλωση. Η εκ των υστέρων διαπίστωση της αναποτελεσματικότητας των στρατηγικών αυτών σε μεγαλύτερη ηλικία δημιουργεί φόβους και αβεβαιότητες. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να είναι ανυπέρβλητα ή να απαιτούν εξαιρετικά υψηλό κόστος για να ξεπεραστούν.

Επίλογος

Η κατηγορική άποψη των επιπέδων Van Hiele, η ιεραρχική άποψη και το Δυναμικό Μοντέλο Λυτικής Προβλήματος του Torre, μαζί με την αξιωματική θεμελίωση υπάγονται στις **Οικουμενικές Μεθόδους** προσέγγισης των Μαθηματικών. Είναι δηλαδή μέθοδοι **ελεύθερες αντικειμένου** (topic free) δηλαδή ανεξάρτητες του θέματος. Μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και εκτός Μαθηματικών. Μπορούν να εφαρμοστούν σε αντικείμενα τόσο της δευτεροβάθμιας, όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού τελευταία γίνεται προσπάθεια να ανέβει το επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τη μετακύλιση ύλης από την τριτοβάθμια. και αποτελούν εργαλείο κοινό για την προετοιμασία των καθηγητών τόσο της Μέσης όσο και της Ανώτατης εκπαίδευσης.

Η γνώση αυτών ή οποιωνδήποτε άλλων οικουμενικών μεθόδων για την προσέγγιση των μαθηματικών είναι πολύ σημαντική για το σχεδιασμό κατάλληλης διδασκαλίας που θα επιτύχει τους διδακτικούς στόχους σε οποιαδήποτε βαθμίδα της εκπαίδευσης. Αποτελούν συνεπώς ένα εργαλείο κοινό για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών τόσο της Κατώτερης όσο και της Μέσης αλλά και της Ανώτατης εκπαίδευσης.

Το να διαθέτουμε εργαλεία οικουμενικής χρήσης είναι θείο δώρο αφού όπως είπε και ο A.J. Mandell στο συμπόσιο του 1991 στο United Nations University :

“God is ready to accept the idea of universality”

Παράρτημα Ι

Η θεωρία κατηγοριών

Εισαγωγή

Η θεωρία Κατηγοριών είναι μια σύγχρονη μαθηματική θεωρία που αναπτύχθηκε τα τελευταία πενήντα χρόνια με σκοπό να λύσει προβλήματα άλλων θεωριών ή να θέσει κάποια συμπεράσματα τους σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Ξεκίνησε λίγο πολύ σαν μια γλώσσα για τα Μαθηματικά, αλλά σύντομα πήρε το δρόμο της σαν μια ανεξάρτητη μαθηματική θεωρία.

Η θεωρία Κατηγοριών ασχολείται με ιδιότητες των μορφισμών (των "καλών" απεικονίσεων) κάθε άλλης μαθηματικής θεωρίας. Καταρχήν έχουμε τα σύνολα και τις απεικονίσεις μεταξύ τους. Αν όμως θεωρήσουμε σύνολα με κάποια συγκεκριμένη δομή (για παράδειγμα τους διανυσματικούς χώρους ή τους τοπολογικούς χώρους), τότε δεν μας ενδιαφέρουν όλες οι απεικονίσεις μεταξύ των συνόλων, αλλά μόνο αυτές που "σέβονται", που διατηρούν τη δεδομένη δομή (για παράδειγμα οι γραμμικές απεικονίσεις ή οι συνεχείς απεικονίσεις αντίστοιχα). Η θεωρία Κατηγοριών μελετά ακριβώς αυτή τη συλλογή όλων των αντικειμένων με μια συγκεκριμένη δομή και των απεικονίσεων που διατηρούν τη δομή αυτή, των λεγόμενων μορφισμών. Όλη αυτή η συλλογή (μαζί με την οριζόμενη φυσιολογικά πράξη σύνθεσης) καλείται μια **κατηγορία.** Έτσι για παράδειγμα έχουμε την κατηγορία των ομάδων με τους αντίστοιχους μορφισμούς ομάδων, την κατηγορία των διανυσματικών χώρων με τους αντίστοιχους μορφισμούς τους, τις γραμμικές απεικονίσεις, και ούτω καθεξής (Σκιαδάς 2005).

Η θεωρία κατηγοριών ασχολείται λοιπόν με αφηρημένο τρόπο με τις μαθηματικές δομές και τις σχέσεις μεταξύ τους. Επειδή δε οι ίδιες οι κατηγορίες είναι ένα είδος μαθηματικής δομής, μας ενδιαφέρουν οι διαδικασίες που διατηρούν με κάποιο τρόπο αυτή τη δομή. Μια τέτοια διαδικασία καλείται **συναρτητής (functor)** και συνδέει κάθε αντικείμενο μιας κατηγορίας με ένα αντικείμενο μιας άλλης και κάθε μορφισμό της πρώτης με ένα μορφισμό της δεύτερης. Μελετώντας τις κατηγορίες και τους συναρτητές δεν μελετάμε μόνο

μία κλάση μαθηματικών δομών και τους μορφισμούς της αλλά μελετάμε γενικότερα τις σχέσεις ανάμεσα σε διάφορες κλάσεις μαθηματικών δομών.

Πολλοί μαθηματική κλάδοι μελετούν μια συγκεκριμένη δομή συνδέοντάς την με μια άλλη απλούστερη και συνεπώς πιο ευκολονόητη. Για παράδειγμα στην Αλγεβρική Τοπολογία πολύ δύσκολα τοπολογικά ερωτήματα μπορούν να μετασχηματιστούν σε αλγεβρικά ερωτήματα που επιλύονται ευκολότερα. Ορισμένες «φυσικές κατασκευές» όπως η βασική ομάδα ενός τοπολογικού χώρου μπορούν να εκφραστούν με αυτόν τον τρόπο σαν συναρτητές. Διαφορετικές τέτοιες κατασκευές συχνά «συνδέονται φυσιολογικά» και αυτό μας οδηγεί στην ιδέα του φυσιολογικού μετασχηματισμού, ένα τρόπο να απεικονίσουμε ένα συναρτητή σε έναν άλλο. Σε όλη την έκταση τω μαθηματικών συναντάμε «φυσιολογικούς ισομορφισμούς», πράγματα που ουσιαστικά ταυτίζονται με «κανονικό τρόπο». Πολλές σημαντικές μαθηματικές κατασκευές μπορούν να μελετηθούν σε αυτό το πλαίσιο.

Η θεωρία κατηγοριών διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1945 από τους Samuel Eilenberg και Saunders MacLane. Οι ίδιοι είπαν ότι σκοπός τους ήταν να μελετήσουν τους φυσιολογικούς μετασχηματισμούς. Για να το κάνουν αυτό χρειάστηκαν να ορίσουν συναρτητές και συνεπώς χρειάστηκε να ορίσουν κατηγορίες. Αρχικά οι έννοιες αυτές εφαρμόστηκαν στην τοπολογία και πιο συγκεκριμένα στην αλγεβρική τοπολογία. Στη συνέχεια όμως βρήκαν εφαρμογές σε πολλούς άλλους κλάδους των μαθηματικών. Σήμερα ειδικές κατηγορίες που ονομάζονται *τόποι* μπορούν ακόμα και να αντικαταστήσουν την αξιωματική θεωρία συνόλων στη θεμελίωση των μαθηματικών (Wikipedia 2005).

Κατηγορίες, αντικείμενα και μορφισμοί.

Ας δούμε τώρα τι ακριβώς είναι μία **κατηγορία (C)**. Αποτελείται από :

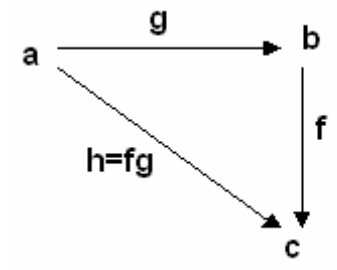
- Ένα σύνολο ob(C) από **αντικείμένα (objects).**

- Ένα σύνολο hom(C) από **μορφισμούς (morphisms)**. Κάθε μορφισμός f απεικονίζει ένα μοναδικό αντικείμενο a σε ένα αντικείμενο b. Γράφουμε $f:a\to b$ και λέμε ότι f είναι ένας μορφισμός από το a στο b. Συμβολίζουμε με hom(a,b) το σύνολο όλων των μορφισμών από το a στο b.
- Μια διμελή πράξη $hom(a,b)\times hom(b,c)\to hom(a,c)$ που ορίζεται για κάθε τριάδα αντικειμένων a,b,c, καλείται σύνθεση μορφισμών και ταυτίζεται με τη συνήθη σύνθεση απεικονίσεων. Αν $f:a\to b$ και $g:b\to c$ τότε η σύνθεσή τους συμβολίζεται με $g\circ f$ ή gf.

έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα :

- Η προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης δηλαδή αν $f:a\to b$, $g:b\to c$ και $h:c\to d$ τότε $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.
- Το ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης δηλαδή $\forall x\in ob(C)$, $\exists 1_x:x\to x$ που καλείται ταυτοτικός μορφισμός του x, τέτοιος ώστε $\forall$ $f:a\to b$ να έχουμε $1_b\circ f = f = f\circ 1_a$.

Αποδεικνύεται ότι ο ταυτοτικός μορφισμός για κάθε αντικείμενο x είναι μοναδικός. Οι σχέσεις μεταξύ των μορφισμών π.χ. fg=h μπορούν να παρασταθούν με μεταβατικά διαγράμματα όπου τα αντικείμενα είναι σημεία και οι μορφισμοί είναι βέλη. Για το λόγο αυτό μερικές φορές οι μορφισμοί μιας κατηγορίας καλούνται και **βέλη.**



Ένας μορφισμός $f:a\to b$ καλείται

- Μονομορφισμός (1-1) αν $\forall g,h:x\to a$ έχουμε $fg = fh \Rightarrow g = h$.
- Επιμορφισμός (επί) αν $\forall g,h:x\to a$ έχουμε $gf = hf \Rightarrow g = h$.
- Ισομορφισμός αν $\exists g:b\to a$ ώστε $fg=1_b$ και $gf=1_a$.
- Ενδομορφισμός αν a=b.

– Αυτομορφισμός αν είναι ταυτόχρονα ισομορφισμός και ενδομορφισμός.

Σημείωση : Ένας μορφισμός που είναι 1-1 και επί, ΔΕΝ είναι αναγκαστικά ισομορφισμός. Για παράδειγμα στην κατηγορία που αποτελείται από δύο αντικείμενα a,b, τους ταυτοτικούς μορφισμούς και ένα μοναδικό $f:a\rightarrow b$, ο f είναι 1-1 και επί αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

Συναρτητές

Οι συναρτητές είναι απεικονίσεις μεταξύ κατηγοριών που διατηρούν τη δομή τους, δηλαδή ένας συναρτητής F από την κατηγορία C στην κατηγορία D έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

- σε κάθε αντικείμενο x της C αντιστοιχεί ένα αντικείμενο της F(x) της D.
- σε κάθε μορφισμό $f:x\rightarrow y$ αντιστοιχεί ένα μορφισμό $F(f):F(x)\rightarrow F(y)$ έτσι ώστε $F(1_x)=1_{F(x)}$, $\forall x\in C$ και $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$, $\forall f:x\rightarrow y, g:y\rightarrow z$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & y \arrow[d, dashed] \\ F(x) \arrow[r, "F(f)"] & F(y) \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα κατηγοριών

Η κατηγορία S όλων των συνόλων έχει ως αντικείμενα όλα τα σύνολα και ως μορφισμούς όλες τις απεικονίσεις μεταξύ των συνόλων.

Η κατηγορία Grp όλων των ομάδων έχει ως αντικείμενα όλες τις ομάδες (δηλαδή όλα τα σύνολα που είναι εφοδιασμένα με μια διμελή πράξη που ικανοποιεί τα αξιώματα της ομάδας) και ως μορφισμούς όλους τους ομομορφισμούς μεταξύ των ομάδων δηλαδή τις απεικονίσεις που «μεταφέρουν» τη δομή της μιας ομάδας στην άλλη.

Η κατηγορία Top όλων των τοπολογικών χώρων έχει ως αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και ως μορφισμούς τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τους.

Η κατηγορία Vec όλων των διανυσματικών χώρων έχει ως αντικείμενα όλους τους διανυσματικούς χώρους και ως μορφισμούς όλες τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ τους (Αν U,V διανυσματικοί χώροι τότε συνήθως αντί για hom(U,V) γράφουμε $\mathcal{L}$(U,V).

Η θεωρία κατηγοριών έχει εξελιχθεί σε ένα ισχυρότατο εργαλείο για τη μελέτη των Μαθηματικών Δομών.

Παράρτημα ΙΙ

Η ιεραρχία

Κάλυψη – Διαμέριση

Μία διμελής σχέση R ανάμεσα σε δύο σύνολα X,Y είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. Αν $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ και $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ μια σχέση R περιγράφεται από τον πίνακα πρόσπτωσης (incidence matrix)

R	y_1	y_2	…	y_n
x_1	0	1	…	0
x_2	1	0	…	1
…	…	…	…	…
x_m	1	0	…	0

όπου σημειώνουμε 1 αν $(x_i,y_j)\in R$ και 0 αν $(x_i,y_j)\notin R$. Έστω $\mathcal{P}(X)$ είναι το δυναμοσύνολο του $X\neq\varnothing$ και $Y=\{ Y_i\neq\varnothing \,/\, i\in I \}$ είναι μια οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του X δηλαδή $Y_i\in\mathcal{P}(X)$, $\forall i\in I$. Λέμε ότι το Y καλύπτει το X ή το Y είναι μια **κάλυψη** του X αν $X=\bigcup_{i\in I} Y_i$. Αν επιπλέον για $\forall j\neq k$ ισχύει $Y_j\cap Y_k=\varnothing$, τότε η κάλυψη ονομάζεται **διαμέριση** του X. Αυτό σημαίνει ότι $\forall x\in X\ \exists!\ Y_i : x\in Y_i$. Προφανώς κάθε κάλυψη δεν είναι διαμέριση.

Από τον πίνακα πρόσπτωσης μπορούμε να διακρίνουμε αν μία σχέση είναι κάλυψη αν σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη υπάρχει τουλάχιστον μία μονάδα. Στη συνέχεια μπορούμε να διακρίνουμε αν μία κάλυψη είναι διαμέριση εξετάζοντας αν σε κάθε γραμμή υπάρχει ακριβώς μία μονάδα.

Ιεραρχία

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα σύνολο X βρίσκεται στο επίπεδο $\nu \in N$ (ν αυθαίρετο) και ότι μια κάλυψη Y του X βρίσκεται στο επίπεδο ν+1. Αν κατασκευάσουμε τώρα μία κάλυψη Z του Y (μια κάλυψη της κάλυψης δηλαδή), τότε αυτή θα βρίσκεται στο επίπεδο ν+2 κ.ο.κ. Η σειρά αυτή των διαδοχικών καλύψεων (επιπέδων) ονομάζεται **ιεραρχία.** Η κατασκευή μιας ιεραρχίας ονομάζεται **ιεραρχική ανάλυση**. Το πλήθος των καλύψεων (επιπέδων) που μπορούν να κατασκευαστούν με τον τρόπο αυτό εξαρτάται από το πλήθος των στοιχείων του αρχικού συνόλου X αλλά μια ιεραρχία με πολύ μεγάλο πλήθος επιπέδων δεν έχει πρακτική χρησιμότητα. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της ιεραρχίας παραθέτουμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω X={τριαντάφυλλο, γαρύφαλλο, τουλίπα, πανσές, ορχιδέα, ασφόδελος}, I={κόκκινο, κίτρινο, πράσινο, μπλε, άσπρο} και $Y=\{Y_i / i \in I\}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X ώστε $x \in Y_i$ αν το λουλούδι x έχει χρώμα i. Αν η σχέση $R \subseteq X \times Y$ είναι η συνήθης σχέση του «ανήκει», τότε ο πίνακας πρόσπτωσης είναι :

R	$Y_{\text{κόκκινο}}$	$Y_{\text{κίτρινο}}$	$Y_{\text{πράσινο}}$	$Y_{\text{μπλε}}$	$Y_{\text{άσπρο}}$
τριαντάφυλλο	1	1	0	0	1
γαρύφαλλο	1	0	0	0	1
τουλίπα	1	1	0	0	1
πανσές	0	1	0	1	1
ορχιδέα	1	0	0	1	1
ασφόδελος	0	1	0	0	0

Το Y δεν είναι κάλυψη γιατί $Y_{\text{πράσινο}}$ είναι κενό. Αν αφαιρέσουμε το χρώμα αυτό από το I δηλαδή I={κόκκινο, κίτρινο, μπλε, άσπρο} έχουμε αντίστοιχα τον πίνακα :

R	$Y_{\text{κόκκινο}}$	$Y_{\text{κίτρινο}}$	$Y_{\text{μπλε}}$	$Y_{\text{άσπρο}}$
τριαντάφυλλο	1	1	0	1
γαρύφαλλο	1	0	0	1
τουλίπα	1	1	0	1
πανσές	0	1	1	1
ορχιδέα	1	0	1	1
ασφόδελος	0	1	0	0

Τότε το $Y=\{Y_{\text{κόκκινο}}, Y_{\text{κίτρινο}}, Y_{\text{μπλε}}, Y_{\text{άσπρο}}\}$ είναι μία κάλυψη του X αφού $X=\cup Y_i$, $Y_i\neq\varnothing$ αλλά δεν είναι διαμέριση αφού το τριαντάφυλλο ανήκει και στο $Y_{\text{κόκκινο}}$ και στο $Y_{\text{κίτρινο}}$ και στο $Y_{\text{άσπρο}}$.

Αν θεωρήσουμε Z_1={τριαντάφυλλο, γαρύφαλλο, ασφόδελος}, Z_2={τουλίπα}, Z_3={πανσές, ορχιδέα} και $Z=\{Z_1,Z_2,Z_3\}$, τότε ο πίνακας πρόσπτωσης είναι

R	Z_1	Z_2	Z_3
τριαντάφυλλο	1	0	0
γαρύφαλλο	1	0	0
τουλίπα	0	1	0
πανσές	0	0	1
ορχιδέα	0	0	1
ασφόδελος	1	0	0

Το σύνολο Z είναι μία κάλυψη αφού $X=\cup Z_i$, $Z_i\neq\varnothing$ και είναι και διαμέριση αφού $Z_j\cap Z_k=\varnothing$, $\forall j,k\ j\neq k$.

Παράδειγμα 2

Η ιεραρχική ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί σε πολύ διαφορετικούς τομείς. Ας δούμε ένα παράδειγμα από τη φιλολογία. Παρατίθεται ένα απόσπασμα του Shakespeare

(1) Shall I compare thee to a summer' s day?
Thou art more lovely and more temperate:
Rough winds do shake the darling buds of May,
And summer's lease hath all too short a date:
(5) Sometime too hot the eye of heaven shines,
And often is his gold complexion dimm'd;
And every fair from fair sometime declines
By chance, or nature's changing course, untrimm'd:
But thy eternal summer shall not fade,
(10) Nor lose possession of that fair thorn owest;
Nor shall Death brag thou wander'st in his shade,
When in eternal lines to time thou growest.
So long as men can breathe, or eyes can see,
So long lives this, and this gives life to thee.

Έστω X το σύνολο των ονομάτων που εμφανίζονται στο κείμενο αυτό δηλαδή X={Thee, Buds of May, Sun, Fair, Thy Summer} όπου Thee είναι η αγαπημένη, Fair είναι η ομορφιά, Thy Summer είναι η στιγμή που ανθίζει η ομορφιά. Για να φτιάξουμε μια κάλυψη του X κατασκευάζουμε τα υποσύνολα Y_i του X τα στοιχεία των οποίων εμφανίζουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα όπως

$Y_1 = \{ x \in X$ / x είναι αγαπημένος $\}$

$Y_2 = \{ x \in X$ / x είναι εγκρατής $\}$

$Y_3 = \{ x \in X$ / x είναι θερμός $\}$

$Y_4 = \{ x \in X$ / x αυξάνεται ή μειώνεται $\}$

Έτσι έχουμε

$Y_1 = \{$ Thee, Bud of May $\}$

αναφέρονται ως lovely (2), darling (3)

$Y_2 = \{$ Thee $\}$ temperate (2)

$Y_3 = \{$ Sun $\}$ hot (5)

$Y_4 = \{$ Fair, Sun, Thee, Thy Summer $\}$

declines (7), dimm'd (6), growest (12), fade (9)

Έτσι έχουμε μια κάλυψη αφού $X=\bigcup_{i=1}^{4} Y_i$, $Y_i \neq \varnothing$ και ο πίνακας πρόσπτωσης είναι :

R	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Thee	1	1	0	1
Buds of May	1	0	0	0
Sun	0	0	1	1
Fair	0	0	0	1
Thy Summer	0	0	0	1

Θεωρώντας μια ιεραρχική ανάλυση σ΄ ένα ποίημα ή κείμενο μπορούμε να εμβαθύνουμε στη δομή του και στο σκεπτικό του συγγραφέα. Θα μπορούσαμε ας πούμε να αναλύσουμε με τον τρόπο αυτό κείμενα της Αρχαίας Ελληνικής Λογοτεχνίας και Φιλοσοφίας. Εννοείται ότι μια ιεραρχική ανάλυση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη γιατί για κάθε σύνολο X μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές διαφορετικές καλύψεις ανάλογα με το χαρακτηριστικό που θέλουμε να διερευνήσουμε.

Παρατήρηση

Αν $Y_i \in \mathcal{P}(X)$, $i=1,2,\ldots,n$ και $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i \neq X$, τότε μπορούμε να ορίσουμε $Y_{n+1} = X - \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$. Έτσι $Y=\{Y_i \ / \ i=1,2,\ldots,n+1\}$ είναι μία κάλυψη του X δηλαδή με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε μια κάλυψη βασιζόμενοι σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathcal{P}(X)$. Για παράδειγμα αν X είναι το σύνολο των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, Y_1={τα τρίγωνα}, Y_2={τα τετράπλευρα}, Y_3={τα πολύγωνα} και Y_4={οι κύκλοι} μπορούμε να ορίσουμε Y_5={όλα τα υπόλοιπα σχήματα} και έτσι να έχουμε $Y=\{Y_i \ / \ i=1,2,3,4,5\}$ μια κάλυψη του X.

Παράρτημα ΙΙΙ

Η γεωμετρία κατά KLEIN

Αν G είναι μία ομάδα και X ένα σύνολο με $X \neq \varnothing$, ονομάζουμε δράση της ομάδας G στο σύνολο X μια απεικόνιση $\delta: G \times X \rightarrow X$ τέτοια ώστε $\forall x \in X$ και $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in G$ να έχουμε :

i) $\delta(\gamma_2, \delta(\gamma_1, x)) = \delta(\gamma_2 o \gamma_1, x)$
(με o συμβολίζουμε την πράξη της ομάδας)

ii) $\delta(e, x) = x$
(με e συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας)

Έστω S ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια δομή και Aut(S) η ομάδα των αυτομορφισμών του S δηλαδή η ομάδα των 1-1 και επί απεικονίσεων από το S στον εαυτό του που διατηρούν τη δομή του S. Η ομάδα αυτή συνήθως είναι πολύ μεγάλη και η μελέτη της δεν είναι εύκολη και δεν μας βοηθάει να βγάλουμε συμπεράσματα για τη δομή του S. Αν όμως επιλέξουμε κατάλληλη υποομάδα G της Aut(S) η μελέτη της είναι ευλότερη. Η δράση της υποομάδς G επί του S αποτελεί μια γεωμετρία Klein. Για παράδειγμα η συνήθης Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου ορίζεται από τη δράση της ομάδας των ομοιοτήτων επί του συνόλου των σημείων του επιπέδου. Με τον ίδιο τρόπο η προβολική γεωμετρία του επιπέδου ορίζεται από τη δράση της ομάδας των συγγραμμικοτήτων επί του συνόλου των σημείων του προβολικού επιπέδου.

Η μελέτη της ομάδας των αυτομορφισμών ενός συνόλου X και των διαφόρων υποομάδων της είναι αποκαλυπτική για τη δομή του ίδιου του X και της αντίστοιχης γεωμετρίας. Για το ευκλείδειο επίπεδο η πιο χαρακτηριστικές είναι οι υποομάδες των ισομετριών και των ομοιοτήτων. Για το προβολικό επίπεδο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι υποομάδες των ομολογιών (των συγγραμμικοτήτων που το κέντρο τους δεν ανήκει στον άξονά τους) και των επάρσεων (των συγγραμμικοτήτων που το κέντρο τους ανήκει στον άξονά τους).

Παράρτημα IV

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert

Στα τέλη του 19ου αιώνα είχε γίνει φανερό ότι το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη είχε προβλήματα. Τα 5 αξιώματα ήταν πολύ λίγα για να καθορίσουν πλήρως τη γεωμετρία. Ακόμα και αν θεωρήσουμε σαν αξιώματα αυτά που ο Ευκλείδης αποκαλούσε κοινές έννοιες (τα περισσότερα είναι αξιώματα της λογικής και όχι της γεωμετρίας) πάλι το σύστημα δεν είναι πλήρες. Υπάρχουν έννοιες όπως η έννοια της διάταξης, που ο Ευκλείδης θεωρούσε αυτονόητες, αλλά δεν τις ανέφερε ρητά. Σε μια αυστηρή αξιωματική θεμελίωση όμως τίποτα δεν είναι αυτονόητο.

Ο Hilbert προσπάθησε να συμπληρώσει το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη ώστε να αποκτήσει την επιθυμητή μαθηματική αυστηρότητα και τα κατάφερε τόσο καλά ώστε από τότε αυτό είναι γνωστό σαν αξιωματικό σύστημα των Ευκλείδη-Hilbert. Παρόλο που έχουν προταθεί και άλλα αξιωματικά συστήματα ισοδύναμα με αυτό (ενδεικτικά αναφέρουμε τα συστήματα των Pasch, Peano, Pierri, Forder, Birkoff, Blumental) το σύστημα Ευκλείδη-Hilbert δεν έχει χάσει τη σημασία του και ίσως είναι το ευρύτερα χρησιμοποιούμενο.

Ο Hilbert δεν προσπάθησε να ορίσει τις αρχικές έννοιες «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο» ούτε τις αρχικές σχέσεις μεταξύ τους όπως τις εκφράσεις «περνάει», «ανήκει», «μεταξύ», «ίσο». Στη συνέχεια χώρισε τα αξιώματα σε πέντε ομάδες :

I. Αξιώματα σύνδεσης (οκτώ)
II. Αξιώματα διάταξης (τέσσερα)
III. Αξιώματα σύμπτωσης (πέντε)
IV. Αξίωμα παραλληλίας (ένα)
V. Αξιώματα συνέχειας (δύο)

Τα αξιώματα αυτά είναι τα εξής :

I. Αξιώματα σύνδεσης

I_1 : Από δύο σημεία περνάει πάντοτε τουλάχιστον μια ευθεία.

I_2 : Από δύο σημεία περνάει το πολύ μια ευθεία.

I_3 : Σε μία ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τρία σημεία που δε ανήκουν στην ίδια ευθεία.

I_4 : Από τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία περνάει τουλάχιστον ένα επίπεδο. Σε κάθε επίπεδο υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο.

I_5 : Από τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία περνάει το πολύ ένα επίπεδο.

I_6 : Αν δύο σημεία μιας ευθείας ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε κάθε σημείο της ευθείας ανήκει στο επίπεδο αυτό.

I_7 : Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε έχουν και ένα δεύτερο κοινό σημείο.

I_8 : Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν όλα στο ίδιο επίπεδο.

II. Αξιώματα διάταξης

II_1 : Αν το σημείο Γ είναι μεταξύ των σημείων Α και Β, τότε τα σημεία Α,Β,Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία και το Γ είναι μεταξύ των Β και Α.

II_2 : Για οποιαδήποτε σημεία Α,Β υπάρχει πάντα ένα τουλάχιστον σημείο Γ που βρίσκεται μεταξύ τους.

II_3 : Αν Α,Β,Γ είναι τρία σημεία μιας ευθείας, τότε ένα και μόνο ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

II_4 : Αν Α,Β,Γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία και α μια ευθεία του επιπέδου που δεν περνά από κανένα από τα Α,Β,Γ και τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε τέμνει και ένα από τα ΑΓ,ΒΓ (αυτό είναι το γνωστό αξίωμα του Pasch).

III. Αξιώματα σύμπτωσης

III_1 : Αν Α,Β είναι δύο σημεία μιας ευθείας α και Α΄ ένα σημείο της ίδιας ή μιας άλλης ευθείας α΄, τότε σε μια καθορισμένη μεριά της α΄ ως προς το Α΄ μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα μόνο σημείο Β΄ ώστε ΑΒ=Α΄Β΄.

III_2 : Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με ένα τρίτο, τότε είναι ίσα και μεταξύ τους.

III_3 : Αν ΑΒ και ΒΓ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και Α΄Β΄ και Β΄Γ΄ είναι επίσης δύο ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην ίδια ή σε μια άλλη ευθεία επίσης χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και ΑΒ=Α΄Β΄ και ΒΓ=Β΄Γ΄, τότε και ΑΓ=Α΄Γ΄.

III_4 : Αν $\chi\hat{O}\psi$ δοσμένη γωνία και Ο΄χ΄ δοσμένη ημιευθεία στο ίδιο ή σε άλλο επίπεδο, τότε σε κάθε ημιεπίπεδο που ορίζεται από την προέκταση της Ο΄χ΄ υπάρχει μοναδική ημιευθεία Ο΄ψ΄ ώστε $\chi\hat{O}\psi=\chi'\hat{O}'\psi'$.

III_5 : Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις άλλες γωνίες αντίστοιχα ίσες.

IV. Αξίωμα παραλληλίας

Από σημείο που βρίσκεται εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε το πολύ μία ευθεία παράλληλη με αυτήν. (αυτή είναι η διατύπωση του Playfair για το 5° αξίωμα του Ευκλείδη)

V. Αξιώματα συνέχειας

V_1 : Αν ΑΒ και ΓΔ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα, τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ώστε AA_1, $A_1A_2, \ldots$, $A_{\nu-1}A_\nu$ να είναι ίσα με το ΓΔ και το Β να βρίσκεται μεταξύ των $A_{\nu-1}$ και του A_ν. (το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με την αρχή Αρχιμήδους-Ευδόξου)

V_2 : Τα σημεία μιας ευθείας συγκροτούν ένα σύστημα τέτοιο ώστε με τη διατήρηση της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος σύμπτωσης και του πρώτου αξιώματος συνέχειας (δηλαδή των αξιωμάτων I_{1-2}, II_{1-3}, III_1 και V_1) δεν είναι επιδεκτικό καμιάς περαιτέρω επέκτασης. Αυτό σημαίνει ότι σε μια ευθεία δεν μπορούμε να προσθέσουμε άλλα σημεία έτσι ώστε το παραγόμενο σύστημα να ικανοποιεί τα προαναφερθέντα αξιώματα. (αυτό είναι το αξίωμα της πληρότητας)

Στην αρχή ο Hilbert είχε προτείνει και άλλα αξιώματα αλλά στην πορεία αποδείχτηκε ότι αυτά δεν ήταν ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και συνεπώς ήταν απλές προτάσεις. Υπάρχει επίσης διαφωνία σχετικά με τον ακριβή αριθμό των αξιωμάτων ιδιαίτερα της πρώτης ομάδας γιατί ορισμένοι συνενώνουν δύο αξιώματα σε ένα ή αντίστοιχα διαχωρίζουν ένα σε δύο άλλα.

Τα αξιώματα μπορούμε να τα χωρίσουμε σε ομάδες και με άλλο τρόπο. Υπάρχουν αξιώματα που καθορίζουν τις ιδιότητες της ευθείας γραμμής όπως είναι τα II_{1-3}, III_{1-3}, V_{1-2}. Τα αξιώματα αυτά τα ονομάζουμε **γραμμικά** αξιώματα. Υπάρχουν αξιώματα που ορίζουν τις ιδιότητες του επιπέδου όπως είναι τα I_{1-3}, II_4, III_{4-5}, IV. Τα αξιώματα αυτά μπορούμε να τα ονομάσουμε **επιπεδικά** αξιώματα. Τέλος υπάρχουν τα αξιώματα που καθορίζουν τις ιδιότητες του χώρου όπως είναι τα I_{4-8}. Αυτά τα ονομάζουμε **χωρητικά** αξιώματα.

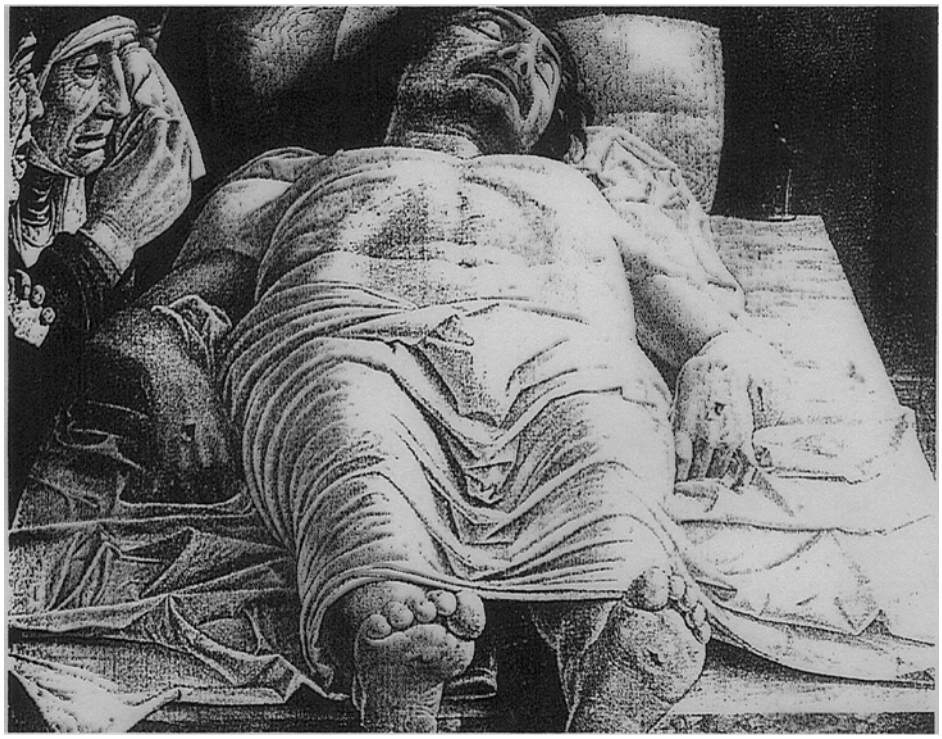
Παράρτημα V
Η προοπτική στη ζωγραφική

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι ζωγράφοι είναι πως θα απεικονίσουν τον τρισδιάστατο χώρο σε μια επιφάνεια που έχει μόνο δύο διαστάσεις. Για να λύσουν το πρόβλημα αυτό αναγκάστηκαν να μελετήσουν τις προοπτικότητες και τις προβολικότητες. Η μελέτη αυτή πρέπει να είχε γίνει ήδη από τους αρχαίους Έλληνες γιατί έχουμε γραπτές μαρτυρίες ότι στην αρχαία Ελλάδα υπήρχαν ζωγραφικοί πίνακες που απεικόνιζαν την πραγματικότητα με τρόπο απόλυτα ρεαλιστικό. Δυστυχώς λόγω της φύσης των υλικών δεν έχουν διασωθεί τέτοιοι πίνακες. Τελευταία πήραμε μια ιδέα για τα επιτεύγματα των μεγάλων αυτών ζωγράφων από κάποιες τοιχογραφίες που βρέθηκαν σε μακεδονικούς τάφους της κλασικής εποχής.

Η τεχνική της προοπτικής στη συνέχεια ξεχάστηκε και ξαναανακαλύφτηκε στην Ιταλία κατά την περίοδο της Αναγέννησης με τις εργασίες κυρίως των Alberti, Brunelleschi και Da Vinci και στη Γερμανία με τα έργα του Dürer. Με αφορμή αυτές τις ανάγκες της ζωγραφικής οι μαθηματικοί αναγκάστηκαν να μελετήσουν το θέμα και να δημιουργήσουν την προβολική γεωμετρία.

Στην αρχή οι καλλιτέχνες χρησιμοποιούσαν κατάλληλες μηχανικές κατασκευές για να μπορέσουν να ζωγραφίσουν το θέμα τους με σωστή προοπτική. Τέτοιες κατασκευές φαίνονται στα παρακάτω χαρακτικά του *Dürer*.

Αργότερα όταν οι επιστήμονες μελέτησαν τους κανόνες της προοπτικής από μαθηματική σκοπιά, οι ζωγράφοι έμαθαν να τους ελέγχουν και να τους χρησιμοποιούν. Μερικές φορές δεν δίσταζαν να ξεφεύγουν από τους κανόνες υπερτονίζοντας την προοπτική για να τραβήξουν την προσοχή του θεατή. Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στο παρακάτω έργο του *Montegna* που απεικονίζει την αποκαθήλωση τους σώματος του Χριστού. Η προσεκτικά υπερτονισμένη προοπτική εστιάζει την προσοχή στο πρόσωπο του Χριστού και στις χαρακτηριστικές πληγές του.



Βέβαια η γνώση των κανόνων της προοπτικής επιτρέπει στον καλλιτέχνη να «ξεπεράσει» την πραγματικότητα δηλαδή να ξεγελάσει το ανθρώπινο μάτι, να δημιουργήσει δηλαδή μια οφθαλμαπάτη. Στον παρακάτω πίνακα ο *Hogarth* μας δείχνει πως μπορεί να παραπλανήσει το θεατή. Ο πίνακας είναι γεμάτος από εσκεμμένα προοπτικά λάθη.

Βλέπουμε ότι η γνώση των κανόνων είναι απαραίτητη είτε θέλουμε να απεικονίσουμε πιστά την πραγματικότητα είτε θέλουμε να την διαστρεβλώσουμε. Σήμερα έχει εκλείψει η ανάγκη της απόλυτα

πιστής ζωγραφικής αναπαράστασης γιατί αυτή καλύπτεται από τη φωτογραφία. Οι ζωγράφοι δίνουν έμφαση σε άλλα στοιχεία.

Η ιδέα αυτή έχει το αντίστοιχό της στη διδασκαλία. Ο δάσκαλος δηλαδή πρέπει όχι μόνο να είναι τέλειος γνώστης του αντικειμένου που θα διδάξει αλλά πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα γιατί μόνο έτσι ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει πραγματικά μια έννοια.

Ευρετήριο

Αξιώματα
Γραμμικά …… σελ 99
Διάταξης …… σελ 97
Επιπεδικά …… σελ 99
Παραλληλίας …….. σελ 99
Σύμπτωσης …… σελ 98
Σύνδεσης ……...… σελ 97
Σύμπτωσης …… σελ 98
Συνέχειας ……... σελ 99
Χωρητικά ……... σελ 99
Γεωμετρία
Γυμνασίου …… σελ 66
Διδακτική πρόταση …… σελ 70
Klein ……..... σελ 39,58,95
Λυκείου …….. σελ 68
Προβολική …….. σελ 61
Διαδικασίες
Διανοητικές …… σελ 76
Γνωστικές ……... σελ 77
Συγκινησιακές / Αντιληπτικές …….. σελ 77
Πραγματιστικές …….. σελ 77
Διαμέριση …… σελ 90
Διαστολή (dilation) …… σελ 45
Διχάλωση …… σελ 78
Δράση …….. σελ 95
Έκταση (strain) …… σελ 46
Ελκυστής ……... σελ 79
Ενεργοποίηση …….. σελ 78
Ενόραση (insight) …… σελ 17
Έπαρση (elation) …… σελ 62
Επίπεδα Van Hiele …….. σελ 10
Έρευνες για τα επίπεδα Van Hiele
Σχέδιο Oregon …… σελ 21,25,31
Σχέδιο Brooklyn …….. σελ 21,25,30
Σχέδιο Chicago …… σελ 21,25,31

Έρευνα Ζάχου …….…… σελ 23
Έρευνα Ντζιαχρήστου-Ζαράνη …….. σελ 24
Έρευνα Τζίφα …….……. σελ 24,26,28,32
Fractal (κλασμοειδές) …… σελ 73
Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης ……... σελ 9
Ημιπεριστροφή (halfturn) ……..…… σελ 44
Hilbert, αξιωματικό σύστημα ……..…….. σελ 40,96
Ιεραρχία …….…... σελ 65,90
Ισομετρία ……...… σελ 48,55
Julia, εξίσωση …… σελ 81
Κάλυψη …….. σελ 90
Κάμψη (shear) …….…….. σελ 47
Κατηγορία ……..…... σελ 35,85
Κατοπτρισμός (reflection) …….…… σελ 43,53
Κατοπτρισμός με ολίσθηση (glide reflection) …..…. σελ 54
Λογική ……... σελ 36
Λυτική προβλήματος …….. σελ 73,79
Μετασχηματισμός (transformation)……..…….. σελ 38,40,52
Μεταφορά (translation) ……..…… σελ 41,53
Μορφισμός ……..….. σελ 35,39,87
Οικουμενική μέθοδος ……...….. σελ 73,83
Ολοκλήρωση …….. σελ 78
Ομοιότητα (similarity) …….…….. σελ 50,57
Ομολογία (homology) …….… σελ 62
Περιορισμός …… σελ 78
Πραγματικοί Αριθμοί ……...……...…… σελ 37
Προοπτική ……...…… σελ 100
Στροφή (rotation) ……...……. σελ 43,53
Συγγραμμικότητα (collineation) ……...…..…… σελ 41,62
Συναρτητής (functor) ……...……..… σελ 39,88
Φάσεις της μάθησης ……...……. σελ 14
Χάος ……..…….. σελ 74
Χελώνα, η γεωμετρία της ……...……. σελ 59

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αλιμπινίσης – Αντύπας – Ευσταθόπουλος – Κλαουδάτος – Παπασταυρίδης (1997) : *«Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου»,* ΟΕΔΒ.

Αλιμπινίσης – Γρηγοριάδης – Ευσταθόπουλος – Κλαουδάτος – Παπασταυρίδης – Σβέρκος (1998) : *«Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου»,* ΟΕΔΒ.

Αλιμπινίσης – Γρηγοριάδης – Ευσταθόπουλος – Κλαουδάτος – Παπασταυρίδης – Σβέρκος (2003) : *«Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου»,* ΟΕΔΒ.

Αραχωβίτης Ι. (2001) : *«Σημειώσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών ΙΙ»,* Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Αραχωβίτης Ι. (2005) : Φάκελος μαθήματος *«Μαθηματικοποίηση προβλημάτων»,* Εαρινό εξάμηνο 2004-05.

Αργυρόπουλος – Βλάμος – Κατσούλης – Μαρκάτης – Σίδερης (2001) : «*Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου»,* ΟΕΔΒ.

Βασιλείου Ε. – Αραχωβίτης Ι. (1992) : *«Σημειώσεις Γραμμικής Γεωμετρίας (τεύχος 1)»,* Αθήνα, Αθανασόπουλος-Παπαδάμης.

Ζάχος, Ι. (2000) : «Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β΄ τάξης του Λυκείου», *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV, σελ.*161-*179,* Αθήνα, Gutenberg.

Κολέζα Ε. (2000) : *«Γνωσιολογική και διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»,* Αθήνα, Leader Books.

Μυτιληναίος Μ. (2004) : *«Λογική»,* Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε. (1999) : *«Απειροστικός λογισμός»,* Αθήνα, Συμμετρία.

Ντζιαχρήστος Β. - Ζαράνης Ν. (2001) : «Η αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με την βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού», *Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 56(2001) σελ.55.*

Τζίφας Ν. Β (2006) : *«Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού»,* διπλωματική εργασία στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ξένη Βιβλιογραφία

Freudenthal H. (1973) : *"Mathematics as an Educational Task",* Dordrecht. Holland, Reidel.

Gallier J. (2001) : *"Geometric Methods and Applications",* New York, Springer-Verlang.

Hoffer A. (1979) : *"Geometry, a model of the universe",* Menlo Park, Adisson-Wesley.

Hoffer A. (1983) : "Van Hiele based research". In R. Lesh & M. Laudan *"Acquisition of mathematics concepts and processes",* p.p. 205-227, New York, Academic Press.

MacLane S. (1971) : *"Categories for the working mathematician",* New York, Springer-Verlang.

Martin G. (1982) : *"Transformation Geometry : An Introduction to Symmetry",* New York, Springer-Verlang.

Stevenson F. (1972) : *"Projective Planes",* San Francisco, Freeman and Co.

Van Hiele P. (1959) : *"La pensée de l'enfant et la géométrie"*. Bulletin de l'Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Public, 198, 199-205.

Van Hiele P. (1986) : *"Structure and insight : A theory of mathematics education",* New York, Academic Press.

Usiskin, Z. (1982) : *"Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry"* (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project), University of Chicago.

Wirszup I. (1976) : "Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry". In J.L. Martin *"Space and Geometry: Papers from a research workshop",* Colombus, Ohio: ERIC/SMEAC

Δικτυακοί τόποι

Σκιαδάς Χ. (2005) : «*Η θεωρία κατηγοριών και η θέση της στα σύγχρονα μαθηματικά*». Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://www.math.uoa.gr/web/activ/magaz/teyxos3/thema1.html στις 18/11/2005.

Wikipedia (2006) : *«Θεωρία του χάους»*. Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://el.wikipedia.org/wiki/ στις 6/6/2006.

Wikipedia (2005) : *"Category Theory"*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory in 18/11/2005.