ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απόπειρα εισαγωγής εννοιών απειροστικού λογισμού σε μαθητές Α΄ γυμνασίου: η περίπτωση της εφαπτομένης κύκλου-καμπύλης.

Αθανασία Ρούσση

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1) Ζαχαριάδη Θεοδόσιο (επιβλέπων Καθηγητή)	**Καθηγητής**	**……..**
2) Πόταρη Δέσποινα	**Αναπληρώτρια Καθηγήτρια**	**……..**
3) Κλαουδάτο Νίκο	**Δρ στη Διδακτική των Μαθηματικών**	**……..**

Στη μνήμη του πατέρα μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

τον καθηγητή κ. Θ. Ζαχαριάδη για την υποστήριξη που μου πρόσφερε και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην εκπόνηση της εργασίας μου,

την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Δ. Πόταρη και τον Δρ Ν. Κλαουδάτο για την τιμή που μου έκαναν με την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή,

την κ. Δ. Μπακογιάννη για την προθυμία της να με εξυπηρετήσει οποτεδήποτε χρειάστηκε.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ **6**
ABSTRACT **7**
ΕΙΣΑΓΩΓΗ **8**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} **12**
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ **12**
1.1. Ο ρολος των ορισμων στη διδασκαλια των μαθηματικων εννοιων. Εικονα εννοιας (Concept Image) – Ορισμος εννοιας (Concept Definition) **12**
1.2. Διδασκαλια απο το ειδικο στο γενικο **18**
1.3. Προχωρημενη Μαθηματικη-Σκεψη σε Καθε Ηλικια: ειναι Φυσικο και Εξελισσομενο **21**
1.4. Έρευνες πανω σε θεματα αναλυσης σε μαθητες γυμνασιου. **25**
1.5. Η Εφαπτομενη Ευθεια στην Έρευνα **32**
1.6. Προτασεις για την διδασκαλια της εφαπτομενης. **36**
1.7. Ο ρολος της τεχνολογιας στη διδασκαλια των μαθηματικων **38**
1.8. Ο διαδραστικος πινακας και η διδακτικη του αξιοποιηση **42**
1.9. Λιγα λογια για το GeoGebra **44**
1.10. Τροχιες μαθησης και διδασκαλιας στα σχολικα μαθηματικα **45**
1.11. Η πρακτικη της ταξης **49**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} **55**
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ Έρευνας **55**
2.1. Ερευνητικο προβλημα – Ερευνητικα Ερωτηματα **55**
2.2. Μεθοδος **55**
2.3. Συλλογη δεδομενων **56**
2.4. Ο σχεδιασμος της διδασκαλιας **56**
2.5. Ο σχεδιασμος του τεστ αξιολογησης **63**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} **66**
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **66**
3.1. Φαινομενα που παρατηρηθηκαν στη ταξη των μαθηματικων. **66**
3.1.1. Στιγμιότυπα της 1^{ης} διδασκαλίας-σχόλια. (τμήμα 2^{ο}) *67*
3.1.2. Στιγμιότυπα της 2^{ης} διδασκαλίας-σχόλια. (τμήμα 1^{ο}) *82*
3.2. Αποτελεσματα απο την γραπτη εξεταση (τεστ) **95**
3.2.1. Πρώτο ερώτημα-κύκλος *95*
3.2.2. Πρώτο ερώτημα-καμπύλη1 ..... *96*
3.2.3. Πρώτο ερώτημα-καμπύλη2 ..... *96*
3.2.4. Δεύτερο ερώτημα-κύκλος *96*
3.2.5. Δεύτερο ερώτημα-καμπύλη 1 ..... *98*
3.2.6.Δεύτερο ερώτημα-καμπύλη 2 ..... *98*
3.2.7. Τρίτο ερώτημα *99*
3.3. Ενδιαφεροντα στιγμιοτυπα σε ανυποπτο χρονο. **100**
3.4. Συζητηση-Συμπερασματα. **103**
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **107**

Περίληψη

Η παρούσα εργασία (μια μελέτη περίπτωσης) διερευνά τις αντιλήψεις που δημιουργούνται, αν νεαροί μαθητές πειραματισθούν πάνω σε έννοιες του απειροστικού λογισμού από την εισαγωγή τους στο γυμνάσιο. Η μελέτη στηρίζεται σε μια υποψιασμένη διδασκαλία με χρήση καταλλήλου λογισμικού, η οποία βασίστηκε στη ιδέα της τοπικής ευθύτητας της Biza. Θέτει τα εξής ερωτήματα: Μπορούν οι μαθητές μέσα από τη σχέση της τέμνουσας με την εφαπτομένη να γνωρίσουν το «πολύ κοντά»; Μπορούν να παρατηρήσουν τις τοπικές ιδιότητες της εφαπτομένης; Μπορούν να μεταβούν από τον κύκλο στην καμπύλη, παρατηρώντας τις ίδιες ιδιότητες;

Η ανάλυση της διδασκαλίας και των φαινόμενων που παρατηρήθηκαν στην τάξη, η μελέτη των φύλλων εργασίας των μαθητών, η μελέτη των αποτελεσμάτων γραπτής εξέτασης καθώς και η μετέπειτα στάση τους στην τάξη των μαθηματικών, αφήνουν την εντύπωση ότι οι μαθητές είναι ικανοί να παρατηρήσουν λεπτές έννοιες των ανώτερων μαθηματικών από τη νεαρή τους ηλικία. Καθώς το νεαρό της ηλικίας των υποκειμένων κάνει την μελέτη πρωτότυπη, περαιτέρω έρευνα θα επιβεβαίωνε τις υποψίες αυτές και ίσως έδινε νέα διάσταση και προοπτική στη διδασκαλία του απειροστικού λογισμού.

Λέξεις Κλειδιά: εφαπτομένη ευθεία, τοπική ευθύτητα, νεαροί μαθητές, καμπύλη, γυμνάσιο.

Abstract

This paper (a case study) investigates young students' intuitions, appearing when they cope with concepts of analysis, since they are first-former in high school. Specially, it focuses in the case of the tangent line of a cycle. An appropriate instruction, based on the concept of local straightness (Biza, 2008, 2011) and assisted by ICT (GeoGebra software and the embedded magnification-tools), was implemented. The following questions were posed: Can the relation between secant and tangent line make students note the concept of infinitesimal? Can they appreciate the local properties of tangent line? Can they reach the concept of tangent line of a curve smoothly?

The research data include transcriptions of the teachings, analysis of the didactic phenomena observed in the classroom, study of the students' worksheets and tests as well as observation of their subsequent attitude in math courses. The results indicate that students are capable of discerning subtle concepts of advanced mathematics despite their age. As the originality of the present study is based upon the young age of the subjects, we believe that further investigation would clarify the above indications and generate new perspectives in calculus instruction.

Key words: tangent line, local straightness, young pupils, curve, high-school.

Εισαγωγή

Οι έννοιες της Ανάλυσης έχουν κεντρική θέση στην ανάπτυξη αλλά και στη δομή της μαθηματικής θεωρίας. Συχνά όμως το νόημά τους χάνεται ή παραποιείται από τους μαθητές στην προσπάθεια τους να τις κατανοήσουν. Από τις έρευνες που αφορούν στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού τα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια, προκύπτουν συμπεράσματα που καταδεικνύουν τόσο τα προβλήματα στην κατανόηση αυτών των εννοιών, όσο και το ότι οι συνήθεις μέθοδοι και οι τεχνικές διδασκαλίας έχουν αποτύχει, όπως επίσης έχει αποτύχει και η μονομερής επικέντρωση της ανάλυσης είτε σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς, είτε σε θεωρητικά θέματα (Artigue, 1997). Στόχος είναι η μάθηση στα Μαθηματικά να γίνει εννοιολογική. Να καταφέρει δηλαδή ο μαθητής να κατανοήσει τις ιδέες που κρύβονται πίσω από τους ορισμούς και τις διαδικασίες. Η αφηρημένη φύση των μαθηματικών δυσχεραίνει αυτήν την διαδικασία. Οι μαθητές δημιουργούν εικόνες των εννοιών στην προσπάθειά τους να τις καταλάβουν και να τις διαχειριστούν (Tall, Vinner 1981). Οι εικόνες, άλλοτε πετυχημένες και ολοκληρωμένες, άλλοτε με παρανοήσεις, αναδίδονται κάθε φορά που ο μαθητής καλείται να αξιολογηθεί. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν πηγή έμπνευσης και προβληματισμού για τους ερευνητές και διδάσκοντες.

Ο σύγχρονος εκπαιδευτικός είναι επιφορτισμένος με την ευθύνη να προβλέψει την εξέλιξη της μαθησιακής τροχιά του μαθητή. Γνωρίζει σε μεγάλο βαθμό, σε ποιες έννοιες θα σκοντάψουν οι μαθητές του σε εμπόδια. Είτε από την εμπειρία του στο ίδιο αντικείμενο και από την σχέση του με τους μαθητές, είτε –σε πιο υποψιασμένους εκπαιδευτικούς– από αποτελέσματα ερευνών που τα καταδεικνύουν. Έχει την δυνατότητα να προβλέψει όχι μόνο βραχυπρόθεσμά αλλά και μακροπρόθεσμα τι πρόκειται να συμβεί. Η γνώση αυτή είναι χρήσιμη εφόσον χρησιμοποιηθεί ως κεντρικός άξονας στο σχεδιασμό διδασκαλιών. Για παράδειγμα ο εκπαιδευτικός που γνωρίζει τις παρανοήσεις και τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην Α' λυκείου με την απόλυτη τιμή αριθμού, οφείλει να είναι ιδιαίτερα προσεχτικός με την εισαγωγή της έννοιας στην Α' γυμνασίου και να αποφύγει τρόπους και εκφράσεις που θα ενισχύσουν αυτές τις παρανοήσεις. Ο Vinner (1991) σχετικά με αυτό σημειώνει ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει να αποφύγει τον ορισμό της απόλυτης τιμής ως «ο αριθμός χωρίς το πρόσημο», και να εστιάσει στην απόσταση από το μηδέν πάνω στην αριθμογραμμή.

Αυτό το σκεπτικό βρίσκεται πίσω από το εγχείρημά μας, την διδασκαλία εννοιών απειροστικού (συγκεκριμένα της εφαπτομένης καμπύλης), σε μαθητές της Α' Γυμνασίου, με

έναν τρόπο που προσιδιάζει με αυτό που θα αντιμετωπίσουν αρκετά αργότερα στην ανάλυση: η εφαπτομένη κύκλου ως οριακή θέση τέμνουσας. Στη μέση εκπαίδευση η εφαπτομένη, εισάγεται ως γεωμετρική έννοια (εφαπτόμενη στον κύκλο) με τις εξής ιδιότητες:

i) Με τον κύκλο έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο.
ii) Είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο τομής.
iii) Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και δεν τον «κόβει».
iv) Έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και ο κύκλος βρίσκεται στο ένα ημιεπίπεδο.

Οι δύο πρώτες εδραιώνονται, τόσο από τον διδάσκοντα, όσο και από το σχολικό εγχειρίδιο. Οι δύο τελευταίες επάγονται μέσω των εικόνων. Αυτές οι ιδιότητες ενώ μελετώνται και σχολιάζονται στην εφαπτομένη συνάρτησης στην Γ΄ Λυκείου, παραμένουν ως πεποιθήσεις στους μαθητές και επανέρχονται συχνά και αυθόρμητα, δίνοντας την αίσθηση της αποτυχίας κατανόησης της έννοιας.

Οι αιτίες που η έννοια αυτή, τόσο ως ορισμός όσο και ως εικόνα, δημιουργεί ένα τόσο ισχυρό γνωστικό αντικείμενο, μοιάζουν να είναι οι ακόλουθες:

Είναι μια νέα έννοια, απλή στη σύλληψή της, μια που σχετίζει δύο πολύ οικεία σχήματα στους μαθητές, τον κύκλο και την ευθεία, με μία πολύ ξεκάθαρη σχέση: «έχουν ένα κοινό σημείο». Είναι δε από τους ορισμούς που οι μαθητές μπορούν να τον αναπαράγουν με ευκολία. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι ο ορισμός της έννοιας, δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλή περιγραφή της εικόνας της έννοιας, η οποία εύκολα εσωτερικεύεται στον μαθητή. Σημαντικό είναι και το γεγονός, ότι η εικόνα της εφαπτομένης κύκλου εισέρχεται εύκολα στον κόσμο των μαθηματικών από τον πραγματικό κόσμο, για παράδειγμα η ρόδα του ποδηλάτου που κυλάει στον δρόμο ή ο ήλιος που δύει στον ορίζοντα. Είναι «καθαρή» λοιπόν από συγκρούσεις, που εμφανίζονται σε άλλες έννοιες, λόγω της χρήσεις τους στην καθημερινή ζωή.

Οι μαθητές μετά την πρώτη επαφή με την έννοια στο γυμνάσιο, την επαναδιαπραγματεύονται στην γεωμετρία της Α' Λυκείου, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Το γνωστικό σχήμα είναι απόλυτος ταιριαστό με το προηγούμενο. Ισχυροποιείται δε, ακόμη περισσότερο μέσω της επανάληψης. Με τον όρο επανάληψη εννοούμε ότι το άτομο βρίσκεται ενώπιον πολλών παρόμοιων εμπειριών, απ' όπου θα εντοπίζει τα βασικά κοινά χαρακτηριστικά τους.

Την επόμενη χρονιά, ό ω ι από τους μαθητές θα επιλέξουν θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση, θα εισαχθούν στην αναλυτική γεωμετρία μέσω των κωνικών τομών. Αρχικά θα διδαχθούν την εξίσωση του κύκλου και της εφαπτομένης του. Η έννοια είναι ήδη γνωστή και κυρίως αποτελεσματική στις απαιτήσεις της ενότητας. Στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχουν αρκετές αναπαραστάσεις, καμία γνωστική σύγκρουση. Στη συνέχεια διδάσκονται παραβολή, έλλειψη, υπερβολή. Και εδώ οι αναπαραστάσεις που έχουν ήδη οι μαθητές δεν συγκρούονται με τις αναπαραστάσεις των κωνικών τομών (ένα κοινό σημείο, η καμπύλη να παραμένει στο ίδιο ημιεπίπεδο). Ακόμη και στην περίπτωση της υπερβολής θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι ισχύει το ίδιο σε κάθε κλάδο της καμπύλης ξεχωριστά. Παρόλο που θα ήταν χρήσιμο να δοθεί έμφαση στον ορισμό της εφαπτομένης καμπύλης και να δημιουργηθεί μια πρώτη σύγκρουση με την προηγούμενη γνώση, η απόδειξη της εξίσωσης εφαπτομένης παραβολής είναι εκτό ς διδακτέας ύλης, οπότε χάνετε και η ευκαιρία του επαναπροσδιορισμού της.

Φτάνει ο μαθητής στην Γ' Λυκείου, όπου πια δεν μπορεί να αναβληθεί άλλο ο ορισμός της εφαπτομένης καμπύλης. (Στο σημείο αυτό θέτουμε ένα ερώτημα. Γνωρίζει ο μαθητής τι σημαίνει καμπύλη; Τι θα απαντούσε στο ερώτημα: «Μια ευθεία είναι καμπύλη;») Και στην συνέχεια ορίζεται η εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης. Εντούτοις, έρευνες έχουν δείξει ότι η εικόνα της έννοιας που οικοδομούν από την εμπειρία σχημάτων, δεν τους βοηθούν να ανακατασκευάσουν την εικόνα της έννοιας της εφαπτομένης του κύκλου, που πλέον είναι η σταθερή κατάσταση, πάνω στην οποία πρέπει να οικοδομηθεί η νέα γνώση. Συμπεριλαμβάνουν τα απαραίτητα, τα οποία ενισχύουν το ότι μια εφαπτομένη μπορεί να συναντήσει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο και δεν διασχίζει την καμπύλη σε εκείνο το σημείο.

Ήδη από το 1972 υπάρχουν έρευνες που καταδεικνύουν τις παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές με την εφαπτομένη καμπύλης. Οι περισσότερες από τις οποίες οφείλονται στον τρόπο που η έννοια εισήχθη στην ευκλείδεια γεωμετρία. Η εικόνα αυτή είναι ιδιαίτερα επίμονη και όσο ισχυρότερη είναι, τόσο οξύτερο το εμπόδιο που μπορεί να προκαλέσει και τόσο μεγαλύτερη η δυνατότητά της να συσκοτίσει, παρά να εξηγήσει (Aspinwall κ.ά., 1997).

Το εγχείρημά μας στηρίζεται ακριβώς σ' αυτό το σημείο. Γιατί να επιτρέψουμε την δημιουργία μιας τόσο ισχυρής εικόνας; Γιατί να μην προσπαθήσουμε την εισαγωγή της έννοιας με έναν τρόπο που να προσιδιάζει με αυτό που θα αντιμετωπίσουν ο ι μαθητές αργότερα;

Για να υποστηρίξουμε το εγχείρημα θα αναφερθούμε:

- Στη σημασία των ορισμών στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, στο δίπολο εικόνα έννοιας - ορισμός έννοιας.
- Στη μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.
- Στη δυνατότητα ανάπτυξης προχωρημένης μαθηματικής σκέψης από πολύ νωρίς.
- Στα συμπεράσματα μελετών που καταδεικνύουν τις παρανοήσεις των μαθητών στις έννοιες του απειροστικού λογισμού, εστιασμένες στην εφαπτομένη καμπύλης.
- Στις διδακτικές παρεμβάσεις που έχουν προταθεί και υλοποιηθεί από διάφορους ερευνητές προκειμένου να δημιουργηθεί το κατάλληλο πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές θα ανακατασκευάσουν τις παρανοήσεις τους.
- Σε αντίστοιχα εγχειρήματα διδασκαλίας θεμάτων ανάλυσης σε μαθητές γυμνασίου.
- Στη διδασκαλία εννοιών απειροστικού με χρήση νέων τεχνολογιών.
- Στις μαθησιακές τροχιές με βάση τις οποίες έχουν αναπτυχθεί τα νέα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

Στο δεύτερο μέρος θα παρουσιάσουμε:

- Τη μεθοδολογία και το σχεδιασμό της έρευνας.
- Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη διδασκαλία και τα αποτελέσματα του τεστ που έγραψαν οι μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Θεωρητικό πλαίσιο

1.1. Ο ρόλος των ορισμών στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Εικόνα έννοιας (Concept Image) – Ορισμός έννοιας (Concept Definition)

Ο Vygotsky διέκρινε δύο τύπους εννοιών, τις αυθόρμητες ή καθημερινές και τις επιστημονικές ή θεωρητικές. Οι πρώτες αναπτύσσονται με έναν μη συστηματικό τρόπο, διαμέσου της εμπειρικής αφαίρεσης (Davydov). Λέγοντας **εμπειρική αφαίρεση** εννοούμε τη σύγκριση χαρακτηριστικών διαφορετικών καταστάσεων και την επισήμανση ομοιοτήτων και διαφορών. Αυτό έχει σαν συνέπεια, οι ορισμοί να μην αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για τις έννοιες της καθημερινότητας (Fodor κ.ά, 1980). Για πολλές από αυτές τις έννοιες δεν υπάρχει καν ορισμός (π.χ. η λέξη «πράσινο», παρόλο που κάπως είναι ορισμένη στα λεξικά). Αυτό που συμβαίνει όμως στην καθημερινότητα είναι ότι το άκουσμα μιας λέξης ανασύρει στη μνήμη κάποια προηγούμενη εμπειρία ή εικόνα που σχετίζεται με τη λέξη και της δίνει υπόσταση. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τις επιστημονικές ή θεωρητικές έννοιες, οι οποίες εισάγονται κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης και λειτουργούν μέσα σε ένα ιεραρχικό σύστημα διασυνδέσεων με άλλες επιστημονικές έννοιες και σχέσεις. Ιδιαίτερα στα μαθηματικά, ο ορισμός κατέχει εξαιρετικά σημαντικό ρόλο. Τίποτα δεν υπονοείτε και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αν δεν έχει πρώτα ορισθεί.

Ένας ορισμός πρέπει να είναι σαφής, χωρίς αυτοαναφορά, να μην εξαρτάται από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας, να καθορίζει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν, να είναι εύχρηστος, λιτός και εύκολα κατανοητός. (π.χ. Harel κ.ά, 2006˙ Mamona-Downs & Downs, 2002˙ Shir & Zaslavsky, 2001, 2002 Vinner, 1991 Winicki & Leikin, 2000α). Πολλές φορές για την ίδια έννοια υπάρχουν διαφορετικοί, ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ορισμοί. Από επιστημονική θέση, αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα. Κάποιος ορισμός μπορεί πράγματι να είναι πιο εύχρηστος στο συγκεκριμένο πλαίσιο που χρησιμοποιείται.

Από τη διδακτική σκοπιά όμως, οι ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι. Πρέπει να ληφθούν υπ' όψη καταρχάς οι γνώσεις του μαθητή. Ο ορισμός σύμφωνα με τη θεωρία κατασκευής της γνώσης (constructivism), θα κατασκευασθεί «πάνω» στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα των μαθητών (von Glasersfeld, 1991), κατά δεύτερον «στη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης» των μαθητών. Η ζώνη αυτή αντιστοιχεί στην απόσταση ανάμεσα στο

πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο, όπως αυτό καθορίζεται από την αξιολόγηση του αντικειμένου στην επίλυση προβλημάτων, και στο επίπεδο της εν δυνάμει ανάπτυξής του, όπως αυτό καθορίζεται από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση ενηλίκων ή την συνεργασία του με πιο ικανούς μαθητές (Vygotsky, 1962). Και τέλος, για την επιλογή του κατάλληλου ορισμού πρέπει να ληφθούν υπ' όψη οι διαισθήσεις των μαθητών.

Διαισθητική γνώση είναι ένα είδος γνώσης που εμφανίζεται στο άτομο ως κάτι αυταπόδεικτο και αυτονόητο. Μπορεί να οφείλεται σε προσωπικές φυσικές εμπειρίες του ατόμου (πρωταρχικές) ή να είναι αποτέλεσμα συστηματικής εκπαίδευσης (δευτερεύουσες). Η διαισθητική γνώση είναι ιδιαίτερα επίμονη, έχει υπόσταση θεωρίας αλλά, δεν είναι κατ' ανάγκη ορθή. Στην εισαγωγή μιας νέας έννοιας στους μαθητές είναι δυνατό οι πρωταρχικές διαισθήσεις τους, αν δεν διαπραγματευτούν, να αποτελέσουν εμπόδιο για την κατανόηση τους. Και από την άλλη μεριά, να δημιουργήσουν νέες δευτερεύουσες διαισθήσεις, οι οποίες να γίνουν τροχοπέδη στην εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας (Fischbein 1999). Για παράδειγμα ένας μαθητής δεν μπορεί να αποδεχθεί την ευθεία ως καμπύλη, λόγω των πρωταρχικών διαισθήσεων που έχει για την έννο**α** της καμπύλης από την καθημερινή φυσική του εμπειρία. Ή η εισαγωγή της εφαπτομένης κύκλου ως η ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο, ενδέχεται να του δημιουργήσει την διαίσθηση ότι το ίδιο ισχύει και στην εφαπτομένη καμπύλης.

Ο Vygotsky όπως και ο Piaget δεν πιστεύουν στην δυνατότητα της λεκτικής μετάδοσης της γνώσης. Νοητικές λειτουργίες όπως η εκούσια μνήμη, η λογική μνήμη, η αφαίρεση (αφαιρετική διαδικασία), η σύγκριση και η διάκριση, δεν μαθαίνονται τυποποιημένα. Οι σημασία που κρύβουν οι λέξεις, δεν μπορούν να μεταδοθούν με άλλες λέξεις, επειδή κάθε λέξη είναι μια γενίκευση και οι άνθρωποι ενεργούν με διαφορετικούς συνειρμούς και σε διαφορετικά επίπεδα γενίκευσης. Αυτό, στην διαδικασία της μάθησης, μεταφράζεται ως εξής: Οι δάσκαλοι πρέπει να παραιτηθούν απ' το να δίνουν προφορικούς ορισμούς στους μαθητές. Η εισαγωγή σε μια νέα έννοια είναι η απαρχή μιας διαδικασίας εξέλιξης που απαιτεί σοβαρή δουλειά και αναστοχασμό από το παιδί. Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από τον δάσκαλο αλλά οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή.

Όλη αυτή η διαδικασία έχει ως συνέπεια τη δημιουργία της **εικόνας της έννοιας** (concept image, Tall και Vinner, 1981) στο μαθητή. Η εικόνα της έννοιας αναφέρεται στη

νοητική δομή που θα κατασκευάσει ο μαθητής για αυτήν την νέα έννοια. Μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση όταν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, (όπως στην περίπτωση της εφαπτομένης), σύνολο ιδιοτήτων ή χαρακτηριστικών, σύνολο εμπειριών που σχετίζονται με την έννοια, παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα. Η εικόνα της έννοιας είναι κάτι μη-εκφράσιμο λεκτικά, συνδεδεμένο στο μυαλό του μαθητή μόνο με το όνομα της έννοιας. Επίσης είναι κάτι που μπορεί να αλλάξει με την ωριμότητα του ατόμου αλλά και με τα ερεθίσματα με τα οποία αυτό έρχεται αντιμέτωπο. **Ορισμός της έννοιας** (concept definition, Tall και Vinner, 1981) από την άλλη μεριά, είναι η λεκτική τυπική περιγραφή της έννοιας, είναι δηλαδή ο ορισμός που είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Στη γνωστική δομή αυτά τα δύο «συστατικά» αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά κελιά. Τα δύο αυτά κελιά δημιουργούνται ανεξάρτητα, ενδεχομένως σε διαφορετική χρονική στιγμή. Οπότε μπορεί κάποιο από τα δύο να παραμείνει κενό ή να τα περιεχόμενά τους να μην είναι ισοδύναμα (Vinner, 1991).

Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, όταν η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με έναν άνευ νοήματος τρόπο. Για παράδειγμα ο μαθητής μπορεί να διατυπώσει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά δεν μπορεί να σχεδιάσει ορθογώνιο τρίγωνο και να αντιστοιχίσει την σχέση. Μπορεί να συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. κατά την εισαγωγή της νέας έννοιας να δημιουργήθηκε η εικόνα της αλλά να «ξεχάστηκε» ο ορισμός. Για παράδειγμα ο μαθητής είναι ικανός να σχεδιάζει κατακορυφήν γωνίες, αλλά δεν μπορεί να διατυπώσει τον ορισμό τους. Άλλη περίπτωση έχουμε όταν τα περιεχόμενα δεν είναι κενά αλλά ούτε και ισοδύναμα. Για παράδειγμα ένας μαθητής γνωρίζει τον ορισμό του ύψους τριγώνου, αλλά στην εικόνα που έχει κατασκευάσει το ύψος βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου. Με αποτέλεσμα να μην σχεδιάζει σωστά τα ύψη σε αμβλυγώνιο τρίγωνο. Και έχουμε τη βέλτιστη κατάσταση όταν τα δύο κελιά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και ενεργοποιούνται ανάλογα με την περίπτωση. Το πόσο πετυχημένη και ολοκληρωμένη είναι η εικόνα της έννοιας που θα κατασκευάσει ο μαθητής, (δηλ. πόσο κοντά στον τυπικό ορισμό βρίσκεται), εξαρτάται από πολλές συνιστώσες όπως ο τρόπος διδασκαλίας που θα επιλεγεί, τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσει, τα παραδείγματα που θα διαπραγματευτούν, οι γνώσεις που ήδη έχει, οι πεποιθήσεις που «κουβαλάει». Όταν ο μαθητής εδραιώσει μια εικόνα για μια έννοια, η οποία όμως απέχει από την μαθηματικά αποδεκτή, τότε θα δημιουργήσει και τον δικό του προσωπικό ορισμό, που θα ανταποκρίνεται στην δικιά του εκδοχή της έννοιας. Η δημιουργία της ορθής εικόνας έννοιας είναι ιδιαίτερα σημαντική. Είδαμε παραπάνω τι συμβαίνει με τις έννοιες της καθημερινότητας. Το άκουσμά τους

ανασύρει ουσιαστικά την εικόνα της έννοιας. Οι συμπεριφορές και οι συνήθειες όμως των ανθρώπων στην καθημερινότητα, επηρεάζουν τον τρόπο που λειτουργούν στα μαθηματικά. Έτσι αυτό που παρατηρείται στην τάξη των μαθηματικών είναι οι λεκτικές διατυπώσεις, να μην είναι το πρώτο που ανασύρετε στην μνήμη των μαθητών. Από τη στιγμή που δημιουργείται η εικόνα της έννοιας, ο ορισμός μένει ανενεργός (Vinner, 1991). Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι ότι το ίδιο άτομο μπορεί να αντιδράσει σε ένα συγκεκριμένο όρο (το όνομα της έννοιας) διαφορετικά, σε διαφορετικές καταστάσεις. Στο Tall & Vinner (1981) εισάγεται ο όρος «προκληθείσα εννοιοεικόνα», για να περιγράψει το τμήμα της μνήμης που ζωντανεύει σ' ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Αυτό δεν είναι, απαραίτητα, όλα όσα ένα συγκεκριμένο άτομο ξέρει για μια συγκεκριμένη ιδέα και σε πολλές περιπτώσεις οδηγεί το μαθητή σε παγίδες και λάθη. Η επιθυμητή διαδικασία θα ήταν η ανάκληση του ορισμού της έννοιας (και όχι της εικόνας της), στη λύση προβλημάτων. Όμως είναι δύσκολο να εκπαιδεύσουμε ένα γνωστικό σύστημα να λειτουργεί ενάντια στη φύση του και να του επιβάλουμε να συμβουλεύεται ορισμούς, είτε όταν σχηματίζει μια εννοιοεικόνα, είτε όταν λειτουργεί σε μία εντεταλμένη γνωστική διαδικασία. Ο στόχος μετατοπίζεται (ιδιαίτερα στις νεαρές ηλικίες), στη δημιουργία μιας ολοκληρωμένης εικόνας για την έννοια που βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση, μέσα από την επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η πορεία της μάθησης είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να οδηγεί από το απλό στο σύνθετο ή από το μερικό στο γενικό. Αυτό σημαίνει ότι πολλοί ορισμοί που μαθαίνουν οι μαθητές αφορούν ειδικές περιπτώσεις, είναι κατάλληλοι σε ένα ορισμένο πλαίσιο, αλλά όχι γενικά και αναπροσαρμόζονται ανάλογα με τη βαθμίδα εκπαίδευσης. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορίζονται στη Β΄ γυμνασίου μόνο για οξείες γωνίες, μέσα από το ορθογώνιο τρίγωνο. Στην επόμενη τάξη ορίζονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο μέσα από ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων για γωνίες από 0° έως 180°. Οπότε τόσο η εικόνα της έννοιας, όσο και ο ορισμός της έννοιας, που θα κατασκευάσουν οι μαθητές δεν παραμένουν στατικοί, αλλά μεταβάλλονται, ανακατασκευάζονται ώστε να συμπεριλάβουν χαρακτηριστικά του νέου διευρυμένου πλαισίου. Το αποτέλεσμα αυτής της ανακατασκευής, δεν είναι πάντα πετυχημένο. Ένα γενικό σχήμα της γνωστικής εξέλιξης θα μας δώσει μια εικόνα του πως συντελείτε αυτή η ανακατασκευή και πως επηρεάζετε η δημιουργία της εννοιοεικόνας.

Αρχίζουμε από την ήδη υπάρχουσα γνώση την οποία την ονομάζουμε σταθερή κατάσταση. Μέσα από τη μαθησιακή διαδικασία, ο δάσκαλος πρέπει να προκαλέσει την εξέλιξη των γνωστικών σχημάτων των μαθητών. Για να συμβεί αυτό, πρέπει ο μαθητής να

βρεθεί σε μια κατάσταση αβεβαιότητας, στην οποία δεν θα είναι σε θέση να διαχειριστεί τις νέες προκλήσεις από το δάσκαλό του. Οπότε πρέπει να ξεκινήσει μια ανακατασκευή των γνωστικών σχημάτων, δηλ. ανακατασκευή των εικόνων των εννοιών.

Στα Μαθηματικά αυτό πετυχαίνετε με τη γενίκευση, τη σύνθεση και την αφαίρεση (Dreifus, 1991). **Γενίκευση** είναι η νοητική λειτουργία, η οποία οδηγεί το υποκείμενο από ένα σύνολο αντικειμένων ενός γνωστικού τομέα σε ένα ευρύτερο, τα αντικείμενα του οποίου έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα αντικείμενα του πρώτου (Tall, 1991). Το να γενικεύεις είναι να παράγεις ή να συμπεραίνεις από συγκεκριμένα, να αναγνωρίζεις κοινά χαρακτηριστικά, να επεκτείνεις πεδία ισχύος. Η γενίκευση είναι σημαντική στο ότι εγκαθιστά ένα αποτέλεσμα για μια μεγάλη κλάση αντικειμένων. Παρόλα αυτά, περιορίζεται στην εγκατάσταση αναλογιών ανάμεσα στις συγκεκριμένες κλάσεις.

Σύνθεση είναι η διαδικασία του συνδυασμού μερών με τέτοιο τρόπο ώστε αυτά να διαμορφώσουν μια ολότητα, μια οντότητα. Αυτή η ολότητα συχνά είναι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών της. Είναι ένα σύνολο ασύνδετων πληροφοριών, οι οποίες συνενώνονται σε μια και μόνο εικόνα, όπου περιλαμβάνονται και σχετίζονται όλες. Η διαδικασία συνένωσης σε μια εικόνα είναι τελικά η σύνθεση.

Η **αφαίρεση** περιλαμβάνει τη δυνατότητα για γενίκευση και σύνθεση. Η φύση της νοητικής διαδικασίας της αφαίρεσης είναι, ωστόσο, πολύ διαφορετική από αυτήν της γενίκευσης και της σύνθεσης. Η αφαίρεση είναι μια κατασκευαστική διαδικασία – η κατασκευή νοητικών δομών από μαθηματικές δομές, το οποίο σημαίνει από ιδιότητες και σχέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά αντικείμενα. Η διαδικασία εξαρτάται από την απομόνωση των κατάλληλων ιδιοτήτων και σχέσεων. Απαιτεί την ικανότητα μετατόπισης της προσοχής από τα αντικείμενα στη δομή των ιδιοτήτων και των σχέσεών τους. Αυτή η κατασκευαστική νοητική δραστηριότητα από την πλευρά του μαθητή είναι ισχυρά εξαρτώμενη από την εστίαση της προσοχής του σε εκείνες τις δομές που αποτελούν μέρος της αφηρημένης έννοιας, και από την απομάκρυνσή του από εκείνες που δε σχετίζονται με το επιδιωκόμενο πλαίσιο. Η δομή γίνεται σημαντική, όταν άσχετες λεπτομέρειες παραλείπονται με συνέπεια την μείωση της πολυπλοκότητας της κατάστασης.

Ένα από τα κύρια κίνητρα για γενίκευση είναι η γενική φύση των αποτελεσμάτων που μπορούν να αντληθούν. Ένα άλλο κίνητρο είναι η επίτευξη σύνθεσης. Όμως ούτε η γενίκευση ούτε η σύνθεση έχουν τόσο μεγάλη γνωστική απαίτηση από το μαθητή όσο η αφαίρεση. Η γενίκευση συνήθως εμπλέκει την επέκταση της γνωσιακής δομής του ατόμου

ενώ η αφαίρεση μάλλον εμπλέκει νοητική ανα-κατασκευή.

Οι Harel και Tall (1991) κατά αναλογία με τους όρους γενίκευση, σύνθεση και αφαίρεση, μιλάνε για τρία είδη γενίκευσης, ανάλογα με τον τρόπο που επιτυγχάνεται. Γενίκευση μέσω επέκτασης πραγματοποιείται όταν το υποκείμενο επεκτείνει το εύρος εφαρμογής του ήδη υπάρχοντος σχήματος χωρίς να το αναδιοργανώσει (αντίστοιχα γενίκευση του Dreyfus). Για παράδειγμα, για τη γενίκευση της έννοιας της εφαπτομένης από τον κύκλο στις κωνικές τομές, είναι αρκετή μια τέτοιου είδους γενίκευση. Γενίκευση μέσω ανακατασκευής πραγματοποιείται όταν το υποκείμενο ανακατασκευάζει το υπάρχον σχήμα προκειμένου να αποκτήσει πιο ευρεία εφαρμογή (αφαίρεση κατά Dreyfus). Είναι η ανακατασκευή που πρέπει να πετύχει ο μαθητής προκειμένου να πετύχει τη μετάβαση από την εφαπτομένη κύκλου στην εφαπτομένη καμπύλης. Γενίκευση μέσω διάσπασης, γίνεται όταν το αντικείμενο προκειμένου να μεταβεί από ένα οικείο πλαίσιο σε ένα νέο, δημιουργεί ένα νέο σχήμα και το προσθέτει στο ήδη υπάρχων (αντιστοιχεί στην μη επίτευξη της σύνθεσης που περιγράφει ο Dreyfus). Ο μαθητής δεν καταφέρνει να δημιουργήσει μία οντότητα και να συμπεριλάβει την μία περίπτωση μέσα στην άλλη. Στην περίπτωση της εφαπτομένης, δεν καταφέρνει να συμπεριλάβει την εφαπτομένη του κύκλου στο νέο γνωστικό σχήμα της εφαπτομένης καμπύλης. Βέβαια επιτρέπει στο άτομο να ανταπεξέρχεται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, αλλά αποτυγχάνει να είναι μια γνωστική γενίκευση επειδή το αρχικό σχήμα δεν εμπεριέχεται ως ειδική περίπτωση στο τελικό. Είναι η γενίκευση που επιτυγχάνουν συνήθως οι αδύναμοι μαθητές, οι οποίοι μέσω αυτής καταφέρνουν να ανταπεξέλθουν σε μεγαλύτερο φάσμα εφαρμογών χωρίς να έχουν όμως κατακτήσει εννοιολογική κατανόηση (Harel, Tall, 1991).

Οι Harel και Tall παρακάτω στο ίδιο άρθρο αναφέρουν και τους όρους της τυπικής αφαίρεση (formal abstraction) και της μη τυπικής αφαίρεσης (generic abstraction). Η πρώτη επιτυγχάνεται όταν ο μαθητής καταφέρνει, μέσα από τις εμπειρίες που του προσφέρει η μαθησιακή διαδικασία, να ξεχωρίσει τις ιδιότητες που θα οδηγήσουν στην κατασκευή μια νέας αφηρημένης έννοιας. Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής μεταφέρει ιδιότητες από ένα περιορισμένο πλαίσιο σε ένα ευρύτερο στο οποίο όμως δεν έχουν ισχύ. Για παράδειγμα στην ανακατασκευή από την εφαπτομένη κύκλου στην εφαπτομένη καμπύλης μεταφέρουν και την ιδιότητα του ενός κοινού σημείου.

Κάποια από αυτές τις λειτουργίες ενεργοποιείτε προκειμένου να επιτευχθεί η εννοιολογική αλλαγή. Η εικόνα της έννοιας είναι λοιπόν κάτι μεταβαλλόμενο, που

περιμένουμε να συνδέεται άμεσα με τους στόχους που θέτει κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης. Αναμένουμε δηλαδή ο μαθητής να ανακατασκευάζει τις εικόνες των εννοιών που εξελίσσονται ώστε να φτάσει ένα βαθμό γενίκευσης. Αυτό που θα κατασκευάσει τελικά ο μαθητής όμως, μπορεί να διαφέρει πολύ από το στόχο του δασκάλου του. Όπως επίσης και αυτό που θα ανασύρει από το γνωστικό σχήμα ο μαθητής σε κάθε περίπτωση δεν είναι σταθερό. Ανάλογα με τα ερεθίσματα που δέχεται επιλέγει ακούσια, κάποια τμήματα της εικόνας της έννοιας (επικαλούμενη εικόνα της έννοιας κατά Vinner). Πόσο εύκολα πετυχαίνει ο μαθητής, την ανακατασκευή της εικόνας της έννοιας, στην περίπτωση της εφαπτομένης καμπύλης είναι κάτι που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και θα δούμε παρακάτω τα συμπεράσματα των ερευνών τους.

1.2. Διδασκαλία από το ειδικό στο γενικό

Είναι γενικά αποδεκτό ότι η δημιουργία της μαθηματικής γνώσης απαιτεί κατάλληλα διαμορφωμένες διδακτικές καταστάσεις, οι οποίες σχεδιάζονται ειδικά για κάθε έννοια, ανάλογα με το επίπεδο και την ηλικία των μαθητών. Η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να οικοδομηθεί μέσα από μία ή μερικές δραστηριότητες, αλλά μέσα από ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων, στα οποία η έννοια λειτουργεί και παίρνει το νόημά της. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση άλλες φορές οι έννοιες εισάγονται από το γενικό στο ειδικό και άλλες φορές αντίστροφα. Η περίπτωση της εφαπτομένης ακολουθεί μια πορεία από το ειδικό, εφαπτομένη κύκλου, στο γενικό, εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης. Ενώ η διδασκαλία του τετράπλευρου από το πλάγιο παραλληλόγραμμο προς στο τετράγωνο ακολουθεί μια πορεία από το γενικό στο ειδικό. Η επιλογή μοιάζει να εξαρτάται από την έννοια, αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κυρίως στο γυμνάσιο, επικρατεί η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό, μέσο της γενίκευσης, η οποία επιτυγχάνεται μέσω της εμπειρικής αφαίρεσης (όπως συμβαίνει στις καθημερινές έννοιες, κατά Davydov). Αυτός ο εδραιωμένος τρόπος μάθησης, ο οποίος κατευθύνεται από τα αναλυτικά προγράμματα, μοιάζει να έχει τις ρίζες του, στη θεωρία των σταδίων της νοητικής ανάπτυξης του Piaget. Όμως παρά το προφανές γεγονό ς της έντονης αλληλοσύνδεσης ανάμεσα στη Γενετική Επιστημολογία και Ψυχολογία, κατά τον Meraux (1986) οι ψυχολόγοι που επηρεάστηκαν από τον Piaget κάπου έχασαν το νόημα της σύνδεσης περιορίζοντας τον ορίζοντά τους στα στάδια της νοητικής ανάπτυξης καθαυτά, με αποτέλεσμα να παραμείνει υπό διερεύνηση το ζήτημα της μετάβασης από το ένα στάδιο στο άλλο. Σύμφωνα με την Brown (1979), είναι πολύ απλουστευτικό να χρησιμοποιούμε τα στάδια του Piaget για να καθορίσουμε τις αντίστοιχες μαθηματικές δραστηριότητες, δεδομένου ότι αφενός δεν έχει

αποδειχθεί ότι η ανάπτυξη ακολουθεί στάδια αντί π.χ. ένα συνεχές φάσμα, ενώ επίσης το περιεχόμενο του κάθε σταδίου εξακολουθεί να αποτελεί πεδίο αντιπαραθέσεων.

Η διδασκαλία μιας έννοιας από την ειδική στην γενική περίπτωση, είναι αποτελεσματική όταν ο μαθητής έχει κατακτήσει την τυπική αφαίρεση. Η αφαίρεση είναι η πιο σημαντική από όλες αυτές τις προχωρημένες διαδικασίες που αναφερθήκαμε πριν. Εάν ο μαθητής αναπτύξει την ικανότητα να κάνει συνειδητά αφαιρέσεις από μαθηματικές καταστάσεις, τότε έχει επιτύχει ένα υψηλό επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Η επίτευξη αυτής της ικανότητας για αφαίρεση μπορεί να αποτελεί το σημαντικότερο στόχο της προχωρημένης μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όμως η τυπική αφαίρεση είναι μια επίπονη διαδικασία που την καταφέρνουν οι επιτήδειοι μαθητές, αλλά όχι οι λιγότερο έμπειροι. Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο επιλέγει να παρουσιάσει χαρακτηριστικά παραδείγματα (generic example) της αφηρημένης έννοιας. Τα παραδείγματα αποτελούν ένα αναγκαίο στήριγμα και ένα απαραίτητο εργαλείο για την κατανόηση αφηρημένων εννοιών. Οι μαθητές όμως παρόλα αυτά ενδέχεται να λειτουργήσουν με έναν τελείως εσφαλμένο τρόπο, οπότε να «αφαιρέσουν» τις ακατάλληλες ιδιότητες και να δημιουργήσουν σχήματα που οι ιδιότητες αυτές θα έχουν ισχύ σε ένα ευρύτερο πλαίσιο από το επιτρεπτό. Είναι η περίπτωση της μη τυπικής αφαίρεσης (generic abstraction) των Harel και Tall, που είδαμε παραπάνω. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι ιδιότητες που παρατηρούνται είτε αρχικά (από την πρώτη έννοια), είτε μέσω παραδειγμάτων, να «επιβάλλονται» στην έννοια. Έτσι, η ειδική περίπτωση μπορεί να λειτουργήσει ως πρότυπο (Tall,1987, Harel & Tall, 1991), αντίστοιχα τα παραδείγματα μπορεί να λειτουργήσουν ως παραδειγματικά μοντέλα (Fischbein,1987). Τα γνωστικά σχήματα που θα προκύψουν από αυτή την διαδικασία, θα αποτελέσουν αργότερα εμπόδια για την εξέλιξη της έννοιας.

Ο Tall επισημαίνει:

«Φαίνεται αυτονόητο ότι ο τρόπος που πρέπει να διδάσκουμε τα μαθηματικά είναι να ξεκινάμε από έννοιες που είναι οικείες σε αυτόν που μαθαίνει και να χτίζουμε πιο σύνθετες ιδέες μέσω ακολουθίας δραστηριοτήτων σταδιακά όλο και πιο εκλεπτυσμένες. […] ένα πρόγραμμα σπουδών χτισμένο σε αυτή τη λογική μπορεί να προκαλέσει δυσκολίες στη μάθηση. Το πρόβλημα προκύπτει γιατί το ανθρώπινο μυαλό δεν λειτουργεί με λογικό τρόπο. Αντίθετα, η εξέλιξη φαίνεται να μας έχει εφοδιάσει με έναν ισχυρό μηχανισμό δημιουργίας μοτίβων που αναγνωρίζει υποκρύπτουσες (implicit) κανονικότητες σε ένα πλαίσιο και οδηγεί τον καθένα

μας στη σχηματοποίηση της προσωπικής του εικόνας έννοιας για μία μαθηματική έννοια. Παρουσιάζοντας μία έννοια σε κάποιον που μαθαίνει τα μαθηματικά σε ένα απλοποιημένο πλαίσιο, παρουσιάζουμε χωρίς να το καταλαβαίνουμε απλοποιημένες κανονικότητες που γίνονται μέρος της εικόνας έννοιας του ατόμου. Αργότερα αυτές οι βαθιά ριζωμένες δομές μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές γνωστικές παρανοήσεις και να σταθούν εμπόδιο στη μάθηση.[…] Αντί να χτίσει κανείς από το απλό στο σύνθετο, είναι δυνατό να κατασκευάσει κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα για αυτούς που μαθαίνουν για να διερευνήσουν πιο σύνθετες ιδέες από το ξεκίνημα» (Tall, 1989).

Εμπόδια που δημιουργούνται όταν, προκειμένου να παρουσιαστεί ένα σύνθετο θέμα, εκλογικεύεται με βάση αρχές όπως από το απλό στο σύνθετο ή από το μερικό στο ειδικό, λέγονται διδακτικά εμπόδια. Τέτοια εμπόδια αποτελούν και οι ανεξέλεγκτες εικόνες των Aspinwall, Shaw, Presmeg, 1997. Η άποψη ότι κάποιες οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν τροχοπέδη για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, εκπλήσσει τους μαθηματικούς, καθόσον πάρα πολλές μελέτες καταδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο των αναπαραστάσεων και της οπτικοποιημένης σκέψης στην διδασκαλία του λογισμού. Ωστόσο στην παραπάνω μελέτη επιστάται η προσοχή στην δημιουργία εικόνων που μπορεί να είναι επιζήμιες σε συγκεκριμένα πεδία. Ο Radatz αναφέρει ότι η οπτική αναπαράσταση μπορεί να προκαλέσει γνωστικά εμπόδια, επειδή αν η ανάλυση και η σύνθεση μαθηματικών εννοιών γίνει αποκλειστικά μέσω διαγραμμάτων, τότε η εικόνα «επιβάλλεται» στο μαθητή. Αυτό σημαίνει ότι διατηρούνται και εγκαθιδρύονται περιττές λεπτομέρειες. Ο Richardson (1969), υποθέτει ότι για να γίνει μια νοητική εικόνα χρήσιμη στο να λύνει προβλήματα, πρέπει βασικά να γίνει ελεγχόμενη, δηλαδή να μπορεί ο μαθητής να χειραγωγήσει τη χρήση της. Η Presmeg περιγράφει περιπτώσεις στις οποίες η επίμονες εικόνες εμποδίζουν τους μαθητές λυκείου να λύσουν μαθηματικά προβλήματα. Για παράδειγμα ένας μαθητής είχε μια πρωτοτυπική εικόνα για μία παραβολή, η οποία είχε άξονα συμμετρίας τον yy΄, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να δουλέψει με κάποια άλλη παραβολή που δεν ταίριαζε στο αρχικό του σχήμα. Οι εικόνες αυτές είναι ανεξέλεγκτες με διπλή υπόσταση. Πρώτον εμφανίζονται αυτόματα-ασυνείδητα θα μπορούσαμε να πούμε, και δεύτερον είναι ιδιαίτερα επίμονες και κρύβονται πίσω από την ελεύθερη βούληση. Οι Aspinwall, Shaw, Presmeg καταλήγουν ότι η γνώση των προβλημάτων που μπορεί να εμφανιστούν και να αποτελέσουν φράγμα για την εννοιολογική κατανόηση του λογισμού μέσα από τις γραφικές αναπαραστάσεις, μπορεί να βοηθήσει, αν ληφθούν υπόψη. Μετά από αυτό η διδασκαλία πρέπει να αποσκοπεί στο να μετριάσει την δημιουργία ισχυρών και δυναμικών εικόνων που κωλύουν τη διαδικασία της

μάθησης.

Ο Orton (1983) μετά από έρευνα που σχετίζεται με την κατανόηση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η πρώτη γνωριμία με τη διαφόριση πρέπει να γίνει άτυπα και να βασίζεται κατά κύριο λόγω σε αριθμητικές και γραφικές εξερευνήσεις με την υποστήριξη ηλεκτρονικού υπολογιστή.

1.3. Προχωρημένη Μαθηματική-Σκέψη σε Κάθε Ηλικία: είναι Φυσικό και Εξελισσόμενο

Σ' αυτήν την παράγραφο θα αναλύσουμε διεξοδικά το άρθρο των Harel και Sowder (2005) με τον τίτλο που αναφέρεται παραπάνω. Μέσα από τα συμπεράσματά του, θέλουμε να ενισχύσουμε τη θέση και την τολμηρή προσπάθειά μας να μιλήσουμε σε μαθητές Α' Γυμνασίου, για την εφαπτομένη του κύκλου με έναν τρόπο που απαιτεί από τους μαθητές, πάντα με την ενορχήστρωση του δασκάλου τους, να μεταπηδήσουν σε έναν τρόπο σκέψης που προσιδιάζει στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι το συγκεκριμένο νόημα που αποδίδουν οι μαθητές σε μια εργασία, μια πρόταση, ένα κείμενο ή η λύση που δίνουν σε ένα πρόβλημα ή η αιτιολόγηση που παρουσιάζουν, προκειμένου να αποδεχθούν ή να καταρρίψουν έναν ισχυρισμό, είναι τρόποι κατανόησης, ενώ οι υποκείμενες γενικές θεωρίες, υπονοούμενες ή κατηγορηματικές, αποτελούν τρόπους σκέψης.

Αυτό το άρθρο υποστηρίζει ότι η προχωρημένη μαθηματική σκέψη, που συχνά συγχέεται με τη σκέψη σε προχωρημένα μαθηματικά, μπορεί πολύ εποικοδομητικά να θεωρηθεί ως προχωρημένος τρόπος σκέψης στα μαθηματικά. Η διαφορά είναι λεπτή, ωστόσο υπάρχει. Η μία έννοια εστιάζει στα ανώτερα μαθηματικά (advanced-mathematical thinking), ενώ η άλλη στον τρόπο σκέψης (advanced mathematical-thinking). Με αυτό τον ισχυρισμό η προχωρημένη μαθηματική σκέψη μπορεί δυνητικά να θεωρηθεί ότι ξεκινάει από το δημοτικό. Ο ορισμός της μαθηματικής σκέψης, συμπεριλαμβάνοντας τα επιστημολογικά ή διδακτικά εμπόδια που μπορεί να περιέχει, συνεπάγεται έναν ιδιαίτερο τρόπο σκέψης. Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στους τρόπους σκέψης και στους τρόπους κατανόησης εγείρουν και μια αντίθεση μεταξύ τους. Ως προς το πρώτο ενδιαφέρει να ξεκαθαριστεί μια ευρύτερη άποψη για την μαθηματική σκέψη. Ως προς το δεύτερο ενδιαφέρουν οι προτάσεις για συνεπής διδακτικές πρακτικές. Η διδασκαλία αξιολογείται με βάση τις προτάσεις, (δίνοντας έμφαση στις προκλητικές), που μπορούν να υποστηρίξουν και να παρέμβουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Η υπόθεση ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σε έναν μαθητή είναι μια διαδικασία που μπορεί να διαμορφωθεί και να εξελιχθεί, όπως και το ότι η φύση της μαθηματικής σκέψης μπορεί να διδαχθεί μέσα από κατάλληλες διδακτικές πρακτικές, περικλείονται σε τέσσερα ερωτήματα.

- Τι σημαίνει ο όρος «μαθηματική σκέψη»;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της προχωρημένης μαθηματικής-σκέψης;
- Ποιες είναι οι αποδεδειγμένα κατάλληλες πρακτικές που προωθούν την προχωρημένη μαθηματική-σκέψη;
- Ποιες είναι οι αποδεδειγμένα κατάλληλες πρακτικές που δυσχεραίνουν την προχωρημένη μαθηματική-σκέψη;

Ας δούμε συνοπτικά τις απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.

Ο όρος «προχωρημένη» σκέψη υποδηλώνει αποτελεσματική, αποδοτική και κομψή σκέψη; Η μη προχωρημένη σκέψη είναι οπωσδήποτε λανθασμένη; Και η «προχωρημένη» μαθηματική σκέψη δεν εμπεριέχει τη στοιχειώδη σκέψη; Είναι ιδιαίτερα δύσκολο να περιγράψουμε αυτές τις ιδιότητες ακόμα κι αν μοιραζόμαστε τις ίδιες διαισθητικές αντιλήψεις για το τι σημαίνουν. Και είναι ακόμα δυσκολότερο να καταγράψει κανείς τις λεπτές διαφορές τους. Ωστόσο είναι υψίστης σημασίας να χαρακτηριστούν τα στοιχειώδη γνωστικά αντικείμενα που περιέχουν τις βασικές μαθηματικές έννοιες, και τα οποία δύναται να οδηγήσουν στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Ο όρος λοιπόν προχωρημένη εμπεριέχει μια εξελισσόμενη διαδικασία και είναι απολύτως σχετικός ως προς την μοναδικότητα και ως προς την διαφορετικότητά του. Η επίτευξή της δεν είναι είτε ολοκληρωτική είτε μηδενική. Μπορεί κάποιος να έχει πετύχει ένα υψηλό επίπεδο τέτοιας σκέψης σε κάποιο πεδίο των μαθηματικών, ενώ να μην τα καταφέρνει σε ένα άλλο.

Τελικά το πιο χαρακτηριστικό στοιχείο την προχωρημένης μαθηματικής σκέψης, για τους συγγραφείς, είναι το κατά πόσο στην διαδικασία εξέλιξής της, εμπλέκονται τα επιστημολογικά εμπόδια. Ο Duroux (1982) ισχυρίζεται ότι για να χαρακτηριστεί ένα εμπόδιο επιστημολογικό, πρέπει υποχρεωτικά να υπάγεται σε κάποιο από τα παρακάτω τρία κριτήρια. Πρώτον, να αναφέρεται στην ιστορία των μαθηματικών, δεύτερον, η έννοια να δημιουργεί αποτελέσματα τα οποία μοιάζουν έγκυρα μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο, αλλά αντικρούονται σε οποιοδήποτε άλλο, και τρίτον να συνυπάρχουν περιστασιακές αντιφάσεις με την εγκαθίδρυση νέας γνώσης.

Ως προς τις πρακτικές που προάγουν την μαθηματική σκέψη, οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι πρέπει να ακολουθούνται διδακτικές συμπεριφορές, που χειραγωγούνται από ένα σύστημα μαθησιακών-διδακτικών αρχών, γνωστών ως DNR σύστημα (DNR system, D from Duality, N from Necessity and R from Repeated). Οι τρεις πρωταρχικές αρχές είναι η διττότητα, αναγκαιότητα και η συνεχής (επαναλαμβανόμενη) αιτιολόγηση.

Η αρχή της διττότητας υποστηρίζει ότι ο τρόπος που ο μαθητής κατανοεί μια μαθηματική έννοια επηρεάζεται από τον τρόπο που σκέφτεται. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και όσοι ασχολούνται με την παραγωγή των αναλυτικών προγραμμάτων, σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης, πρέπει να δημιουργήσουν τρόπους διδασκαλίας οι οποίοι να δίνουν στο μαθητή την ευκαιρία να προάγει την αναπτυγμένη μαθηματική σκέψη του. Η αρχή της αναγκαιότητας υποστηρίζει την διδασκαλία μέσω κατάλληλων προβλημάτων που θα αναγκάσουν το μαθητή να κάνει ζωηρές διανοητικές διεργασίες. Και η αρχή της συνεχούς αιτιολόγησης η οποία υποστηρίζει ότι με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής θα εφοδιαστεί με πολύ γερά θεμέλια, απαραίτητα για την ανάπτυξη τόσο του τρόπου κατανόησης όσο και του τρόπου σκέψης του. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι επαναλαμβανόμενη εμπειρία ή πρακτική, αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην αναπτυξιακή, οργανωτική και αφαιρετική διαδικασία που απαιτεί η γνώση. Έτσι οι μαθητές πρέπει να εξασκούνται συνεχώς στην αιτιολόγηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούν για να κατακτήσουν την προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Ο στόχος είναι να μην χρειάζεται ο μαθητής να απομνημονεύσει γεγονότα ή βασικές διαδικασίες αλλά να μπορεί να τα εφευρίσκει κάθε φορά που τα χρειάζεται.

Οι τρεις αυτές αρχές δεν πρέπει να περιμένουν μέχρι οι μαθητές να φτάσουν σε μια προχωρημένη βαθμίδα εκπαίδευσης. Το δημοτικό σχολείο καθώς και το γυμνάσιο είναι πολύ πλούσια σε ευκαιρίες ανάπτυξης τέτοιων τρόπων σκέψης. Οι διαφορετικοί τρόποι κατανόησης των κλασμάτων (στο δημοτικό) ή της παραγώγου συνάρτησης (στο λύκειο), είναι παραδείγματα τέτοιων ευκαιριών.

Ας δούμε τώρα ποιοι είναι οι τρόποι που αναχαιτίζουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Τα επιστημολογικά εμπόδια, όπως ήδη τα επεξεργαστήκαμε παραπάνω, είναι περισσότερο συναρπαστικά απ' ότι τα διδακτικά εμπόδια. Τα τελευταία προκαλούνται από διδασκαλίες που είτε εμπεριέχουν σφάλματα ή είναι πολύ περιορισμένων δυνατοτήτων επεξεργασίας. Τέτοιες διδακτικές πρακτικές ακόμη χρησιμοποιούνται ευρέως, παρόλο που έρευνες κατά γενική ομολογία καταδεικνύουν ότι τα εμπόδια που προκαλούν δύσκολα

αναχαιτίζονται. Είναι ευκολότερο να διορθωθούν οι πρακτικές, παρά να ξεπεραστούν τα εμπόδια. Είναι βέβαιο ότι τα πιο εκπαιδευτικά σχέδια μαθήματος είναι αυτά που αποτελούνται από ένα «πάντρεμα» τέχνης και επιστήμης, με την τέχνη να παίζει τον σημαντικότερο ρόλο. Με μια διάθεση να γίνουν προκλητικοί, οι συγγραφείς, προκαλούν με μερικές συνηθισμένες αρχές —μύθους κατά την άποψή τους— που συναντάει κανείς σε μια συνηθισμένη ανυποψίαστη διδασκαλία.

Μύθος 1ος. Σε μία αλληλουχία διδασκαλιών ξεκινάς με το ευκολότερο. Για παράδειγμα προκειμένου να εισάγει ο εκπαιδευτικός, μεθόδους επίλυσης εξισώσεων, είναι κοινό να χρησιμοποιήσει παραδείγματα όπως x+2=7 ή 3x=15. Λόγω όμως της ευκολίας που παρουσιάζει το παράδειγμα, ο μαθητής μπορεί να το λύσει με δοκιμή, οπότε να μην αντιληφθεί την αναγκαιότητα των κανόνων που απαιτούνται. Ένα πολύ καλύτερο παράδειγμα θα ήταν το x+75,6=211,3 ή το 1,7x=27,2 ή ακόμα και 2,4x+9,6=17,28. Κάτω από την ίδια σκοπιά, είναι προτιμότερο στη γεωμετρία να αντιμετωπίζονται πρώτα τα σύνθετα χαρακτηριστικά των εννοιών. Οι Dienes και Golding (1971) ισχυρίζονται ότι δεν είναι χρήσιμο να παρουσιάσεις μια νέα μαθηματική έννοια μέσα από ένα απλοποιημένο πλαίσιο[…]. Έχει εξακριβωθεί ότι —τουλάχιστον σε μερικές περιπτώσεις— είναι πολύ καλύτερο να ξεκινήσει κανείς με πιο δύσκολο επίπεδο και να αφήνετε στη ευχέρεια του μαθητή η ανακάλυψη των λιγότερο περίπλοκων περιπτώσεων.

Μύθος 2ος. Το καλύτερο νοητικό μοντέλο είναι το απλούστερο, κατά προτίμηση αυτό που είναι πιο οικείο στο μαθητή. Για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός παρουσιάζεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας αναπόφευκτης διαίσθησης ότι το γινόμενο είναι πάντα μεγαλύτερο των παραγόντων. Γενικά, διδασκαλίες που χρησιμοποιούν παραδείγματα με έναν τρόπο περιορισμένο διατρέχουν τον κίνδυνο να δημιουργήσουν υπεργενικεύσεις. Ο Masshall (1995) σε έρευνα σχετικά με δημιουργία σχημάτων από λεκτικά προβλήματα, τονίζει ό **τ** η πρώτη επιλογή παραδείγματος είναι υψίστης σημασίας.

Μύθος 3ος. Στα προχωρημένα μαθηματικά (μετά την αποφοίτηση από το λύκειο), ξεκινάμε με τα αξιώματα. Ίσως μοιάζει λογικό, αλλά ο τυπικός απόφοιτος λυκείου δεν είναι έτοιμος για κάτι τέτοιο. Προηγούμενες μελέτες πάνω στα αποδειχτικά σχήματα πρωτοετών φοιτητών δείχνουν ότι οι παραγωγικές αποδείξεις πρέπει να προηγούνται της αξιωματικής θεμελίωσης. Αλλιώς οι φοιτητές μαθαίνουν τις κινήσεις μηχανικά χωρίς καμία κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης.

Μύθος 4ος. Στη σχολική πρακτική, οι αποδείξεις χρησιμοποιούνται για να πείσουν το μαθητή για την ισχύ ή όχι μιας πρότασης. Ο Rav (1999) ισχυρίζεται ότι η μαθηματική γνώση βρίσκεται ενσωματωμένη μέσα στην απόδειξη, με το θεώρημα να αποτελεί απλά μια επικεφαλίδα. Όμως οι συγγραφείς έχουν παρατηρήσει ότι μια απόδειξη για πολλούς φοιτητές είναι κάτι που αγνοείται, ενώ μοιάζει να «μετράει» το συμπέρασμα. Ή άλλες φορές πάλι, μαθαίνουν μια απόδειξη μόνο για την περίπτωση που τους ζητηθεί να την αναπαράγουν σε κάποια εξέταση. Από την άλλη μεριά η υπόθεση και το συμπέρασμα ενός θεωρήματος (πολύ συχνά δε, και μόνο το συμπέρασμα), είναι αρκετό για να το θεωρήσουν έγκυρο και δεν απαιτούν τίποτα περισσότερο. Είναι προτιμότερο λοιπόν να δίνεται έμφαση στην αιτιολόγηση πολλών παραδειγμάτων (κάθε φορά που δίνεται τέτοια ευκαιρία), παρά στην μία απόδειξη που γενικεύει και παύει να χρησιμοποιείται έκτοτε.

Το χειρότερο διδακτικό εμπόδιο που μπορεί να προκληθεί είναι η στέρηση της δυνατότητας μάθησης. Διδασκαλίες ή αναλυτικά προγράμματα που δεν λαμβάνουν υπόψη τις διαισθήσεις των μαθητών, τους στερούν την δυνατότητα δημιουργίας διαισθητικών εικασιών. Μαθητές που ποτέ δεν είχαν την ευκαιρία να δημιουργήσουν εικασίες, δεν μπορούν να κατανοήσουν ούτε να θεωρήσουν αναγκαία κανενός είδους απόδειξη.

1.4. Έρευνες πάνω σε θέματα ανάλυσης σε μαθητές γυμνασίου.

Οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι παλεύουν με τις έννοιες του απείρου και των απειροσυνόλων από τις μέρες των αρχαίων Ελλήνων, και τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι μία από τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν. Μερικοί Έλληνες, ανάμεσά τους ο Αριστοτέλης και ο Πρόκλος, αποδέχτηκαν το γεγονός ότι ένα σύνολο μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλο, αλλά αρνήθηκαν την ύπαρξη ενός ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Κατά τον Μεσαίωνα, οι φιλόσοφοι συζητούσαν πάνω στο θέμα υποστηρίζοντας άλλοι το εν δυνάμει και άλλοι το εν ενεργεία άπειρο. Παρατηρήθηκε δε πως η σύγκριση ορισμένων απειροσυνόλων οδηγεί σε παράδοξα. Ο Γαλιλαίος συνάντησε δυσκολίες στη μελέτη των απειροσυνόλων και υποστήριξε ότι η ύπαρξη εν ενεργεία απείρων πρέπει να απορριφθεί. Στο έργο του Two New Sciences, το 1638, παρατήρησε ότι τα σημεία δύο άνισων ευθυγράμμων τμημάτων μπορούσαν να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία, με απλή προβολή του ενός τμήματος πάνω στο άλλο, κι έτσι ίσως τα δύο τμήματα περιέχουν τον ίδιο αριθμό σημείων, μόλο που το ένα τμήμα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Παρατήρησε επίσης ότι οι θετικοί ακέραιοι μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα τετράγωνά τους, αντιστοιχίζοντας κάθε θετικό ακέραιο με το τετράγωνό του, παρόλο που οι

πρώτοι είναι περισσότεροι στο πλήθος από ότι οι δεύτεροι. Αυτά τα ανησυχητικά παράδοξα εμφανίζονται μόνο αν κάποιος δεχθεί την ύπαρξη εν ενεργεία απειροσυνόλων. Για να αποφύγουν τα παράδοξα, λοιπόν, πολλοί μαθηματικοί μεταξύ των οποίων και ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους, απέρριπταν την ιδέα του ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Σε μια επιστολή του δε προς τον Σουμάχερ, 12 Ιουλίου 1831, ο Γκάους έγραψε: «Διαμαρτύρομαι για τη χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής. Αυτό στα μαθηματικά δεν επιτρέπεται ποτέ. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν κατά τον οποίο μπορεί κανείς να μιλάει για τα όρια τα οποία ορισμένοι λόγοι μπορούν να πλησιάσουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα». Ο Κωσύ όπως και πολλοί άλλοι αρνήθηκε επίσης την ύπαρξη εν ενεργεία άπειρων συνόλων, στηριζόμενος στην παράδοξη βάση ότι ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του (Howard Eves).

Θα κάνουμε τώρα μια επισκόπηση σε δημοσιεύσεις σχετικές με έρευνα σε νεαρούς μαθητές, που αποσκοπούν να ερευνήσουν διαισθήσεις σε θέματα απειροστικού. Το πιο προσιτό σε αυτές τις ηλικίες είναι η έννοια του απείρου. Το άπειρο εμπλέκεται στην εργασία μας μέσα από την εικόνα των άπειρων τεμνουσών που κατασκευάζουμε προκειμένου να φτάσουμε στην εφαπτομένη. Οπότε, θέλουμε να εξακριβώσουμε αν οι μαθητές έχουν διαισθήσεις και τι είδους γύρω από το άπειρο. Ακόμη αυτές οι μελέτες θα μας δώσουν μια ένδειξη για το τι είναι ικανοί να καταφέρουν οι νεαροί μαθητές όταν διαπραγματεύονται θέματα απειροστικού.

Υπάρχουν δύο θεμελιώδεις διαστάσεις της έννοιας του απείρου που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Η μία είναι η ιδανική, αυθόρμητη και ολοκληρωμένη μαθηματική κατασκευή, η οποία είναι αδιαπραγμάτευτη ως αυστηρά ορισμένη. Η άλλη είναι η διαίσθηση που κυριαρχεί και φέρει σύνθετες, δυνατές και αντιφατικές δυσκολίες στην αντίληψη του απείρου.

Οι Fischbein, Tirosh & Hess (1977) δημοσιεύουν μια έρευνα, της οποίας το κύριο αντικείμενο είναι να εξακριβώσουν τη διάσταση της αντιφατικής φύσης του απείρου, όπως μελετάτε στη πραγματική δυναμική της διαδικασίας σκέψης. Η πρόθεσή τους ήταν να προσδιορίσουν τον αντίκτυπο των ποικίλων χαρακτηριστικών των διαισθήσεων, που εμπλέκονται στη λύση προβλημάτων όπου η έννοια του απείρου παρεμβαίνει. Η υπόθεση είχε δύο διαστάσεις. Πρώτον ότι η έννοια του απείρου, και κυρίως της άπειρης διαιρετότητας, είναι διαισθητικά αντιφατική και δεύτερον ότι ούτε η ηλικία, ούτε η διδασκαλία μπορεί να επηρεάσει τις αυθεντικές απαντήσεις. Όσο για τις απαντήσεις αυτές

καθαυτές αναμένονταν δύο αντίθετες κατηγορίες. Η μία να υποστηρίζει την ιδέα **της άπειρης διαιρετότητας ενός τμήματος** και η άλλη να την απορρίπτει. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο Ισραήλ, όπου κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης χωρίζεται σε τρία επίπεδα (υψηλό, μέσο και χαμηλό) ως προς την ικανότητα των μαθητών. Συμμετείχαν μαθητές δημοτικού και γυμνασίου. Συγκεκριμένα 46 μαθητές της πέμπτης και 58 της έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου υψηλού επιπέδου εκπαίδευσης, 6 από αυτούς χαρακτηρίζονταν ως χαρισματικοί στα μαθηματικά ενώ κάποιοι προπονούνταν σε ανώτερα μαθηματικά. Και 152 μαθητές της πρώτης, 104 της δευτέρας και 110 της τρίτης γυμνασίου χαμηλού επιπέδου εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την υπόθεση. Σε όλες τις ηλικίες και σε όλες τις ερωτήσεις, οι απαντήσεις ήταν προσανατολισμένες στις δύο προαναφερθείσες ιδέες του απείρου. Η αίσθηση της περατότητας γενικά υπερίσχυσε και ακολούθησε η αίσθηση της άπειρης διαδικασίας σε ένα ποσοστό 40% όλων των απαντήσεων. Ιδιαίτερα η έρευνα έδειξε ότι τα αντικείμενα κατείχαν την έννοια του απείρου και οι απαντήσεις τους δεν ήταν τυχαίες. Επίσης υπήρχαν μαθητές που αναπαρήγαγαν στις απαντήσεις τους αυτά που είχαν διδαχθεί, και άλλοι που δεν το έκαναν. Οι μαθητές με τις ιδιαίτερες ικανότητες ξεχώρισαν, όπως αναμενόταν. Ωστόσο παρατηρήθηκε μια πτωτική τάση στα ποσοστά των «άπειρων» διαισθήσεων από την πρώτη προς την τρίτη τάξη του γυμνασίου. Μία ευλογοφανής εξήγηση γι' αυτό, θα μπορούσε να είναι και η διπλή ερμηνεία των ερωτήσεων. Για παράδειγμα στην ερώτηση για την άπειρη ή μη διαιρετότητα ενός τμήματος, θα μπορούσε κάποιος να την ερμηνεύσει θεωρητικά, βάση του ότι ένα τμήμα αποτελείται από άπειρα σημεία, ή υλικά με την έννοια ότι η διαίρεση ενός αντικειμένου είναι μια πεπερασμένη διαδικασία. Αλλά υπήρχαν και απαντήσεις που υποστήριζαν θεωρητικά την πεπερασμένη διαιρετότητα (το τμήμα είναι πεπερασμένο), αλλά και υλικά την άπειρη (με όργανα ακριβείας). Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη, υποστηρίζουν την άποψη ότι οι μαθητές, τουλάχιστον από την ηλικία των 11 έχουν μια κύρια διαίσθηση του απείρου κάπως ασταθή και ευαίσθητη στις λεπτομέρειες. Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι είναι απαραίτητο η έννοια του απείρου να υπερβεί τις όποιες άμεσες, ανυπόστατες και υλιστικές προσεγγίσεις και απαραίτητα να χτιστεί με έναν νοητικό τρόπο προσφεύγοντας στο αξιωματικό σύστημα.

Ο Monaghan (2002) δημοσιεύει μια επισκόπηση με τίτλο «οι αντιλήψεις των νέων για το άπειρο». Στόχος είναι να εντοπιστούν οι αντιλήψεις που επικρατούν σε νέους μικρότερους των 19 χρόνων, οι οποίοι όμως δεν έχουν διδαχθεί θεωρία σχετικά με το άπειρο, (δεν έχουν επιλέξει θετική κατεύθυνση στο σχολείο και δεν είναι φοιτητές σε σχολές θετικών επιστημών). Το εύρος της ηλικίας είναι αρκετά μεγάλο, ωστόσο υπάρχει ένα κομμάτι της

έρευνας που αναφέρεται σε μαθητές δημοτικού. Αναζητάτε, αν υπάρχει, κάποια σχέση μεταξύ αυτού που τα παιδιά αντιλαμβάνονται ως άπειροι αριθμοί με την αυστηρή μαθηματική έννοια των άπειρων αριθμών. Η Falk και άλλοι (1986) οργανώνουν ένα παιχνίδι με 95 παιδιά ηλικίας 5 έως 12 ετών. Όποιος **καταφέρει να πει έναν μεγαλύτερο αριθμό** από τον αντίπαλό του είναι ο νικητής. Ή αντίστροφα όποιος καταφέρει να πει έναν μικρότερο θετικό αριθμό από τον αντίπαλο είναι ο νικητής. Σκοπός του παιχνιδιού είναι να προκαλέσει συζήτηση γύρω από το ατελείωτο των αριθμών, πολύ μικρών και πολύ μεγάλων. Παρατηρήθηκε μια γενικά αναπτυξιακή ροπή. Η κατανόηση των απειροστών ήταν δυσκολότερη από αυτή των απείρων. Κάποια στιγμή οι μαθητές κάνουν ένα άλμα και κόβοντας τη συνέχεια των απαντήσεών τους μεταπηδούν στο άπειρο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η απάντηση μιας πεντάχρονης η οποία σχολιάζει: «υπάρχουν περισσότεροι κόκκοι άμμου στον κόσμο απ' ότι τα μαλλιά όλων των ανθρώπων». Όταν της ζητήθηκε να συγκρίνει τους κόκκους της άμμου με τους αριθμούς, απάντησε: «οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι γιατί ποτέ δεν τελειώνουν, ενώ οι κόκκοι της άμμου είναι σταθερά εκεί». Άλλες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις είναι η γεωμετρικές εξηγήσεις που χρησιμοποίησαν κάποιοι μαθητές, παρόλο που το παιχνίδι ήταν καθαρά αριθμητικό. Όπως επίσης και το γεγονός ότι η ύπαρξη ή όχι του μεγαλύτερου αριθμού σχετιζόταν πάρα πολύ με την ονομασία αυτού του αριθμού. Αν υπάρχει θα έχει ένα όνομα. Κι αυτό είναι βεβαίως σωστό, ονομάζουμε όλα τα πράγματα που γνωρίζουμε.

Οι Boero, Douek & Garuti (2003) δημοσιεύουν μια έρευνα για τις επινοήσεις μαθητών της πέμπτης τάξης του δημοτικού σχολείου για το άπειρο. Στο θεωρητικό τους πλαίσιο αναφέρουν ότι τα λεγόμενα των μαθητών για το άπειρο εξαρτώνται τόσο από την εργασία που τους έχει ανατεθεί, όσο και από το μαθηματικό πλαίσιο που εφαρμόζεται (Monagham, 2001). Οι αντιλήψεις τους για το άπειρο είναι ανοιχτές σε αλλαγές και μετατοπίσεις, και μάλιστα σε σύντομο χρονικό διάστημα, αρκεί να διαπραγματευθούν με την έννοια μέσα σε κατάλληλα διαμορφωμένο λογισμικό υπολογιστών (Sacristan Rock, 2001). Σημειώνουν ότι οι περισσότερες έρευνες γύρω από το θέμα λαμβάνουν υπόψη μόνο τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών ή τις αντιλήψεις που διαμορφώνουν κάτω από την επίδραση του δασκάλου τους. Μόνο σε λίγες έρευνες αποτυπώνονται οι αντιλήψεις των μαθητών, όπως αυτές διαμορφώνονται μέσα από την συζήτηση στην τάξη κάτω από την κοινωνική ενορχήστρωση του δασκάλου, (Bartolini Bussi, 1989). Τα ερωτήματα που θέτουν αναφέρονται ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο. Πως διαμορφώνονται οι αντιλήψεις των μαθητών μέσα από την συζήτηση στην τάξη και σε σχέση με το πολιτισμικό, κοινωνικό και

θρησκευτικό περιβάλλον που ζουν και ανατρέφονται. Στην έρευνα παίρνουν μέρος τρεις τάξεις των 16, 21 και 22 μαθητών. Οι μαθητές έχουν διδαχθεί και διαχειρίζονται καλά τους δεκαδικούς αριθμούς με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, καθώς επίσης και με τους περιοδικούς δεκαδικούς μέσα από διαιρέσεις της μορφής 1:3. 21 από τους 59 μαθητές μετέβαλλαν τις πεποιθήσεις τους από το πεπερασμένο προς το άπειρο των αριθμών μέσα από το διάλογο και τις αντιπαραθέσεις με τους συμμαθητές τους, ενώ υπήρχαν και 5 οι οποίοι μετακινήθηκαν προς την αντίθετη κατεύθυνση. Άλλη ενδιαφέρουσα μετακίνηση ήταν στον τρόπο που οι μαθητές «έβλεπαν» τους ρητούς. Αρχικά η αντίληψή τους για τους δεκαδικούς ήταν «απόλυτη», δηλαδή είχαν την αίσθηση του επόμενου δεκαδικού αριθμού, αλλά αυτό σταδιακά άλλαξε. Γενικά η συζήτηση μέσα στην τάξη ώθησε τους μαθητές να αναπτύξουν όλο και περισσότερο ακριβής, σχολαστικές και εκλεπτυσμένες θέσεις προκειμένου να υπερασπιστούν τις απόψεις τους. Και οδήγησε σε κοινωνική κατασκευή της γνώσης και σταδιακή ενσωμάτωση. Η κατακλείδα της έρευνας ήταν ότι η δυνατότητα της αναπτυγμένης επιστημολογικής σκέψης στα παιδιά της πέμπτης δημοτικού είναι εντυπωσιακά υψηλή.

Οι Jirotková & Littler (2004) παρουσιάζουν τα αποτελέσματα μιας μελέτης γύρω από την κατανόηση του απείρου από μαθητές, αλλά μέσα από ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Οι διαισθήσεις των μαθητών αποκτώνται από προσωπικές εμπειρίες και σε πολλές περιπτώσεις τα σιωπηρά μοντέλα που δημιουργούνται είναι ανακόλουθα. Αντιλαμβάνονται το άπειρο περισσότερο ως διαδικασία, π.χ. «…πηγαίνει στο άπειρο…», παρά ως αντικείμενο το οποίο να το ερμηνεύσουν ως κάτι υπαρκτό. Σε προηγούμενη έρευνά τους οι συγγραφείς αναφέρουν ότι είναι δύσκολο να προσδιορίσουν, αν οι μαθητές που χρησιμοποιούν το ουσιαστικό άπειρο, έχουν καμιά ιδέα της διαφοράς ανάμεσα στο υπαρκτό και στο δυνητικό άπειρο. Πιστεύουν ότι οι νεαροί μαθητές παίρνουν τις κύριες πληροφορίες τους για το άπειρο, μακριά από την αίθουσα διδασκαλίας. Στην καθημερινότητά τους μπορεί να ακούσουν για δορυφόρους που κινούνται στο διάστημα, το οποίο ποτέ δεν τελειώνει. Τέτοιες εκφράσεις δημιουργούν σιωπηρά μοντέλα που δεν είναι συνειδητά ελεγχόμενα και μπορεί να οδηγήσουν σε λάθος ερμηνείες και αντιφάσεις. Οι μαθητές ζουν σε έναν πραγματικό κόσμο τον οποίο αντιλαμβάνονται ως πεπερασμένο και μέσα στο σχολείο έχουν πολύ λίγες ευκαιρίες να συζητήσουν για το άπειρο. Δεν υπάρχει (τουλάχιστον μέχρι το 2004), αναλυτικό πρόγραμμα, τόσο στην Τσεχία όσο και στην Μεγάλη Βρετανία, που να περιέχει στη διδακτέα ύλη την μελέτη του άπειρου. Όλα αυτά συνηγορούν υπέρ της θέσης που υποστηρίζουμε: οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εκμεταλλεύονται κάθε ευκαιρία που παρουσιάζεται, να μιλήσουν για το άπειρο με τους μαθητές σε όποια ηλικία κι αν αυτοί βρίσκονται.

Στο προηγούμενο άρθρο τους οι Jirotková & Littler (2003), αναλύουν τις γραπτές απαντήσεις 72 φοιτητών μαθηματικού, (μελλοντικών δασκάλων), πάνω στην έννοια της ευθείας. Το κύριο μέλημα ήταν να ερμηνεύσουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι λέξεις γύρω από το άπειρο, ως ουσιαστικό, επίθετο ή επίρρημα, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα για την καλύτερη κατανόηση αυτών που οι μαθητές εννοούν όταν περιγράφουν κάτι, δεδομένου ότι δεν κατέχουν τα κατάλληλα εφόδια για να εκφράσουν αυτό που πραγματικά έχουν στο μυαλό τους. Μετά από μια πιλοτική φάση, αποφασίστηκε μια σειρά από 7 εργασίες, η οποίες δόθηκαν σε 44 Τσέχους και 54 Βρετανούς μαθητές, από 11 έως 15 ετών. Όλες εκτός από μία ήταν θέματα γεωμετρίας, επειδή η γεωμετρία παρέχει μοναδικές και εξαιρετικές δυνατότητες ανάπτυξης της κατανόησης της έννοιας του απείρου και της άπειρης διαδικασίας. Οι απαντήσεις αναλύθηκαν από δύο σκοπιές. Έγινε προσπάθεια πρώτον, να ανακαλυφθούν οι μηχανισμοί που δημιούργησαν αυτές τις εικόνες στους μαθητές, και δεύτερον να βρεθεί ένα ταιριαστό εργαλείο για μια επιπρόσθετη και ευρύτερη καλλιέργεια των εικόνων. Λένε περεταίρω ανάπτυξη, αντί ανακατασκευή επειδή δεν συμφωνούνε με την θέση της απόλυτα σωστής ή λάθος εκτίμησης. Δεν είναι πιθανό να επιτευχθεί καλύτερη κατανόηση του απείρου σε σύντομο χρονικό διάστημα. Η κατανόηση πρέπει να δημιουργηθεί σιγά σιγά, μέσα σε ένα εννοιολογικό δίκτυο προσαρμοσμένο να διαρκέσει αρκετά. Όσο πιο σύντομη είναι η διαπραγμάτευση τόσο φτωχότερο θα είναι το φάσμα των εμπειριών που θα αποκομίσει ο μαθητής. Επίσης επειδή οι διαισθήσεις που έχουν οι μαθητές για το άπειρο εξαρτώνται πάρα πολύ από το συγκεκριμένο έργο που καλούνται να εκτελέσουν δεν είναι φρόνιμο να βγάλουμε συμπεράσματα, αλλά μάλλον να αναρωτηθούμε για τις επιπλέον εμπειρίες που μπορούμε να παρέχουμε στους μαθητές για το άπειρο.

Οι Kattou, Michael, Kontoyianni, Christou & Philippou (2009), δημοσιεύουν τα αποτελέσματα μιας μελέτης με θέμα τις αντιλήψεις δασκάλων δημοτικού, για το άπειρο. Τα αποτελέσματα έχουν ενδιαφέρον γιατί οι μαθητές που θα εξετάσουμε προέρχονται από αυτόν τον χώρο και είναι επηρεασμένοι από τις αντιλήψεις των δασκάλων τους. Η έρευνα εστιάζετε σε τρεις πτυχές. Πρώτον να ερευνήσει τις αντιλήψεις των δασκάλων γύρω από τη φύση του απείρου ως αντικείμενο και ως διαδικασία. Δεύτερον, να ανακαλύψει τις παρανοήσεις των δασκάλων που προκύπτουν από την σύγκριση (ως προς την πληθυκότητα), αριθμών και συνόλων με άπειρα στοιχεία. Και τρίτον, να συζητηθούν οι επιπτώσεις των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην σύγκριση άπειρων συνόλων. Η πλειονότητα των δασκάλων αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μια ατέρμονη διαδικασία. Αυτό είναι συμβατό με άλλες

έρευνες (Tall 1992, Monagham 2001, κ. α.) στις οποίες τονίζεται ότι η ικανότητα κατανόησης ενός ατόμου γύρω από το άπειρο, ενισχύεται από το εύρος των πεπερασμένων νοητικών σχημάτων που κατέχει. Τα σχήματα αυτά είναι που κυρίως θα βοηθήσουν στην δημιουργία του απείρου ως ανεξάρτητη οντότητα. Στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους δασκάλους υπήρχε μια ερώτηση για το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S={-3,-2,-1,0,{1,2,3,…}}. Δεν μπορούσαν να αντιληφθούν την ταύτιση του συνόλου αυτού με το S={-3,-2,-1,0,N}. Ως κατακλείδα, δεν μπορούσαν να «δουν» το άπειρο ως ολοκληρωμένη οντότητα. Κατά τον Dubinsky και τους συνεργάτες του (2005), ένα άτομο μπορεί να κατασκευάσει μια ολοκληρωμένη ιδέα για το άπειρο μόνο αφού έχει εσωτερικεύσει επαναλαμβανόμενες ατέρμονες διαδικασίες, οι οποίες τον ώθησαν να «δει» το αποτέλεσμα των διεργασιών ως οντότητα η οποία υπερβαίνει την διαδικασία.

Η διαισθητική ερμηνεία του απείρου, σαν προοπτική, αποτελεί γνωστικό εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας. Οι δάσκαλοι αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μια μαθηματική έννοια που παρουσιάζεται στην καθημερινή ζωή μέσα από εφαρμογές που παραπέμπουν σε οριακές διαδικασίες. Τα παραδείγματα που έφεραν προέρχονταν από ένα ευρύ πεδίο των μαθηματικών όπως γεωμετρία, τριγωνομετρία και σειρές αποδεικνύοντας ότι υπήρχαν εμπειρίες για το άπειρο μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα. Ωστόσο υπήρχαν και μερικά εμπειρικά παραδείγματα που εμπεριείχαν μεγάλους αριθμούς. Κατά τους Singer και Voica (2003), τα άτομα όταν δεν μπορούν να συλλάβουν το μέγεθος ή το πλήθος μιας ποσότητας τότε το συσχετίζουν με το άπειρο, το οποίο το αντιλαμβάνονται ως κάτι ασύλληπτο.

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της έρευνας αφορά την συνεισφορά της γεωμετρίας στην κατανόηση του απείρου. Όταν ζητήθηκε από τους δασκάλους να αποφασίσουν αν δύο δοσμένα άπειρα σύνολα είχαν ίδια πληθυκότητα ή όχι, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις μοιάζει να βοήθησαν στην δημιουργία ένα προς ένα αντιστοιχίας ανάμεσα στα σύνολα, ώστε να απαντήσουν σωστά και να αποφύγουν την αιτιολόγηση μερικό-ολικό. Πράγμα που δεν παρατηρήθηκε για όσους επέλεξαν άλλου είδους αναπαραστάσεις ή λεκτική αιτιολόγηση.

Αν οι παρανοήσεις των δασκάλων, αναπαραχθούν μέσα στην τάξη, τότε οι παρανοήσεις των μαθητών τους θα είναι τεκμηριωμένες και ως τέτοιες πολύ δύσκολα επεξεργάζονται και αντιπαρέρχονται. Καλό θα ήταν λοιπόν για τους μαθητές να ακολουθηθεί μια διδασκαλία που θα φέρνει σε αντιπαράθεση τις διαισθητικές αντιλήψεις τους για το άπειρο κάτω από το «φως» του τυπικού ορισμού. Επίσης η παρουσίαση διαφορετικών αναπαραστάσεων και η επεξήγηση των συμβόλων πρέπει να συμπεριληφθεί.

Ωστόσο η εν δυνάμει και η εν ενεργεία φύση του απείρου ταλάνισε τους μαθηματικούς όπως αναφέραμε στην αρχή της ενότητας. Αποτελεί λοιπόν ένα επιστημολογικό εμπόδιο που εμφανίζεται στις διαισθήσεις των μαθητών, τους προκαλεί αντιφάσεις και αποτελέσματα που μοιάζουν έγκυρα σε ένα πλαίσιο ενώ αντιπαρέρχονται σε κάποιο άλλο. Είναι λοιπόν μία ένδειξη της δυνατότητας ανάπτυξης προχωρημένης μαθηματικής σκέψης (κατά Harel και Sowder) στο μυαλό των νεαρών μαθητών.

1.5. Η Εφαπτόμενη Ευθεία στην Έρευνα

Επικεντρώνοντας στην εφαπτομένη ευθεία, η οποία αποτελεί πεδίο μελέτης τούτης της εργασίας, ας δούμε τι συμβαίνει όταν οι μαθητές στοχάζονται πάνω σ' αυτήν, είτε ευθέως είτε μέσω της παραγώγου συνάρτησης.

Ο Vinner το 1991 δημοσίευσε μια έρευνα με τίτλο «Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent», (σύγκρουση μεταξύ ορισμών και διαισθήσεων, η περίπτωση της εφαπτομένης). Η λέξη διαίσθηση αντιπροσωπεύει την εντύπωση που εγκαθιδρύεται στον μαθητή από την γεωμετρική διαπραγμάτευση με την έννοια, νωρίτερα στο γυμνάσιο. Η έρευνα καταδεικνύει ότι η πλειοψηφία των σπουδαστών δεν χρησιμοποιούν τον ορισμό της εφαπτομένης κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, αλλά την εικόνα της εφαπτομένης που έχουν δημιουργήσει. Συγκεκριμένα μόνο το 41% έδωσαν τον σωστό ορισμό της έννοιας (όταν τους ζητήθηκε), ενώ το 35% έδωσαν τον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, οι υπόλοιπες απαντήσεις κρίθηκαν λανθασμένες. Από τα αποτελέσματα της έρευνας κατά τον σχεδιασμό εφαπτομένης σε διάφορες καμπύλες, φαίνεται ότι οι σπουδαστές σε μεγάλο ποσοστό είτε σχεδιάζουν εφαπτομένη που να ταυτίζεται με την εφαπτομένη κύκλου, είτε συνδυάζουν και τις δύο εικόνες παρουσιάζοντας περισσότερες από μία εφαπτόμενες.

Ο Fischbein (1987) μελετώντας την εφαπτομένη καμπύλης, αναφέρει ότι η εφαπτομένη του κύκλου λειτουργεί ως παραδειγματικό μοντέλο, δηλαδή καθορίζει ιδιότητες της γενικής εφαπτομένης.

Ο Tall (1986) μελετά τις δυσκολίες που ενσωματώνονται στην έννοια της εφαπτομένης. Δουλεύει σε δύο ομάδες μαθητών, μια στην οποία γίνεται διδασκαλία με κατάλληλα λογισμικά πακέτα και μία ομάδα ελέγχου στην οποία το μάθημα γίνεται παραδοσιακά. Στα συμπεράσματά του βλέπουμε ότι σημαντικό ποσοστό των μαθητών διατηρούν την έννοια της «παραδειγματικής» (generic) εφαπτομένης, δηλαδή της

εφαπτομένης που τέμνει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο. Προτείνει αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα, ώστε να γίνουν πιο ευέλικτα από διδακτική σκοπιά, έτσι ώστε οι εκπαιδευτικοί να έχουν τη δυνατότητα να παρουσιάσουν στους μαθητές γενικότερες ιδέες των εννοιών από χαμηλότερη βαθμίδα εκπαίδευσης.

Οι Downs και Mamona – Downs (2000) σε μια μελέτη που αφορά στις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη, περιγράφουν δύο εφαπτόμενες τη γεωμετρική εφαπτομένη (η οποία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο ή είναι η μοναδική ευθεία που έχει αυτή την ιδιότητα) και στην αναλυτική (η οποία είναι η οριακή θέση της τέμνουσας), συμπεραίνουν ότι η ενώ ο κυρίαρχος ορισμός για τους μαθητές είναι η αναλυτική εφαπτομένη, η κυρίαρχη εικόνα είναι η γεωμετρική.

Οι Biza, Souyoul & Zachariades (2004, 2005) κάνουν μια έρευνα πάνω στην εννοιολογική αλλαγή στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Η έρευνα επικεντρώνεται στην έννοια της εφαπτομένης καμπύλης. Στην έρευνα αυτή οι δεκαεννιά πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού καλούνται να χαρακτηρίσουν σωστές ή λάθος προτάσεις που έχουν να κάνουν με τον αριθμό των κοινών σημείων που πρέπει να έχει η καμπύλη με την εφαπτομένη, να επιλέξουν από χαρακτηριστικές γραφικές παραστάσεις ποιες αντιστοιχούν σε εφαπτόμενες και τέλος να σχεδιάσουν οι ίδιοι εφαπτόμενες. Στα συμπεράσματα, από τις απαντήσεις και τις συνεντεύξεις, οι σπουδαστές ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη επικρατεί η εικόνα της εφαπτόμενης κύκλου (26%), στη δεύτερη φαίνεται να έχουν κατασκευάσει μια πιο εκλεπτυσμένη εικόνα εφαπτομένης στην οποία οι ιδιότητες της εφαπτομένης του κύκλου έχουν τοπική ισχύ (37%). Σ' αυτήν την περίπτωση δεν μπορούν να «δουν» εφαπτομένη σε ευθεία ή εφαπτομένη που διατρέχει την καμπύλη. Και στην τρίτη όπου ακόμη και όταν δεν θυμόνταν τον τυπικό ορισμό της εφαπτομένης δεν είχαν κανένα πρόβλημα στο να την αναγνωρίσουν ή να την σχεδιάσουν (37%). Οι μελετητές πιστεύουν ότι μια διδασκαλία επικεντρωμένη σε οπτικές αναπαραστάσεις με χρήση Η/Υ θα ήταν πιο αποτελεσματική προκειμένου να επιτευχθεί η εννοιολογική αλλαγή. Η χρήση της τοπικής ευθύτητας που πρότεινε oTall (1989, 2003), δηλαδή η μεγέθυνση και η εστίαση στο σημείο επαφής, ώστε να φανεί η καμπύλη στην περιοχή σαν ευθεία, ικανοποιεί όλες τις περιπτώσεις.

Η Biza (2007) δημοσιεύει μερικά αποτελέσματα της έρευνάς της σε δείγμα 182 πρωτοετών φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος σε πολύ πρώιμο στάδιο των σπουδών τους. Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων συμπεραίνει ότι οι ιδιότητες της εφαπτομένης κύκλου επηρεάζουν τις επιλογές των φοιτητών. Η επίδραση μπορεί να είναι υποβόσκουσα.

Οι φοιτητές αναπροσαρμόζουν τις ολικές ιδιότητες της εφαπτομένης κύκλου σε τοπικές κρατώντας όμως ισχυρές παρανοήσεις. Η μελέτη αυτών των παρανοήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υλικό, για σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης.

Οι Biza, Christou & Zachariades (2008), συνεχίζουν την έρευνά τους πάνω στην εφαπτομένη συνάρτησης. Αυτή τη φορά συλλέγουν πληροφορίες από 196 μαθητές και μαθήτριες της Γ' τάξης λυκείου, από εννέα διαφορετικά λύκεια της χώρας. Όλοι οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί στοιχειώδη λογισμό (συναρτήσεις, όρια, συνέχεια, παράγωγο, εφαπτόμενη ευθεία, σχέση παραγώγου-μονοτονίας, ακρότατα, κοίλα-κυρτά συνάρτησης, σημεία καμπής, σχεδίαση γραφικής παράστασης). Το ερωτηματολόγιο σχεδιάστηκε με βάση παλαιότερες μελέτες των Tall (1987) και Vinner (1982, 1991), καθώς επίσης και στην πιλοτική έρευνα των Biza, Soyioul & Zachariades (2005). Η ανάλυση στηρίχθηκε στις απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο και στην αιτιολόγηση που χρησιμοποίησαν. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκαν εικασίες για τις εικόνες της έννοιας και τους προσωπικούς ορισμούς της έννοιας των μαθητών. Οι λόγοι για την επιλογή μιας τέτοιας ανάλυσης ήταν τρεις. Πρώτον, οι ερευνητές ήθελαν να έχουν πρόσβαση σε ένα σχετικά μεγάλο δείγμα μαθητών ώστε να ερευνήσουν ένα ευρύτερο φάσμα διακυμάνσεων πάνω στον τρόπο που επιτυγχάνεται η σύλληψη του νοήματος της εφαπτομένης. Δεύτερον, ήθελαν να επιτύχουν μια στατιστική επαλήθευση της ταξινόμησης των μαθητών που είχαν προβλέψει από την προηγούμενη έρευνά τους, αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας, καθώς επίσης και να εμπλουτίσουν τις γνώσεις τους γι' αυτό. Τελικός στόχος ήταν να ολοκληρωθεί η εργασία της ποιοτικής έρευνας, που περιγράφει τις ιδέες των μαθητών πάνω στην εφαπτομένη, παρουσιάζοντας ένα μοντέλο βασισμένο στους παράγοντες που πιθανών θα εμφανίζονταν από την κωδικοποίηση των δεδομένων. Οι προσδοκίες επαληθεύονται, οι μαθητές ταξινομούνται σε τρεις ομάδες οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις τρεις βασικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη, την γεωμετρική ολική *(Geometrical Global),* την ενδιάμεση τοπική *(Intermediate Local)* και την αναλυτική τοπική (*Analytical Local).* Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές της πρώτης ομάδας είναι επηρεασμένοι από την εφαπτομένη του κύκλου, θεωρώντας απαραίτητη προϋπόθεση το ένα κοινό σημείο μεταξύ τους καθώς επίσης και το ότι η εφαπτομένη δεν πρέπει να διατρέχει την καμπύλη. Αναφορικά με τις άλλες δύο ομάδες, ένας μεγάλος αριθμός μαθητών της ομάδας αυτής, επιλέγουν ή αιτιολογούν τις αποφάσεις τους, κοιτώντας τις ιδιότητες σε ολόκληρη τη γραφική παράσταση και όχι μόνο στην περιοχή ενδιαφέροντος. Είναι οι μαθητές αυτοί που λειτούργησαν με βάση την γενίκευση μέσω επέκτασης των Harel

και Tall ή αυτοί που δεν κατάφεραν την τυπικοί αφαίρεση. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας εμφανίζουν εικόνα έννοιας της εφαπτομένης με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: η ευθεία μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σημεία κοινά με την καμπύλη, αλλά στην περιοχή γύρω από το σημείο επαφής δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο μεταξύ καμπύλης και εφαπτομένης. Αυτό σημαίνει ότι εξαιρούν τις περιπτώσεις που η εφαπτομένη ταυτίζεται με την καμπύλη ή μοιάζει να ταυτίζεται όπως στα σημεία καμπής. Οπότε ουσιαστικά θεωρούν ότι η καμπύλη πρέπει στην περιοχή γύρω από τα σημείο επαφής, να μείνει στο ίδιο ημιεπίπεδο και να μη χωριστεί από την εφαπτομένη. Εδώ εμφανίζεται η γενίκευση μέσω διάσπασης. Ο μαθητής διατηρεί δύο σχήματα που τα ανασύρει κατά περίπτωση, δεν λειτούργησε η συνθετική διεργασία η οποία θα σχημάτιζε μια νέα οντότητα. Και τέλος στην τρίτη ομάδα, οι μαθητές φαίνεται να έχουν μια πιο εκλεπτυσμένη εικόνα έννοιας για την εφαπτομένη ευθεία, περιλαμβάνοντας περιπτώσεις που η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με την καμπύλη, διασταυρώνεται με την καμπύλη σε σημεία καμπής ή ταυτίζεται μαζί της. Τέλος εξαιρούν τα γωνιακά σημεία. Είναι οι μαθητές που έχουν πετύχει την τυπική αφαίρεση. Γενικά αποκαλύφτηκαν αρκετές διαφορετικές εικόνες της έννοιας της εφαπτομένης σε κάθε μία από τις ομάδες που αναφέραμε. Αυτά τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο ως εργαλεία ταυτοποίησης των φαινόμενων στην τάξη, όσο και ως βάση για την διαμόρφωση κατάλληλων διδασκαλιών ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι παρανοήσεις των μαθητών.

Η Biza (2008) μελέτησε τη μετάβαση των μαθητών από τις διαισθητικές απόψεις τους για έννοιες της Ανάλυσης στην τυπική μαθηματική γνώση, πάλι μέσα από την περίπτωση της εφαπτομένης. Εξέτασε με ποιο τρόπο οι μαθητές οικοδομούν τις εικόνες έννοιας για την εφαπτόμενη ευθεία και ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτών των εικόνων. Στα συμπεράσματά της αναφέρει:

«*Φάνηκε ότι αρκετοί μαθητές δεν καταφέρνουν να γενικεύσουν ανακατασκευάζοντας τις εικόνες που έχουν από τη Γεωμετρία και να σχηματίσουν μία πλήρη εικόνα για την εφαπτομένη γραφικής παράστασης στην Ανάλυση. Αντίθετα, σχηματίζουν εικόνες που είναι αποτέλεσμα της μίξης των παλαιών και νέων γνώσεων τους. Ειδικά όταν μεσολαβεί κάποιο διάστημα που δεν έχουν ασχοληθεί συστηματικά με την έννοια επανέρχεται η επίδραση των γεωμετρικών στοιχείων από την εφαπτομένη του κύκλου, παρόλο που οι επιδόσεις τους σε ασκήσεις συμβολικού χειρισμού είναι ικανοποιητικές.[…] διαπιστώθηκε ότι η μετάβαση από τη ολική οπτική της Γεωμετρίας στην τοπική οπτική της Ανάλυσης (Castela, 1995) δεν είναι πάντα ομαλή και δημιουργεί προβλήματα ειδικά σε περιπτώσεις που η εφαπτομένη έχει και άλλα κοινά σημεία, όταν ταυτίζεται με την καμπύλη καθώς και στις περιπτώσεις των σημείων*

καμπής και των γωνιακών σημείων».

Στη συνέχεια θέτει κάποια ερωτήματα που προκύπτουν από την έρευνα, και καταλήγει πως η διδασκαλία θα μπορούσε να σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε η μετάβαση από την διαισθητική στην τυπική γνώση να γίνεται ομαλότερα. Κάτι τέτοιο μοιάζει εφικτό αν δραστηριότητες που εισάγουν τις άπειρες διαδικασίες, ξεκίναγαν άτυπα σε πιο στοιχειώδες επίπεδο. (Π.χ. η μέτρηση του εμβαδού του κύκλου ή η εφαπτομένη ως όριο τεμνουσών για την επίλυση προβλημάτων της Γεωμετρίας).

Οι Biza & Zachariades (2010) ως συνέχεια των εργασιών τους, ερευνούν τις αντιλήψεις των πρωτοετών φοιτητών του Μαθηματικού, λίγους μήνες μετά τις πανελλαδικές εξετάσεις και την εισαγωγή τους στη σχολή. Τα αποτελέσματα δείχνουν όχι μόνο ότι οι φοιτητές «φέρνουν» μαζί τους τις επιρροές από τη ευκλείδεια γεωμετρία μέσω της εφαπτομένης του κύκλου, αλλά και ότι κάποιες ιδιότητες εμφανίζονται ακόμα πιο ισχυρές από τις αντίστοιχες μαθητών Γ΄ Λυκείου. Φαίνεται λοιπόν ότι ένα σύστημα αξιολόγησης προσανατολισμένο στις αλγοριθμικές ικανότητες και όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών δεν είναι κατάλληλο για τον προβιβασμό τους, από τη μία βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη. Δεν είναι σίγουρο, αν οι φοιτητές αυτοί θα καταφέρουν στην πανεπιστημιακή τους εκπαίδευση, να πετύχουν την εννοιολογική αλλαγή που απαιτείτε. Αυτό θα είναι καταστροφικό αν σκεφτούμε ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί θα αναπαράγουν αυτές τις περιορισμένες αντιλήψεις για την εφαπτομένη στους μαθητές τους.

Είναι πραγματικά εντυπωσιακό πόσο ισχυρή είναι η ευκλείδεια εικόνα της εφαπτομένης του κύκλου που διδάσκονται οι μαθητές αρχικά στην Α΄ Γυμνασίου και τι διαστάσεις μπορεί να πάρει.

1.6. Προτάσεις για την διδασκαλία της εφαπτομένης.

Ο Tall (1986) περιγράφει τη διδακτική παρέμβαση που επιχείρησε, με στόχο να διαπραγματευτούν οι μαθητές, την έννοια της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης. Ζητά από τους μαθητές να σχεδιάσουν μία ευθεία που διέρχεται από δύο πολύ κοντινά σημεία της γραφικής παράστασης. Πρόκειται για μία διευρυμένη παρουσίαση της έννοιας της κλίσης σε μια γραφική παράσταση συνάρτησης. Η διδασκαλία καθοδηγείτε από τον εκπαιδευτικό ο οποίος χρησιμοποιεί υπολογιστή, για τον σχεδιασμό των παραστάσεων, και προκαλεί συζήτηση επικεντρωμένη σε αυτό που συμβαίνει στην οθόνη. Στην συνέχεια οι μαθητές ενθαρρύνονται να δουλέψουν σε μικρές ομάδες με τον υπολογιστή. Στα

αποτελέσματα ο συγγραφέας αναφέρει:

«Η εμπειρία με τους Η/Υ διευκολύνει τους μαθητές να έχουν μία πιο συνεκτική εικόνα έννοιας για την εφαπτομένη ενισχύοντας την ικανότητα να μεταφερθεί η προηγούμενη γνώση σε ένα νέο πλαίσιο […] ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εστίαση σε βασικές ιδιότητες μιας νέας έννοιας παρέχοντας λογισμικό που διευκολύνει το χρήστη στο χειρισμό παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων της έννοιας σε ένα όχι και τόσο σύνθετο περιβάλλον» (Tall, 1987).

Η Biza (2008) σχεδιάζει και υλοποιεί μια διδασκαλία σε μαθητές τρίτης λυκείου, με στόχο την ανακατασκευή των προηγουμένων περιορισμένων πεποιθήσεων για την εφαπτομένη, όπως αυτές έχουν προκύψει από προηγούμενη έρευνα, καθώς και την κατάκτηση μιας βαθύτερης κατανόησης για το θέμα. Στην πρώτη διδασκαλία κατασκευάστηκε, σε υπολογιστικό περιβάλλον, η εφαπτόμενη ευθεία ενός κύκλου σε σημείο Α καθώς και τυχαία τέμνουσα ΑΒ. Στη συνέχεια οι μαθητές παρατηρούν πως συμπεριφέρεται η τέμνουσα όταν το σημείο Β προσεγγίζει το Α. Παράλληλα χρησιμοποιείτε ένα εργαλείο που επιτρέπει την εμφάνιση σε μεγέθυνση της περιοχής του σημείου Α. Στόχος του σεναρίου ήταν να καταφέρουν οι μαθητές να δουν την εφαπτομένη ως οριακή θέση των τεμνουσών ΑΒ, καθώς το Β πλησιάζει το Α και να παρατηρήσουν ότι ο κύκλος σ' αυτήν την μικρή περιοχή της μεγέθυνσης ταυτίζεται με την εφαπτομένη του (πράγμα που θα τους εφοδιάσει με ένα επιπλέον εργαλείο, προκειμένου να ελέγχουν την κατάσταση που επικρατεί στα γωνιακά σημεία). Στη δεύτερη διδασκαλία προκειμένου να γίνει η μετάβαση στην ανάλυση και τις συναρτήσεις, το εγχείρημα επιχειρείτε σε ημικύκλιο. Η δεύτερη διδασκαλία οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης και της παραγώγου. Οπότε δεν κρίνεται απαραίτητο να αναφερθούμε περαιτέρω στη διδασκαλία, μια που η παρούσα μελέτη αναφέρεται σε πολύ νεότερες ηλικίες. Το εγχείρημα αξιολογήθηκε μέσω ερωτηματολογίου από τους μαθητές, τον εκπαιδευτικό και τους ερευνητές. Οι εντυπώσεις ήταν θετικές από πολλές απόψεις. Η διδασκαλία κρίθηκε παιδαγωγικά ενδιαφέρουσα και γνωστικά αποτελεσματική. Το αρχικό της κομμάτι αποτελεί για μας πηγή έμπνευσης και οδηγό για τον σχεδιασμό της δικής μας διδασκαλίας.

Η Biza (2011) μπαίνει στην τάξη σε ρόλο εκπαιδευτικού και ερευνητή ταυτόχρονα, με μαθητές Γ΄ λυκείου. Η διδασκαλία γίνεται αφού οι μαθητές έχουν ήδη εισαχθεί στην εφαπτομένη και στη σχέση της με την παράγωγο. Χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας με χρήση του εργαλείου της μεγέθυνσης, εστιάζει στην τοπική ευθύτητα. Αρχικά

απογοητεύεται από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία της τοπικής ευθύτητας και δεν την χρησιμοποιούν στην αιτιολόγησή τους ή σε κάποιον ορισμό. Τα δεδομένα αλλάζουν όταν οι μαθητές διαπραγματεύονται γωνιακά σημεία. Τότε η εικόνα της τοπικής ευθύτητας αποκτά τη σημασία που της αρμόζει και γίνεται εργαλείο αιτιολόγησης και κατανόησης. Τονίζει επίσης στα συμπεράσματά της τη σημασία που έχει η επιλογή των κατάλληλων παραδειγμάτων (προετοιμασμένων και μη), στη διαδικασία της διδασκαλίας. Στόχος τους πρέπει να είναι να ταρακουνήσουν τους μαθητές και να επιφέρουν συγκρούσεις ανάμεσα σε αυτό που οι μαθητές θεωρούν εφαπτομένη καμπύλης και στον πραγματικό (επιστημονικό) ορισμό της έννοιας.

Οι Kajander & Lovric (2009) δημοσιεύουν τα αποτελέσματα της μελέτης τους πάνω σε σχολικά εγχειρίδια. Επισημαίνουν τραγικά λάθη που δημιουργούν, αντί να διαλευκάνουν, έντονες παρανοήσεις. Στο τέλος προτείνουν ένα εναλλακτικό γνωστικό μοντέλο για την εφαπτομένη. Προκειμένου να δημιουργηθεί μια οπτική αναπαράσταση του ορισμού της εφαπτομένης ως οριακή θέση τεμνουσών, μια σειρά από μεγεθύνσεις εστιασμένες στο σημείο της εφαπτομένης θα ήταν απαραίτητη. Προτείνουν να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην εξομάλυνση της γραφικής παράστασης (εκεί όπου μοιάζει όλο και περισσότερο με ευθεία). Τότε η γραφική παράσταση με έναν φυσικό τρόπο εμφανίζει ως εφαπτομένη στο σημείο που βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση. Το γεγονός ότι το γνωστικό μοντέλο που στηρίζεται στη μεγέθυνση είναι εκ διαμέτρου διαφορετικό από το σύνηθες «η εφαπτόμενη αγγίζει την καμπύλη», αποτρέπει δυναμικά το μαθητή από την κατασκευή ενός συνθετικού μοντέλου για την εφαπτομένη. Μοιάζει δύσκολο να συσχετίσει την αίσθηση του «zooming in» της γραφικής παράστασης που δυναμικά προσεγγίζει όλο και περισσότερο την εφαπτομένη, με το στατικό η ευθεία που αγγίζει την καμπύλη. Ίσως ωθήσει το μαθητή να διαλύσει τις παρανοήσεις του και να τον οδηγήσει, μέσα από συζήτηση, στον ρόλο της εφαπτόμενης ως της καλύτερης προσέγγισης για την γραφική παράσταση συνάρτησης από ευθεία.

1.7. Ο ρόλος της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών

Όπως φαίνεται από πολύ νωρίς οι ερευνητές αντιλήφθηκαν, την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που επιφέρει η χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική πράξη, δηλαδή στη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία. Η δυνατότητά του να προσομοιώνει, να εκτελεί διαφορετικές λειτουργία και να ικανοποιεί τις ανάγκες και τις προτιμήσεις των ανθρώπων των μεταμορφώνει σε Πρωτέα των μηχανών (Papert, 1991). Ο Tall ήδη από το 1985 τόνισε πόσο σημαντική ευκαιρία στάθηκε, για τη διδασκαλία των μαθηματικών και της ανάλυσης

ειδικότερα, η είσοδος των μικροϋπολογιστών στην τάξη των μαθηματικών. Πολλοί στη συνέχεια επικροτούν τις απόψεις τους κάνοντας ιδιαίτερη αναφορά στη δυνατότητα σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων, βοηθώντας τους μαθητές να πετύχουν εννοιολογική κατανόηση των εννοιών. Η ταυτόχρονη πολλαπλή αναπαράσταση ενός αντικειμένου (π.χ. γεωμετρικά και αλγεβρικά), διευκολύνει την κατανόηση των εννοιών και επιτρέπει τη δημιουργία συνδέσμων εκεί που υπήρχαν στεγανά. Μια διδασκαλία που χρησιμοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν μόνοι τους να χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις ως εργαλείο, όταν προσπαθούν να κατανοήσουν μια έννοια ή απόδειξη, καθώς και όταν προσπαθούν να αποδείξουν έναν ισχυρισμό. Μπορεί να τους βοηθήσει να μάθουν να μελετούν τις εικόνες και να καταλαβαίνουν τι «λένε». Όταν οι αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν και τα συμβολικά μαθηματικά, τότε η μετάβαση από την εικόνα στη συμβολική σχέση αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη, καθώς ουσιαστικά επιτελείται μετάβαση από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο (Confrey &Smith, 1999, Kaput, 1994).

Ο ρόλος της τεχνολογίας αποδείχθηκε καθοριστικός στο να ξεπεραστούν σημαντικά εμπόδια, που επισημαίνονται από τους ερευνητές, και πολλές φορές οφείλονται είτε στον τρόπο που παρουσιάζονται οι έννοιες, είτε στην έλλειψη ή αδυναμία δημιουργίας αναπαραστάσεων από τους μαθητές, είτε στις πεποιθήσεις και διαισθήσεις που αναπτύσσουν. Η δυναμική και συμβολική δυνατότητα του περιβάλλοντος πληροφορικής προκαλεί τους μαθητές να συνδέσουν τις διαισθητικές έννοιες με τις πιο τυπικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης (Godwin & Sutherland, 2004). Ο μαθητής μπορεί να δοκιμάζει πολλές φορές, να συγκρίνει, να παρατηρεί και με αυτόν τον τρόπο να ελέγχει τις πεποιθήσεις του, να τις κρίνει μέσα σε ένα νέο πλαίσιο και τέλος να τις καταρρίπτει.

Ο ρόλος των εικασιών είναι πολύ σημαντικός στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Η χρήση των υπολογιστών μπορεί να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση (Kaput, 1986). Ο Tall (1991) σημειώνει: *«Εισάγοντας κατάλληλα πολύπλοκες νοερές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών είναι δυνατόν να δώσουμε μια πολύ ευρύτερη εικόνα των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούν να γίνουν αντιληπτές οι έννοιες, δίνοντας έτσι πολύ ισχυρότερες διαισθήσεις απ' ότι με μια παραδοσιακή προσέγγιση. Είναι δυνατό να σχεδιαστεί διαδραστικό λογισμικό που επιτρέπει στους σπουδαστές να διερευνήσουν μαθηματικές ιδέες με τον διπλό ρόλο του να είναι και άμεσα ελκυστικό στους μαθητές και να προετοιμάζει τις θεμελιώδεις έννοιες πάνω στις οποίες μπορούν να χτιστούν οι ιδέες. Διερευνώντας παραδείγματα που δουλεύουν και παραδείγματα που αποτυγχάνουν (αντιπαραδείγματα), οι σπουδαστές μπορούν*

να αποκτήσουν τις οπτικές διαισθήσεις που είναι απαραίτητες για να διασφαλίσουν ισχυρές ενοράσεις. Έτσι η διαίσθηση και η αυστηρότητα δεν είναι αναγκαίο να είναι σε σύγκρουση η μία με την άλλη. Παρέχοντας ένα κατάλληλα ισχυρό πλαίσιο, η διαίσθηση οδηγεί φυσιολογικά στην αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης».

Από την άλλη μεριά, η πειστική αναπαράσταση κάποιων ιδιοτήτων μέσω του υπολογιστή καθώς επίσης και η ευκολία με την οποία αναπαράγονται παραδείγματα πάνω στο ίδιο πλαίσιο, μπορεί να δημιουργήσουν την πεποίθηση στους μαθητές ότι η απόδειξη δεν είναι απαραίτητη (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000). Έγκειται στην ικανότητα του εκπαιδευτικού να σχεδιάσει δραστηριότητες, που να έρχονται σε σύγκρουση με τις πεποιθήσεις των μαθητών του και να προκαλέσει έκπληξη και αβεβαιότητα, ώστε να δημιουργήσει κίνητρα για την απόδειξη.

Η εμπλοκή με δυσκολότερα προβλήματα ή με ερωτήματα που απορρέουν από το αρχικό είναι (με τη χρήση του υπολογιστή) ευκολότερη, μια που μπορούν να προκληθούν «αλλοιώνοντας» κατάλληλα κάθε φορά το σχήμα μέσω των δυναμικών λογισμικών. Η δημιουργία νέου προβλήματος είναι στενά συνδεδεμένη με το στάδιο «κοιτάζοντας προς τα πίσω» του Polya, το οποίο θεωρείται το σπουδαιότερο βήμα κατά την επίλυση προβλήματος.

Η βάση της Ανάλυσης είναι οι άπειρες διαδικασίες. Μια άγνωστη ποσότητα την υπολογίζουμε προσεγγίζοντας την, οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Μια τέτοια διαδικασία περιέχει κίνηση. Είναι δηλαδή μια δυναμική διαδικασία. Τέτοιου τύπου διαδικασίες μπορούν να κατανοηθούν καλύτερα μέσα από ένα περιβάλλον που μπορεί να αναδείξει τα ουσιαστικά στοιχεία τους. Η κατασκευή αντικειμένων που δεν είναι στατικά (δυναμικά λογισμικά πακέτα) αποτέλεσε επανάσταση στην διδασκαλία του λογισμού. Η γραφική επίδειξη και η διερεύνηση εννοιών που περιλαμβάνουν άπειρες διαδικασίες είναι τώρα εφικτή, καθώς και η παρατήρηση από πολύ κοντά της συμπεριφοράς των αντικειμένων μέσα από τη δυνατότητα μεγέθυνσης που διαθέτουν. Ο Ferrara (2006) σημειώνει: *«Ο δυναμικός τρόπος διαχείρισης και ελέγχου αντικειμένων στον υπολογιστή αφήνει τους μαθητές να εξερευνήσουν πολλές περιπτώσεις και να εντοπίσουν τι αλλάζει και τι όχι. Και τα μαθηματικά της αλλαγής είναι το πρώτο βήμα στο δρόμο για το Λογισμό. Μπορούμε να σχεδιάσουμε αλλαγή σε αριθμητικό επίπεδο, όπως και σε γραφικό αλλά και σε συμβολικό».*

Η διδασκαλία της γεωμετρίας στηρίζεται πάνω σε δύο άξονες: τα σχήματα και τη γλώσσα. Η γλώσσα είναι το μέσο με το οποίο περιγράφονται τα γεωμετρικά σχήματα και οι σχέσεις που τα συνδέουν, ενώ στο σχήμα αναδεικνύονται αυτές οι σχέσεις. Οι διαφορετικών

τύπων αναπαραστάσεις που υποστηρίζονται από κάποιο δυναμικό λογισμικό, η εύκολη μετάβαση από το ένα σχήμα στο άλλο, ωθούν το μαθητή στην αναγνώριση των σχημάτων, στη διάκριση των ιδιοτήτων και σχέσεων, στην εξάσκηση της φαντασίας τους ώστε να ανακαλέσουν όλα τα δυνατά σχήματα που συνδέονται με ένα γεωμετρικό αντικείμενο (Κυνηγός, 2007).

Η έρευνα σχετικά με τη χρήση των υπολογιστικών στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει καταλήξει στα εξής γενικά συμπεράσματα που αφορούν το γνωστικό κομμάτι της εκπαίδευσης:

- Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης της συγκεκριμένης επεξεργασίας τους.
- Οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν μια καλύτερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά, ενώ αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες.
- Η διδασκαλία που υποβοηθείται από υπολογιστή είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην άνοδο της επίδοσης ιδιαίτερα των αδύνατων και των πολύ καλών μαθητών.
- Η διδασκαλία με χρήση Η/Υ συμβάλλει στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Πέρα όμως από το γνωστικό αντικείμενο, οι Μπαραλός & Πολιτίδου (2008) σημειώνουν και επιπλέον δυνατότητες για τους μαθητές, όπως:

- Αυξάνουν το βαθμό συνεργασίας και αλλάζουν τους τρόπους αλληλεπίδρασης και συνεργασίας μεταξύ τους αλλά και με τους καθηγητές τους.
- Υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αυτονομίας και την αύξηση του εύρους, του βάθους, της συνθετότητας και της πρωτοτυπίας της σκέψης και της παραγωγής τους.
- Τους επιτρέπουν να αναλάβουν μεγαλύτερη ευθύνη για τη μάθησή τους, μέσα σε διδακτικές αίθουσες περισσότερο μαθητοκεντρικές και μαθητοελεγχόμενες.
- Τους επιτρέπουν να συμμετέχουν σε περισσότερο διαφοροποιημένες διδακτικές δραστηριότητες, οι οποίες ταιριάζουν στα ενδιαφέροντα, τις ανάγκες και τις δυνατότητές τους.

Πρέπει να τονίσουμε ωστόσο, ότι η χρήση νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία, προϋποθέτει ότι ο διδάσκοντας είναι έμπειρος, ενημερωμένος και απόλυτα πεπεισμένος για τα θετικά επακόλουθα της επιλογής του, μια που η προετοιμασία και ο σχεδιασμός είναι ιδιαίτερα απαιτητικός και πολύπλοκος (Biza, 2011). Μέσα σε ένα τέτοιο διδακτικό περιβάλλον, οι μαθητές είναι περισσότερο ελεύθεροι να ανακαλύψουν πράγματα. Οι πολλαπλότητα των αναπαραστάσεων, ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων και η διάδραση δημιουργούν πολύ περισσότερες ευκαιρίες δημιουργίας εικασιών, συγκρούσεων και επιπλοκών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα πολλές φορές αυτό στο οποίο εστιάζουν οι μαθητές να απέχει από αυτό στο οποίο στόχευε ο εκπαιδευτικός. Πολλά απροσδόκητα συμβάντα μπορούν να προκληθούν. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι ευέλικτος ώστε να αναπροσαρμόσει κατάλληλα τη διδασκαλία και να χειριστεί πετυχημένα αυτές τις καταστάσεις. Κάτι τέτοιο απαιτεί βαθιά μαθηματική και παιδαγωγική αρτιότητα από μεριάς του. Ένα άλλο γεγονός που έχει να μας πει η έρευνα, είναι ότι το άνοιγμα σε τέτοιες διδασκαλίες μπορεί να προκαλέσει στους μαθητές σύγκρουση με την καθημερινή, καθιερωμένη πρακτική της τάξης, και να αλλάξει την στάση τους μέσα στην τάξη των μαθηματικών. Η εφαρμογή τέτοιων διδασκαλιών απαιτεί πολύ προσεχτική αντιμετώπιση των πρακτικών που επιλέγονται, ώστε να οδηγήσουν τους μαθητές σταδιακά σε νέους τρόπους εμπλοκής τους με τα μαθηματικά (Mali, Biza, Kaskadamis, Potari and Sakonidis, 2013)

1.8. Ο διαδραστικός πίνακας και η διδακτική του αξιοποίηση

Από τη μέχρι τώρα χρήση του διαδραστικού πίνακα στα σχολεία σε διαφορετικές χώρες έχουν καταγραφεί διιστάμενες απόψεις και ερευνητικά αποτελέσματα. Ο διαδραστικός πίνακας συνοδεύεται από μία ρητορική που αναφέρεται σε νέες δυνατότητες παρέμβασεις στο μάθημα με στόχο τη βελτίωση της μάθησης (Edward et al., 2002), η οποία όμως δεν επιβεβαιώνεται στην πράξη. Σε πρώτο επίπεδο, η χρήση του διαδραστικού πίνακα προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και μάλιστα σε βαθμό που να επηρεάζει τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά (Wall et al., 2005). Όμως, οι σχετικές έρευνες στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών δείχνουν ότι η χρήση των διαδραστικών πινάκων ενίσχυσε την μετωπική διδασκαλία και περιόρισε τις ευκαιρίες διερεύνησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, την εργασία σε ομάδες, την επικοινωνία των μαθητών μεταξύ τους και της δυνατότητες αυτόνομης μάθησης (Zevenbegren & Lerman, 2008). Ωστόσο, το πεδίο της αξιοποίησης του διαδραστικού πίνακα στο μάθημα των μαθηματικών παραμένει ανοιχτό και φέρνει στο προσκήνιο τον καθοριστικό ρόλο των εκπαιδευτικών λογισμικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται, των δραστηριοτήτων με τις οποίες

εμπλέκονται οι μαθητές και των παρεμβάσεων του διδάσκοντα (Jones & Tanner, 2002).

Με στόχο την αναζήτηση πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας, συνοψίζουμε ακολούθως τα θετικά στοιχεία που σχετίζονται με τη χρήση του διαδραστικού πίνακα:

- Μια σειρά από δράσεις των μαθητών, λαμβάνει χώρα δημόσια και έτσι μπορεί να ενισχυθεί ο διάλογος στη σχολική τάξη. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν ο πειραματισμός των μαθητών με ένα αντικείμενο (π.χ. γεωμετρική κατασκευή) και το σύρσιμο αντικειμένων. Στη διαδικασία αυτή κατέχουν καθοριστικό ρόλο οι παρεμβάσεις του διδάσκοντα και ιδιαίτερα η ποιότητα των ερωτήσεων που απευθύνει στους μαθητές (Jones & Tanner, 2002).
- Η δυνατότητα χρήση στρωμάτων (layers), ιδιαίτερα σε εικονικές αναπαραστάσεις, μπορεί να ενισχύσει την ποικιλία των τρόπων διδακτικής προσέγγισης συγκεκριμένων εννοιών από το διδάσκοντα.
- Η διευκόλυνση της καταγραφής της πορείας του μαθήματος είτε μέσω της δημιουργίας σημειώσεων πάνω σε παρουσίαση – λογισμικό, είτε μέσω της βιντεοσκοπημένης καταγραφής μέρους ή όλων των αλληλεπιδράσεων που λαμβάνει χώρα στον διαδραστικό πίνακα.

Από την άλλη μια σειρά από αρνητικά στοιχεία που ενέχονται στη διδακτική χρήση του διαδραστικού πίνακα είναι συνοπτικά:

- Η ενίσχυση της μετωπικής διδασκαλίας στο πλαίσιο της παραδοσιακής τάξης καθώς η χρήση του διαδραστικού πίνακα μπορεί να είναι εξαιρετικά βολική για την μετωπική διδασκαλία του διδάσκοντα και την παρακολούθηση από όλη την τάξη (Smith et al., 2006).
- Η παροχή ύλης στους μαθητές μέσω χρήσης ειδικών πλατφόρμων, που φαίνεται σε πρώτο επίπεδο ότι διευκολύνει τη διδασκαλία αλλά ουσιαστικά οδηγεί τους μαθητές σε παθητική λήψη πληροφοριών.
- Η εξάρτηση από τα λογισμικά που συνοδεύουν τους διαφορετικούς τύπους διαδραστικών πινάκων.
- Η χρήση ανούσιων εκπαιδευτικών εφαρμογών (π.χ. κουίζ) χωρίς μαθησιακό αποτέλεσμα.
- Η αντίληψη ότι ο διαδραστικός πίνακας μπορεί να αποτελέσει καθεαυτό αντικείμενο διδασκαλίας (Wall et al., 2005).
- Η υποτίμηση της χρήσης εξειδικευμένων εκπαιδευτικών λογισμικών, ως τεχνολογικά

ξεπερασμένων. Η στάση αυτή, μπορεί να ευνοήσει τον περιορισμό της εμπειρικής μάθησης και την καλλιέργεια της αντίληψης ότι κύρια αξία της τεχνολογίας συνδέεται με πιο αποτελεσματικούς τρόπους εκμάθησης της ύλης.

1.9. Λίγα λόγια για το GeoGebra

Αυτήν τη στιγμή, το GeoGebra (Geo από Geometry, και Gebra από Algebra), είναι ένα από τα πιο καινοτόμα, ανοιχτού κώδικα λογισμικό μαθηματικών, το οποίο μπορεί κάνεις να το αποκτήσει ελεύθερα (χωρίς κόστος), από την ηλεκτρονική διεύθυνση www.geogebra.org. Το GeoGebra λειτουργεί σε ένα ευρύ φάσμα λειτουργικών συστημάτων, τα οποία έχουν εγκατεστημένη την εικονική μηχανή Java (επίσης ελεύθερης απόκτησης).

Ο Markus Hohenwarter, κατασκεύασε αυτό το δυναμικό λογισμικό, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί τόσο ως διδακτικό όσο και ως μαθησιακό εργαλείο, από το δημοτικό μέχρι και το Πανεπιστήμιο (Hohenwarter & Preiner, 2007). Προσφέρει γεωμετρικά, αλγεβρικά και λογισμικά εργαλεία πλήρως συσχετισμένα μεταξύ τους, εύχρηστα και ευέλικτα. Υποστηρίζει κατασκευές με σημεία, γραμμές και όλες τις κωνικές τομές. Ο μαθητής ή ο εκπαιδευτικός έχει στην διάθεσή του, όλα τα τυπικά χαρακτηριστικά για την άλγεβρα, όπως σημαντικά σημεία μιας συνάρτησης (ρίζες, τοπικά ακρότατα, σημεία καμπής), εισαγωγή τύπων εξισώσεων και συντεταγμένων, εύρεση παραγώγου και παράγουσας για δοσμένη συνάρτηση. Η κεντρική ιδέα της επιφάνειας εργασίας της είναι να προσφέρει δύο αναπαραστάσεις του κάθε μαθηματικού αντικειμένου, τόσο την αλγεβρική του όσο και την γεωμετρική του. Κάθε αλλαγή σε ένα χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου σε ένα παράθυρο εργασιών επιφέρει αλλαγές άμεσα και στο άλλο παράθυρο. Με άλλα λόγια φέρνει την έννοια της δυναμικής γεωμετρίας σε πεδία όπως η άλγεβρα και η ανάλυση.

Πολυάριθμες έρευνες έχουν δείξει ότι τέτοια λογισμικά πακέτα (όπως Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry και άλλα), ενθαρρύνουν την δημιουργία εικασιών, την απόκτηση εμπειριών, την οπτικοποίηση και δημιουργία αναπαραστάσεων και βοηθούν στο να γίνει το παραδοσιακό μάθημα των μαθηματικών ενδιαφέρον και αποτελεσματικό. Μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αδράξουν εμπειρίες μέσα από διδασκαλίες προσανατολισμένες σε έρευνα και λύση προβλήματος τόσο στο χώρο του σχολείου όσο και στο σπίτι, αναπτύσσοντας τις γνωστικές τους ικανότητες με καλύτερο τρόπο μέσα από τη δυνατότητα προσομοίωσης και διάδρασης που προσφέρει.

Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει είναι το Geogebra:

- Σε σχέση με άλλα λογισμικά, προσφέρει περισσότερο φιλικό και εύχρηστο περιβάλλον διεπαφής, πολύγλωσση υποστήριξη, σχόλια και βοήθεια. Και προσαρμογή της εργαλειοθήκης. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί ο εκπαιδευτικός να καθορίσει ποια εργαλεία χρειάζονται οι μαθητές του, προκειμένου να ικανοποιηθούν οι εκπαιδευτικοί στόχοι της δραστηριότητας.
- Προσφέρει εύκολο χειρισμό μεταβλητών, αλλαγές σε ελεύθερα ή συσχετισμένα αντικείμενα και γενικά δυναμική διαχείριση των σχημάτων. Για παράδειγμα, όταν έχουμε υλοποιήσει κάποια πολύπλοκη κατασκευή με αφετηρία κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο, μπορούμε να αλλάξουμε το αρχικό αντικείμενο και η κατασκευή να προσαρμοστεί αυτόματα, χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε τα ίδια βήματα εξαρχής.
- Προσφέρει ευκαιρίες συνεργατικής μάθησης οργανωμένων μικρών ομάδων ή αλληλεπιδραστικής μάθησης μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού. Καθώς επίσης και δυνατότητες παρουσιάσεων ομαδικών ή ατομικών εργασιών.
- Δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης δυναμικών φύλλων εργασίας. Αυτά τα φύλλα εργασιών μπορούν να εξαχθούν εύκολα και να δημοσιευθούν ως δυναμικές ιστοσελίδες, οι οποίες περιέχουν μια διαδραστική εφαρμογή μαζί με ασκήσεις διερεύνησης για τους μαθητές. Οι μαθητές μπορούν να έχουν πρόσβαση σε αυτά είτε από το σπίτι, είτε από το σχολείο, χωρίς καν να είναι εγκατεστημένο το πρόγραμμα στον συγκεκριμένο υπολογιστή.

1.10. Τροχιές μάθησης και διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, στηρίζεται στην ενιαία κατανομή και διάταξη της διδακτέας ύλης από το Νηπιαγωγείο μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου σε τρεις βασικές θεματικές ενότητες, που φέρουν τους τίτλους:

Αριθμοί – Άλγεβρα,
Γεωμετρία – Μέτρηση και
Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική – Πιθανότητες).

Ο στόχος αυτής της επιλογής είναι να διαθέτει ο εκπαιδευτικός κάθε βαθμίδας ή τάξης έναν ευέλικτο τρόπο διάγνωσης και ελέγχου των προαπαιτούμενων μαθηματικών γνώσεων των μαθητών στη συγκεκριμένη βαθμίδα ή τάξη, αλλά και των απαιτήσεων της διδασκαλίας για τις επόμενες. Μια μαθηματική έννοια δεν μπορεί να είναι ολοκληρωμένη αν περιορίζεται

στα πλαίσια μιας μίκρο-διδασκαλίας, δηλαδή σε μια προοπτική στενού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Πρέπει επίσης να καλύπτει μια διαμήκη μάκρο-προοπτική. Αυτή η προοπτική συνοδεύεται από μια ισχυρή εστίαση στο θεματικό περιεχόμενο και στην επίτευξη των στόχων του πλαισίου. (Θωμαΐδης, 2012).

Τα ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές ακολουθούν μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της, και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, είναι αυτονόητο ότι οικοδομούν περιβάλλοντα μάθησης της μαθηματικής γνώσης που μπορούν να στηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009).

Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, Διδακτική Φαινομενολογική Ανάλυση, όπως την αποκαλεί ο Freudenthal (1983), καθώς προσφέρει απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα των εκπαιδευτικών, όπως «*ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι* μάθησης, *ποια είναι η αφετηρία εκκίνησης, πώς και πού μετακινείσαι κάθε φορά και πώς επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί*». Τέτοιες αναλύσεις αποκαλύπτουν το είδος των μαθηματικών που αξίζει κανείς να μάθει και ποια συγκεκριμένα φαινόμενα μπορούν να προσφέρουν δυνατότητες ανάπτυξης της κατανόησής τους. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να προσπαθήσει κανείς να ανακαλύψει με ποιον τρόπο μπορούν οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με αυτά τα φαινόμενα και πώς τα αντιλαμβάνονται. Η ταυτοποίηση των προβλημάτων και των καταστάσεων που ενεργοποιούν τους μαθητές προς αυτήν την κατεύθυνση είναι καίριας σημασίας. Για να αποκτήσει κανείς τη δύναμη να υποκινήσει και να καθοδηγήσει τη μάθηση πρέπει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα ενιαία, εντάσσοντάς το σε μια μακρόχρονη μαθησιακή-διδακτική τροχιά.

Κατά τους Simon & Tzur (2004), μια υποθετική μαθησιακή τροχιά (HLT, Hypothetical Learning Trajectory), είναι ένας φορέας σχεδιασμένων μαθησιακών πολιτικών για συγκεκριμένες μαθηματικές ενότητες. Λόγω της υποθετικής και αβέβαιης φύσης της διαδικασίας, ο εκπαιδευτικός εμπλέκει στη διαμόρφωσή της κάθε αναμενομένη πλευρά της τροχιάς αυτής. Η παραγωγή μιας υποθετικής μαθησιακής τροχιάς για μια ενότητα, βασίζεται στην κατανόηση των καίριων γνώσεων που απαιτούνται. Οι Heuvel-Panhuizen & Teppo (2007) από την άλλη πλευρά, τονίζουν ότι ο όρος «υποθετική μαθησιακή τροχιά», δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαμήκη μαθησιακά μονοπάτια, αλλά μόνο για ένα μικρό αριθμό

μαθημάτων. Μια τροχιά που καλύπτει πολλά κλιμάκια (τάξεις) ή ακόμη και ολόκληρες βαθμίδες εκπαίδευσης (longitudinal learning-teaching trajectory) περιγράφει τα σημεία αναφοράς της παραγωγής της, το μαθησιακό περιβάλλον και τις δραστηριότητες που υποκινούν την πορεία της. Για να διασαφηνιστεί ο τρόπος που επιτυγχάνεται η εξέλιξη της μάθησης, πρέπει να περιγράφεται ο τρόπος που τα διαφορετικά στάδια ανάπτυξης συνδέονται μεταξύ τους, προσφέροντας έναν τρόπο διδασκαλίας βασισμένο σε έννοιες κλειδιά. Τότε η μαθησιακή διδακτική τροχιά καλείται εννοιολογική.

Τελευταία οι ερευνητές έχουν καταλήξει σε μια βασική συμφωνία για τη φύση της μαθησιακής τροχιάς. Κάθε Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας αποτελείται από τρία μέρη: ένα μαθηματικό στόχο, μια αναπτυξιακή διαδρομή μέσα από την οποία οι μαθητές θα επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο και ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, αντίστοιχες των επιπέδων σκέψης που διακρίνονται στη διαδρομή, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης. Λέγοντας μαθηματικό στόχο εννοούμε μεγάλες μαθηματικές ιδέες, συστάδες εννοιών και δεξιοτήτων που αποτελούν κύριο και συνεκτικό συστατικό της σκέψης των μαθητών και που αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση της μελλοντικής μάθησης. Οι στόχοι αυτοί καθορίζονται σε μελέτες (projects) οργανισμών, όπως το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics) ή το Εθνικό Σώμα Μαθηματικών (National Math Panel). Ο όρος αναπτυξιακή διαδρομή αναφέρεται στα επίπεδα της σκέψης. Κάθε υψηλότερο επίπεδο χαρακτηρίζεται από πιο εκλεπτυσμένη και ώριμη σκέψη, που θα οδηγήσει στην επίτευξη του στόχου. Καθώς ο μαθητής μετακινείται από επίπεδο σε επίπεδο, εργαζόμενος ατομικά ή συλλογικά, οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι ικανότητες που αναπτύσσει αποκτούν συνοχή. Οι διδασκαλίες είναι προσανατολισμένες προς αυτήν την κατεύθυνση, δηλαδή να ταιριάζουν στα επίπεδα σκέψης και να προάγουν την εξέλιξή τους. Θα πρέπει, ωστόσο, να διευκρινιστεί ότι τα επίπεδα δεν έχουν γενική ισχύ (επιτρέπουν την ανάδειξη των ιδιαιτεροτήτων στις μορφές μάθησης), ενώ δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ επιπέδων και των σταδίων νοητικής ανάπτυξης του μαθητή. Μαθητές χωρίς την κατάλληλη διδασκαλία και εμπειρία, καταλήγουν να απέχουν πολύ από το αναμενόμενο επίπεδο προόδου, ενώ με μια υψηλής ποιότητας εκπαίδευση εκτινάσσονται στα ύψη (Clement & Sarama, 2010).

Συγκρίνοντας τους στόχους της, με αυτούς που περιγράφονται στα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας, προκύπτει ότι η Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας αποτελεί ένα νέο εκπαιδευτικό φαινόμενο. Δεν είναι μια συλλογή στόχων που πρέπει να υλοποιηθούν σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης, ούτε μια λίστα μεμονωμένων δεξιοτήτων που πρέπει να αποκτηθούν. Καταδεικνύει

τη σχέση όλων αυτών συναρτήσει του χρόνου. Τι έρχεται νωρίτερα, τι αργότερα. Με άλλα λόγια εστιάζει στην προοπτική.

Συνοψίζοντας μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας:

- αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών,
- περιλαμβάνει διδακτικές προτάσεις που περιγράφουν πώς η διδασκαλία μπορεί να επηρεάζει και να κεντρίζει περισσότερο τη μαθησιακή διαδικασία,
- καταδεικνύει ένα θεματικό σχεδιάγραμμα το οποίο περιλαμβάνει τα βασικά στοιχεία του Προγράμματος Σπουδών που πρέπει να διδαχθούν,
- και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία.

(Heuvel – Panhuizen, 2001)

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι, μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας δεν είναι μια γραμμική, βήμα-προς-βήμα περιγραφή πορείας, όπου κάθε βήμα συνδέεται αναγκαία με το επόμενο, ούτε ένα μοναδικά ορισμένο μονοπάτι. Αλλά καλείται να λάβει υπόψη του: τις ατομικές μαθησιακές πορείες, τις ασυνέχειες στη μαθησιακή διαδικασία (σε άλλον άλματα, σε άλλον υπαναχωρήσεις), το γεγονός ότι πολλαπλές δεξιότητες και έννοιες αναπτύσσονται ταυτόχρονα στο πλαίσιο του ίδιου αντικειμένου μάθησης, τις διαφορές και κόντρες μεταξύ της άτυπης και της τυπικής μάθησης, καθώς επίσης και τα διαφορετικά επίπεδα κατάκτησης δεξιοτήτων από τους μαθητές.

Ο κύριος σκοπός της μαθησιακής διδακτικής τροχιάς είναι να εφοδιάσει τον εκπαιδευτικό με μια σφαιρική θεώρηση του πώς η κατανόηση των μαθητών αναπτύσσεται κατά την μακροχρόνια φοίτησή τους και πώς η εκπαίδευση συνεισφέρει σ' αυτό. Δηλαδή του παρέχει έναν εννοιολογικό εκπαιδευτικό χάρτη, ο οποίος μπορεί να τον βοηθήσει να κάνει συνειδητές διδακτικές επιλογές προσανατολισμένες να οδηγήσουν σε ένα μετα-επίπεδο την όλη διαδικασία της διδασκαλίας-μάθησης. Η θεώρηση αυτή κρίνεται απαραίτητη ώστε η βοήθεια, οι υποδείξεις και τα νέα προβλήματα που θα επιλέξει ο εκπαιδευτικός να είναι κατάλληλα για την επίτευξη του στόχου. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει τα κρίσιμα σημεία μέσα από τα οποία θα περάσει ο μαθητής στην πορεία του προς την κατάκτηση της γνώσης, ώστε να είναι σε θέση να αξιολογήσει τις στρατηγικές και να προβλέψει πού και πότε θα εμφανιστούν τα πρώτα σημάδια κατανόησης και ανάπτυξης δεξιοτήτων που κρίνονται απαραίτητα.

Στην πραγματικότητα, μια τέτοια τροχιά:

- Προσφέρει μια βάση για την άσκηση της διδακτικής πράξης.
- Ορίζει σημαντικούς σταθμούς μάθησης (ενδιαμέσους και τελικούς), αλλά δε συνιστά μια προ-αποφασισμένη πορεία μάθησης.
- Καθιστά φανερές τις διαφορές μάθησης μεταξύ μαθητών αλλά δεν περιγράφει μια ατομική πορεία μάθησης.
- Συνιστά μια πηγή έμπνευσης για διδακτική δράση αλλά όχι έναν διδακτικό οδηγό.
- Μπορεί να αποβεί εκπαιδευτικά ωφέλιμη αλλά δεν αποτελεί το μοναδικό τρόπο αναβάθμισης της ποιότητας της διδασκαλίας.

1.11. Η πρακτική της τάξης

Παρά το γεγονός ότι η έρευνα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης γνώρισε τεράστια ανάπτυξη τα τελευταία 30 περίπου χρόνια, τα ευρήματά της δεν κατάφεραν να επηρεάσουν με άμεσο και αποτελεσματικό τρόπο τη διδακτική πράξη, η οποία παραμένει εγκλωβισμένη σε πρακτικές που έχουν αποδειχτεί αναποτελεσματικές και συχνά επιζήμιες. Οι νέες οπτικές που διαμορφώθηκαν, οι οποίες υποδεικνύουν την απομάκρυνση της διδασκαλίας από το μοντέλο της «μετάδοσης της γνώσης» και ενθαρρύνουν την υιοθέτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων που ευνοούν την ενεργό κατασκευή της γνώσης από το μαθητή σε ανοικτά μαθησιακά περιβάλλοντα, δεν άγγιξαν ουσιαστικά την εκπαιδευτική πραγματικότητα.

Οι προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις μετατοπίστηκαν από την επιδίωξη της απλής κατάκτησης συγκεκριμένων αριθμητικών και γεωμετρικών δεξιοτήτων από τους μαθητές, στην έμφαση σε διαδικασίες μάθησης μέσα από την ανακάλυψη και στη συνέχεια, σήμερα, στην εστίαση στην επίλυση προβλήματος. Τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του συλλογισμού, στην καλλιέργεια ικανοτήτων και δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος και στην απόκτηση από τους μαθητές εμπιστοσύνης στον εαυτό τους γι' αυτές τις ικανότητες. Η έμφαση της διδακτικής πράξης στην τάξη δίνεται πλέον στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κάνουν λογικές συνδέσεις και διατυπώνουν τις σκέψεις τους κατά την ενεργό εμπλοκή τους στην επίλυση προβλημάτων, καθώς παράλληλα αναπτύσσουν άλλες δεξιότητες και ικανότητες οι οποίες θεωρούνται σημαντικές στην κοινωνία μας. Βασικός προσανατολισμός της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ότι οι μαθητές, για να μπορέσουν να

αποδώσουν νόημα στα μαθηματικά, θα πρέπει να τα αντιληφθούν και να τα χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων, με αυτοπεποίθηση και συναίσθηση των προκλήσεων και των απολαύσεων που προσφέρει η ενασχόληση με αυτά. (Σακονίδης, 2007)

Οι σύγχρονες αντιλήψεις για τη μάθηση των Μαθηματικών πριμοδοτούν την εννοιολογική κατανόηση, μέσω διαδικασιών οι οποίες ενθαρρύνουν την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος σε συνεργατικά περιβάλλοντα μάθησης. Σε αυτήν την προοπτική, η τάξη αποτελεί ένα πεδίο δράσης, όπου οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά με τη μαθηματική γνώση, ο λόγος (discourse) αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της δραστηριοποίησής τους και η προσωπική κατασκευή και κατανόηση του μαθηματικού νοήματος συνιστούν σημαντικούς στόχους, της δραστηριότητας που αναπτύσσεται (Silver 1994). Οι θεωρίες μάθησης που επικράτησαν στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης τις τελευταίες δεκαετίες διακρίνονται σε αυτές που αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως *διαδικασία «απόκτησης»* και σε εκείνες που την προσεγγίζουν ως *διαδικασία «συμμετοχής»* (Sfard 1998). Οι πρώτες εστιάζουν στο άτομο και, ειδικότερα, στην οικοδόμηση νοητικών δομών από μέρους του, θεωρώντας το κοινωνικό περιβάλλον, απλώς, ως το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται αυτή η οικοδόμηση που επηρεάζει τη μορφή αλλά δεν συνιστά συστατικό της. Αντιπροσωπευτική θεωρία αυτής της ομάδας αποτελούν ο κονστρουκτιβισμός και, ειδικότερα, οι ιδέες του Piaget, ενώ εξέχουσα θέση κατέχει και η πιο πρόσφατη προσέγγιση του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, η οποία, λαμβάνοντας υπόψη και τη θεωρία του Vygotsky, υποστηρίζει ότι η διαπραγμάτευση του νοήματος στο πλαίσιο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων είναι τόσο σημαντική όσο και η προσωπική κατασκευή της γνώσης από το μαθητευόμενο. (Σακονίδης, 2002)

Βασική αρχή των «συμμετοχικών» θεωριών μάθησης είναι ότι το νόημα, η σκέψη και ο συλλογισμός αποτελούν προϊόντα κοινωνικής δραστηριότητας, ενώ η μάθηση γίνεται κατανοητή ως άρρηκτα συνδεδεμένη τόσο με το μαθητευόμενο όσο και με το πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται. Οι θεωρίες αυτές βασίζονται πρωτίστως στην κοινωνικό-πολιτισμική θεωρία του Vygotsky, σύμφωνα με την οποία το σύνολο της μάθησης είναι προϊόν της αλληλεπίδρασης με τους άλλους και, επομένως, τα νοήματα που κατασκευάζει το άτομο ερμηνεύουν τον κόσμο με τον τρόπο που ορίζουν συγκεκριμένες κοινωνικό-πολιτισμικές πρακτικές. Κατά συνέπεια, η ατομικότητα αναδύεται σε αυτές τις πρακτικές. Ο Vygotsky αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη λειτουργία των πολιτισμικών εργαλείων στην κοινωνία, ιδιαίτερα της γλώσσας, και στη διαδικασία κατάκτησής τους από το παιδί.

Η συγκεκριμένη θεώρηση οδήγησε στις λεγόμενες θεωρίες «πλαισιοθετημένης» μάθησης (situated learning), σύμφωνα με τις οποίες, η γνώση είναι «εγκαταστημένη» σε ιδιαίτερες μορφές εμπειρίας, που προκύπτουν σε συγκεκριμένες περιστάσεις, και γίνεται κατανοητή, με σχεσιακό τρόπο, ως κάτι που κατανέμεται μεταξύ ανθρώπων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων, και όχι ως κάποιο σταθερό, ατομικό χαρακτηριστικό. Η μάθηση αντιμετωπίζεται ως κοινωνικό φαινόμενο, που συγκροτείται στον πραγματικό κόσμο, μέσω μιας διαδικασίας «νόμιμης περιφερειακής» συμμετοχής (legitimate peripheral participation) σε κοινότητες πρακτικής, (communities of practice) που βρίσκονται σε εξέλιξη (Lave & Wenger 1991). Η οπτική αυτή αναγνωρίζει ότι ο μαθητής λειτουργεί ως μέλος ευρύτερων κόσμων που συγκροτούνται κοινωνικά και πολιτισμικά, έχει αναπτύξει δεσμούς που διασταυρώνονται με ταυτότητες εθνότητας, φύλου, θρησκείας, κ.τ.λ., δρα σε τάξεις, σχολεία και κοινότητες και οι πρακτικές που διέπουν όλα αυτά τα περιβάλλοντα συν-καθορίζουν τη γνώση που συγκροτεί, ενώ η συμμετοχή του σε αυτές τη μάθησή του.

Τα παραπάνω φαίνεται να προτείνουν ότι είναι ανάγκη να μετακινηθούμε προοδευτικά από προσεγγίσεις, στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, που στηρίζονται στις θεωρίες «απόκτησης» προς προσεγγίσεις που υιοθετούν το μοντέλο της «συμμετοχής». Ωστόσο, αρκετοί ερευνητές, όπως η Sfard (1998), ισχυρίζονται ότι οι δύο αυτές προοπτικές δεν είναι εναλλακτικές η μια της άλλης αλλά, προσφέρουν συμπληρωματικές αναγνώσεις των φαινόμενων μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Όμως, συχνά, η συμμετοχική προσέγγιση εμφανίζεται να προέχει αυτής της απόκτησης, οπότε, σε αυτές τις περιπτώσεις, η μάθηση των μαθητών μπορεί να μελετηθεί ως αλλαγή του τρόπου συμμετοχής τους σε κοινωνικό-πολιτισμικές δραστηριότητες εκτός και, κυρίως, εντός της τάξης.

Ένας τέτοιος προσανατολισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης και, κατά συνέπεια, της τάξης των Μαθηματικών, ως περιβάλλοντος για συνεργατική μαθηματική σκέψη έχει σοβαρές συνέπειες τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για την εκπαιδευτική πράξη. Ο πρώτος χρειάζεται να διαθέτει καλή κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και δομών, καθώς και της ποικιλίας των νοημάτων και των εφαρμογών των μαθηματικών διαδικασιών και του μαθηματικού συμβολισμού. Επιπλέον, είναι σημαντικό να έχει εμπιστοσύνη στους δικούς του τρόπους κατανόησης και παραγωγής της μαθηματικής γνώσης και να είναι αποτελεσματικός σε αυτούς. Για να συντονίσει μια ομάδα που εμπλέκεται σε μαθηματικό λόγο ή να στηρίξει μαθητές ή ομάδες να διατυπώσουν και να επανεξετάσουν τους μαθησιακούς τους στόχους ή τις στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος, ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει ευρεία, σε βάθος και ευέλικτη γνώση τόσο του περιεχομένου όσο και

παιδαγωγικών εναλλακτικών προσεγγίσεων. Δίχως αυτή τη γνώση, δεν θα είναι σε θέση να επαναδιατυπώνει άμεσα στόχους και να συσχετίζει τις αντιλήψεις των μαθητών του με τις χαρακτηριστικές διανοητικές δραστηριότητες και τις δομές της γνώσης που θεωρούνται αποδεκτές από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα.

Η έμφαση της εργασίας στην τάξη θα πρέπει να βρίσκεται στη συμμετοχή του μαθητή σε συλλογικές διαδικασίες. Ο εκπαιδευτικός επιβάλλεται να παρακολουθεί με προσοχή τις εξηγήσεις των μαθητών, για να διαγνώσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται. Επιπλέον, οφείλει να εργάζεται με βάση τη σκέψη τους, χωρίς, ωστόσο, να περιορίζεται σε αυτήν. Αναμένεται να χρησιμοποιεί αποτελεσματικά διάφορες τεχνικές συζήτησης και διαλόγου με όλη την τάξη, όσο πιο συχνά αυτό είναι δυνατό, καταβάλλοντας προσπάθεια ενεργοποίησης των μαθητών. Οποιοδήποτε μοντέλο διδασκαλίας επιλέξει διαμορφώνει μια πρακτική. Η συμμετοχή σε αυτή την πρακτική της τάξης είναι ταυτόσημη με την μάθηση. Αυτός είναι ο στόχος κάθε διδασκαλίας, ο οποίος αναιρεί και τη διχοτομία μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης. Οι μαθητές θα κατανοήσουν τις λεπτές υποθέσεις ενός ορισμού μόνο αν συμμετάσχουν στην πρακτική της τάξης, δηλαδή στη συζήτηση, στη χρήση των όρων, στη διατύπωση ερωτήσεων, στη λύση προβλημάτων.

Στην συγκεκριμένη μελέτη το θέμα που τίθεται σε διαπραγμάτευση είναι η εισαγωγή σε μια νέα έννοια. Οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν και να ορίσουν μέσα από την παρατήρηση την τέμνουσα και την εφαπτομένη κύκλου. Τα φαινόμενα εκτυλίσσονται στην οθόνη του διαδραστικού πίνακα, κάτω από την εποπτεία του διδάσκοντα. Το πιο κατάλληλο διδακτικό μοντέλο προκειμένου να εμπλακεί η τάξη σε συζήτηση γύρω από τα τεκταινόμενα στον «πίνακα» είναι η συζήτηση-αλληλεπίδραση του δασκάλου με όλη την τάξη (whole class participation) καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Η αλληλεπίδραση με όλη την τάξη μπορεί να αναπτυχθεί και με την μέθοδο της επαναφώνησης (re-voicing), η οποία χρησιμοποιείται κατά τον Ohtami, στις σχολικές τάξεις της Ιαπωνίας, όπως αναφέρεται από τον Clarke (2003). Ο δάσκαλος επαναλαμβάνει τα λεγόμενα των μαθητών του προκαλώντας την εμπλοκή και άλλων στη διαπραγμάτευση. Η συζήτηση έχει σκοπό να παρουσιαστούν οι ιδέες των μαθητών και να κριθούν με λογικά επιχειρήματα. Καταρχήν όλες οι γνώμες είναι ισοδύναμες. Η αλληλεπίδραση θα φέρει την ανταλλαγή ή τη διαπραγμάτευση των γνωμών και των θέσεων, έως ότου υπάρξει συμφωνία ως προς το νόημα του συζητούμενου θέματος. Οι διαφορετικές γνώμες προκύπτουν από την διαφορετική ερμηνευτική ικανότητα που έχει το κάθε άτομο ως προς τη γλώσσα που χρησιμοποιείται, ως προς το νόημα που αποδίδουν στον τόνο της φωνής ή τις χειρονομίες του δάσκαλου, ως προς τις προσωπικές τους

προσδοκίες ή τις προσδοκίες που αναγνωρίζουν στους άλλους. Κατά την συζήτηση με όλη την τάξη επισημαίνονται μαθητές που προτείνουν ιδέες οι οποίες, μετά τη συζήτηση θα τις τροποποιήσουν ή θα τις εγκαταλείψουν. Μέσα στους συλλογισμούς τους παρεμβάλουν και προσωπικά στοιχεία που προέρχονται από τις εμπειρίες τους ως προς την κατάσταση που μελετούν ή από την εικόνα που έχουν για τους διάφορους μαθηματικούς όρους που χρησιμοποιούν ή από τη διαδικασία της «μεταφοράς» τους από τη συνήθη γλώσσα στην επιστημονική. Συχνά διαπιστώνεται ότι οι προτάσεις των συνδιαλεγόμενων είναι ατελείς, δεν είναι σύμφωνες με τη γραμματική και το συντακτικό, οι φράσεις τους είναι σύντομες, συχνά μια λέξη, ο ένας συμπληρώνει την πρόταση του άλλου χωρίς να αναφέρει το αντικείμενο στο οποίο συνδιαλέγεται. Τότε μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις αλληλεπίδρασης, επικοινωνίας, διαπραγμάτευσης. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια ποικιλία νοημάτων για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο η οποία δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης.

Η επιτυχία της μεθόδου στηρίζεται εν πολλοίς στο σωστό σχεδιασμό από την πλευρά του δασκάλου. Η βέλτιστη κατάσταση για παραγωγική συζήτηση παρατηρείται όταν η δυσκολία του θέματος είναι αρκετά μεγάλη, αλλά μέσα στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (ZPD) των μαθητών. Φυσικά, θα πρέπει πάντα να έχουμε υπόψη μας τις προσωπικές δυνατότητες των μαθητών, ότι δηλαδή για μερικούς μαθητές ένα έργο είναι χαμηλής δυσκολίας ενώ για άλλους υψηλής. Προκειμένου λοιπόν ο δάσκαλος να σχεδιάσει μια διδασκαλία κατάλληλη, θα χρειαστεί τη γνώση που προκύπτει για την ZPD των μαθητών του, δηλαδή ότι θα μπορέσουν να το διαπραγματευτούν είτε μόνοι τους είτε με την δική του βοήθεια. Αυτό σημαίνει ότι η επιλογή του έργου θα γίνει στη βάση ενός μοντέλου που ήδη έχει, ή πρέπει να έχει ο διδάσκων ως προς τις γνώσεις και τις δυνατότητες των μαθητών του. Όταν οι επιλογές γίνονται συνειδητά τότε μπορούν να είναι και πιο αποτελεσματικές. Μια τέτοια βασική επιλογή είναι η μεταβίβαση μέρους της υπευθυνότητας του δασκάλου για την ανάπτυξη της γνώσης, στους μαθητές του. Ωστόσο ο δάσκαλος είναι συνήθως προσανατολισμένος στη μετάδοση του μηνύματος Είναι έτοιμος να καθοδηγήσει και να παρέχει μια αλληλεπιδραστική υποστήριξη (scaffolding), στα όρια της ZPD των μαθητών του. Συνήθως ως αποτέλεσμα προκύπτει το μοντέλο εκμαίευσης (elicitation pattern). Το μοντέλο αυτό καθοδηγείται κυρίως από την αγωνία του διδάσκοντα, να πετύχει το στόχο του. Έτσι αν οι συζητήσεις ή οι απαντήσεις των μαθητών αποκλίνουν αρκετά από την γνώση που θέλει να διδάξει ή όταν δείχνουν να μην είναι παραγωγικές και να έχουν οδηγηθεί σε τέλμα, καθοδηγεί προς ένα συγκεκριμένο επιχείρημα, μια συγκεκριμένη λύση. Κάνει σύντομες

ερωτήσεις προκειμένου να εκμαιεύσει μικρά μέρη γνώσεις ή να δώσει ώθηση στην διαδικασία. Αυτές είναι κρίσιμες στιγμές για τη διδασκαλία γιατί ο ρόλος του δασκάλου κινδυνεύει να εκφυλιστεί, αν η μετάδοση του μηνύματος προς τους μαθητές κατακλύσει τόσο τον εκπαιδευτικό ώστε να παύσει να ακούει αυτά που του λένε οι μαθητές του.

Ο ρόλος του πρέπει να μείνει αυτός του εμψυχωτή, ο οποίος, αν και προγραμματίζει καταρχάς την πορεία και το περιεχόμενο της διδασκαλίας, στη συνέχεια παρέχει στο μαθητή σχεδόν απόλυτη ελευθερία κινήσεων, διαμεσολαβώντας υποστηρικτικά κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας των δραστηριοτήτων και μόνο σε περιπτώσεις αδιεξόδου. Η υποστήριξη αυτή αφορά κυρίως σε ερωτήσεις και υποδείξεις προς το μαθητή οι οποίες, χωρίς να δίνουν έτοιμες λύσεις και απαντήσεις, οδηγούν τη σκέψη του προς την κατεύθυνση της αξιοποίησης των μαθηματικών του γνώσεων, ώστε να μπορέσει να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της δραστηριότητας. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, ο εκπαιδευτικός βοηθά το μαθητή να οργανώσει τις μαθηματικές έννοιες, τις διαδικασίες και τις δεξιότητες που κατακτά σε κατάλληλα σχήματα, ώστε αυτές να αποτελέσουν λειτουργικά εργαλεία μαθηματικής σκέψης για την περαιτέρω εξέλιξή του, συζητώντας για παράδειγμα με όλη την τάξη ή επιλέγοντας κατάλληλες για αυτό το σκοπό δραστηριότητες. Τέλος, ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την εγκυρότητα και την αξιοπιστία της τελικής μαθηματικής γνώσης που κατακτά ο μαθητής σε ένα πλαίσιο διαπραγμάτευσης του μαθηματικού νοήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Μεθοδολογία της Έρευνας

2.1. Ερευνητικό πρόβλημα – Ερευνητικά Ερωτήματα

Έρευνες έχουν καταδείξει τις παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την εφαπτομένη ευθεία, πολλές από τις οποίες έχουν τις ρίζες τους στον τρόπο με τον οποίο διδάχθηκαν οι μαθητές, την εφαπτομένη του κύκλου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οι παρανοήσεις αυτές είναι ιδιαίτερα έντονες και παρόλο που στην Γ' Λυκείου γίνεται ενδελεχής διδασκαλία και ερμηνεία της έννοιας, οι παρανοήσεις επιμένουν και γίνονται ακόμα εντονότερες όσο ο μαθητής απομακρύνεται από το Λύκειο (προς κάποιο ανώτατο ίδρυμα θετικών επιστημών). Στη κοινότητα των μαθηματικών συζητούνται προτάσεις λείανσης του φαινόμενου με κύριο προσανατολισμό την αλλαγή του τρόπου εισαγωγής της έννοιας, όχι στη Γ' λυκείου, αλλά νωρίτερα σε κάποια άλλη τάξη του Λυκείου, με επικρατέστερη την εκμετάλλευση της αναφοράς της έννοιας στην αναλυτική γεωμετρία της Β' Λυκείου.

Η μελέτη αυτή θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ένα πρωτότυπο πείραμα, μια που το σχέδιο που υλοποιήθηκε αφορά στην εισαγωγή της έννοιας της εφαπτομένης κύκλου στην Α΄ γυμνασίου, όχι με τον καθιερωμένο τρόπο και ορισμό –η ευθεία που έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, αλλά μέσω της οριακής θέσης της τέμνουσας. Η έρευνα στόχο έχει να διερευνήσει αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, ποιες είναι οι αντιδράσεις των μαθητών, ποιες είναι οι δυνατότητές τους και αν μπορούν να συλλάβουν λεπτές έννοιες όπως άπειρο, το πολύ κοντά ή το σχεδόν ταυτόσημα.

2.2. Μέθοδος

Η μέθοδος που επιλέχθηκε είναι ποιοτική και συγκεκριμένα μια μελέτη περίπτωσης μιας πρωτότυπης διδασκαλίας. Η διδασκαλία αφορούσε την εισαγωγή στην έννοια της εφαπτομένης σε νεαρούς μαθητές πρώτης γυμνασίου.

Η μελέτη περίπτωσης αναφέρεται στη συλλογή και παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών σχετικά με ένα άτομο, μια ομάδα ατόμων ή ένα γεγονός για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων μόνο για το συγκεκριμένο άτομο, τη συγκεκριμένη ομάδα ή το συγκεκριμένο γεγονός που εξετάσαμε. Τα ευρήματα των ερευνητών δεν αναφέρονται στη διατύπωση μιας καθολικής, γενικής αλήθειας και συνήθως δεν αναζητείται η ανακάλυψη σχέσεων αιτίου – αποτελέσματος, αλλά δίνεται έμφαση στη διερεύνηση και στην περιγραφή.

Έτσι λοιπόν, στην περίπτωσή μας, γεγονός αποτελεί η υποψιασμένη διδασκαλία ενώ τα συμπεράσματα αφορούν τους μαθητές που συμμετείχαν.

2.3. Συλλογή δεδομένων

Η παρατήρηση και μελέτη βασίστηκε σε δύο δίωρες διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν σε δύο τμήματα της Α' τάξης, 18 και 24 μαθητών αντίστοιχα. Έγινε ηχητική εγγραφή των διδασκαλιών και ακριβής απομαγνητοφώνησή τους (11 και 14 σελίδες αντίστοιχα). Ακολούθησε από μία μονόωρη διδασκαλία, σε απόσταση μίας βδομάδας περίπου από την αρχική στο κάθε τμήμα, η οποία θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συνέχιζε και έκλεινε το κεφάλαιο εφαπτομένη για την Α' Γυμνασίου. Στο μονόωρο αυτό αφού έγινε επανάληψη των συμπερασμάτων του προηγούμενου μαθήματος και συζητήθηκαν κάποιες απορίες των μαθητών, μελετήθηκαν οι ιδιότητες της εφαπτομένης. Σε όλο το εγχείρημα έγινε προσπάθεια η διδασκαλία να μην παρεκκλίνει περισσότερο από το απαραίτητο από το αναλυτικό πρόγραμμα. Μοιράστηκε στους μαθητές, κατόπιν αίτησής τους, ένα πολύ συνοπτικό (μιας σελίδας) κείμενο, με τα συμπεράσματα των διδασκαλιών. Στην συνέχεια και σε χρονική απόσταση πάλι της μίας εβδομάδας δόθηκε σύντομη γραπτή εξέταση (τεστ) στους μαθητές, η οποία αξιολογήθηκε αναλύθηκε και από την οποία παρήχθησαν κάποια αποτελέσματα.

Από τους μαθητές των δύο τμημάτων (18 και 24 αντίστοιχα), την ημέρα της γραπτής εξέτασης έλειπαν δύο. Οπότε η έρευνα έγινε σε 40 γραπτά συνολικά. Όσο αφορά τις μαθησιακές ικανότητες των μαθητών, πρέπει να αναφέρουμε ότι δύο από αυτούς έχουν διαγνωσμένες μαθησιακές δυσκολίες, άλλοι δύο είναι Σύριοι μετανάστες με δυσκολίες στην κατανόηση της ελληνικής γλώσσας και άλλοι δύο είναι μαθητές πολύ χαμηλής επίδοσης.

2.4. Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας

Η διδασκαλία αφορούσε στην εισαγωγή μιας νέας έννοιας για τους μαθητές της Α' γυμνασίου. Την έννοιας της τέμνουσας και εφαπτομένης ευθείας κύκλου. Ωστόσο σκοπός ήταν να δοθεί μια βαθύτερη διάσταση της έννοιας, πέραν του ορισμού της στην ευκλείδεια γεωμετρία. Στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου η έννοια παρουσιάζεται ως εξής:

Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

Ας εξετάσουμε τώρα τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν σ' ένα επίπεδο ένας κύκλος και μια ευθεία;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Όταν ευθεία και κύκλος **δεν έχουν κανένα κοινό σημείο** λέμε ότι η ευθεία είναι **εξωτερική** του κύκλου.
- **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ (ΟΜ > ρ), η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.**

- Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ**, η ευθεία λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου στο σημείο Μ.
- **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ (ΟΜ = ρ), η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.**

- Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν δύο κοινά σημεία Α** και **Β**, η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου **ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β**
- **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ (ΟΜ < ρ), η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου.**

DSGYM-A200/

σελ. 193 - Μαθηματικά Α Γυμνασίου

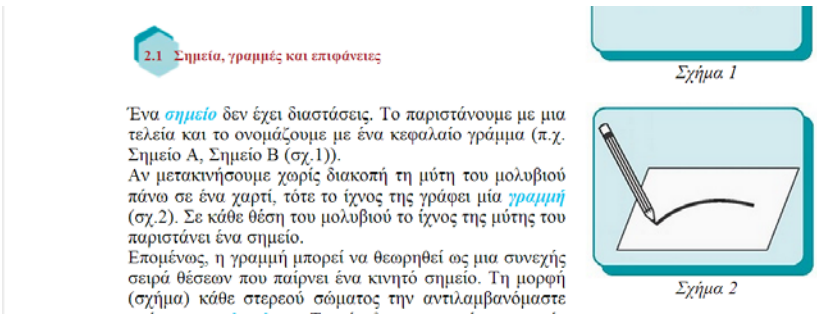
Σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου της Α' γυμνασίου είναι ότι η παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται συχνά, για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια του καθηγητή τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος την αναγκαία συνθήκη. Προτείνονται δραστηριότητες που προηγούνται της θεωρίας με στόχο να οδηγήσουν στην ανάγκη της ανάπτυξης της θεωρίας, ώστε η θεωρία να είναι αποτέλεσμα αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Ωστόσο αξίζει να παρατηρηθεί ότι στην συγκεκριμένη έννοια κάτι τέτοιο δεν γίνεται, παρά μόνο παρατίθενται η θεωρία. Όσο αφορά τώρα τον ίδιο τον ορισμό το πρόβλημα είναι ότι δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη. Έτσι στην Γ' Λυκείου πρέπει να αναζητηθεί ένας νέος ορισμός που να μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις καμπύλες και να μπορεί να αποδώσει την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο.

Ο στόχος αυτής της διδασκαλίας ήταν διπλός. Πρώτον το «πάντρεμα» των δύο ορισμών για την εφαπτομένη του κύκλου. Δηλαδή να μελετηθεί η σχέση τέμνουσας – εφαπτομένης. Να δουν οι μαθητές πως και πότε μία τέμνουσα μετατρέπεται σε εφαπτομένη καθώς επίσης και το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας που θα δώσει και τον ορισμό του σχολικού εγχειριδίου. Δεύτερον να δείξει τη ευρεία χρήση της έννοιας της εφαπτομένης, όχι αποκλειστικά σε κύκλο αλλά και σε οποιαδήποτε καμπύλη.

Όσο αφορά στον πρώτο στόχο, η αρχική σκέψη της ερευνήτριας ήταν να μην αναφερθεί καθόλου ο ορισμός του βιβλίου που περιέχει τη φράση «ένα κοινό σημείο». Ο λόγος ήταν μια υποψία ότι η αναφορά στον αριθμό των σημείων (ένα ή δύο κατά

περίπτωση), ωθεί τους μαθητές στην καταμέτρηση των κοινών σημείων, καμπύλης και ευθείας, προκειμένου να αποφασίσουν για το αν πρόκειται για εφαπτομένη ή όχι. Τελικά η ιδέα απορρίφθηκε, ώστε η διδασκαλία να μείνει όσο το δυνατό πιο πιστή στο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο και παραμένει το πιο ισχυρό βοήθημα για τους μαθητές.

Όσο αφορά στο δεύτερο στόχο η ερευνήτρια έπρεπε να αντιμετωπίσει ένα μεγάλο πρόβλημα. Ένα πρόβλημα ταμπού των σχολικών εγχειριδίων. Την έννοια της καμπύλης. Η έννοια της καμπύλης ουσιαστικά, υπεισέρχεται στα μαθηματικά που διδάσκονται στο ελληνικό σχολείο, διαμέσου της διαίσθησης που έχουν οι μαθητές γι' αυτήν από την καθημερινή τους ζωή. Είναι μια έννοια που μοιάζει να αφορά μόνο την ανάλυση. Στην γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου ορίζεται η γραμμή, όπως φαίνεται παρακάτω αλλά δεν γίνεται αναφορά στη λέξη καμπύλη:


2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

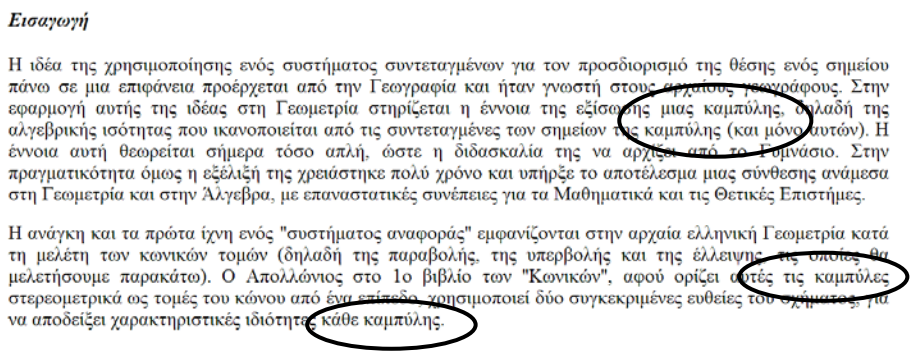
Ένα *σημείο* δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).
Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία *γραμμή* (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.
Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο. Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε

Σχήμα 1

Σχήμα 2

σελ. 9 - Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου

Στα μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β' Λυκείου αναφέρεται ξαφνικά η λέξη καμπύλη χωρίς να έχει ορισθεί πουθενά νωρίτερα. Αυτό συμβαίνει δύο φορές. Η πρώτη είναι στην εισαγωγή στο 2^{ο} κεφάλαιο – η ευθεία στο επίπεδο.


Εισαγωγή

Η ιδέα της χρησιμοποίησης ενός συστήματος συντεταγμένων για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω σε μια επιφάνεια προέρχεται από την Γεωγραφία και ήταν γνωστή στους αρχαίους γεωγράφους. Στην εφαρμογή αυτής της ιδέας στη Γεωμετρία στηρίζεται η έννοια της εξίσωσης μιας καμπύλης, δηλαδή της αλγεβρικής ισότητας που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης (και μόνο αυτών). Η έννοια αυτή θεωρείται σήμερα τόσο απλή, ώστε η διδασκαλία της να αρχίζει από το Γυμνάσιο. Στην πραγματικότητα όμως η εξέλιξή της χρειάστηκε πολύ χρόνο και υπήρξε το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ανάμεσα στη Γεωμετρία και στην Άλγεβρα, με επαναστατικές συνέπειες για τα Μαθηματικά και τις Θετικές Επιστήμες.

Η ανάγκη και τα πρώτα ίχνη ενός "συστήματος αναφοράς" εμφανίζονται στην αρχαία ελληνική Γεωμετρία κατά τη μελέτη των κωνικών τομών (δηλαδή της παραβολής, της υπερβολής και της έλλειψης, τις οποίες θα μελετήσουμε παρακάτω). Ο Απολλώνιος στο 1ο βιβλίο των "Κωνικών", αφού ορίζει αυτές τις καμπύλες στερεομετρικά ως τομές του κώνου από ένα επίπεδο, χρησιμοποιεί δύο συγκεκριμένες ευθείες του σχήματος, για να αποδείξει χαρακτηριστικές ιδιότητες κάθε καμπύλης.

σελ. 55 - Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, Β' ενιαίου λυκείου

Η δεύτερη είναι στην εισαγωγή στο 3^{ο} κεφάλαιο – κωνικές τομές.

Εισαγωγή

Η μελέτη της έλλειψης, της παραβολής και της υπερβολής από τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς φαίνεται ότι είχε αφετηρία τη σχέση αυτών των καμπύλων με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως, για παράδειγμα, το περίφημο πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου:

"Δοθέντος ενός κύβου, να κατασκευαστεί ένας άλλος με διπλάσιο όγκο".

σελ. 79 - Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β' ενιαίου λυκείου

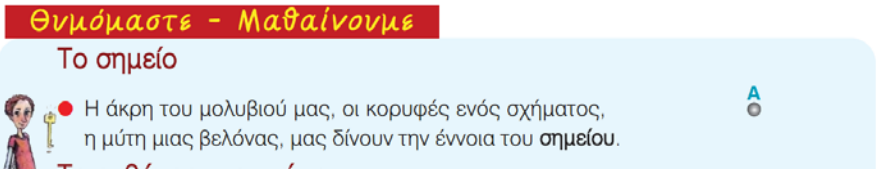
Και στα μαθηματικά γενικής παιδείας της Γ' Λυκείου έχουμε έναν ορισμό της καμπύλης ως γραφική παράσταση συνάρτησης.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις **γραφική παράσταση ή καμπύλη** της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y=f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f**.

σελ. 11, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, Γ' ενιαίου λυκείου

Ωστόσο η έννοια της κίνησης μέσα στο χώρο ή γενικότερα της κάθε χωρο-χρονικής μεταβολής, είναι στενά δεμένη με την έννοια της καμπύλης. Έτσι στο πρώτο στάδιο ανάπτυξης της παιδικής νοημοσύνης, όπου το μικρό παιδί βιώνει το χώρο γύρω του με τις αισθήσεις και την αυθόρμητη κίνηση, τα παιδιά «αναπαριστούν» την κίνηση στο χαρτί με διάφορες «μουτζούρες», που είναι παραδείγματα από καμπύλες και μάλιστα αρκετά σύνθετες (Πατρώνης Τ., 2001). Το να πούμε λοιπόν σε νεαρούς μαθητές της Α' Γυμνασίου ό,τι κάθε σχήμα που μπορεί να γραφεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί ορίζεται στη γεωμετρία ως γραμμή ή καμπύλη, είναι κάτι που δεν ξαφνιάζει και αποτελεί ένα βασικό ξεκίνημα για τον ορισμό των σχημάτων που θα ακολουθήσουν. Συχνά δε, διακρίνεται στους μαθητές μια αβεβαιότητα ή συστολή στην χρήση της λέξης γραμμή. Άλλοτε λένε γραμμή και εννοούν ευθεία, και άλλοτε λένε ευθεία και εννοούν γραμμή. Στην Α' γυμνασίου ξεκινάει ουσιαστικά η εκμάθηση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Από τη στιγμή που ο ορισμός της έννοιας του σημείου δίνεται μέσω της αποτύπωσης στο χαρτί της μύτης του μολυβιού, δεν θα ήταν άσκοπο (κάθε άλλο μάλιστα), να ορισθεί και η αποτύπωση στο χαρτί της μύτης του μολυβιού όταν αυτό αρχίζει και «γράφει».



σελ. 148, Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

Θα μπορούσαμε δε να πούμε ότι ο εκπαιδευτικός νιώθει έντονα το κενό του ορισμού της γραμμής ή καμπύλης, όταν λίγες σελίδες παρακάτω στο βιβλίο εμφανίζονται ο ορισμός της τεθλασμένης γραμμής μέσω της έννοιας πολυγωνική γραμμή που επίσης δεν ορίζεται. Είναι το σημείο που ο μαθητής με νοηματική συνεπαγωγή μπορεί να «συμπεράνει» πια, ότι η γραμμή είναι μια ευθεία (ή έστω ευθύγραμμο τμήμα).

Ήταν σαφές λοιπόν, ότι για να μπορέσουν να υλοποιηθούν οι στόχοι αυτής της διδασκαλίας, η έννοια της καμπύλης ήταν απαραίτητη. Η ερευνήτρια εκπαιδευτικός αποφάσισε να εντάξει την εισαγωγή της νέας έννοιας. Η ιδέα ήταν να καταλάβουν οι μαθητές ότι καμπύλη είναι οποιαδήποτε διαδρομή γράφει ένα σημείο. Σε αυτό το στάδιο η γραμμή που γράφει η μύτη του μολυβιού καλύπτει τις ανάγκες και των μαθητών και τις διδασκαλίας. Ο ορισμός αυτός της καμπύλης «ως ο δρόμος που διαγράφει η συνεχής κίνηση ενός σημείου» είναι ικανοποιητικός, δόθηκε από τον C. Jordan (1893) και τον συναντάμε ακόμα και σήμερα σε πολλά βιβλία αναλυτικής γεωμετρίας.

Κάνουμε τη συγκεκριμένη επιλογή συνειδητά λαμβάνοντας υπόψη ότι ειπώθηκε στο κεφάλαιο για την σημασία των ορισμών στην διδασκαλία των μαθηματικών. Δηλαδή ότι διδακτικά οι ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι αλλά πρέπει να συνεξεταστούν η υπάρχουσα γνώση των μαθητών, η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης τους (δεν γνωρίζουν ακόμα την έννοια της συνάρτησης) και οι διαισθήσεις τους. Βεβαίως ο ορισμός της καμπύλης ως τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που θα διδαχθούν οι μαθητές στη Γ΄ λυκείου, δεν καλύπτεται από τον παραπάνω ορισμό. Ωστόσο οι μαθητές μέχρι και την Β΄ λυκείου έχουν δημιουργήσει διαισθητικά κάποιον ορισμό (μάλλον εικόνα της έννοιας της καμπύλης) που προσιδιάζει περισσότερο με τον ορισμό που προτείνουμε παρά με αυτόν της Γ΄ λυκείου. Για παράδειγμα ο κύκλος, η έλλειψη, η παραβολή με διευθετούσα κάθετη στον άξονα χχ΄, είναι καμπύλες για τον μαθητή της Β΄ λυκείου, ενώ δεν είναι για τον τελειόφοιτο μια που δεν αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Η εισαγωγή της νέας έννοιας στηρίχτηκε στο παρακάτω σχήμα, το οποίο υπήρχε σε φύλλο εργασίας που μοιράστηκε στους μαθητές και παρουσιαζόταν ταυτόχρονα και στον πίνακα. Η διδασκαλία έγινε γύρω στα μέσα Νοεμβρίου 2012.

Ζητήθηκε λοιπόν από τους μαθητές να χαράξουν πορείες στον φανταστικό χάρτη της πόλης, για παράδειγμα τη διαδρομή από το σημείο Α στο Β ή από το Α στο Ι ή από το Γ στο Δ ή από το Ε στο Ε αφού κάνει περιστροφή γύρω από την πλατεία και άλλα. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να ξανασχεδιάσουν αυτές τις διαδρομές σε ανάλογο χώρο κάτω από το χάρτη, στον οποίο όμως δεν υπήρχε χάρτης. Τους ζητήθηκε να περιγράψουν τι κατασκεύασαν. Τα παιδιά απάντησαν, όπως ήταν αναμενόμενο, γραμμές. Έτσι γίνεται αντιληπτό ότι οτιδήποτε κατασκευάσουμε με το μολύβι αποτελεί μια γραμμή. Η οποία στη συνέχεια ανάλογα με την ιδιότητα που φέρει ορίζεται ως ευθεία ή ως κύκλος κτλ. Ανακοινώθηκε στους μαθητές ότι για την γεωμετρία οι λέξεις γραμμή και καμπύλη είναι ταυτόσημες, και επίσης τους ζητήθηκε να γράψουν έναν ορισμό για την καμπύλη. Με την καθοδήγηση του δασκάλου τους οδηγήθηκαν στον ορισμό του C. Jordan που αναφέρθηκε παραπάνω.

Η κυρίως διδασκαλία για την εφαπτομένη του κύκλου πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα της Α΄ Γυμνασίου, στις 31-1 και 7-2 αντίστοιχα, και είχε διάρκεια δύο ωρών καθεμία. Προκειμένου να συνδεθεί το μάθημα με τους κύκλους και τις ευθείες, που υπάρχουν στην καθημερινή μας ζωή, έγινε μια παρουσίαση φωτογραφιών που σχετίζονται με τις δύο έννοιες. Στόχος να αναγνωρίσουν οι μαθητές τα σχήματα και τις έννοιες που θα διαπραγματευτούν παρακάτω.

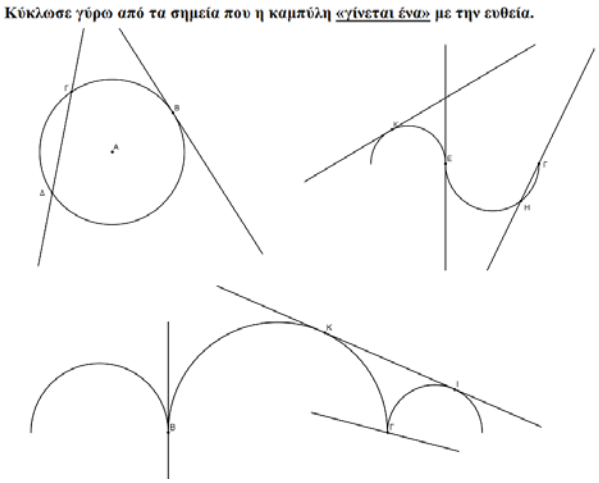
Ο βασικός κορμός της διδασκαλίας στηρίζεται στη σχέση τέμνουσας-εφαπτομένης. Ξεκινώντας από μια τέμνουσα κύκλου κατασκευάζεται με δυναμικό τρόπο η εφαπτομένη, μετακινώντας το ένα σημείο προς το άλλο. Η χρήση του εργαλείου της εμφάνισης του ίχνους της τέμνουσας κατά την μετακίνηση του σημείου είναι πολύ βασική στην συγκεκριμένη εφαρμογή. Στόχος είναι να εμπλακούν οι μαθητές με έννοιες όπως το άπειρο (πόσες τέμνουσες; άπειρες), το πολύ κοντά (απείρως κοντά) τα δύο σημεία της τέμνουσας. Άλλο σημαντικό σημείο είναι η μεγέθυνση γύρω από το σημείο επαφής κύκλου εφαπτομένης. Στόχος να διακρίνουν οι μαθητές την τοπική ευθύτητα (Tall, 1989, 2000). Η «τοπική ταύτιση» του κύκλου και της εφαπτομένης θα τονιστεί ως χαρακτηριστικό γνώρισμα ύπαρξης ή όχι εφαπτομένης.

Επόμενος στόχος να γενικευθεί η έννοιας της εφαπτομένης σε καμπύλες. Από το κύκλο κρατάμε ένα ημικύκλιο με τέμνουσα και εφαπτομένη και στη συνέχεια τα ημικύκλια γίνονται περισσότερα (εμμένουμε στα ημικύκλια και δεν πάμε σε άλλες καμπύλες, προκειμένου να μείνουμε όσο το δυνατό πιο «κοντά» στην διδακτέα ύλη της Α΄ γυμνασίου). Βλέπουνε περιπτώσεις ευθείας που έχουν ένα κοινό σημείο με την καμπύλη αλλά δεν είναι εφαπτομένη και περιπτώσεις ευθείας που έχουν δύο κοντά σημεία με την καμπύλη αλλά είναι εφαπτομένη. Στόχος τελευταίος να τονιστεί ότι ο καλύτερος τρόπος να διακρίνει κανείς την

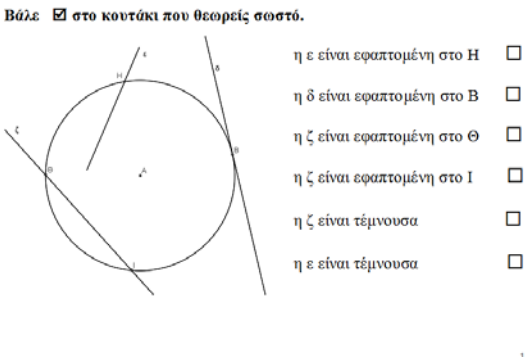
εφαπτομένη είναι η εικόνα της ταύτισης ευθείας-καμπύλης και όχι η καταμέτρηση των κοινών σημείων τους.

Όλη η διδασκαλία αποτελεί πεδίο έρευνας και παρατήρησης. Οι έννοιες που διαπραγματεύονται είναι εντελώς καινούριες για τους μαθητές. Ακόμα και λεπτομέρειες στον τρόπο που χειρίζονται το λόγο ή σε έννοιες βασικές όπως το σημείο και η ευθεία, παρόλο που δεν αποτελούν το κυρίαρχο θέμα της έρευνας, έχουν ενδιαφέρον και δείχνουν τις δυνατότητες ή τις αδυναμίες που κρύβουν οι μαθητές. Η σχεδίαση της διδασκαλίας και η υλοποίησή της παρουσιάζεται μέσα από μια σειρά διδακτικών συμβάντων και διαλόγων στην τάξη των μαθηματικών. Τα ονόματα των μαθητών έχουν αλλαχθεί ώστε να διατηρηθεί η ανωνυμία τους.

2.5. Ο σχεδιασμός του τεστ αξιολόγησης

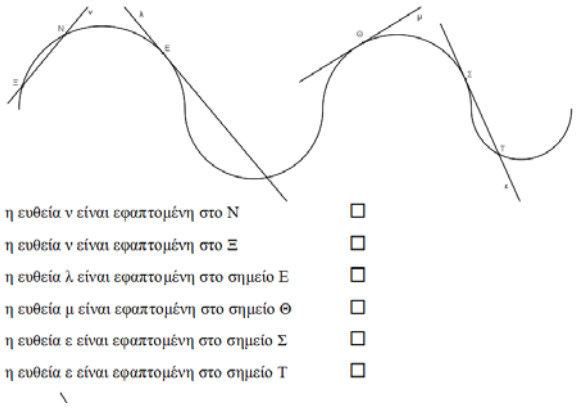


Αρχικά η ερευνήτρια ήθελε να διαπιστώσει κατά πόσο οι μαθητές είχαν κατανοήσει την εικόνα της τοπικής ευθύτητας και κατά πόσο μπορούσαν να την διακρίνουν ανεξάρτητα από την σύνδεσή της με την εφαπτομένη. Έτσι στο σχήμα που βρίσκεται αριστερά τους ζητήθηκε να κυκλώσουν γύρω από τα σημεία που η καμπύλη «γίνεται ένα» με την ευθεία.

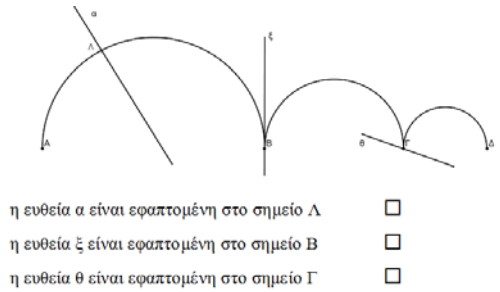


Στην συνέχεια ήθελε να διαπιστώσει αν οι μαθητές είχαν κατανοήσει τις έννοιες της τέμνουσας και της εφαπτομένης στον κύκλο. Στο σχήμα εκτός από μια «ξεκάθαρη» τέμνουσα και εφαπτομένη, υπάρχει και μια ευθεία η οποία φαίνεται ότι τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο, αλλά δεν εφάπτεται σε αυτόν. Τους ζητάει να επιλέξουν τις σωστές από κάποιες προτάσεις που σχετίζονται με το σχήμα. Αναμένεται οι μαθητές να απαντήσουν σωστά όσο αφορά τις ευθείες ζ, δ. Όμως για την ευθεία ε, πρέπει να την προεκτείνουν νοερά, ώστε να διαγνώσουν ότι πρόκειται για τέμνουσα. Στόχος εδώ ήταν να διαπιστώσει αν οι

μαθητές θα παρασύρονταν από το ένα κοινό σημείο ή όχι. Οι μαθητές που θα παρασύρονταν θα ήταν αυτοί που δεν θα είχαν κατανοήσει την έννοια της τοπικής ευθύτητας αλλά ούτε και την έννοια της ευθείας (πιθανών η έννοια της ευθείας να υπερισχύει).

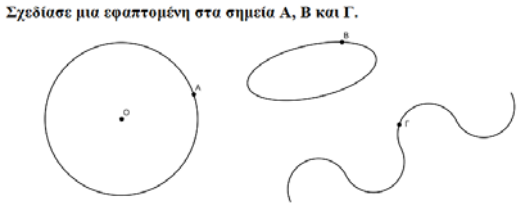


Αντίστοιχα ερωτήματα τίθενται και σε άλλες καμπύλες. Στα ερωτήματα αυτά οι μαθητές πρέπει να κρίνουν κατά πόσο οι ευθείες είναι εφαπτόμενες σε συγκεκριμένο σημείο ή όχι. Η ερευνήτρια αναμένει οι μαθητές να επιλέξουν τη σωστή επιλογή όσων αφορά τις ευθείες μ και ν (η μ και έχει ένα κοινό με την καμπύλη και δεν «φαίνεται» να την τέμνει αλλού, ενώ η ευθεία ν τέμνει σε δύο σημεία την καμπύλη χωρίς να δημιουργεί την εικόνα της ταύτισης). Κύριος στόχος ήταν να διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να ξεχωρίσουν τι συμβαίνει με τις ευθείες ε και λ, οι οποίες είναι εφαπτόμενες μεν, αλλά τέμνουν την καμπύλη σε δύο σημεία. Ένα επιπρόσθετο στοιχείο προς έρευνα είναι το κατά πόσο η ύπαρξη του δεύτερου σημείου τομής, με κουκίδα και όνομα (Τ) στην πρώτη περίπτωση, χωρίς κουκίδα και όνομα στην δεύτερη, επηρεάζει την επιλογή των μαθητών. Το φαινόμενο είχε παρατηρηθεί και σχολιαστεί από τους μαθητές και στα δύο τμήματα που παρακολούθησαν τη διδασκαλία. Στην περίπτωση του «ανώνυμου» σημείου, τα παιδιά δεν το υπολόγιζαν (καταμετρούσαν) καθόλου. Έτσι απαντούσαν ότι ήταν εφαπτομένη, όχι γιατί διέκριναν την τοπική ευθύτητα, αλλά γιατί μετρούσαν ένα κοινό σημείο.



Στο επόμενο σχήμα και οι τρεις ευθείες τέμνουν την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο. Έτσι η σωστή επιλογή δεν μπορεί παρά να κρύβει την κατανόηση της τοπικής ευθύτητας. Επίσης υπάρχουν δύο παρόμοια γωνιακά σημεία. Άραγε οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι τα δύο σημεία (Β και Γ) πρέπει να αντιμετωπισθούν με τον ίδιο τρόπο;

Τέλος ζητείτε από τους μαθητές να σχεδιάσουν εφαπτόμενες. Το νέο σχήμα που



εμφανίζεται είναι η έλλειψη, αλλά όλα τα χαρακτηριστικά που εμφανίζει η εφαπτομένη στον κύκλο διατηρούνται και εδώ. Στην καμπύλη το σημείο Γ δεν είναι «πολύ δύσκολο» (όπως ένα σημείο καμπής ή ένα γωνιακό), ωστόσο είναι ενδιαφέρον να δούμε αν οι μαθητές θα σχεδιάσουν ευθεία που να τέμνει την καμπύλη και σε άλλο σημείο ή όχι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Αποτελέσματα

3.1. Φαινόμενα που παρατηρήθηκαν στη τάξη των μαθηματικών.

Το πρώτο συμβάν που αξίζει να σημειωθεί, έγινε στη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε για την έννοια της καμπύλης. Αφού έχει ολοκληρωθεί η εισαγωγή στην έννοια (βλ. 2.4. Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας), τέθηκε από τον διδάσκοντα στους μαθητές, το ερώτημα αν ο κύκλος είναι καμπύλη ή όχι και γιατί. Το ερώτημα απαντήθηκε με ευκολία όπως ήταν αναμενόμενο, μια που η έννοια του κύκλου δεν συγκρούεται με την διαισθητική έννοια που έχουν αποκομίσει οι μαθητές για την έννοια της καμπύλης από την καθημερινή χρήση της λέξης. Το επόμενο ερώτημα ήταν αν η ευθεία αποτελεί καμπύλη ή όχι. Εκεί οι μαθητές «κόλλησαν». Ήταν μεγάλη η σύγκρουση ανάμεσα στην πεποίθηση από την καθημερινότητα ότι άλλο ευθεία και άλλο καμπύλη και τη «νέα άποψη» της γεωμετρίας ότι η ευθεία είναι καμπύλη. Χαρακτηριστικός ο διάλογος του μαθητή με τον εκπαιδευτικό.

[1] - Λοιπόν Κωνσταντίνε, τι λες, η ευθεία είναι καμπύλη;

[2] - Κυρία, ενώ καταλαβαίνω ότι κάτι τέτοιο είπαμε, δυσκολεύομαι να πω ότι η ευθεία είναι καμπύλη…

[3] - Εντάξει, σε καταλαβαίνω Κωνσταντίνε. Όταν λέμε καμπύλη στην καθημερινή μας ζωή εννοούμε κάτι με στρογγυλάδες, όπως «μια γυναίκα με καμπύλες» (η εκπαιδευτικός κάνει χαρακτηριστική χειρονομία με τα χέρια, οι μαθητές γελάνε και συμφωνούν με κατανόηση). *Ωστόσο πολλές φορές στην καθημερινότητα και στη γεωμετρία χρησιμοποιούμε τις ίδιες λέξεις, χωρίς να εννοούμε το ίδιο πράγμα. Για παράδειγμα λέμε «σημείο συνάντησης στα goodys». Τα goodys όμως είναι σημείο όπως στην γεωμετρία;*

[4] - Όχι, κυρία…

[5] - Έτσι λοιπόν θα ξέρετε ότι στην γεωμετρία καμπύλη είναι οποιαδήποτε γραμμή γράφει ένα σημείο που κινείται. …Λοιπόν η ευθεία είναι καμπύλη;

[6] - Ναι, κυρία…

Στην παρούσα μελέτη γίνονται δύο διδασκαλίες σε δύο διαφορετικά τμήματα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μέσα στο ίδιο περιβάλλον, με τον ίδιο διδάσκοντα, στην ίδια δραστηριότητα και σε ενέργειες που είναι κοινές, αναπτύσσονται τόσο διαφορετικές αντιλήψεις και νοήματα. Οι μαθητές με τα σχόλιά τους δίνουν δυνατότητα για εμβάθυνση σε

έννοιες που δεν ήταν προγραμματισμένο από το σχεδιασμό της διδασκαλίας να διαπραγματευτούν. Μια απάντηση σε αυτό το ερώτημα-φαινόμενο είναι ότι οι συμμετέχοντες στην διαπραγμάτευση ξεκινάνε από διαφορετική αφετηρία. Ο καθένας έχει διαφορετικό υπόβαθρο γνώσεων, ικανοτήτων, κλίσεων, κινήτρων και συστήματος αξιών. Με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά τοποθετούνται ως προς τους στόχους και τις προθέσεις των άλλων στην διαπραγμάτευση του νοήματος. Ένας άλλος λόγος είναι ότι μπορεί μια παρατήρηση, απορία ή ιδέα ενός μαθητή να ανατρέψει το σχέδιο του διδάσκοντα και να εκτρέψει τη συζήτηση σε διαφορετικό πεδίο. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο δάσκαλος μπορεί να βρεθεί σε αβεβαιότητα. Η κατάσταση αυτή δεν είναι απαραίτητα κακή ώστε να αποφεύγεται. Αντίθετα, κατά τους Holton & Thomas, ο δάσκαλος κάνει τις πιο παραγωγικές του ερωτήσεις όταν βρίσκεται σε αβεβαιότητα.

Ωστόσο οι δύο διδασκαλίες παρουσιάζουν και αρκετές ομοιότητες. Μελετώντας κανείς τα στιγμιότυπα των διδασκαλιών βλέπει τους μαθητές να χρησιμοποιούν ίδιες λέξεις, ίδιες εκφράσεις και (εκτός των διαφορετικών), να εντυπωσιάζονται και να σχολιάζουν παρόμοια ζητήματα που εκτυλίσσονται στον πίνακα. Το γεγονός δίνει μεγαλύτερη αξιοπιστία στα συμπεράσματα, μια που κάπως περιορίζει το ενδεχόμενο του τυχαίου.

Σε κάποια σημεία τα σχόλια των μαθητών είναι πολύ πετυχημένα, οπότε διευκολύνουν τον εκπαιδευτικό στο έργο του, ενώ αλλού πρέπει να οδηγήσει τεχνηέντως την συζήτηση στο στόχο του. Η δεύτερη διδασκαλία που σχολιάζεται παρακάτω μοιάζει φτωχότερη σε ενδιαφέρον από την πρώτη. Αυτό οφείλεται στο ότι η ερευνήτρια δεν σχολιάζει εκ νέου διαλόγους ή φαινόμενα που παρατηρούνται και στις δύο, προκειμένου να μην κουράσει τον αναγνώστη με την επανάληψη.

3.1.1. Στιγμιότυπα της 1ης διδασκαλίας-σχόλια. (τμήμα 2ο)

Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να κατονομάσουν τα σχήματα που αναγνώρισαν στις φωτογραφίες (power-point). Απάντησαν κύκλους, καμπύλες, ευθείες. Οπότε δημιουργήθηκε η προσδοκία για το επερχόμενο θέμα.

Ξεκινάει η διδασκαλία με την πρώτη οθόνη όπου εμφανίζεται ένας κύκλος και μία τέμνουσα. Οι μαθητές περιγράφουν τα σχήματα και την σχέση τους. Αρχικά δεν βλέπουν όλοι οι μαθητές

το ίδιο πράγμα. Άλλοι περιγράφουν δύο ημικύκλια, άλλοι δύο τόξα, άλλοι διάμετρο. Η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του λογισμικού βοηθάει στο να «δουν» οι μαθητές αν πράγματι πρόκειται για ημικύκλια ή διάμετρο. Τελικά καταλήγουνε στο ότι ενδιαφέρει ο κύκλος και η ευθεία. Οι μαθητές προσπαθούν να περιγράψουν τη σχέση ευθείας και κύκλου.

[7] - Κ: Πως σχετίζεται η ευθεία με τον κύκλο;

[8] - Μ1: διαπερνάει τον κύκλο

[9] - Κ: τι σχέση έχει ο κύκλος με την ευθεία;

[10] -Μ2: τέμνεται

[11] -Κ: Πες όλη την φράση

[12] -Μ2: τέμνεται με τον κύκλο.

[13] -Μ3: χωρίζει τον κύκλο σε δύο μέρη.

[14] -Μ4: ***διέρχεται μέσα από δύο σημεία του κύκλου***

[15] -Κ: και που γίνεται αυτό; που τέμνεται η ευθεία με τον κύκλο

[16] -Μ4: στο σημείο Β και στο σημείο Γ;

Οι μαθητές δεν φαίνεται να εστιάζουν στα κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου. Οι απαντήσεις τους κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το δυναμικό ή στατικό τρόπο που «βλέπουν» το σχήμα. Μέσα στις λέξεις «διαπερνάει», «διέρχεται», «τέμνεται» κρύβεται μια κίνηση (δυναμική θεώρηση), ενώ στη λέξη «χωρίζει» μια στατική θεώρηση. Η δυναμική αυτή θεώρηση αφορά την ευθεία ενώ ο κύκλος γίνεται αντιληπτός ως σταθερό σχήμα. Η δυναμική θεώρηση της ευθείας ίσως οφείλετε στον τρόπο που αυτή ορίζεται: «προεκτείνεται απεριόριστα». Αντίστοιχες αντιλήψεις έχει διαγνώσει και η A. Robert στους μαθητές σε σχέση με το όριο. Στη συνέχεια ζητείτε από τους μαθητές να δώσουν ένα ταιριαστό όνομα σε αυτήν την ευθεία. Στόχος να καταλάβουν ότι οι λέξεις κρύβουν μια πληροφορία και δεν είναι τυχαία δοσμένες στις έννοιες. Επιλέγουν λέξεις όπως διαπεραστική, διερχόμενη, τεμνόμενη. Τους ανακοινώνεται η ονομασία που έχει επιλέξει η επιστημονική κοινότητα. Στη συνέχεια γίνεται συζήτηση πάνω στην έννοια της λέξης.

[17] -Κ: Η λέξη τέμνουσα ποιο ρήμα παράγει;
[18] -τέμνω
[19] -Κ: Τι σημαίνει τέμνω;
[20] -τεντώνω;
[21] -Κ: όχι δεν σημαίνει τεντώνω. Τι σημαίνει;
[22] -σμίγω
[23] -Κ: όχι
[24] -επεκτείνω;
[25] -Κ: όχι

[26] -ενώνω.
[27] -Κ: Όχι παιδιά. Σημαίνει κόβω χωρίζω.

Βλέπουμε ότι τα παιδιά δεν μπορούν να καταλάβουν ότι η ορολογία που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά προέρχεται από το νόημα της λέξης στην καθημερινότητα. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούν να βοηθηθούν από αυτό. Δεν ήξεραν καν το νόημα της λέξης. Μοιάζει να τους λείπει η συνθετική σκέψη γενικότερα. Η λέξη «τμήμα» (τμήμα Α1, Α2 ή ευθύγραμμο τμήμα) που χρησιμοποιείται συνέχεια στο χώρο του σχολείου δεν τους οδήγησε στο ορισμό της λέξης «τέμνω» ή της «τέμνουσας». Στη συνέχεια τους ζητάει να δώσουν έναν ορισμό για αυτήν την ευθεία. Και εκεί ακούγεται η φράση « *Τι εννοείται κυρία να της δώσουμε έναν ορισμό;*». Αποτελεί ένα παράδειγμα, του πόσο μπορεί να απέχει αυτό που ο εκπαιδευτικός πιστεύει ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται, με αυτό που αντιλαμβάνονται πραγματικά. Ορισμούς οι μαθητές έχουν μάθει αρκετούς, ήδη από το δημοτικό. Τους μαθαίνουν όμως με ένα μηχανικό τρόπο χωρίς να αντιλαμβάνονται τη σημαντικότητά τους, και χωρίς να μπορούν να διανοηθούν ότι και οι ίδιοι μπορούν να κατασκευάσουν έναν. Βλέπουμε πως ο τρόπος των καθημερινών εννοιών ο οποίος λειτουργεί χωρίς τους λεκτικούς ορισμούς, υπεισέρχεται στα μαθηματικά. Ας δούμε τώρα τι επακολούθησε:

[28] -Μ1: Είναι η ευθεία που περνάει μέσα από ένα σχήμα…
[29] -Κ: Τι νομίζεται ότι άφησε λίγο φλου η Θεανώ;
[30] -Μ2: αυτό το σχήμα είναι κύκλος
*[31] -Μ3: είναι η ευθεία που περνάει **μέσα από δύο σημεία** του κύκλου.*
[32] -Κ: Η συμμαθήτριά σας είπε μέσα από δύο σημεία του κύκλου . Υπάρχει κάτι περιττό σε αυτό που είπε;
[33] -Μ4: το μέσα
[34] -Το μέσα. Λίνα το σημείο πόσο είναι; Μεγάλο, μικρό; πόσο είναι;
[35] -Μ3: Μικρό, δεν μπορούμε να το μετρήσουμε…
[36] -Δεν μπορούμε να το μετρήσουμε. Έχει νόημα λοιπόν να πεις μέσα; Αφού είναι τόσο μικρό, δεν έχει νόημα το μέσα και το έξω. Εντάξει; θέλεις να προσπαθήσεις να πεις τον ορισμό;
[37] -Μ3: είναι μια ευθεία η οποία περνάει από δύο σημεία του κύκλου.
[38] -Κ: Ωραία. Άλλος;
*[39] -Μ4: μια ευθεία η οποία **τέμνεται με δύο σημεία** του κύκλου.*
[40] -Κ: (ανακοινώνει) Τέμνουσα είναι η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.
[41] -Μ4: Κυρία γίνεται να τον τέμνει μόνο σε ένα;
[42] -Κ: Παιδιά η συμμαθήτριά σας ρωτάει αν γίνεται η ευθεία να τέμνει τον κύκλο σε

ένα μόνο σημείο. Θα το δούμε…

Ήδη από τον προηγούμενο διάλογο [14] ερευνήτρια έχει διακρίνει τη φράση «μέσα από δύο σημεία», η φράση επαναλαμβάνεται στα σημεία [31] και [39](«τέμνεται με το σημείο»). Φαίνεται να μην αντιλαμβάνονται οι μαθητές απόλυτα την έννοια του σημείου. Το σημείο για τους νεαρούς μαθητές φαίνεται να έχει ακόμη υπόσταση, οντότητα, να είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο όπως ο κύκλος ή η ευθεία. Χρειάζεται συνεχής επανάληψη της έννοιας όποτε δίνεται η ευκαιρία ώστε να επιτευχθεί η κατανόηση. Η εκπαιδευτικός κάνει μια προσπάθεια επανορισμού της έννοιας, ωστόσο θα μπορούσε να το διαχειριστεί καλύτερη κα να αφιερώσει περισσότερο χρόνο.

Οι μαθητές συμπληρώνουν το φύλλο εργασίας τους με τον ορισμό της τέμνουσας. Η εκπαιδευτικός ακολουθεί το σχέδιο διδασκαλίας. Περνάει στη φάση της μετακίνησης του σημείου Γ με ενεργοποιημένο το εργαλείο της εμφάνισης του ίχνους της ευθείας. Οι μαθητές παρακολουθούν και τους ζητείτε να περιγράψουν την διαδικασία.

[43] -Μ1: Κατασκευάσατε πάρα πολλές τέμνουσες

[44] -Κ: Πάρα πολύ ωραία. Πως τις κατασκεύασα τι έκανα;

[45] -Μ2: πήρατε το σημείο … και το μεταφέρατε

[46] -Μ3: πήρατε το σημείο και το αλλάξατε θέση

[47] -Κ: Πόσες τέμνουσες κατασκευάσαμε;

[48] -Μ4: άπειρες

[49] -Μ1: δεν μπορούμε να τις μετρήσουμε ακριβώς

[50] -Κ: Πως τις κατασκευάσαμε αυτές;

[51] -Μ5: μετακινώντας το ένα από τα δύο σημεία.

[52] -Κ: Τι παραμένει σταθερό;

[53] -Μ4: η αρχική γραμμή

[54] -Μ5: Το Β

[55] -Μ6: η πρώτη τέμνουσα

Το ίχνος που αφήνει η μετακίνηση βοηθάει στο να δουν οι μαθητές τις άπειρες τέμνουσες, αλλά όχι τι παραμένει σταθερό [53], [55]. Η εκπαιδευτικός θέλει να

παρατηρήσουν οι μαθητές τη μετακίνηση του σημείου Γ αλλά παράλληλα και το ότι το Β παραμένει σταθερό. Επαναλαμβάνει τη διαδικασία αυτή τη φορά σταματάει όταν το Γ πλησιάσει πολύ κοντά στο Β και εξαφανίζει από την οθόνη τα ίχνη των τεμνουσών.

[56] -Κ: Τι έχω κάνει εδώ τώρα

[57] -Μ1: δύο σημεία που έχουν ενωθεί με κάποιο τρόπο…

[58] -Μ2: πήρατε το Γ και το μετακινήσατε να τέμνεται με το Β

[59] -Μ3: φτιάξατε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο.

[60] -Κ: πείτε τι βλέπεται; τι έκανα περιγράψτε;

[61] -Μ4: (τα μασάει) νομίζω μια ευθεία α που έχουν ενωθεί η ευθεία με τον κύκλο… έχουν ενώσει η ευθεία με τον κύκλο τα δύο σημεία.

[62] -Μ5: δύο σημεία που έχουν ενωθεί

[63] - Κ: Ωραία, αυτή η ιδιαίτερη ευθεία είναι τέμνουσα ή όχι; Γράψτε την άποψή σας στο φυλλάδιο.

(Δίνεται λίγος χρόνος προκειμένου οι μαθητές να συμπληρώσουν το φύλλο.)

[64] -Μ5: Κυρία εγώ έγραψα ότι είναι, επειδή περνάει από δύο σημεία

[65] -Μ6: ***κυρία δεν τέμνεται για να είναι τέμνουσα..***

[66] -Κ: αλλά τι κάνει;

[67] -Μ6: (συνεχίζει) δεν τέμνεται, σωστά; ***δεν τον χωρίζει…***

[68] -Κ: Από τη μια η συμμαθήτριά σας διακρίνει τα δύο σημεία αλλά από την άλλη λέει δεν τον χωρίζει τον κύκλο

[69] - *Μ7: …..(δεν ακούγεται καλά, μάλλον λέει ότι είναι τέμνουσα γιατί)* ***όσο μικρό και να είναι πάντα θα υπάρχει ένα κομματάκι που θα τον χωρίζει***

[70] -Μ1: συμφωνεί

[71] -Μ4: εγώ λέω όχι, γιατί δεν τέμνεται, δεν περνάει μέσα από τον κύκλο

[72] -Κ: αλλά από πού περνάει;

[73] - από έξω, από δίπλα

[74] -Κ: Ίσα-ίσα που περνάει; (τώρα μεγεθύνω). Τι έκανα τώρα;

[75] -μεγεθύνατε

[76] -Κ: Τώρα που το βλέπεται καλύτερα είναι τέμνουσα; Πέτρο τι παρατηρείς;

[77] -Φαίνεται σαν να μην είναι τέμνουσα γιατί φαίνεται σαν ***η ευθεία να συμπίπτει με κάποια από τα σημεία του κύκλου****. δεν μπορώ να το εξηγήσω*

[78] -Κ: καταλαβαίνεται τι προσπαθεί να πει ο συμμαθητής σας;

[79] -Δήμητρα: ***μοιάζει να γίνεται ένα***

[80] -Γιάννης(34.50): και πάλι έχει δίκιο η Στέλλα μπορεί να είναι μηδαμινή η απόσταση

[81] -Μαίρη: εγώ ήθελα να πω ότι αυτό που είπε ο …… είναι σαν αυτό που σκέφτηκα, είναι σαν να έχει πάρει δύο σημεία του κύκλου και να έχετε τραβήξει μια γραμμή και αυτά να είναι μαζί να συμπίπτουν.

[82] -Σωτήρης: κυρία είναι τέμνουσα επειδή τέμνει σε δύο σημεία.

Σε αυτόν το διάλογο οι μαθητές επιχειρηματολογούν πάνω στο ερώτημα αν η ευθεία αυτή, στην οριακή θέση που την έφερα είναι τέμνουσα ή όχι. Είναι εντυπωσιακό που τα παιδιά διακρίνουν τα χαρακτηριστικά που περιμέναμε και υπερασπίζονται τις απόψεις τους προσπαθώντας να εξηγήσουν τι βλέπουν. Ο πρώτος μαθητής που μιλάει μετά το ερώτημα αν η ευθεία είναι τέμνουσα εστιάζει στα δύο κοινά σημεία τα οποία τα διακρίνει και απαντάει ότι κατά την άποψή του είναι τέμνουσα. Ωστόσο η συμμαθήτριά του δεν συμφωνεί. Την προβληματίζει το ότι η ευθεία δεν χωρίζει τον κύκλο σε δύο τόξα, βλέπει ότι τον αφήνει ολόκληρο στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η εικόνα της έννοιας προσάρμοσε ήδη έναν νέο ορισμό ο οποίος θέτει τέμνουσα την ευθεία που «χωρίζει» τον κύκλο. Η μαθήτρια δεν ανατρέχει στον ορισμό που επιλέχθηκε και ανακοινώθηκε ως ο καταλληλότερος. Ενώ κάτι τέτοιο δεν έχει ειπωθεί ούτε έχει γίνει αναφορά στην εφαπτομένη, ήδη δημιουργήθηκε η εντύπωση του χωρίζει ή δεν χωρίζει τον κύκλο, ενώ είναι πολύ νωρίς για εντυπώσεις ωστόσο διαφαίνεται η ολιστική τάση που επικρατεί στους μαθητές. Η επόμενη μαθήτρια συμφωνεί ουσιαστικά με τον συμμαθητή της που ισχυρίστηκε ότι είναι τέμνουσα και προσπαθεί να εξηγήσει στην συμμαθήτριά της ότι ενώ μοιάζει να μην τον χωρίζει πάντα θα υπάρχει ένα κομματάκι που θα μένει ανάμεσα στα σημεία. Έχει πλησιάσει την έννοια του απείρως κοντά. Έχει την ικανότητα να δει τη συμβαίνει πολύ κοντά στα δύο σημεία, βλέπει το σχήμα τοπικά. Η επόμενη μαθήτρια επίσης βλέπει ότι η ευθεία δεν χωρίζει τον κύκλο, χαρακτηριστική η φράση της δεν περνάει από μέσα αλλά από έξω από δίπλα. Μετά τη μεγέθυνση ο μαθητής διακρίνει την τοπική ευθύτητα. Ακριβής διατύπωση «η ευθεία συμπίπτει με κάποια σημεία του κύκλου». Δεν βλέπει μόνο δύο σημεία, βλέπει πολλά άρα δεν μπορεί να είναι τέμνουσα, γιατί η τέμνουσα έχει μόνο δύο ευδιάκριτα και ξεκάθαρα σημεία τομής με τον κύκλο.

Ωστόσο προβληματίζεται με την παρατήρηση της συμμαθήτριάς του ότι υπάρχει κάποια απόσταση ανάμεσα στα σημεία, μηδαμινή απόσταση. Η φράση «μηδαμινή απόσταση» παραπέμπει ασυνείδητα στο όριο στο μηδέν, έννοιες της ανάλυσης μοιάζουν να υποβόσκουν στο μυαλό των μαθητών από νεαρή ηλικία. Μια μαθήτρια ακούγοντας τα λεγόμενα του συμμαθητή της λέει «μοιάζει να γίνεται ένα» (τοπική ευθύτητα). Η τοπική ευθύτητα γίνεται ακόμα πιο ξεκάθαρη στην περιγραφή της επόμενης μαθήτριας, η οποία τονίζει «είναι σαν να έχει πάρει δύο σημεία του κύκλου και να έχει τραβήξει μια γραμμή και αυτά να είναι μαζί να συμπίπτουν».

Στην συνέχεια και ενώ στην οθόνη φαίνεται η μεγέθυνση η εκπαιδευτικός μετακινεί τα σημεία ακόμα πιο κοντά και ρωτάει τους μαθητές «τώρα τι γίνεται;»

[83] -Πάλι κυρία το ίδιο είναι

[84] -Τώρα είναι ένα σημείο

[85] -Τώρα μοιάζει με ένα σημείο λέει (μάλλον η Μαριάννα)

[86] -άλλος: μοιάζει. Όμως δεν είναι…

[87] -Μοιάζει αλλά δεν είναι. Εννοείς ότι άμα το φέρω ακόμα πιο κοντά πάλι δεν θα είναι ένα;

[88] -Όχι, ότι δεν είναι, όχι ότι ΜΠΟΡΕΙ να μην είναι, δεν είναι ένα σημείο, είναι δύο σημεία.

[89] -Η Μαριάννα λέει δεν είναι ένα σημείο είναι δύο σημεία. Θεανώ;

[90] -Παρατήρησα ότι μόλις μετακινήσατε το σημείο φτιάχτηκε άλλη μια ευθεία

[91] -Παρατήρησε η Θεανώ ότι μόλις μετακίνησα το σημείο άλλαξε η ευθεία δεν είναι η ίδια.

Να σας πω κάτι. Αυτό που παρατήρησε πριν ο Πέτρος συνεχίζει να ισχύει;

[92] -Ευαγγελία: ναι, ότι αυτές οι δύο αυτές … ευθείες τέλος πάντων ναι συμπίπτουν

[93] -Εκεί στο ευθείες τέλος πάντων ναι βάλε μια άλλη λέξη

[94] -εεε τέμνουσες; όχι

[95] -ευθείες (λέει κάποιος άλλος)

[96] -Ευαγγελία: ωραία ευθείες …συμπίπτουν

[97] -Πέτρος: κυρία ο κύκλος δεν είναι ευθεία είναι καμπύλη

[98] -Δεν είναι ευθεία ο κύκλος, χρησιμοποίησε μια πιο γενική λέξη αντί για ευθείες.

Αυτές οι δύο …

[99] -καμπύλες (δειλά)

[100] - Καμπύλες ή;

[101] - γραμμές.

[102] - Αυτές οι δύο λοιπόν γραμμές που ξέρω ότι η μία είναι ευθεία και η άλλη είναι κύκλος μοιάζουν να συμπίπτουν.

Τα παιδιά συνεχίζουν να κάνουν τις ίδιες παρατηρήσεις παρόλο που τα σημεία έρχονται ακόμα πιο κοντά. Μια μαθήτρια τονίζει, όχι απλά λέει, ότι τα σημεία συνεχίζουν να είναι δύο και παρατηρείται εκ νέου η σύμπτωση των γραμμών στην περιοχή επαφής. Κάπου εδώ αφού πρώτα επαναδιαπραγματεύονται την έννοια του σημείου, συγκεκριμένα το μέγεθός του, σημαίνει το τέλος της πρώτης ώρας. Μετά το διάλειμμα η εκπαιδευτικός ρωτάει αν τελικά η ευθεία στην οθόνη είναι τέμνουσα:

[103] - Μ1: ναι, είναι τέμνουσα γιατί περνάει από δύο σημεία

[104] - Μ2: όχι γιατί δεν τον χωρίζει

[105] -** Κ: Αυτή είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση τέμνουσας.* ***Ποια ιδιαίτερη περίπτωση τέμνουσας είναι;

[106] - Θεανώ: είναι η περίπτωση που τον τέμνει σε δύο σημεία αλλά δεν τον χωρίζει

[107] - Μυρτώ: είναι η περίπτωση που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αλλά δεν είναι μέσα από τον κύκλο

[108] - Και που είναι;

[109] - Πάνω στον κύκλο.

[110] - Μαριάνθη…

[111] - περίπου έξω.

[112] - Κ: Τέμνουσα είναι μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία. Αυτή είναι λίγο ιδιαίτερη. Τι ιδιαίτερο έχει αυτή η τέμνουσα; Ευαγγελία;

[113] -** Κυρία το ιδιαίτερο είναι αυτή η* ***τέμνουσα κάποιο μέρος της συμπίπτει με την επιφάνεια του κύκλου

[114] - Κ: Κάποιο μέρος της συμπίπτει με την επιφάνεια του κύκλου. Αυτό μ' αρέσει. Είναι κάτι ιδιαίτερο. στην άλλη περίπτωση της τέμνουσας συμβαίνει αυτό; Όχι εκεί τον έκοβε χρατς. Εδώ είναι λίγο ιδιαίτερο αυτό που περιγράφει η Ευαγγελία.

[115] - Μυρτώ τι λες εσύ;

[116] - Είναι η τέμνουσα που και τα δύο σημεία βρίσκονται το ένα πάνω στο άλλο.

[117] - Κ: Για να μην πούμε ότι το ένα σημείο βρίσκεται πάνω στο άλλο τι θα μπορούσαμε να πούμε; Πέτρο;

[118] - ενώνονται, γίνονται ένα

[119] - Κ: Άμα το δω από πολύ κοντά σίγουρα θα έχουν γίνει ένα;

[120] - Άμα τα μεγεθύνουμε δεν θα είναι ένα, θα είναι ξεχωριστά.

[121] - Κ: Αλλά;

[122] - κοντά

[123] - πόσο κοντά; πολύ κοντά. Άρα είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση τέμνουσας η περίπτωση που μοιάζει να συμπίπτει με τον κύκλο ή η ειδική περίπτωση τέμνουσας που τα σημεία είναι πολύ κοντά.

[124] - ……συμπληρώνουν φυλλάδιο

[125] - Πες μου Γεράσιμε τι έχεις γράψει;

[126] - είναι η ειδική περίπτωση τέμνουσας που τα σημεία είναι πολύ κοντά.

[127] - Ευαγγελία;

[128] - είναι η ειδική περίπτωση τέμνουσας που ένα μέρος της συμπίπτει με την επιφάνεια του κύκλου.

[129] - καλύτερα να μην χρησιμοποιήσεις τη λέξη επιφάνεια.

[130] - Ωραία. Αυτήν την ειδική περίπτωση τέμνουσας που τόσο ωραία περιγράψανε ο Γεράσιμος και η Ευαγγελία θα την πούμε εφαπτομένη του κύκλου.

Οι μαθητές συμμετέχουν, συζητούν, αποκτούν άνεση στο να περιγράφουν αυτά που παρατηρούν. Η σχέση τέμνουσας και εφαπτομένης εκμαιεύτηκε ομαλά. Η «ιδιαίτερη» τέμνουσα περιγράφηκε ως η «τέμνουσα που ένα μέρος της συμπίπτει με τον κύκλο» και ως «η τέμνουσα που τα κοινά σημεία με τον κύκλο είναι πολύ κοντά». Στη συνέχεια οι μαθητές συμπληρώνουν στο φυλλάδιο έναν ορισμό της εφαπτομένης, περιγράφοντας τον τρόπο κατασκευής της. Γράφουν:

«εφαπτομένη κύκλου ονομάζουμε την ευθεία που δημιουργείτε από μία τέμνουσα όταν τα δύο σημεία της ενωθούν» ή «…όταν τα δύο σημεία φτάσανε κοντά ώστε να ενωθούν» ή «…όταν τα δύο σημεία έρχονται πολύ κοντά» ή « ..όταν ενώσουμε τα δύο σημεία της» ή « ..που όταν μετακινήσουμε το ένα σημείο της με ένα άλλο θα συμπίπτουν» ή « …όταν πάρουμε το σημείο και το πάμε τόσο κοντά με το άλλο σημείο σαν κολλητά».

Ακολούθως πρέπει να οδηγηθεί ο μαθητής στον ορισμό του βιβλίου. Η επιλογή της εκπαιδευτικού είναι η εξής: καθαρίζει την οθόνη και σχεδιάζει έναν κύκλο και μία ευθεία ώστε να μοιάζει εφαπτομένη. Την κατασκευάζει με το geogebra μεν, αλλά όχι αυστηρά. Δεν χρησιμοποιεί κάποιο έτοιμο εργαλείο.

[131] - Κ: Τι είναι αυτό που κατασκεύασα;

[132] - μια ευθεία

[133] - Κ: πιο συγκεκριμένα

[134] - Αντιγόνη: μια εφαπτομένη

[135] - Κ: Την έφτιαξα από τέμνουσα;

[136] - όχι

[137] - Κ: τότε τι ορισμό θα της δίνατε σαν εικόνα; Πριν την περιγράψαμε κατασκευαστικά. Τώρα σαν εικόνα. Ευαγγελία;

[138] - Είναι μια ευθεία όπου έχουμε τοποθετήσει πάνω δύο σημεία και το ένα σημείο από αυτά συμπίπτει με τον κύκλο;

[139] - Κ: μμμ…Μαρία;

[140] - Είναι η ευθεία που ένα σημείο της συμπίπτει με ένα σημείο του κύκλου.

[141] - Κ: Λευτερη;

[142] - Είναι μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

[143] - Γιαννης: ***Δεν μπορεί να είναι μόνο το Β το κοινό σημείο με τον κύκλο…***

[144] - Γιατί πόσα βλέπεις να είναι;

[145] - Υπάρχουν και πιο μικρά από το Β

[146] - Πότε θα τα δω αυτά;

[147] - Όταν θα κάνω μεγέθυνση

[148] - Έχεις δίκιο. Αλλά χωρίς μεγέθυνση πως φαίνεται;

[149] - Ότι είναι μόνο ένα

[150] - *Μπράβο βρε Πέτρο πολύ ωραία τα λες.* ***Είναι η εντύπωση που μου αφήνει αυτή η εικόνα.***

[151] - Γράφουμε λοιπόν ότι εφαπτομένη είναι η ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.

Ο Πέτρος βλέπει και πάλι την τοπική ευθύτητα. Βλέπει ότι στην περιοχή που η εφαπτομένη εφάπτεται στον κύκλο το ένα σημείο δεν είναι ξεκάθαρο. Η φράση υπάρχουν και πιο μικρά από το Β δηλώνει ακριβώς αυτήν την εντύπωση που του αφήνει το σχήμα. Επίσης παρατηρείτε και πάλι παρανόηση στην έννοια του σημείου. Εδώ εμφανίζεται σε διαφορετικά μεγέθη … πιο μικρά.

Η εκπαιδευτικός ανακεφαλαιώνει ανοίγοντας έναν διάλογο με τους μαθητές ώστε να κλείσει τον ορισμό της εφαπτομένης στον κύκλο. Τονίζονται οι δύο ορισμοί και κυρίως οι διαφορές τους. Ο πρώτος περιγράφει την διαδικασία, ο δεύτερος το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ως εικόνα. Όπως όμως και να κατασκευάσει κάποιος εφαπτομένη, αυστηρά ή άτυπα, η εικόνα της τοπικής ευθύτητας εμφανίζεται.

Η νέα οθόνη εξηγεί τον τρόπο που προσδιορίζονται οι διαφορετικές εφαπτόμενες ως προς το σημείο τομής τους με τον κύκλο. Εδώ ακόμα και οι πιο αδύνατοι μαθητές απαντούν σε ερωτήματα όπως πόσες εφαπτόμενες έχουμε, ποια είναι τα κοινά σημείο, κ.α. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα έχει να κάνει με το πλήθος των εφαπτομένων.

[152] - Θεανώ: κυρία μπορώ να ρωτήσω κάτι;

[153] - Φυσικά

[154] - Υπάρχουν και άλλες εφαπτόμενες; Είναι Άπειρες;

[155] - Ναι όσες θέλεις. Παιδιά ακούστε τι ρωτάει η Θεανώ. Υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες; Ναι υπάρχουν άπειρες. Σε όποιο σημείο του κύκλου θέλεις, μπορείς να φτιάξεις εφαπτομένη.

Στα επόμενα σχήματα, οι μαθητές καλούνται να «περάσουν» από την εφαπτομένη του κύκλου στην εφαπτομένη καμπύλης. Αρχικά με το ημικύκλιο και μετά με μία πιο σύνθετη καμπύλη συνδυασμό πολλών ημικυκλίων.

- *Παιδιά τι διαφορετικό βλέπουμε εδώ; Μαρία;*
- *ότι τέμνουσα και εφαπτόμενη δεν συναντάμε μόνο σε κύκλο αλλά και σε ημικύκλιο.*

Στην επόμενη οθόνη πρώτος στόχος ήταν να διατυπώσουν και πάλι τα παιδιά το συμπέρασμα ότι τέμνουσα και εφαπτομένη έχουμε σε καμπύλη. Ωστόσο αυτό δεν φάνηκε να τους απασχολεί ούτε να τους εκπλήσσει. Η συζήτηση γρήγορα εστιάστηκε στο κατά πόσο η ευθεία ε (η μεσαία στο σχήμα), είναι ευθεία ή τέμνουσα. Εδώ και πάλι σημαντικό ρόλο έπαιξε η κατανόηση της ύπαρξης του σημείου. Φάνηκε ότι αρκετοί μαθητές θεωρούν σημαντικό ή υπαρκτό ένα σημείο, μόνο αν είναι σημειωμένο στο σχήμα με κουκίδα και κεφαλαίο γράμμα. Έτσι απαντούν ότι η μεσαία ευθεία είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ, όχι επειδή διακρίνουν τοπικά τα χαρακτηριστικά της εφαπτομένης του κύκλου όπως σχολιάστηκαν νωρίτερα, αλλά επειδή το άλλο σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει την καμπύλη δεν είναι σημειωμένο. Κάτι άλλο εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι η καταμέτρηση των σημείων προκειμένου να αποφανθούν, δεν αποφεύχθηκε.

[156] - Στέλλα τι βλέπεις εδώ;

[157] - Μια καμπύλη και τρεις ευθείες.

[158] - Τι θα λέγατε για την κόκκινη ευθεία; Λευτέρη;

[159] - Τέμνουσα σε καμπύλη.

[160] - Η μπλε; Αντιγόνη

[161] - Εφαπτομένη σε καμπύλη.

[162] - Πέτρος: κυρία διαφωνώ γιατί θα μπορούσε να είναι και τέμνουσα αφού περνάει από ένα σημείο Γ και από ένα άλλο σημείο που δεν το έχετε σημειώσει.

[163] - Αααااااα… Αυτό το είχε παρατηρήσει κανένας άλλος που λέει ο Πέτρος;

[164] - εγώ (πολλές φωνές μαζί)

[165] - Εσύ Μαίρη;

[166] - κι εγώ κυρία αλλά αφού δεν έχει σημείο νομίζω ότι δεν μπορούμε να την πούμε τέμνουσα.

[167] - Αα εννοείς ότι εγώ δεν έχω βάλει όνομα στο σημείο αυτό. Ωστόσο ο Πέτρος το είδε και η Μαρία. Σωτήρη θέλεις να πεις κάτι;

[168] - Ναι αλλά εφόσον δεν έχει σημείο κυρία ***πρέπει να μετρήσουμε τα σημεία που έχουμε.***

[169] - Εδώ θα μπορούσα να έχω βάλει ένα σημείο. Ωστόσο είτε το έχω βάλει είτε όχι το σημείο υπάρχει. Οπότε πρέπει να αποφασίσουμε αν είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη…. Για την πράσινη ευθεία τι θα λέγατε; Γεράσιμε;

[170] - τέμνουσα

[171] - Έχουμε λοιπόν μια αμφιβολία για την μπλε.

[172] - Μαριάννα: Κυρία εγώ δεν έχω

[173] - Τι νομίζεις ότι είναι;

[174] - Είναι εφαπτομένη, αφού δεν έχει σημείο.

[175] - Κάτσε κάτσε να το δούμε λίγο αυτό το πράγμα είναι παρά πολύ εύκολο να βάλλω ένα όνομα στο σημείο (βάζω γράμμα στο σημείο που έλειπε) Τώρα έχει όνομα το σημείο. Τώρα τι έγινε;

[176] - Τώρα εντάξει είναι τέμνουσα.

η συζήτηση μπερδεύεται….

Η εκπαιδευτικός πιστεύει ότι η επόμενη οθόνη θα δώσει λύση στο πρόβλημα που δημιουργήθηκε. Οπότε αποφασίζει να δείξει την επόμενη οθόνη και να επιστρέψει σε αυτήν αργότερα.

[177] - Έχουμε εδώ μία…Μαριάνθη;

[178] - καμπύλη.

[179] - και Γεράσιμε;

[180] - τρεις εφαπτόμενες.

[181] - Εφαπτόμενες για να δούμε…

[182] - Ποια είναι σίγουρα εφαπτόμενη από αυτές η κόκκινη, η μπλε ή η πράσινη;

[183] - Μαρία: η πράσινη. (είναι αυτή που βρίσκεται αριστερά στο σχήμα).

[184] - Μπορείς να μας εξηγήσεις γιατί η πράσινη.

*[185] - Γιατί δεν περνάει **μέσα** από κάποιο σημείο του κύκλου και έχει μόνο ένα σημείο*

[186] - Ωραία πολύ ωραία. έχει μόνο ένα κοινό σημείο.

[187] - Συμπληρώστε στο φυλλάδιο….Άλλη που πιστεύετε ότι είναι εφαπτομένη

[188] - Μαριάννα: Κυρία και οι τρεις είναι εφαπτόμενες επειδή ακουμπάνε σε ένα σημείο

[189] - Λευτέρη: κι εγώ πιστεύω ότι είναι και οι τρεις.

[190] - Γεράσιμος: περισσότερο είναι η ε εφαπτομένη.

[191] - Δήμητρα: εγώ το αντίθετο θεωρώ ότι για την ε είμαι λιγότερο σίγουρη από όλες

[192] - γιατί;

[193] -** για την κ εντάξει το ξεκαθαρίσαμε ότι είναι σίγουρα εφαπτομένη, για την Γ το βλέπουμε πάλι το έχει ένα κοινό σημείο, **η ε όμως ….διέρχεται μέσα …δεν μου μοιάζει και τόσο…

[194] - Δεν της μοιάζει τόσο…

*[195] - Μαίρη: **δεν φαίνεται σαν να ακουμπάει αλλά σαν να χωρίζει***

[196] - Λευτέρης: άμα είναι έτσι ούτε η Γ είναι

[197] - Τώρα παιδιά θα το δούμε από κοντά… Θυμόσαστε την παρατήρηση που είχε πει ο Πέτρος; Μια λέξη είχε πει…

*[198] - Πέτρος: **συμπίπτουν για λίγο***

[199] - πάμε λοιπόν να το δούμε από κοντά. Ξεκινάω από την κ που ήσασταν ξεκάθαροι. Είναι εφαπτομένη; μοιάζει με αυτό που βλέπαμε πριν;

[200] - Η μαύρη γραμμή μοιάζει με τον κύκλο;

[201] - ναι…

[202] - και η πράσινη μοιάζει με την εφαπτομένη;

[203] - ναι…

[204] - και από εδώ μέχρι εδώ τι μοιάζουν να είναι;(δείχνω στην περιοχή γύρω από το σημείο τομής που εμφανίζεται η τοπική ευθύτητα).

[205] - ένα.

[206] - Πάμε τώρα στο άλλο σημείο το Γ. εδώ τι λέτε;

[207] - Μαριάννα: και πάλι είναι εφαπτομένη γιατί η καμπύλη μοιάζει με κύκλο και γίνονται ένα

Πρέπει να υπήρξαν αντιρρήσεις αλλά γίνεται χαμός και δεν ακούγεται, ωστόσο συνεχίζω

[208] - Πάμε και στο Ε. ακούω…

[209] - Πέτρος: όχι

[210] - Θεανώ: τέμνουσα γιατί περνάει ανάμεσα.

[211] - Τι δεν διακρίνεται εδώ που το έβλεπα πριν;

[212] - Μαριάννα: η γραμμή ε να γίνεται ένα με την καμπύλη

[213] - όσο και να το πλησιάσω δεν γίνεται. Θα φαίνεται πιο καθαρά αυτός ο σταυρός.

Άρα για να είναι η όχι εφαπτομένη το πιο σημαντικό είναι να γίνονται ένα.

[214] - Κυρία στο Γ είναι εφαπτομένη;

[215] - Ναι στο Γ είναι εφαπτομένη

Ανακεφαλαιώνω

[216] - Στην αρχή είδαμε την τέμνουσα και την εφαπτομένη στον κύκλο. Μετά είδαμε ότι η τέμνουσα και η εφαπτομένη έχουν μια πιο ευρεία χρήση. Σε ημικύκλιο ή καμπύλη….Εκεί ποιος θα ήταν ο πιο κατάλληλος ορισμός για την εφαπτομένη, Μαριάνθη;

[217] - να συμπίπτουν μεταξύ τους.

Αρχικά οι μαθητές έβλεπαν και τις τρεις ευθείες ως εφαπτόμενες. Μετά όμως η εκπαιδευτικός τους έθεσε το ερώτημα ποια από όλες μοιάζει περισσότερο για εφαπτομένη. Με αυτό το τέχνασμα αρχίζουν να διαφαίνονται τα προβληματικά σημεία της εικόνας της έννοιας. Πρώτα ξεκαθαρίζει η ευθεία ζ που κρατάει όλα τα χαρακτηριστικά της εφαπτομένης του κύκλου (ένα κοινό σημείο και ολόκληρη η καμπύλη στο ίδιο ημιεπίπεδο). Η μαθήτρια

εξηγεί χρησιμοποιώντας τη φράση «*δεν περνάει **μέσα** από κάποιο σημείο του κύκλου*»,το μέσα σημαίνει διαπερνάει. Στη συνέχεια έχουμε ένα ενδιαφέροντα διάλογο μεταξύ δύο μαθητών. Ο πρώτος ισχυρίζεται ότι η ευθεία ε είναι «*περισσότερο*» εφαπτομένη. Το ένα κοινό σημείο διακρίνεται καλύτερα. Ωστόσο η συμμαθήτριά του έχει αντιρρήσεις γιατί διέρχεται μέσα από την καμπύλη. Άλλη μαθήτρια δεν βλέπει την ευθεία να ακουμπάει αλλά να χωρίζει την καμπύλη. Στη φράση «να ακουμπάει» ίσως κρύβεται η τοπική ευθύτητα. Τότε αφυπνίζεται άλλος μαθητής που αρχικά τις έβλεπε όλες για εφαπτόμενες και λέει ότι αν είναι έτσι τα πράγματα τότε ούτε η δ είναι εφαπτομένη εφόσον και αυτή χωρίζει τον κύκλο. Βλέπουμε τον τρόπο που αλλάζει η άποψη των μαθητών οι οποίοι μετέχουν στον διάλογο και παράλληλα τον τρόπο που διαπραγματεύονται τα προβλήματα που έχουν εντοπιστεί σε μεγαλύτερους μαθητές μέσα από έρευνες. Τελικά ο εκπαιδευτικός για να δώσει λύση επαναφέρει στην συζήτηση την τοπική ευθύτητα. Τονίζεται ότι πιο ισχυρό κριτήριο για το αν είναι εφαπτομένη ή όχι αποτελεί η τοπική ευθύτητα. Στη συνέχεια επιστρέφουν στην προηγούμενη οθόνη για να διαλευκάνουν με τα νέα δεδομένα τις ευθείες. Η συζήτηση ξεκινάει από την ευθεία ε που είχε προβληματίσει την τάξη. Ο Πέτρος ιδιαίτερα εύστοχος, επεξεργάζεται τον προηγούμενο διάλογο, οπότε αντιλαμβάνεται ότι είναι εφαπτομένη αλλά ταυτόχρονα και τέμνουσα εφόσον τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

[218] - Πέτρος: θα μπορούσε να είναι και εφαπτομένη και τέμνουσα αφού περνάει από δύο σημεία

[219] - Κ: Πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να το ξεκαθαρίσουμε αυτό. Ήδη είπαμε έναν τρόπο. Αυτό το συμπίπτουν που είπαμε σημαίνει ότι θα κοιτάξω κοντά στο σημείο επαφής. Δεν με νοιάζει τι γίνεται γενικά. Με νοιάζει τι γίνεται κοντά.

[220]** - Ευαγγελία**: άρα δεν μας ενδιαφέρει τι γίνεται στο άλλο σημείο μόνο σε κείνο το σημείο επαφής.

[221] - Κ: Ακριβώς! Μπράβο Ευαγγελία.

[222] - δείχνω το σημείο Ε από κοντά

[223] - Κ: Βλέποντας μόνο αυτήν την περιοχή τι θα λέγατε είναι εφαπτομένη ή όχι

[224] - Μαίρη: θα έλεγα πως πάλι δεν είναι εφαπτομένη γιατί δεν γίνεται ένα

[225] - Κ: Έτσι. Δεν βλέπω το άλλο σημείο αν υπάρχει ή δεν υπάρχει αλλά..

[226] - Ευαγγελία: αποκλείω την εφαπτομένη.

[227] - άλλο σημείο το Λ

[228] - Κ: είναι η μπλε εφαπτομένη;

[229] - όχι

[230] - πάω στο Γ

[231] - Κ: είναι η μπλε εφαπτομένη;

[232] - ναι

[233] - Κ: Τώρα είπαμε ότι η μπλε είναι εφαπτομένη και δεν είναι εφαπτομένη

[234] - είναι διπρόσωπη

[235] - Κ: Πως θα το ξεκαθαρίσουμε αυτό; Έχετε κάποια ιδέα;

[236] - Θεανώ: …εξαρτάται από το σημείο..

[237] - Κ: Μπράβο Θεανώ. Η μπλε είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ, αλλά δεν είναι εφαπτομένη στο σημείο Λ.

Η παρατήρηση του μαθητή που ξεκίνησε τον διάλογο, βοήθησε πάρα πολύ στο να κατευθυνθεί η συζήτηση χωρίς κόπο, στον τοπικό χαρακτήρα της εφαπτομένης. Εστιάζοντας στις περιοχές των σημείων, μπορούσαν να αποφανθούν για το αν ή ευθεία είναι εφαπτομένη ή όχι χωρίς να καταμετρούν σημεία και χωρίς να έχουν ολική άποψη του σχήματος.

Στα παραπάνω στιγμιότυπα διακρίνεται η ανάπτυξη του φαινόμενου της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης (zpd) των μαθητών. Κάποιος από τους μαθητές κάνει μια παρατήρηση που προκαλεί την ανάδυση της zpd ενός άλλου μαθητή. Από την στιγμή που το φαινόμενο ξεκινάει οι συμμετέχοντες κατανοούν ο ένας τις ενέργειες, τα λεγόμενα και τη σκέψη του άλλου. Οι zpds των μαθητών δημιουργούν μια κοινή ζώνη μέσα στην οποία αναπτύσσονται κοινές πρακτικές οι οποίες οδηγούν σε νέα νοήματα που δεν υπήρχαν στο νου τους πριν την έναρξη του διαλόγου.

3.1.2. Στιγμιότυπα της 2ης διδασκαλίας-σχόλια. (τμήμα 1ο)

Η διδασκαλία ξεκινάει με την προβολή του power point. Οι μαθητές αναγνωρίζουν κύκλους, τόξα, ημικύκλια, ευθείες παράλληλες, τρίγωνα. Η εκπαιδευτικός τους ρωτάει τι αναγνώρισαν στις φωτογραφίες από τους δρόμους και τους κόμβους των εθνικών οδών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να γίνει μια συζήτηση πάνω στην έννοια της καμπύλης, την οποία είχαν διδαχθεί και να την ξαναθυμηθούν.

[1] - Γιώργος: Καμπύλες.

[2] - Θυμόσαστε τι είναι οι καμπύλες;

[3] - Κωνσταντίνος: είναι ευθείες οι οποίες έχουν κυκλικό σχήμα; (δειλά)

[4] - Κ: Άμα είναι ευθείες πως θα έχουν κυκλικό σχήμα;

[5] - Μ: Είναι ευθείες (από μαθητή)

[6] - Μπορεί να είναι και ευθείες..

[7] - Σπυριδούλα: Είναι οποιαδήποτε γραμμή.

[8] - Κ: Μες στη λέξη οποιαδήποτε γραμμή υπάρχει η ευθεία;

[9] - Σπυριδούλα: Ναι

[10] -Κ: Υπάρχει ο κύκλος;

[11] -Κίμωνας: Όχι.

[12] -Κ: Δεν είναι μια γραμμή και ο κύκλος;

[13] -Κίμωνας Ναι αλλά είναι κλειστή.

[14] -Κ: Ξαναπές Σπυριδούλα τι είναι καμπύλη;

[15] -Οποιαδήποτε γραμμή

[16] -Κ: Οποιαδήποτε γραμμή δεν προσδιορίζει αν είναι ανοιχτή ή κλειστή. Άρα ο κύκλος είναι καμπύλη;

[17] -Ναι

Ο μαθητής που απάντησε ότι καμπύλες είναι οι ευθείες που έχουν κυκλικό σχήμα [3], είναι αυτός που δυσκολευόταν να αποδεχθεί ότι μια ευθεία είναι καμπύλη στο μάθημα για τις καμπύλες κάποιους μήνες νωρίτερα. Βλέπουμε ότι η ευθεία σαν λέξη μοιάζει να καλύπτει την έννοια της γραμμής γενικότερα. Ή μπορούμε να υποθέσουμε ότι ήθελε να πει γραμμές αντί για ευθείες και άρα κρατάει την πεποίθηση που έχει για τις καμπύλες από την καθημερινή ζωή, ή ότι κάτι του έχει μείνει από την τότε συζήτηση που ενέπλεκε τις ευθείες με τις καμπύλες, αλλά δεν το θυμάται ακριβώς. Σίγουρα όμως υπάρχει ένα κενό στην ορολογία και στον τρόπο εισαγωγής

Στη συνέχεια ξεκινάει η παρουσίαση. Στην πρώτη οθόνη οι μαθητές αναγνωρίζουν τον κύκλο αλλά στη θέση της ευθείας άλλοι βλέπουν χορδή, άλλοι ευθύγραμμο τμήμα και άλλοι ευθεία. Εστιάζεται το ενδιαφέρον στην ευθεία και τον κύκλο, οπότε τους ζητείτε να περιγράψουν τη σχέση που φαίνεται να έχουν μεταξύ τους.

[18] -Κωνσταντίνος: Περνάει μέσα από τον κύκλο

[19] -Χρυσόστομος: Χωρίζει τον κύκλο

[20] -Κ: Σε τι τον χωρίζει αλήθεια;

[21] -Σε δύο ημικύκλια.

[22] -Κ: Είναι ημικύκλια;

[23] -Σε δύο…..μέρη

[24] -Κ: Τα μέρη αυτά πως λέγονται;

[25] -Πάνος: Τόξα;

[26] -Σε δύο τόξα.

[27] -Κ: Είπαμε περνάει μέσα, τον χωρίζει…Άλλες φράσεις;

[28] -Κωνσταντίνος: Τέμνει

[29] -ΤΕΜΝΕΙ. άλλη λέξη που σας έρχεται στο νου;

Οι μαθητές εδώ χρησιμοποιούν τις φράσεις περνάει μέσα από τον κύκλο. Η χρήση της λέξης μέσα αναφέρεται στον κύκλο και είναι απόλυτα φυσιολογική μια που ο κύκλος έχει «εσωτερικά» σημεία σαν κλειστή καμπύλη που είναι. Η χρήση της λέξης «περνάει» και εδώ κρύβει μία δυναμική αίσθηση για την ευθεία. Η απάντηση «τέμνει» τον κύκλο δεν μπορεί να ερμηνευθεί γιατί είναι τόσο πετυχημένη που αφήνει ερωτηματικά ως προς τον αυθορμητισμό της χρήση της. Οι μαθητές δεν σχολιάζουν καθόλου τα δύο σημεία. Οπότε κατευθυνόμενοι από το φύλλο εργασίας απαντούν στο ερώτημα πού συντελείτε η τομή ή ο χωρισμός του κύκλου, και συμπληρώνουν τα δύο σημεία Β και Γ. Στη συνέχεια δίνουν δικές τους ονομασίες για την ευθεία που μόλις περιέγραψαν. Ακούγονται οι λέξεις τεμνόμενη και διαχωριστική. Η εκπαιδευτικός τους ανακοινώνει την αυστηρή ονομασία αυτής της ευθείας και τους ζητάει να την ορίσουν.

[30] -Κ: Τώρα ας δώσουμε έναν ορισμό. Ποια ευθεία θα λέμε τέμνουσα;

[31] -Γιώργος: Τέμνουσα λέγεται η ευθεία που τέμνει τον κύκλο

[32] -Θέλω να απαντάτε και στο ερώτημα που γίνεται αυτό…

[33] -Κίμωνας: Για την ακρίβεια όχι μόνο τον κύκλο …θα μπορούσε να είναι και κάτι άλλο…

[34] -Τώρα ας μιλήσουμε για τον κύκλο, και σε λίγο θα πάμε και στο κάτι άλλο. Πάντως έχεις δίκιο.

[35] -Κώστας: τέμνουσα λέγεται η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

Στο στιγμιότυπο χάνεται η ευκαιρία να μάθουμε τι εννοούσε ο μαθητής λέγοντας «θα μπορούσε να είναι και κάτι άλλο» [33]. Η εκπαιδευτικός δεν του αφήνει και πολλά περιθώρια να εξηγήσει τι εννοούσε. Ο ορισμός προκύπτει εύκολα. Μετά από αυτό η εκπαιδευτικός μετακινεί το σημείο Γ προς το Β με ενεργοποιημένη την εμφάνιση του ίχνους της τέμνουσας. Τα παιδιά δυσκολεύονται να καταλάβουν τι ακριβώς μετακινεί η

εκπαιδευτικός. Βλέπουν ότι μετακινεί την ευθεία. Η εκπαιδευτικός επαναλαμβάνει ξανά και ξανά τη διαδικασία. Πρέπει να «δουν» την μετακίνηση του σημείου Γ προς το Β, ώστε να συνδυάσουν το πλησίασμα των σημείων με την δημιουργία της εφαπτομένης.

[36] -Αααααααααααα!

[37] -Τι έκανα;

[38] -Πάνος: Χαλάσατε τον υπολογιστή.

[39] -Κίμωνας: Τι είναι αυτό …κόνδορας

[40] -….

[41] -Ευγενία: Πόσες τέμνουσες κατασκευάσαμε;…άπειρες.

[42] -Μπορείς να τις μετρήσεις Κώστα;

[43] -Ναι μια μια

[44] -Πάνος: Θα μπορούσαμε αν είχαμε πολύ καλό μάτι και μία ….πινέζα…

[45] -χεχε

[46] -Πόσες κατασκευάσαμε;

[47] -Άπειρες

[48] -Πως τις κατασκευάσαμε αυτές τις τέμνουσες; Κίμωνα;(23.30)

[49] -Βάζαμε συνεχώς ευθείες γραμμές να περνάνε από το σημείο Β.

[50] -Σχεδίασα δηλαδή τις ευθείες; Τι έκανα; (το ξανακάνω). Για πες Κωνσταντίνε.

[51] -Πήραμε το σημείο Γ το μεταφέραμε και βάλαμε όλες τις πιθανές ευθείες από τα σημεία από τα οποία περνάει το Γ

[52] -Για να το ξαναδούμε. Πάλι τι έκανα;

[53] -Ανδρέας:…

[54] -(Γιώργος) Παίρνοντας όλες τις πιθανές θέσεις όπου θα μπορούσε να είναι το σημείο Γ.

[55] -Πιστεύεις ότι κατάφερα τελικά να τις πάρω όλες-όλες;

[56] -όχι

[57] -Πήρα κάποιες

[58] -ναι

[59] - Πάντως το σίγουρο είναι ότι τι μετακίνησα;

[60] -…..

[61] -(Το ξανακάνω)Σπυριδούλα;

[62] -Μετακινώ τις ευθείες.

[63] -Μετακινώ τις ευθείες; Τι μετακινώ ακριβώς;

[64] -τις ευθείες….

[65] -Ξανά (το ξανακάνω). Τι μετακινώ;

[66] -Το σημείο Γ

[67] -Άρα πως κατασκεύασα αυτές τις ευθείες τις τέμνουσες;

[68] -Μετακινήσαμε το σημείο Γ.

[69] -Ωραία. Ας συμπληρώσετε τώρα τα δύο ερωτήματα αυτής της σελίδας.

[70] -…..

[71] -Κωνσταντίνος: Στο πόσες κατασκευάσαμε βάλαμε άπειρες;

[72] -Κίμωνας: ή Πολλές;

Στο στιγμιότυπο αυτό καταρχάς τα παιδιά ενθουσιάζονται από το σχήμα που προκύπτει. Μετά γίνεται διαπραγμάτευση του πλήθους των τεμνουσών. Ένας μαθητής σχολιάζει ότι με μεγάλη προσοχή και παρατηρητικότητα θα μπορούσε κανείς να μετρήσει τις τέμνουσες [44]. Το γεγονός αυτό έχει παρατηρηθεί στην έρευνα. Η ψηφιακή απεικόνιση και οι πεπερασμένες δυνατότητες των υπολογιστών, αφήνουν σε μερικούς μαθητές την αίσθηση του πεπερασμένου (Giraldo, Carvalho & Tall, 2003). Στο τέλος του επεισοδίου διακρίνεται η διαφορά στην χρήση των λέξεων πολλές και άπειρες. Επιβεβαιώνεται η υποψία ότι κάποιοι μαθητές δεν έχουν καταλάβει ότι η εικόνα των τεμνουσών έρχεται να δώσει ώθηση στη φαντασία τους, ώστε να διαισθανθούν ότι μπορεί κανείς να φέρει άπειρες. Η απειρία βεβαίως υπονοείται. Για να διαλύσει την εντύπωση του πεπερασμένου και της δυνατότητας μέτρησης, η εκπαιδευτικός γεμίζει την οθόνη τέμνουσες. Ωστόσο…

[73] -Ναι. Θέλω τα μάτια σας να είναι στο σημείο Γ. Ξαναπαίρνω το σημείο Γ και το μετακινώ το μετακινώ το μετακινώ…

[74] -Θα γεμίσετε όλη την οθόνη κυρία;

[75] -(το κάνω)

[76] -Τέλειο….(ενθουσιάζει τους μαθητές το γέμισμα της οθόνης με ευθείες, δημιουργείται αναστάτωση).

[77] -Τώρα επιβεβαιώνουμε λίγο καλύτερα το άπειρες; Δεν είναι απλώς πολλές.

[78] -Είναι λίγο υπερβολικά πολλές

[79] -(Πλ) Μπορούμε να τις μετρήσουμε ***πάντως****…Θα έλεγα εννιά εκατομμύρια….*

Ο νεαρός μαθητής είναι φοβερά ακριβολόγος, δεν είναι κάτι που παρατηρείται πρώτη φορά. Η διδασκαλία προχωρεί προς την κατασκευή της εφαπτομένης. Σ' αυτή τη διδασκαλία οι μαθητές διστάζουν να απαντήσουν ότι οι ευθείες είναι άπειρες. Βλέπουμε στους διαλόγους [44], [71], [72], [79] ότι τα παιδιά δεν πείθονται για το άπειρο πλήθος των ευθειών. Στην έρευνα κάτι τέτοιο αναφέρουν οι Giraldo, Carvalho & Tall, 2003. Λένε συγκεκριμένα ότι ο πεπερασμένος τρόπος λειτουργίας του υπολογιστή, οι πράξεις που γίνονται πάντα με ρητούς, τα pixels που χρησιμοποιούνται στις παραστάσεις δημιουργούν στους μαθητές, ανεπαρκείς αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών που η φύση τους είναι άπειρη και ενδεχόμενα προκαλούν παρανοήσεις. Η πρόταση των ερευνητών είναι ότι οι συγκρούσεις αυτές όχι μόνο δεν πρέπει να αποφεύγονται αλλά ότι μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά.

[80] -Κοιτάξτε πάλι μετακινώ το Γ. (Επιμένω σ' αυτό το πράγμα*) Που το πλησιάζω;*

[81] -Στο Β.

[82] -Μάλιστα.

[83] -Τι έχω κάνει;

[84] -Έχετε ενώσει το σημείο Γ με το σημείο Β.

[85] -Μάλιστα.

[86] -(Καθαρίζω την οθόνη και αφήνω μόνο την εφαπτομένη)

[87] -Θέλω τώρα να το σκεφτείτε και να μου απαντήσετε στην ερώτηση αν αυτή η ευθεία είναι τέμνουσα ή όχι.

[88] -Συμπληρώστε κάτι από τα δύο

[89] -……

[90] -Αποφασίσατε;

[91] -Ναι

[92] -Πέτρο

[93] -Εγώ λέω ναι, γιατί όπως βλέπουμε και στην εικόνα το σημείο Γ τέμνεται με το σημείο Β.

[94] -Το ναι σημαίνει ναι είναι τέμνουσα... Κωνσταντίνε;

[95] -*Και εγώ ναι έχω βάλει γιατί βρίσκεται πάνω στην ευθεία και* ***τέμνει με απόσταση μη ορατή με το μάτι.***

[96] -Α… μπορείς να επαναλάβεις;

[97] -(επαναλαμβάνει ο Κωνσταντίνος)

[98] -Καταλαβαίνεται τι θέλει να πει ο Κωνσταντίνος; Χρυσόστομε…

[99] -*Ότι είναι τέμνουσα αλλά δεν είναι ορατή με το μάτι..* (κομπιάζοντας)

[100] - Τι δεν είναι ορατό με το μάτι;

[101] - Το άλλο σημείο,

[102] - μάλιστα. Κώστα πως το έχεις γράψει εσύ;

[103] - Κυρία πιστεύω ναι γιατί και αυτή η ευθεία τέμνει τον κύκλο απλώς τα σημεία είναι πολύ κοντά.

[104] - Ωραία θέλει κάποιος άλλος να πει τι έχει γράψει; Ανδρέα..

[105] - Έχω βάλει όχι. γιατί δεν τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία…

[106] - Αλλά σε πόσα σημεία;

[107] - Σε ένα.

[108] - Ωραία (ακούγονται και άλλοι που λένε ότι κι αυτοί βάλανε όχι..)

[109] - Να υπερασπίζεστε την άποψή σας.

[110] - Κυρία δεν διακρίνεται καλά

[111] - Για να δούμε ... Ολυμπία τι κάνω

[112] - Μεγέθυνση. (Τα σημεία Β, Γ ξεχωρίζουν αρκετά)

[113] - Ωχ κυρία (δημιουργείται αναστάτωση)

[114] - Τι παρατηρείτε. Σπυριδούλα;

[115] - Τώρα είναι ορατό με το μάτι ότι τα σημεία δεν είναι το ένα πάνω στο άλλο.

Ενδιαφέρον έχει αρχικά η εξήγηση του μαθητή ο οποίος παραδέχεται ότι η ευθεία είναι τέμνουσα με την φράση [95] με απόσταση μη ορατή με το μάτι. Η χρήση της λέξης απόσταση, παραθέτει στην απόσταση των δύο σημείων. Υποκρύπτεται η έννοια του απειροστού. Ωστόσο στην συζήτηση που ακολουθεί κάποιος άλλος πιστεύει ότι εννοεί ότι το δεύτερο σημείο δεν είναι ορατό με το μάτι. Δεν υπάρχει ουσιαστική αλληλεπίδραση. Τα υποκείμενα δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Παρακάτω, χρησιμοποίησαν τη φράση «απλώς τα σημεία είναι πολύ κοντά» [103] για τα σημεία τομής, πάλι εμφανίζεται η διαίσθηση του απειροστού. Άλλοι υποστηρίζουν την άποψη ότι δεν είναι τέμνουσα, χρησιμοποιώντας ως επιχείρημα ότι έχουν ένα κοινό σημείο. Δεν παρατήρησαν την τοπική ευθύτητα όπως έγινε στην προηγούμενη διδασκαλία, λέγοντας ότι δεν είναι τέμνουσα γιατί δεν έχει μόνο δύο κοινά σημεία με τον κύκλο αλλά πολλά περισσότερα. Στη συνέχεια η τάξη σχολιάζει τη μεγέθυνση. Ένας μαθητής λέει:

[116] - Εγώ κυρία νομίζω πως με βάση τις πληροφορίες που μας δίνει η πρώτη εικόνα δεν είναι τέμνουσα επειδή είναι σαν να είναι ένα σημείο, ενώ με τις πληροφορίες που μας δίνει η κάτω εικόνα (μεγέθυνση) φαίνεται πως είναι.

Η εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να περιγράψουν την διαδικασία κατασκευής αυτής της οριακής τέμνουσας.

[117] - ...Ποια ειδική περίπτωση τέμνουσας είναι;...πως την κατασκευάσαμε βρε παιδιά;

[118] - Α...

[119] - Ανδρέα;

[120] - Μετακινήσατε το σημείο Γ

[121] - Πόσο το μετακίνησα που το πήγα; Το πήγα εκεί; Που προσπάθησα να το πάω; Μάνο;

[122] - Προσπαθήσατε να το πάτε πάνω στο Β

[123] - Πάνω στο Β δηλαδή όσο πιο...

[124] - (μερικές φωνές) κοντά γίνεται

[125] - Πολύ ωραία άρα λοιπόν θέλω αυτό που τώρα ειπώθηκε να το γράψετε στο φύλλο εργασίας. Ποια ειδική περίπτωση τέμνουσας είναι...Έχεις διάθεση Κώστα να μας διαβάσεις τι έχεις γράψει;

[126] - Ναι, η περίπτωση που το ένα σημείο της τέμνουσας είναι πάνω στο άλλο.

[127] - Ωραία. Απλές λεξούλες απλά λογάκια να εξηγήσετε πως κατασκευάστηκε αυτή η ευθεία;....Κωνσταντίνε έγραψες;

[128] - Ναι έγραψα

[129] - Θέλεις να μας διαβάσεις

[130] - Πιστεύω πως η τέμνουσα δημιουργήθηκε μετακινώντας το σημείο Γ

[131] - Εννοείς αυτή η ειδική περίπτωση της τέμνουσας;

[132] - Ναι

[133] - Ωραία. Πέτρο θα μας διαβάσεις τι έχεις γράψει

[134] - είναι η ειδική περίπτωση τέμνουσας που το σημείο Γ είναι όσο πιο πολύ κοντά γίνεται στο σημείο Β.

[135] - Ωραία άλλος που θέλει να διαβάσει; Σπυριδούλα

[136] - Είναι ειδική περίπτωση γιατί για να κατασκευαστεί μετακινήσαμε το σημείο Γ ώστε να βρεθεί πολύ κοντά στο σημείο Β.

[137] - Πάρα πολύ ωραία. Μάνο έγραψες κάτι;

[138] - Είναι ειδική περίπτωση τέμνουσας γιατί προσπαθήσαμε να πάρουμε το σημείο Γ όσο το δυνατόν περισσότερο πάνω στο Β.

Η εκπαιδευτικός προσπαθεί να εκμαιεύσει τη φράση πολύ κοντά και πάλι από τους

μαθητές. Στη συνέχεια τους πληροφορεί ότι αυτή η ευθεία που άλλοι την έβλεπαν σαν τέμνουσα και άλλοι όχι, ονομάζεται εφαπτομένη. Τους ζητάει να συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας τους κάποιο ορισμό για την εφαπτομένη που να περιγράφει τον τρόπο κατασκευής της. Οι μαθητές γράφουν: «*εφαπτομένη κύκλου ονομάζουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο και κατασκευάζεται με την μετακίνηση του ενός σημείου κοντά στο άλλο*» ή «*εφαπτομένη κύκλου ονομάζουμε την ευθεία που το ένα σημείο της μετακινείται προς το άλλο*». Η εκπαιδευτικός εξηγεί ότι η κατασκευή της εφαπτομένης ξεκινάει από τέμνουσα, και αυτό πρέπει να ειπωθεί. Ακολούθως κατασκευάζεται στην οθόνη ένας κύκλος με μια εφαπτομένη, σχεδιασμένη με μη αυστηρό τρόπο. Στόχος ο ορισμός του βιβλίου για την εφαπτομένη.

[139] - Χρησιμοποίησα τον προηγούμενο τρόπο για να την κατασκευάσω; Σπυριδούλα;

[140] - Όχι γιατί δεν μετακινήσαμε το σημείο

[141] - Πριν από τι ξεκίναγα;

[142] - Από τέμνουσα

[143] - Τώρα την έφτιαξα κατευθείαν σωστά;

[144] - Ναι

[145] - Είναι εφαπτομένη;

[146] - Ναι

[147] - Τώρα θέλω έναν ορισμό από τον οποίο να λείπει η κατασκευή. Τώρα το βλέπεται σαν φωτογραφία. Σαν αποτέλεσμα. Δηλαδή πριν περιγράψατε την διαδικασία, τώρα θέλω να περιγράψετε την εικόνα.

[148] - ΚΙΜΩΝΑΣ εφαπτομένη λέγεται η ευθεία που τέμνει το στεφάνι του κύκλου.

[149] - ……

*[150] - Εφαπτομένη του κύκλου λέγεται η ευθεία που **ακουμπάει** τον κύκλο*

[151] - Πολύ ωραία. Άλλος, τώρα θέλω να ακουστεί ο αριθμός των σημείων

[152] - Εφαπτομένη του κύκλου λέγεται η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο.

[153] - Μπράβο Σπυριδούλα. Εφαπτομένη του κύκλου λέγεται η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο

Το ενδιαφέρον σε αυτό το στιγμιότυπο είναι η φράση του μαθητή «ακουμπάει» τον κύκλο, την οποία λέει, τονίζοντας ιδιαίτερα τη φράση. Η εκπαιδευτικός δεν εκμεταλλεύεται το γεγονός ώστε να βγουν περισσότερα συμπεράσματα για το τι ακριβώς εννοεί ο μαθητής. Στο ακόλουθο επεισόδιο μέσα από το πλήθος των εφαπτομένων διαπραγματεύονται το θέμα του απείρου.

[154] - Τι νομίζεται πόσες εφαπτόμενες μπορεί κάποιος να κατασκευάσει πάνω σ' αυτόν τον κύκλο;

[155] - Άπειρες (γιαννης)

[156] - Γιατί άπειρες; Μπορείς να το εξηγήσεις; Γιατί όχι 5, 10, 23, 360;

[157] - Γιατί πριν είδαμε ένα παράδειγμα που μετακινήσαμε το σημείο Γ ΚΑΙ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΝ άπειρες …

[158] - πολύ ωραία, Γιώργο;

[159] - Γιατί μπορεί να έρθει σε πάρα πολύ κοντινή επαφή ώστε να μην ξεχωρίζουν και να χρειαστεί να τις μεγεθύνουμε

Στην επόμενη οθόνη παρατηρείτε το ίδιο φαινόμενο όπως και στην προηγούμενη διδασκαλία. Οι μαθητές δεν μετρούν ως σημαντικό το σημείο τομής της ευθείας ζ με την καμπύλη, επειδή δεν είναι σημειωμένο με κουκκίδα και γράμμα.

[160] - Χριστίνα την κόκκινη ευθεία πως θα την έλεγες;…Με τι μοιάζει από αυτά που έχουμε πει;

[161] - Τέμνουσα

[162] - Τέμνουσα…Χρήστο η πράσινη η ευθεία με τι μοιάζει;

[163] - Τέμνουσα

[164] - Η μπλε ευθεία με τι μοιάζει , Ανδρέα;

[165] - Τέμνουσα.

[166] - Χρυσόστομε

[167] - Η μπλε; με εφαπτομένη.

[168] - Τι λέτε παιδιά; Κώστα

[169] - Συμφωνώ με τον Χρυσόστομο.

[170] - Γιώργο

[171] - Αν είχε σημείο εκεί πέρα που περνάει ξανά η μπλε από την καμπύλη…

[172] - Κίμωνας: περνάει δύο φορές

[173] - Καταλάβατε τι λέει ο Γιώργος εδώ; Ότι έχει κι άλλο ένα σημείο εδώ. Βέβαια δεν έχω βάλει εγώ γράμμα. Βλέπεται η κόκκινη τέμνει στο Ζ και στο Ε, η πράσινη στο Ι και στο Κ, η μπλε στο Γ αλλά και εδώ…

[174] - Γιώργος: εφαπτόμενη και τέμνουσα.

[175] - Κίμωνας: εφατέμνουσα

Η εκπαιδευτικός επιλέγει να πάει στην επόμενη οθόνη.

[176] - Είναι η ίδια η καμπύλη που είχαμε και πριν σωστά; Είδαμε πριν το εξής πρόβλημα. Είδαμε ευθείες που είχαν πόσα κοινά σημεία με την καμπύλη η καθεμιά;

[177] - δυο

[178] - Ωστόσο δεν ήταν όλες τέμνουσες. Η μία ήτανε εφαπτομένη. Πάμε εδώ. Εδώ έχω μία κόκκινη μια μπλε και μια πράσινη ευθεία. Αντωνία η κόκκινη ευθεία πόσα κοινά σημεία έχει με την καμπύλη;

[179] - Ένα το Ε

[180] - Η μπλε…;

[181] - ένα το Γ

[182] - Η πράσινη…

[183] - ένα το Κ

[184] - Στην Κ και στην Γ δεν θα μπορούσε να είναι πιο πολλά επειδή είναι ενωμένη σε κάποια σημεία;

[185] - Σου φαίνονται ότι είναι πιο πολλά εκεί ε; Πως σου φαίνονται αυτά τα πιο πολλά;

[186] - Επειδή όπως είναι η καμπύλη έτσι και … είναι σαν να τέμνονται

[187] - Σαν να ενώνονται. Ο Γιώργος παιδιά έχει παρατηρήσει ότι γύρω από το Κ και το Γ σαν να μοιάζει να ακουμπιούνται πιο πολύ. Για να το φέρω κοντά να δούμε καλύτερα. Το βλέπεται;

[188] - Ωχ

[189] - Δηλαδή παιδιά…αρκετά τόσο αρκεί. Έχω την μπλε ευθεία και την καμπύλη για κοιτάχτε από εδώ μέχρι εδώ τι μοιάζουν; τι κάνουνε;

[190] - ανοίγουν

[191] - τέμνονται

[192] - ακουμπιούνται

[193] - εφάπτονται

[194] - έχουν επαφή

[195] - συναντιούνται

[196] - αγγίζονται μεταξύ τους

[197] - είναι σαν να γίνονται ...

[198] - ένα

[199] - Και η καμπύλη τι γίνεται ξαφνικά είναι σαν να γίνεται κάπως...ευθεία. Το βλέπεται αυτό;

[200] - Κίμωνας…οφθαλμαπάτη

[201] - Πολύ σωστά το λες είναι οφθαλμαπάτη, ωστόσο πρέπει να έχουμε εμπιστοσύνη στα μάτια μας, αυτό που βλέπουμε είναι σημαντικό.

[202] - Τώρα ας μετακινηθούμε προς την άλλη ευθεία. τώρα….εδώ παρατηρούμε το ίδιο πράγμα; Ανδρέα;

[203] - ναι κυρία

[204] - Δηλαδή τι παρατηρούμε; Από εδώ μέχρι εδώ τι κάνουνε η πράσινη ευθεία και η καμπύλη; Χρησιμοποιήστε πάλι μια από τις λέξεις που είπαμε πριν

[205] - συναντιούνται

[206] - Όχι απλώς συναντιούνται αλλά σαν να…

[207] - τέμνονται

[208] - Σαν να….

[209] - ακουμπιούνται

[210] - Θέλω αυτό το πράγμα να ακουστεί (ενώνω τα χέρια μου με δύναμη, κλαπ). Σαν να…

[211] - κολλάνε

[212] - Σαν να…

[213] - γίνονται ένα

[214] - ή αλλιώς να ταυτίζονται. Για λίγο σαν να ταυτίζονται.

Αυτό το σαν να ταυτίζονται είναι το βασικό για να είναι ή όχι εφαπτομένη. Καταλαβαίνεται αυτό που λέω; Αν το δω από κοντά αυτό το σαν να ταυτίζονται είναι η ουσία της εφαπτομένης.

[215] - Κυρία οι καμπύλες δεν μοιάζουν με ημικύκλιο.

[216] - Εδώ μοιάζουνε έτυχε επειδή κάνουμε τον κύκλο και το ημικύκλιο το γνωρίζετε καλύτερα. Για να δούμε τώρα θα πάω και στην άλλη περίπτωση την τρίτη την κόκκινη. Μην ξεχνάτε ότι δεν άλλαξα μεγέθυνση είμαστε στην ίδια μεγέθυνση. Εδώ φαίνεται το ταύτισμα εδώ; Κωνσταντίνε;

[217] - Όχι γιατί εδώ έρχεται κάθετη

[218] - Εδώ έχουμε καθαρή διασταύρωση.

Δεν έχουμε αυτό το ταύτισμα. Άρα με βάση όσα είπαμε πριν θα είναι εφαπτομένη;

Θέλω να έχετε εμπιστοσύνη στα μάτια σας. Τι είπα πριν ότι για να είναι εφαπτομένη πρέπει πολύ κοντά να δημιουργείται αυτό το ταύτισμα. Χρυσόστομε τι λες;

[219] - όχι. ΟΧΙ

[220] - Όχι. Για να γυρίσω πάλι πίσω σε αυτό που μας προβλημάτισε πριν. Το βλέπεται τι πρόβλημα είχαμε; Σπυριδούλα θυμάσαι τι μας προβλημάτισε;

[221] - Αν η μπλε είναι τέμνουσα ή εφαπτόμενη.

[222] - Κοιτάξτε τώρα τι θα κάνω, θα το φέρω κοντά. Ήδη αρχίζει να φαίνεται αυτό που σας έλεγα πριν. Δηλαδή Ανδρέα;

[223] - Ότι η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη γιατί ταυτίζεται με την καμπύλη γραμμή.

[224] - Για να πάω να δω και τις άλλες ευθείες. Εδώ βλέπεται κάποιο ταύτισμα;

[225] - όχι

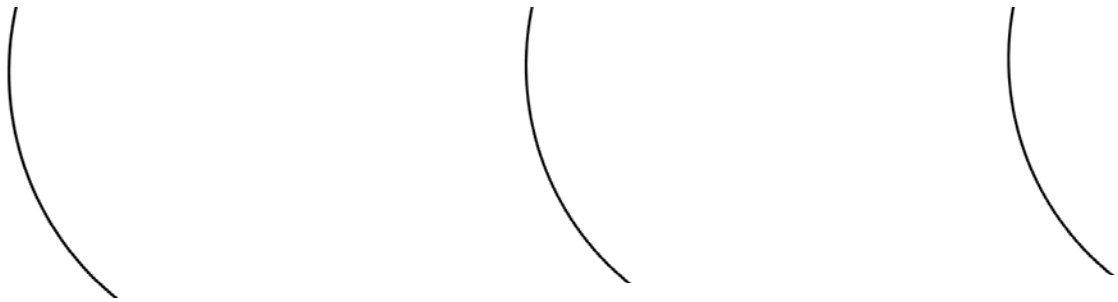
[226] - Τι βλέπεται εδώ; Διασταύρωση. Καθαρή διασταύρωση, όσο και να το φέρω κοντά, πιο κοντά, πιο κοντά, υπάρχει περίπτωση αυτές να ταυτιστούν;

[227] - ΟΧΙ

[228] - Κίμωνας: όσο πλησιάζω θα γίνεται και πιο καθαρή …

[229] - όσο και να το μεγαλώνω δεν χαλάει η εικόνα της διασταύρωσης

Η εντύπωση της τοπικής ευθύτητας παρατηρήθηκε στο τέλος της διδασκαλίας με τον μαθητή να σχολιάζει ότι υπάρχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία [184]. Στη συνέχεια οι μαθητές μιλάνε ο ένας μετά τον άλλο σαν να συμπληρώνονται, προσπαθώντας ο καθένας να βρει την κατάλληλη λέξη για να περιγράψει αυτό που παρατήρησε ο άλλος. Οι προτάσεις είναι ημιτελής. Έχουμε ενδείξεις ανάπτυξης της zpd των μαθητών. Στο κλείσιμο του μαθήματος η εκπαιδευτικός ανακεφαλαιώνει και συγκρίνει τους ορισμούς της εφαπτομένης.



Στο επόμενο μάθημα (και στα δύο τμήματα) βάσει του αναλυτικού προγράμματος, η διδασκαλία περιλάμβανε τις ιδιότητες της εφαπτομένης του κύκλου. Δηλαδή το ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείου του κύκλου και η αντίστοιχη ακτίνα είναι κάθετες, καθώς επίσης και το ότι τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα. Στο κλίμα αυτής της διδασκαλίας επαναδιατυπώθηκαν τα συμπεράσματα του προηγούμενου μαθήματος και συζητήθηκαν απορίες των μαθητών. Επίσης και η νέα διδασκαλία στηρίχθηκε στη σχέση τέμνουσας και εφαπτομένης. Η εκπαιδευτικό ς ξεκινάει και πάλι από τέμνουσα, έχοντας όμως τώρα εμφανίσει την γωνία που δημιουργεί η ακτίνα ΑΓ με την τέμνουσα ΒΓ. Οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να παρακολουθήσουν πως μεταβάλλεται η γωνία όσο το σημείο Γ πλησιάζει το Β και να γενικεύσουν το συμπέρασμα. Τέλος στο επόμενο μάθημα, ζητείτε από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα γραπτό τεστ.

3.2. Αποτελέσματα από την γραπτή εξέταση (τεστ)

3.2.1. Πρώτο ερώτημα-κύκλος

Στο σχήμα φαίνονται τα ποσοστά σωστών απαντήσεων. Κύκλωσε γύρω από τα σημεία που η καμπύλη «γίνεται ένα» με την ευθεία. Η ερευνήτρια γνώριζε εμπειρικά, ότι οι νεαροί μαθητές (δωδεκάχρονοι), δεν κατανοούν εύκολα τι ζητάνε τα ερωτήματα σε γραπτές εξετάσεις. Οπότε εξήγησε αρκετά περιγραφικά την εκφώνηση. Ωστόσο υπήρχαν 5 γραπτά στα 40 (12,5%), όπου οι μαθητές κύκλωσαν όλα τα σημεία τομής. Μετέφρασαν τη φράση «γίνεται ένα» όχι ως τοπική ταύτιση και ευθύτητα, αλλά ως τομή. Επίσης υπήρχαν δύο μαθητές που δεν θεώρησαν τον κύκλο καμπύλη, οπότε και δεν κύκλωσαν καμία περιοχή στον κύκλο. Ο ένας δε από τους δύο κύκλωσε όλα τα υπόλοιπα σημεία, πέφτοντας ουσιαστικά στην προηγούμενη κατηγορία. Ο τελευταίος παρανόησε

εντελώς το ερώτημα, πράγμα που ξάφνιασε την ερευνήτρια-καθηγήτριά του γιατί τον θεωρεί ικανό μαθητή με αναπτυγμένη μαθηματική σκέψη. Τα αποτελέσματα από τον κύκλο είναι πολύ καλά (εξαιρώντας τους μαθητές που δεν κατανόησαν την εκφώνηση) και φαίνονται στο σχήμα. Υπάρχει μια διαφορά 3% (ένας μαθητής), που δεν αντιμετώπισε τα δύο σημεία με τον ίδιο τρόπο. Όμως όπως περιγράψαμε παρακάτω οι μαθησιακές δυσκολίες που εμφανίζουν κάποιοι μαθητές δικαιολογούν την εμφάνιση τέτοιων φαινόμενων.

Τελικά το 73% των μαθητών απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον 9 από τις 11 ερωτήσεις (εξαιρέθηκαν οι μαθητές που κρίθηκε ότι παρανοησαν τι ζητούσε η άσκηση).

3.2.2. Πρώτο ερώτημα-καμπύλη1

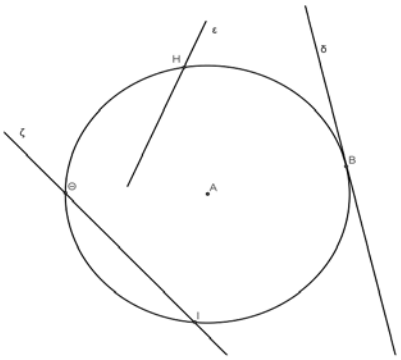
Στη δεύτερη καμπύλη τα σωστά αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια δυσκολία αναγνώρισης στο σημείο καμπής. Και επίσης κάποιοι μαθητές (3), οι οποίοι αντιμετωπίζουν διαφορετικά τα σημεία Γ και Η. Το γεγονό ς (εμφανίζεται σε έναν μαθητή και στο προηγούμενο σχήμα), δεν μπορεί να εξηγηθεί παρά μόνο ως τυχαίο (ο μαθητής επέλεξε τυχαία).

3.2.3. Πρώτο ερώτημα-καμπύλη2

Στο παρακάτω σχήμα καταγράφονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων. Παρατηρώντας το ποσοστό 71% στο σημείο Γ τίθεται το ερώτημα μήπως οι μαθητές που κύκλωσαν την περιοχή (το υπόλοιπο 30%), «διέκριναν» ταύτιση ανάμεσα στα δύο ημικύκλια. Επίσης παρατηρείτε μια δυσκολία στο σημείο Β (κατακόρυφη εφαπτομένη).

3.2.4. Δεύτερο ερώτημα-κύκλος

Επιλογή σωστής-λάθος πρότασης. Στο πινακάκι φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων.

Βάλε ☑ στο κουτάκι που θεωρείς σωστό.  η ε είναι εφαπτομένη στο Η ☐	68%
η δ είναι εφαπτομένη στο Β ☐	95%
η ζ είναι εφαπτομένη στο Θ ☐	83%
η ζ είναι εφαπτομένη στο Ι ☐	88%
η ζ είναι τέμνουσα ☐	95%
η ε είναι τέμνουσα ☐	38%

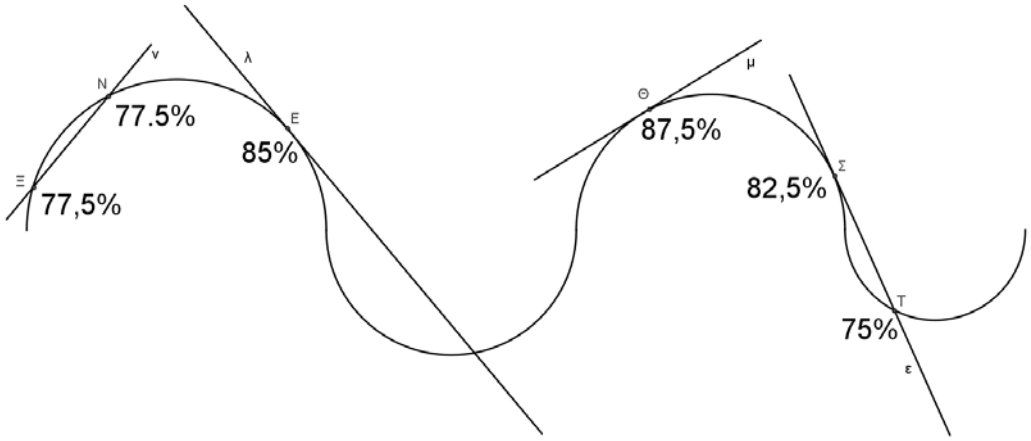
Για την ευθεία δ: το 95% των μαθητών διέγνωσαν σωστά την εφαπτομένη δ στο σημείο Β. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ για τις άλλες ευθείες υπήρχαν δύο αντίθετες προτάσεις που όπως θα δούμε μπέρδεψαν τους μαθητές, για την εφαπτομένη υπήρχε μόνο μία, όπου ή θα την επέλεγαν ή όχι.

Για την ευθεία ζ: 95% των μαθητών (38 άτομα) απάντησαν σωστά ότι είναι τέμνουσα. Ωστόσο το 21% αυτών των μαθητών (8 άτομα), έδωσαν αντικρουόμενες απαντήσεις. Δηλαδή ενώ επέλεξαν ότι είναι τέμνουσα, επέλεξαν επίσης ότι είναι εφαπτόμενη σε κάποιο από τα σημεία τομής. Οπότε μόνο το 75% των μαθητών είχαν ξεκάθαρη άποψη ότι πράγματι η ευθεία ζ είναι τέμνουσα. Ένα άλλο αξιοσημείωτο είναι το ότι 20% των μαθητών (σχεδόν οι ίδιοι που έδωσαν αντικρουόμενες απαντήσεις) δεν είχαν σταθερή άποψη στον τρόπο που αντιμετώπισαν τα σημεία τομής Θ και Ι. Στο ένα θεώρησαν ότι υπάρχει εφαπτομένη ενώ στο άλλο όχι. Η εντύπωση που αφήνουν τα δύο σημεία είναι ίδια. Οι μαθητές είτε απάντησαν τυχαία είτε δεν κατανόησαν τις έννοιες.

Για την ευθεία ε υπήρχαν δύο προτάσεις. Είναι εφαπτομένη στο σημείο Η, ή είναι τέμνουσα. Το 37% των μαθητών δεν επέλεξε καμία πρόταση από τις δύο, ενώ το 7,50% επέλεξε και τις δύο αντικρουόμενες προτάσεις. Το 30% θεώρησαν την ευθεία καθαρά εφαπτομένη και το 25% απάντησε σωστά ότι είναι τέμνουσα. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές παρασύρθηκαν και καταμέτρησαν τα κοινά σημεία. Οι ίδιοι μοιάζει να μην έχουν εσωτερικεύσει την έννοια της ευθείας.

Το 60% των μαθητών απάντησαν σωστά τουλάχιστον 5 από τις έξι ερωτήσεις.

3.2.5. Δεύτερο ερώτημα-καμπύλη 1



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών. Όλες οι προτάσεις στις οποίες έπρεπε ο μαθητής να επιλέξει σωστό ή λάθος, ισχυρίζονταν ότι κάθε ευθεία του σχήματος ήταν εφαπτόμενη σε κάθε σημείο. Παρατηρούμε ότι η ευθεία μ που κρατάει όλα τα χαρακτηριστικά της εφαπτομένης του κύκλου («φαίνεται» να τέμνει σε ένα σημείο και δεν τον διασχίζει) πετυχαίνει το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων, γεγονός αναμενόμενο. Επίσης ικανοποιεί το γεγονός ότι ίδιο ποσοστό μαθητών αντιλαμβάνεται τα σημεία Ν και Ξ με τον ίδιο τρόπο. Μια πιο προσεχτική ματιά στα αποτελέσματα δείχνει ότι υπάρχουν 4 (10%) μαθητές που έδωσαν αντικρουόμενες απαντήσεις για τα σημεία Ξ και Ν απλά μοιράστηκαν οι απόψεις τους και εμφανίζεται αυτή η ισορροπία στο αποτέλεσμα. Από τους 34 μαθητές (85%), που απάντησαν σωστά για την ευθεία λ στο σημείο Ε, 6 μαθητές (17,6%) δεν απάντησαν εξίσου σωστά για την ευθεία ε και το σημείο Σ. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι επηρεάστηκαν από την «ύπαρξη» του σημείου Τ (με κουκίδα και γράμμα). Το φαινόμενο είχε παρατηρηθεί και στις δύο διδασκαλίες, συζητήθηκε με τους μαθητές αλλά δεν φαίνεται να λύθηκε για όλους.

Ωστόσο παρατηρήθηκε και το αντίθετο. Δηλαδή 5 μαθητές από αυτούς που απάντησαν σωστά για την ευθεία ε στο σημείο Σ (15% όσων απάντησαν σωστά), δεν απάντησαν σωστά για την ευθεία λ στο σημείο Ε, γεγονός που δεν μπορεί να ερμηνευτεί.

Συνολικά 62,5% των μαθητών έκριναν σωστά και στις τρεις περιπτώσεις εφαπτομένης. Ενώ το 52,5% είχαν σωστές όλες τις απαντήσεις του ερωτήματος. Ενώ 70% είχαν σωστές τουλάχιστον πέντε από τις έξι ερωτήσεις σωστές.

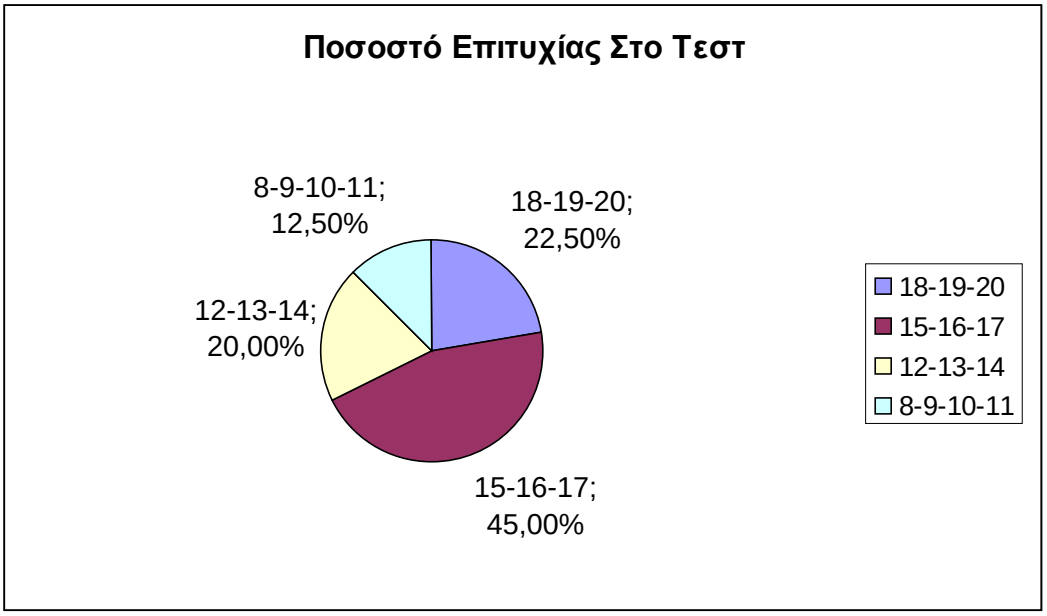
3.2.6.Δεύτερο ερώτημα-καμπύλη 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι σωστές απαντήσεις. Μόνο το 25% θεώρησε εφαπτόμενη την ευθεία α (10 μαθητές στους 40), ενώ το 72,5% θεώρησε εφαπτομένη την ευθεία ξ (29 μαθητές). Για την ευθεία θ στο σημείο Γ ένα σημαντικό ποσοστό 47,5% απάντησε ότι είναι εφαπτομένη. Δεκαοχτώ από τους μαθητές που απάντησαν σωστά για την ευθεία ξ απάντησαν επίσης σωστά και για την ευθεία θ. Ίσως να είναι αυτοί που αντιλήφθηκαν ότι η καμπύλη στα σημεία Β και Γ συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο. Οι υπόλοιποι έντεκα την θεώρησαν εξίσου εφαπτομένη. Κάτι άλλο που παρατηρείτε είναι ότι στο αντίστοιχο σχήμα που υπήρχε στο πρώτο ερώτημα το ποσοστό επιτυχίας ήταν σχεδόν ίδιο. Οπότε ελαχιστοποιείτε η τυχαιότητα ως ερμηνεία του αποτελέσματος.

3.2.7. Τρίτο ερώτημα

Σχεδίαση εφαπτομένων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων. Οι μαθητές σχεδιάζουν σωστά τις εφαπτόμενες στον κύκλο και την έλλειψη. Γεγονός μάλλον αναμενόμενο γιατί μπορεί να μην είχαν ξαναδεί την έλλειψη στη γεωμετρία, αλλά κρατάει πολλές κοινές ιδιότητες με τον κύκλο. Στην καμπύλη το ποσοστό των πετυχημένων απαντήσεων πέφτει. Οι μαθητές που σχεδίασαν λάθος την εφαπτόμενη στην καμπύλη είναι αυτοί που θεώρησαν εφαπτόμενη την α στο προηγούμενο σχήμα.

Τα συνολικά αποτελέσματα του τεστ (σε κλίμακα του 20), φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα. Αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι μαθητές μέχρι και το Γυμνάσιο δεν



υφίσταται κανενός είδους διαχωρισμό ως προς την επίδοσή τους, και ότι το 1/3 περίπου αυτών θα επιλέξει τεχνικό λύκειο, ενώ από τα υπόλοιπα 2/3 που θα επιλέξουν γενικό λύκειο οι μισοί περίπου θα ακολουθήσουν θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση, τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά και μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μαθητές που θα έλθουν κάποιοι στιγμή αντιμέτωποι με την έννοια της εφαπτομένης καμπύλης θα έχουν ίσως ένα εργαλείο παραπάνω να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες. Ίσως το εργαλείο αυτό να μην είναι ακριβώς ο ορισμός της εφαπτομένης, αλλά να είναι η έλλειψη ή έστω η εμφάνιση λιγότερο ισχυρών πεποιθήσεων γύρω από την έννοια της εφαπτομένης.

3.3. Ενδιαφέροντα στιγμιότυπα σε ανύποπτο χρόνο.

Η συζήτηση ύστερα από αρκετές εβδομάδες (2-3) από τη διδασκαλία, επανήλθε στην εφαπτομένη, μετά από απαίτηση των παιδιών να συζητηθούν τα αποτελέσματα του τεστ. Αυτή η επανάληψη και η εξήγηση των λαθών από τα παιδιά και την εκπαιδευτικό, έδωσε την ευκαιρία να ξανασυζητηθούν πράγματα και να ξεκαθαριστούν παρανοήσεις των μαθητών. Το εντυπωσιακό παρατηρήθηκε αρκετό καιρό αργότερα, όταν η εφαπτομένη είχε πια «ξεχαστεί», και η ύλη είχε φτάσει παρακάτω στα τρίγωνα. Εκεί η εκπαιδευτικός ετοιμάζεται να αποδείξει με τους μαθητές ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Συχνά όταν σχεδιάζει κάτι, ρωτάει τους μαθητές τι νομίζουν ότι είναι αυτό, ή τους ζητάει να μαντεύσουν (να κάνουν μια εικασία) για το που θα οδηγήσει η διαδικασία. Έτσι λοιπόν ενώ έχει σχεδιάσει ένα τρίγωνο, φέρνει μια ευθεία παράλληλη στη βάση του τριγώνου χωρίς

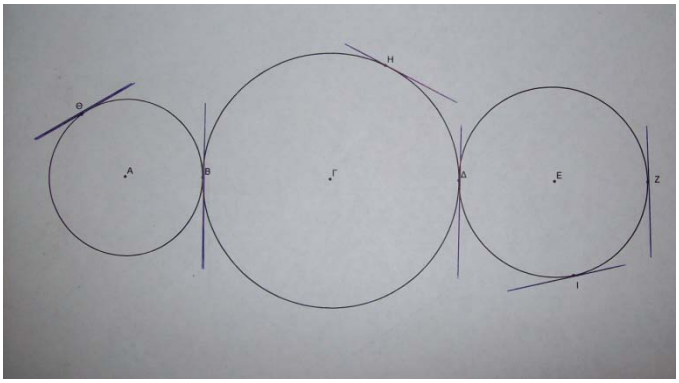
αυστηρό σχεδιασμό και χωρίς να τους ανακοινώσει τι είδους ευθεία είναι, και τους ρωτάει αν έχουν κάποια υπόνοια για το τι είδους ευθεία είναι αυτή. Ουσιαστικά θέλει να επιβεβαιώσει αν οι μαθητές διακρίνουν ή υποθέτουν την ύπαρξη παράλληλων ευθειών σε ένα σχήμα. Τότε κάποιοι μαθητές ενθουσιασμένοι ζητάνε το λόγο και απαντούν ότι πρόκειται για εφαπτομένη. Η εκπαιδευτικό ς εκπλήσσετε (δεν περίμενε κάτι τέτοιο), ωστόσο τους ρωτάει εφαπτομένη που; Οι μαθητές απαντούν στην καμπύλη, ακούγεται η άποψη ότι έχουν ένα κοινό σημείο. Εκεί γίνεται κάποια συζήτηση πάλι για την καμπύλη (κάπο ι μαθητές δεν θεωρούν το τρίγωνο καμπύλη λόγω της κλειστότητάς του). Δίνεται το παράδειγμα του κύκλου που είναι μια κλειστή καμπύλη. Τελικά η εκπαιδευτικός διατυπώνει το ερώτημα: «Είναι η ε εφαπτομένη στην καμπύλη;» η χροιά της φωνής της αφήνει να διαφανεί κάτι «πονηρό» στην ερώτηση. Τότε ενθουσιασμένα ακούγεται η άποψη: «όχι κυρία, γιατί δεν γίνονται ένα». Εντυπωσιακό το στιγμιότυπο και απρόσμενο. Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι ότι το περιστατικό επαναλήφθηκε ακριβώς ίδιο, την επόμενη ώρα, με το επόμενο τμήμα. Φαίνεται λοιπόν ότι η εφαπτομένη, το ένα κοινό σημείο και η τοπική ευθύτητα, συνυπάρχουν στο μυαλό των μαθητών. Και είναι στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού, να εκμεταλλευτεί τις ευκαιρίες που θα δημιουργηθούν στο μέλλον και να επανέρχεται στην έννοια ξανά και ξανά.

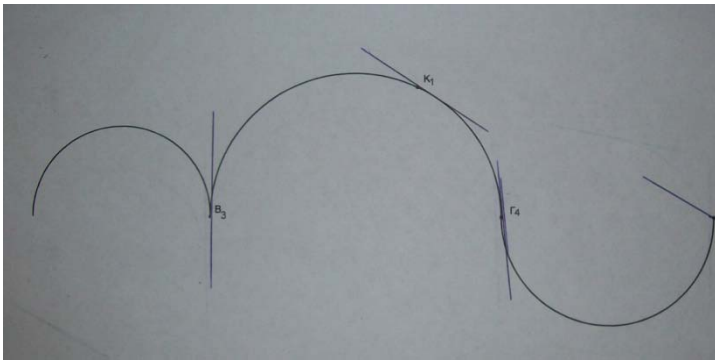
Αυτό το γεγονός έβαλε την εκπαιδευτικό στον πειρασμό να «παίξει» και πάλι με την εφαπτομένη, λίγο πριν την παύση των μαθημάτων για τις διακοπές του Πάσχα (ουσιαστικά το κλείσιμο της σχολικής χρονιάς). Αυτή τη φορά σχεδιάζει τρεις άνισους κύκλους στη σειρά (εφάπτονται εξωτερικά) και ζητάει από τους μαθητές να σχεδιάσουν εφαπτόμενες σε μερικά σημεία (στα σημεία επαφής και σε κάποια άλλα τυχαία). Στη συνέχεια κόβει από αυτούς τους κύκλους το ένα ημικύκλιο και αφήνει το άλλο, οπότε σχηματίζεται μια καμπύλη. Ζητάει από τους μαθητές να φέρουν εφαπτόμενες στα ίδια σημεία. Τα δύο σχήματα δεν βρίσκονται στην ίδια σελίδα. Πρώτα μοιράζεται στους μαθητές η σελίδα με τους κύκλους και στη συνέχεια η σελίδα με την καμπύλη. Το τεστ το μοιράζει στο ένα τμήμα.

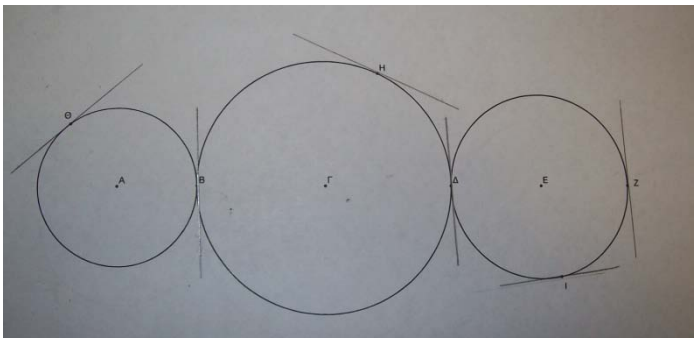
Στόχος είναι να διερευνήσει τις διαισθήσεις που έχουν δημιουργηθεί στους μαθητές λίγους μήνες μετά τη διδασκαλία. Η επιλογή των σχημάτων δεν είναι τυχαία. Αν οι μαθητές

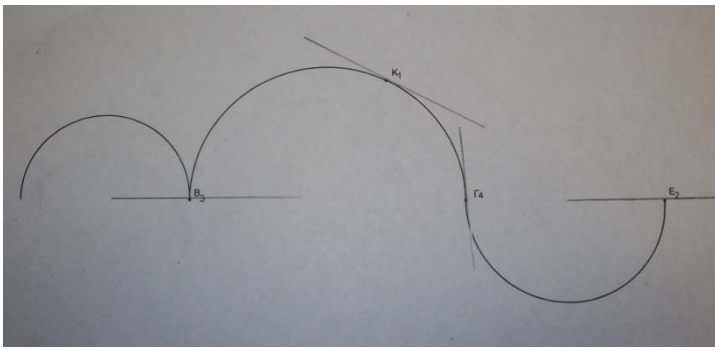
διακρίνουν τη σχέση των δύο σχημάτων τότε αναμένεται να σχεδιάσουν και τις αντίστοιχες σωστές εφαπτόμενες. Αν όχι, τότε θα φανούν εντυπώσεις για το πώς επιδρά η ίδια η καμπύλη στην επιλογή των μαθητών, κυρίως στα γωνιακά σημεία, στα σημεία καμπής και στα σημεία που επιδέχονται κατακόρυφη εφαπτομένη.

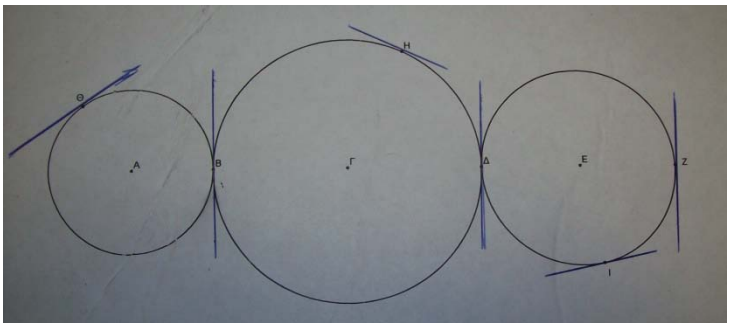
Μοιράστηκαν 17 τεστ. Οι 11 μαθητές σχεδίασαν σωστά τις εφαπτόμενες και στα δύο σχήματα. Οι υπόλοιποι 6 ενώ σχεδίασαν σωστά τις εφαπτόμενες στους κύκλους δεν τα κατάφεραν στην καμπύλη. Έχει ενδιαφέρον να δούμε τι σχεδίασαν μερικοί από αυτούς.

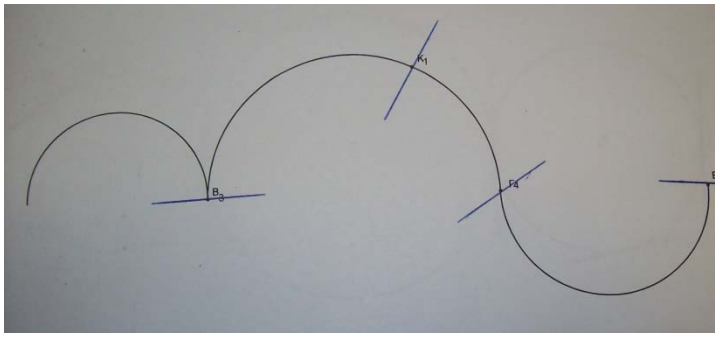


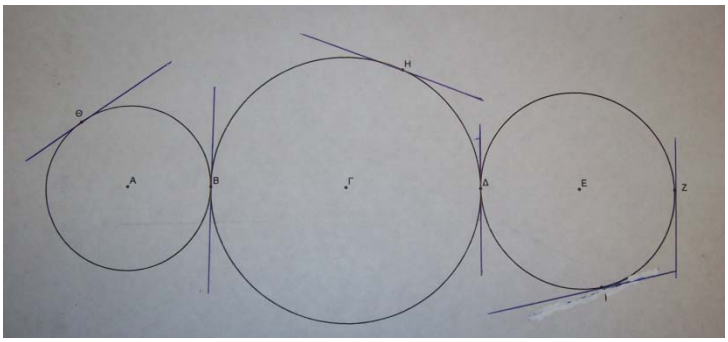


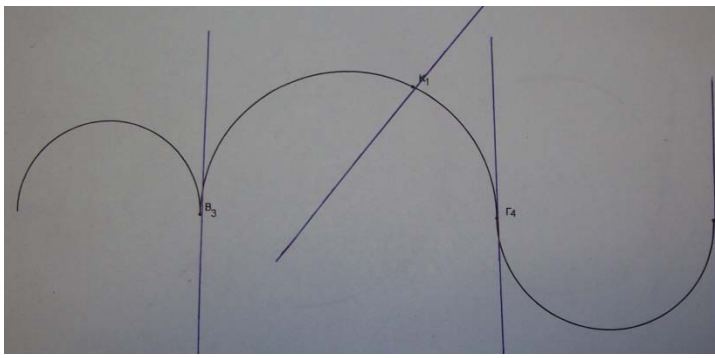












3.4. Συζήτηση-Συμπεράσματα.

Η επιλογή του θέματος και ο σχεδιασμός μιας διδασκαλίας με δυνατότητες εμβάθυνσης σε έννοιες, τις οποίες οι μαθητές θα συναντούσαν λογικά αρκετά χρόνια αργότερα, καθιστά την έρευνα πρωτότυπη και παράτολμη. Η ερευνήτρια ένιωθε αρκετή αβεβαιότητα για την έκβαση του εγχειρήματος. Μια πιλοτική φάση, θα ήταν απαραίτητη. Θα ανέδιδε λάθη στο σχεδιασμό της διδασκαλίας, θα οριοθετούσε σε μεγάλο βαθμό τις δυνατότητες των μαθητών και έτσι θα μπορούσε η ερευνήτρια να καθορίσει στόχους με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση ως προς την επίτευξή τους. Ωστόσο οι συνθήκες δεν το επέτρεψαν. Πρώτον ο χρόνος πίεζε. Δεύτερον οι μαθητές που θα αποτελούσαν την πιλοτική ομάδα, έπρεπε να πληρούν κάποιες προϋποθέσεις: έπρεπε να μην είχαν διδαχθεί την εφαπτομένη του κύκλου, και να είναι διαθέσιμοι εκτός σχολικού ωραρίου. Τελικά δεν μπόρεσε να βρεθεί κατάλληλη ομάδα και δεν υλοποιήθηκε η πιλοτική φάση.

Η ερευνήτρια ένιωθε αβεβαιότητα ως προς την επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης, ως προς το τι δύναται οι μαθητές να κατανοήσουν, ως προς τη δυνατότητα επίτευξης των στόχων. Υπήρχε από την μια η αγωνία να πετύχει η διδασκαλία, δηλαδή να φανερωθούν οι έννοιες στους μαθητές, να παρουσιαστεί αλληλεπίδραση, και από την άλλη όταν αυτό καθυστερούσε, το δίλλημα αν έπρεπε «να στείλει το μήνυμα» με τον φόβο μήπως στερήσει από τους μαθητές ευκαιρίες μάθησης. Τελικά στις περισσότερες περιπτώσεις κάνει

υπομονή αφήνοντας την αλληλεπίδραση να φέρει την εξέλιξη στην διαδικασία. Οι μαθητές εκπλήσσουν με τις παρατηρήσεις τους και την ωριμότητα που αντιμετωπίζουν ο ένας τον άλλον. Το πιο σημαντικό είναι ότι ακούν ο ένας τον άλλο και ακούγονται φράσεις όπως «*...και πάλι έχει δίκιο η Ελένη μπορεί να είναι μηδαμινή η απόσταση…*», ή «*…εγώ ήθελα να πω ότι αυτό που είπε ο Γιάννης είναι σαν αυτό που σκέφτηκα…*».

Δε λείπουν όμως και οι φορές που η ερευνήτρια δεν ακούει τον μαθητή. Όπως στο διάλογο [33],[34] στην δεύτερη διδασκαλία όπου δεν προκαλεί τον μαθητή να εκφράσει τη σκέψη του, αλλά μάλλον άκομψα τον παρακάμπτει. Ή σε άλλο σημείο [49] της πρώτης διδασκαλίας όπου δεν μοιάζει να ακούει την παρατήρηση του μαθητή για την ύπαρξη ή όχι των άπειρων τεμνουσών. Αλλού πάλι δεν εκμεταλλεύεται στο έπακρο τις ευκαιρίες που παρουσιάζονται. Όπως στο σημείο [90] της πρώτης διδασκαλίας όπου χάνεται η ευκαιρία να τονιστεί η μοναδικότητα της εφαπτομένης, η οποία και δυστυχώς δεν αναφέρεται καθόλου στις διδασκαλίες.

Ως προς το σχεδιασμό της διδασκαλίας ήταν πετυχημένο το παρακάτω σχήμα. Το ότι δεν ήταν σημειωμένο το δεύτερο κοινό σημείο της ευθείας ε με την καμπύλη, προκάλεσε διγνωμία για το κατά πόσο η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη ή όχι. Ο σχεδιασμός αυτός δεν ήταν συνειδητός, οπότε και η συζήτηση που προκάλεσε ήταν αναπάντεχο ευτύχημα. Προκάλεσε παραγωγική συζήτηση και οδήγησε στην αναζήτηση τρόπου διάγνωσης της εφαπτομένης. Το γεγονός ότι το συμβάν εμφανίστηκε και στα δύο τμήματα διδασκαλίας, δεν μοιάζει τυχαίο. Επίσης αν το σημείο βρίσκονταν στη θέση του σημειωμένο εξ' αρχής, οι μαθητές θα θεωρούσαν την ευθεία τέμνουσα και δύσκολα θα αναπτυσσόταν η υπόλοιπη συζήτηση. Άλλωστε όταν στο ένα τμήμα, έβαλα στο σημείο όνομα όταν συζητήθηκε το θέμα, η αντίδραση ήταν θετική και η άποψη που επικράτησε χωρίς αντίρρηση ήταν ότι τώρα πρόκειται ξεκάθαρα για τέμνουσα. Στο ίδιο σχήμα υπήρχε και ένα άλλο σχόλιο ενδιαφέρον και πάλι και στα δύο τμήματα. Οι μαθητές είπαν ότι πρόκειται για εφαπτομένη και τέμνουσα ταυτόχρονα, μάλιστα εφηύραν και κατάλληλη ονομασία εφατέμνουσα. Το φαινόμενο παρατηρήθηκε και στις δύο διδασκαλίες. Η εκπαιδευτικός ξαφνιάστηκε και απόφυγε το σχόλιο. Αλλά τελικά οι μαθητές είχαν δίκαιο. Εφόσον η εφαπτόμενη είναι τοπική έννοια, είναι εφαπτόμενη στο σημείο τάδε αλλά ολικά

είναι τέμνουσα. Και εδώ μπορούμε να πούμε η εκπαιδευτικός άφησε ανεκμετάλλευτο το γεγονός (το οποίο επίσης παρουσιάζεται και στις δύο διδασκαλίες, οπότε και πάλι δεν μοιάζει τυχαίο). Ήταν καλή ευκαιρία για να μιλήσει για τον τοπικό χαρακτήρα της εφαπτομένης σε αντιδιαστολή με τον ολικό χαρακτήρα της τέμνουσας.

Ένα άλλο γεγονός που πραγματοποιήθηκε και στις δύο διδασκαλίες, αβίαστα και αυθόρμητα από τους μαθητές, ήταν η παρατήρηση της τοπικής ευθύτητας. Ένας μαθητής λέει ότι *η εφαπτομένη δεν έχει ένα κοινό σημείο με την καμπύλη γιατί υπάρχουν και άλλα κοινά σημεία μικρότερα*. Άλλος λέει ότι δεν είναι τέμνουσα για τον ίδιο λόγο. Δηλαδή *η ευθεία συμπίπτει με κάποια σημεία του κύκλου και άρα δεν είναι μόνο δύο τα κοινά σημεία*. Στην πρώτη διδασκαλία η παρατήρησε έγινε από την αρχή της διδασκαλίας, οπότε σχολιάστηκε και δόθηκε η ευκαιρία να ειπωθεί ξανά και ξανά. Ενώ στη δεύτερη διδασκαλία η παρατήρησε έγινε προς το τέλος κάπως από τυχαία και οριακά για να δώσει τελικά τις εξηγήσεις που ήταν και απαραίτητες και αποτελούσαν το στόχο του εγχειρήματος.

Η διδασκαλία, παρ' όλες τις αδυναμίες που σχολιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, πήγε καλά, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν. Έδειξαν ενδιαφέρον, δημιουργήθηκε αλληλεπίδραση, ακόμη και οι πιο αδύναμοι μαθητές συμμετείχαν σε κάποιο βαθμό. Το δίωρο κύλησε ευχάριστα και ξεκούραστα. Οι ίδιοι οι μαθητές σχολίασαν πόσο γρήγορα πέρασε η ώρα με το μάθημα.

Το τεστ που έγραψαν είχε απροσδόκητα υψηλή βαθμολογία, για πολλούς από αυτούς. Ήταν ένα τεστ εντυπώσεων, δεν στηριζόταν σε μελέτη στο σπίτι, ούτε σε ασκήσεις που έπρεπε να λυθούν. Έτσι έδωσε τη δυνατότητα σε όλους κάτι να σημειώσουν και να απαντήσουν. Αυτό τους γέμισε αυτοπεποίθηση και χαρά. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο μαθητές από τη Συρία που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τη γλώσσα, (και αυτός είναι ένας λόγος που τους κρατάει γενικά μακριά από τη διαδικασία της συμμετοχής στην τάξη), έγραψαν 1 4 ,(ενώ η βαθμολογία τους είναι περίπου 9) Μια άλλη μαθήτρια χαμηλών επιδόσεων, πέτυχε 19. Από την άλλη ανέδειξε και ένα πρόβλημα, που σχετίζεται με τους μαθητές υψηλών επιδόσεων. Το 100% δεν ήταν εύκολα επιτεύξιμο, μια που δεν στηριζόταν σε μελέτη ή εξάσκηση (όπως προαναφέρθηκε) αλλά σε κατανόηση. Έτσι πήγαν πολύ καλά αλλά όχι άριστα, (μόνο ένας μαθητής πέτυχε 100% σωστές απαντήσεις).

Το πιο σημαντικό βέβαια, στην όλη υπόθεση, είναι ότι οι μαθητές φάνηκαν έτοιμοι να διαπραγματευτούν αυτές τις έννοιες και οι στόχοι επιτεύχθηκαν. Τουλάχιστον οι στόχοι της διδασκαλίας, οι βραχυπρόθεσμοι. Η απήχηση που θα έχει αυτή η διδασκαλία στο μέλλον

είναι κάτι που θα είχε τρομερό ενδιαφέρον να το παρακολουθήσουμε, ωστόσο δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Ένα μεγάλο πρόβλημα για την μετέπειτα πορεία της έρευνας, είναι η μεγάλη διασπορά των μαθητών μετά το γυμνάσιο. Ένα ποσοστό θα μετακινηθεί προς την τεχνική εκπαίδευση, ένα άλλο προς τη θεωρητική κατεύθυνση. Οπότε το προς μελέτη δείγμα μικραίνει δραματικά. Ωστόσο θα άξιζε τον κόπο να επιβεβαιωθούν ή να αντικρουστούν οι ενδείξεις που αφήνει αυτή η έρευνα, τουλάχιστον ως προς τις δυνατότητες των νεαρών μαθητών. Όπως ισχυρίζεται και ο Ken Robinson τα άτομα έχουν μια γενεσιουργή φαντασία και αντίληψη που φθίνει κάτω από την πίεση της ηλικίας και της εκπαίδευσης. Όσο πιο νεαρά προλάβουμε τα άτομα, τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα υπάρχει να διαγνώσουν και να σχολιάσουν λεπτά ζητήματα που συμβαίνουν στα μαθηματικά κάτω από το φαίνεσθε.

Μέσα από τη διδασκαλία φανερώθηκαν κάποιες παρανοήσεις των μαθητών γύρω από την έννοια του σημείου. Τα σημεία χαρακτηρίστηκαν ως μικρά ή μεγάλα, αλλού φάνηκε να έχουν οντότητα, μέσα ή έξω από το σημείο, και αλλού η ύπαρξη του σημείου ήταν συνυφασμένη με την ύπαρξη ή όχι γράμματος που να το προσδιορίζει. Πολλές από αυτές έγινε προσπάθεια να λυθούν την ώρα του μαθήματος. Ωστόσο τέτοια θέματα απαιτούν χρονική διάρκεια και εκμετάλλευση κάθε ευκαιρίας που εμφανίζεται μέσα στην τάξη, για να λυθούν. Ίσως μια έρευνα στην Β' γυμνασίου, όπου οι βασικές έννοιες θεωρούνται γνωστές και δεν επαναδιαπραγματεύονται, να ανέδιδαν κάποιες από αυτές τις παρανοήσεις.

Ένα άλλο στοιχείο που φαίνεται ότι κρύβει παρανοήσεις και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως πεδίο έρευνας, είναι οι αντιλήψεις των μαθητών για την καμπύλη. Τη διαδρομή που ακολουθεί η καμπύλη στις διαισθήσεις των μαθητών από τις πρωτογενείς στις τελευταίες στην Γ λυκείου.

Βιβλιογραφία

Artique, M., Didirem, E.: 1997, 'Teaching and learning elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?', *In Proceedings of First Mediterranean Conference on Mathematics G. Makridis, 207 – 219, Nicosia, Cyprus.*

Aspinwall, L., Kenneth, L., Presmeg, S.C., Presmeg, N.C.: 1997, 'Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative', *Educational Studies in Mathematics,* 33: 301–317, 1997, *Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands.*

Biza, I.: 2007, 'Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines', *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, D. Küchemann Edition.*

Biza, I.: 2008, 'Students' intuitive perspectives on the tangent line in the context of Analysis', *Unpublished PhD in Mathematics Education, University of Athens, Athens, Greece.*

Biza, I.: 2008, 'Model of students conceptions about the tangent', Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education, Mexico.

Biza, I.: 2010, 'Evolution of Mathematical Discourse with the Mediation of Electronic Environment: The case of Tangent Line', *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Biza, I.: 2011, 'Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space', Published online: http://link.springer.com/article/10.1007/s10758-011-9180-3#page-1, Springer Science+Business Media B.V. 2011

Biza, I., Soyoul, A., Zachariades, T.: 2005, 'Conceptual change in advanced mathematical thinking', *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Spain 17-21 February 2005.

Biza, I., Zachariades, T.: 2006, 'Conceptual change in advanced mathematical thinking: the case of tangent line', in J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 1, 168–170. Prague, Czech Republic.

Biza, I., Christou, C. and Zachariades, T.: 2008, 'Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis', *Mathematics Education*, 10: 1, 53 — 70.

Biza, I., Zachariades, T.: 2010, 'First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line', *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 218–229.

Boero, P., Douek, N., Garuti, R.: 2003, 'Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context', *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13-18, 2003), v2 p121-128.*

Clements D., Sarama J.: 2010, 'Learning Trajectories in Early Mathematics-Sequences of Acquisition and Teaching', *Encyclopaedia on Early Childhood Development,* www.child-encyclopedia.com

Diković, L.: 2009, 'Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level', *Computer Science and Information Systems, Vol. 6, No. 2, 191-203.*

Dreyfus, T. (1991), 'Advanced mathematical thinking', In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eves, H.: (1990), «Οι μεγάλες στιγμές των μαθηματικών», *τ. 2ος, εκδόσεις Τροχαλία.*

Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P.: 1979, "The Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematics* 10, 3-40, *by D. Reidel Publishing Co., Dordreeht, Holland, and Boston, U.S.A.*

Harel, G., Sowder, L.: 2005, 'Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development', *Mathematical Thinking and Learning, 7(1), 27–50, Copyright © 2005, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.*

Harel G., Tall D.: 1991, 'The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics', *Learning of Mathematics II,I*

Holton, D., Clarke, D.: 2006, 'Scaffolding and metacognition', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology'*, 37:2, 127-143.

Jirotková, D., Littler, G.: 2004, 'Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context', *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 3 pp 97–104.*

Kattou, M., Michael T., Kontoyianni, K., Christou C., Philippou, G.: 2009, 'Teachers' perceptions about infinity: a process or an object?', *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010.*

Kajander, A., Lovric, M.: 2009, 'Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 40, Issue 2, 2009.*

Mali, A., Biza, I., Kaskadamis, M., Potari, D., Sakonidis, C.: 2013, 'Integrating technology into teaching: new challenges for classroom mathematical meaning construction', *Proceedings of CERME 8, 6-10 February2013, Antalya, Turkey.*

Monaghan, J.: 2001, 'Young Peoples' ideas of Infinity', *Educational Studies in Mathematics,* 48: 239–257, *Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands.*

Orton, A.: 1983, 'Student's understanding of differentiation', *Educational Studies in Mathematics, 14 (1983), pp. 235–250*

Sfard, A.: 2001d, 'There is More to Discourse than Meets the Ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before', *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 13-57.

Simon, M. & Tzur, R.: 2004, 'Explicating the Role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory', *Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.*

Tall, D. O., Vinner, S.: 1981, 'Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity', *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Tall D.O.: 1986, 'Constructing the Concept Image of a Tangent', in J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E., Vol III, 69-75, Montreal, Canada.*

Tall D.O.: 1988, 'Concept Image and Concept Definition', *Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, 37–41.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1998, 'Realistic Mathematics Education as work in progress', http://www.staff.science.uu.nl/~heuve108/download/

Van den Heuvel-Panhuizen M., Teppo A.: 2007, 'Tasks, teaching sequences, longitudinal trajectories: about micro didactics and macro didactics', *Presentation at PME 31, Seoul, Korea, 8-13 July, 2007.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: 2005, 'Can scientific research answer the "what" question of mathematics education?', *Cambridge Journal of Education*, 35 (1), 35–53.

Vinner, S.: 1991, 'The role of definitions in the teaching and learning of mathematics', In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vinner S.: 1983, 'Conflicts *between* definitions and intuitions: the case of the tangent', Proceedings of P.M.E. 6, Antwerp.

Βλάχος, Α.: 2010, «Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού», *Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών*, Ανακτήθηκε από: http://nemertes.lis.upatras.gr

Δάσιος, Γ.: 2003, «Ο ρόλος των Μαθηματικών στην κοινωνία και των μαθηματικών στην τάξη», *Ευκλείδης γ΄-περιοδικό μαθηματικής παιδείας,* 59, 66-81.

Ζαχαριάδης, Θ., κ.α.: 2007, «Διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης με Χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας», *GALGEO 118982-CP-1-2004-1-GR-COMENIUS-C21, Αθήνα, Ανάκτηση από* http://www.math.uoa.gr/calgeo/docs/6.2.1.book.CalGeo.gr.pdf

Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Δ., Στουραΐτης, Κ., κ.α.: 2011, «Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου», *Πράξη «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη», Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ.,* Ανακτήθηκε από: http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/Μαθηματικά/Επιμορφωτικό%20Υλικό%20Μαθηματικών.pdf

Θωμαΐδης, Ι.: 2012, «Η διδασκαλία των Μαθηματικών στα νέα Προγράμματα Σπουδών Γυμνασίου & Λυκείου», Ανάκτηση από: http://dide.ker.sch.gr/emekerkyra/Thomaidis_eisigish_kekryras%20_16-3-2012.pdf

Θεοδωρόπουλος, Π.: 2010, «Αφαίρεση και Γενίκευση στα Μαθηματικά», Ανακτήθηκε από: http://www.p-theodoropoulos.gr

Κλαουδάτος, Ν.: 1996, *«Σημειώσεις του μαθήματος Διδακτική των μαθηματικών»*, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κλαουδάτος, Ν.: 2011, *«Εισαγωγή στη Θεωρία της Διδασκαλίας»*, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κυνηγός, Χ., Ψυχάρης, Γ., Γαβρίλης, Κ., Κείσογλου, Σ.: 2010, *«Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης»*, τεύχος 4: κλάδος ΠΕ03, ΕΑΙΤΥ, Πάτρα.

Λάππας, Δ., Σπύρου Π.: 2000, «Από την ιστορία της καμπύλης», *Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 53, 11-42, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.*

Μέρρης, Δ.: 2009, «Ποια χαρακτηριστικά αρμόζουν στη Σχολική Διδασκαλία», *Το φ-περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα μαθηματικά*, 6, 335-339.

Πατρώνης, Τ.: 2001, «Θεμελιώδεις Μαθηματικές Έννοιες και Παιδική Σκέψη», *εκδόσεις Δίπτυχο, Αθήνα.*

Σακονίδης, Χ.: 2007, «Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση: μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση», στο Φραγκουδάκη, Α. & Δραγώνα, Θ. (επιμ.), *«Πρόσθεση*

όχι αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση»- Μια μεταρρυθμιστική παρέμβαση στην εκπαίδευση: η περίπτωση της μειονότητας της Θράκης, Αθήνα, Μεταίχμιο.

Σακονίδης, Χ.: 2007, «Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά», στο Χοντολίδου, Ε. (επιμ.), *«Διδασκαλία και αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών»*, Αθήνα, ΥΠΕΠΘ, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Σακονίδης, Χ.: 2007, *«Διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο-Προτάσεις για την αξιοποίηση του διδακτικού υλικού»*, Αθήνα, Ε.Κ.Π.Α.

Χριστοφόρου, Δ., Κουρουνιώτης, Χ., Μπιζά, Ε., Ναρδή Ε.: «Εναλλακτική Μορφή Διδασκαλίας των Συναρτήσεων στη Β΄ Γυμνασίου με Χρήση Νέων Τεχνολογιών», *Πρακτικά συνεδρίου Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές, ΕΝΕΔΙΜ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2009.*

Χατζηστεφάνου, Σ.: 2011, «Εμπειρική μελέτη της δυνατότητας ανάπτυξης εννοιών στατιστικής από τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου μέσα από τη χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού», *Διπλωματική Εργασία, Μαθηματικό Αθήνας,* Ανακτήθηκε από: http://www.math.uoa.gr

Σχολικά εγχειρίδια.

Συλλογικό έργο: 2011, «Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση», *Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, έργο «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη»*

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος Σ.: 2013 «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου», *Υ.ΠΑΙ.Θ.Π.Α.-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΔΒ.*

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σιδέρης, Π.: 2006, «Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου», *Υ.ΠΑΙ.Θ.Π.Α.-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΔΒ.*

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α.: 1998, «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, Β' τάξη ενιαίου λυκείου», *Υ.ΠΑΙ.Θ.Π.Α.-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΔΒ.*

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ.: 2008, «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, Γ' τάξη ενιαίου λυκείου», *Υ.ΠΑΙ.Θ.Π.Α.-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΔΒ.*