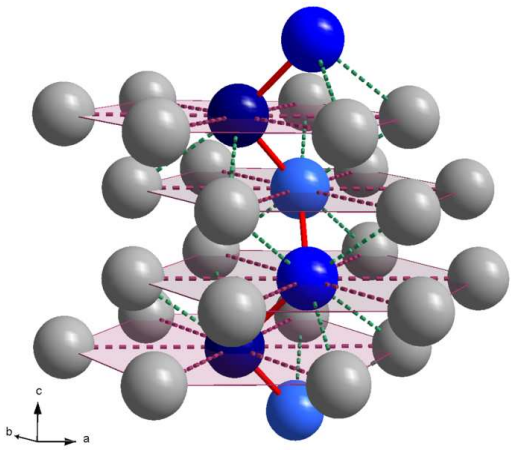
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ: R, R^2,R^3



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
κ. Ράπτης Ευάγγελος

ΣΑΝΙΔΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
Α.Μ: Δ200523

ΑΘΗΝΑ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1) **Ράπτης Ευάγγελος** (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν.Καθηγητής	.....
2) **Λάππας Διονύσιος**	Αν.Καθηγητής	.....
3) **Βάρσος Δημήτριος**	Αν.Καθηγητής	.....

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τους **Αναπληρωτές Καθηγητές** του Μαθηματικού Τμήματος του **Ε.Κ.Π.Α., κκ. Βάρσο Δημήτριο** και **Λάππα Διονύσιο** τόσο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή, όσο και για τις άοκνες προσπάθειες που καταβάλλουν τα τελευταία χρόνια προκειμένου η εκπαιδευτική διαδικασία του τμήματος να παραμείνει σε υψηλό επίπεδο. Ευχαριστώ όμως ιδιαίτερα τον **Αναπληρωτή Καθηγητή** κ. **Ράπτη Ευάγγελο** για την εμπιστοσύνη του και τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε. Τόσο το περιεχόμενο του μαθήματος που δίδαξε όσο και οι γόνιμες συζητήσεις που είχαμε μου προσέφεραν τη δυνατότητα να δω τα μαθηματικά υπό μία νέα ευρύτερη οπτική γωνία. Η αφοσίωσή του στο εκπαιδευτικό έργο και η διαθεσιμότητά του απέναντι στους φοιτητές είναι αξιέπαινη.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010
Σανιδάς Αλέξανδρος

Στην Αγγελική για την κατανόηση και την υπομονή της, και στους γονείς μου για τη φροντίδα τους

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη:……...2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{O} : ΟΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Οι ισομετρίες του $\mathbb{R}$ (ορισμός- μορφές)……..…..3

Ταξινόμηση ισομετριών στο $\mathbb{R}$ ……5

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$ (η οπτική γωνία του διδακτικού βιβλίου της Γ' Λυκείου)……7

Εάν μία ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ διατηρεί το $\vec{0}$ είναι γραμμική……...……..…11

Διερεύνηση των ισομετριών στο $\mathbb{R}^2$ ……..…13

Αλγεβρική και γεωμετρική προσέγγιση των ισομετριών στο $\mathbb{C}$……..……...15

Ταξινόμηση ισομετριών στο $\mathbb{C}$…….…..27

Χρήσιμα αποτελέσματα-εφαρμογές ……....28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{O} : Οι ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$ ……33

Οι ισομετρίες των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$-ορισμός……..……34

Οι ισομετρίες των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$ -μορφή……...……...…..37

Κατάλογος ισομετριών του $\mathbb{R}^3$……...43

Θεώρημα χαρακτηρισμού των ισομετριών του $\mathbb{R}^3$……46

Ταξινόμηση ισομετριών στο $\mathbb{R}^3$……47

Η ομάδα συμμετριών του ισόπλευρου τριγώνου…….……48

Η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου……49

Οι ομάδες συμμετρίας των Πλατωνικών στερεών……..…….51

Παραδείγματα διασύνδεσης της συμμετρίας με την τέχνη και την φύση……....57

Βιβλιογραφία……60

Περίληψη: Ξεκινάμε με την αναζήτηση και ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}$. Συνεχίζουμε με τις ισομετρίες του επιπέδου. Αποδεικνύουμε ότι μία ισομετρία που διατηρεί σημείο είναι γραμμική και οδηγούμαστε σε ένα πρώτο συμπέρασμα για τα συστατικά μέρη μία τυχαίας ισομετρίας του επιπέδου. Κατόπιν με τα εργαλεία που μας παρέχει το σύνολο $\mathbb{C}$ προσεγγίζουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά όλες τις δυνατές ισομετρίες που υλοποιούνται σε αυτό. Κλείνουμε το 1° κεφάλαιο με εφαρμογές και παραδείγματα που έχουν στόχο την καλύτερη κατανόηση των εννοιών. Στο 2° κεφάλαιο γενικεύουμε τον ορισμό μίας ισομετρίας σε Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ και αποδεικνύουμε τις προτάσεις και τα θεωρήματα εκείνα, που θα μας οδηγήσουν στην ταυτοποίηση (ποιοτικά) των ισομετριών αυτών. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αυτού αναφέρουμε κάποια παραδείγματα ομάδων συμμετρίας. Συγκεκριμένα παραθέτουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού τόσο της διεδρικής ομάδας του ισόπλευρου τριγώνου όσο και αυτής του τετραγώνου μαζί με τα δικτυωτά τους διαγράμματα, οι οποίες αποτελούν υποομάδες της $\left(Isom_{\bar{0}}\mathbb{R}^2, \circ\right)$. Κατόπιν αναφέρουμε περιγραφικά τις ομάδες συμμετρίας των πέντε Πλατωνικών στερεών οι οποίες αποτελούν υποομάδες της $\left(Isom_{\bar{0}}\mathbb{R}^3, \circ\right)$. Τέλος αναφέρουμε σύντομα κάποια παραδείγματα διασύνδεσης της έννοιας της Συμμετρίας με τη φύση και την τέχνη.

Κεφάλαιο 1ο : Οι ισομετρίες στα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Οι ισομετρίες στο $\mathbb{R}$

Θα αναζητήσουμε τις ισομετρίες της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1

Μια ισομετρία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $|f(x)-f(y)|=|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(Υπενθύμιση: $|x|=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ -x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$, όπου $|x|=|-x|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση, κατά μήκος της ευθείας των πραγματικών, του $\pm x$ από το 0.)

Ένα απλό παράδειγμα ισομετρίας είναι η: $I(x)=x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Αλλά και η $p(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είναι επίσης ισομετρία αφού

$|p(x)-p(y)|=|-x-(-y)|=|-x+y|=|x-y|$.

Γεωμετρικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η p αντανακλά το $\mathbb{R}$ με κέντρο το Ο και ονομάζεται **κατοπτρισμός**.

Ένα ακόμη παράδειγμα ισομετρίας είναι και η $t(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, διότι

$|t(x)-t(y)|=|x+1-y-1|=|x-y|,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Θα αναζητήσουμε όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}$. Ξεκινάμε από τις ισομετρίες που διατηρούν το Ο.

Πρόταση 1

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισομετρία και $f(0)=0$, τότε $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ή

$f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισομετρία $\Leftrightarrow |f(x)-f(y)|=|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ και αν θέσουμε $y=0$

έχουμε $|f(x)|=|x|\Rightarrow f(x)=x$ ή $f(x)=-x$

Θα θέλαμε να αποκλείσουμε την περίπτωση η f να είναι δίκλαδη, (π.χ. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ -x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$) να υπάρχουν δηλαδή $x,y\in\mathbb{R}^*$ με $f(x)=x$ και $f(y)=-y$.

Τότε όμως: $|f(x)-f(y)|=|x-y|$, ορισμός ισομετρίας και

$|f(x)-f(y)|=|x+y|$, από την προηγούμενη υπόθεση άρα:

$|x-y|=|x+y| \Leftrightarrow x-y=x+y$ ή $x-y=-x-y \Leftrightarrow -y=y$ ή $x=-x \Leftrightarrow x=0$ ή $y=0$. Άτοπο αφού έχουμε $x,y\in\mathbb{R}^*$.

Ή ισοδύναμα το x ισαπέχει από το y και το –y , άρα x=0. Άτοπο. □

Πρόταση 2

Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισομετρία. Τότε για οποιοδήποτε $a\in\mathbb{R}$ η f θα έχει την εξής μορφή : $f(x)=x+a$, $\forall x\in\mathbb{R}$ είτε $f(x)=-x+a, \forall x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι $f(0)=a,\ a\in\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε την $g(x)=f(x)-a,$ η οποία είναι ισομετρία, διότι:

$|g(x)-g(y)|=|f(x)-a-f(y)+a|=|f(x)-f(y)|=|x-y|$ και ακόμη διατηρεί το 0 αφού $g(0)=f(0)-a=a-a=0$. Άρα από την πρόταση 1 λαμβάνουμε ότι $g(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είτε $g(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, όπου $g(x)=f(x)-a,$ οπότε $f(x)-a=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είτε $f(x)-a=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.□

Ονομάζουμε το $y\in\mathbb{R}$ **σταθερό σημείο της** $f \Leftrightarrow f(y)=y$

Σημείωση:

Αν $f(x)=x+a$, η f αντιπροσωπεύει μετατόπιση της ταυτοτικής κατά α μονάδες δεξιά και προφανώς δεν διατηρεί κανένα σημείο σταθερό.

Αν όμως $f(x)=-x+a$, τότε παρατηρούμε: $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a}{2}+a \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}$.

Δηλαδή η f διατηρεί το $\frac{a}{2}$. Έστω $t(x)=x+\frac{a}{2} \Rightarrow t^{-1}(x)=x-\frac{a}{2}$ και ακόμη $p(x)=-x$ (κατοπτρισμός ως πρός Ο).

Τότε μπορούμε να γράψουμε: $f(x)=-x+a=\frac{a}{2}-\left(x-\frac{a}{2}\right)$. Δηλαδή $f(x)=\left(t\circ p\circ t^{-1}\right)(x)$. Λεκτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η f είναι η σύνθεση μιας μετατόπισης $\frac{a}{2}$ μονάδες αριστερά, ενός κατοπτρισμού ως προς Ο και

μιας μετατόπισης $\frac{a}{2}$ μονάδες δεξιά. Έχουμε δηλαδή μετατόπιση του σταθερού σημείου ανάκλασης από το 0 στο $\frac{a}{2}$.

Συνοπτικά έχουμε την παρακάτω κατάταξη των ισομετριών στο $\mathbb{R}$:

Σύνολο σταθερών σημείων	**Γεωμετρική περιγραφή ισομετρίας**
Κανένα	Μετατόπιση $f(x)=x+a$
Σημείο i) το 0 ii) το $\frac{a}{2}$	Κατοπτρισμός i) $p(x)=-x$ ii) $f(x)=-x+a$
Όλα	Ταυτοτική $I(x)=x$

Η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού (όπως αυτή εισάγεται στη Γ Λυκείου)

Αν $f:A\to B$ είναι μία συνάρτηση. Θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις για τις οποίες τα Α,Β συμπίπτουν με το σύνολο (Ε) των σημείων ενός καρτεσιανού επιπέδου Οxy. Ή πιο απλά τα Α, Β συμπίπτουν με το $\mathbb{R}^2$.

Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (γ.μ) στο επίπεδο.

Δηλαδή γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Ως προς τη συνάρτηση αυτή η εικόνα, $T(M)$ του σημείου $M(x,y)$ θα συμβολίζεται $M'(x',y')$. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η $\gamma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $M(x,y)\to M'(x,-y)$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο Μ στο συμμετρικό του Μ', ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε μόνο με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα σημεία $M(x,y)$ στα $M'(x',y')$ των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται από ένα σύστημα της μορφής:

$\left.\begin{cases} x'=ax+by+m \\ y'=cx+dy+n \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ (1), με $a,b,c,d,m,n\in\mathbb{R}$. Ιδιαίτερα δε, αν $m=0$ και $n=0$ η (1) παίρνει τη μορφή $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (2).

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός μετασχηματισμός καλείται γραμμικός μετασχηματισμός και ο πίνακας $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ λέγεται πίνακας του γραμμικού

μετασχηματισμού. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός, δηλαδή ικανοποιεί τις δύο συνθήκες:

- $T(u+v)=T(u)+T(v), \forall u,v \in \mathbb{R}^2$
- $T(m\cdot u)=m\cdot T(u), m\in\mathbb{R}$ και $u\in\mathbb{R}^2$.

Αν θεωρήσουμε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$T:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ τότε για το $A(1,0)$, $T(A)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, δηλαδή η εικόνα του $\vec{i}(1,0)$ είναι η πρώτη στήλη του πίνακα του Τ. Αντίστοιχα για το Β(0,1), $T(B)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, δηλαδή η εικόνα του $\vec{j}(0,1)$ είναι η δεύτερη στήλη του πίνακα του Τ. Προφανώς ο γραμμικός μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτο το Ο(0,0).

Σχόλιο: Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του οποίου ο πίνακας αντιστρέφεται, απεικονίζει:

- Ευθείες σε ευθείες
- Ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα με άκρες τις εικόνες των άκρων.
- Πολύγωνα σε πολύγωνα με κορυφές τις εικόνες των κορυφών.

Οι ισομετρίες στο $\mathbb{R}^2$

Επειδή το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$, κάποια κεντρικά ζητήματα που αφορούν στις ισομετρίες τα διαπραγματευόμαστε αρχικά στο $\mathbb{R}^2$. Με τη βοήθεια ενός χρήσιμου εργαλείου, του εσωτερικού γινομένου και των ιδιοτήτων του όπως αυτό έχει οριστεί στον $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2

Μία απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ονομάζεται ισομετρία αν (αν και μόνο αν):

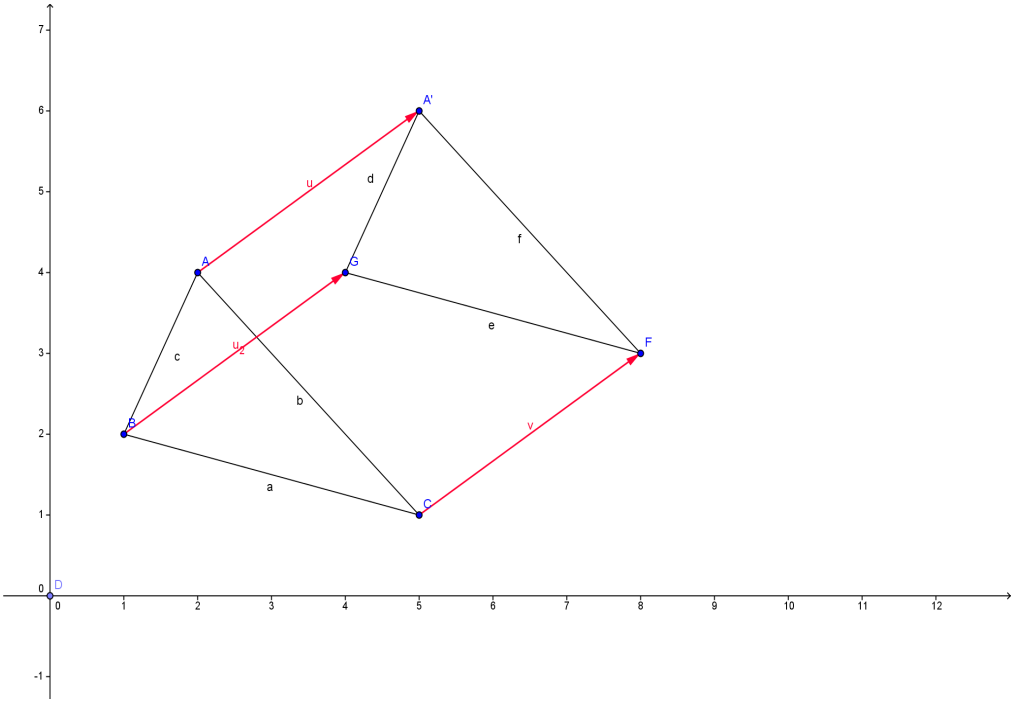
$$\left|f(\vec{x})-f(\vec{y})\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|, \ \forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2 \qquad (3)$$

όπου $|\ |$ είναι η συνηθισμένη νόρμα στο $\mathbb{R}^2$.

Με άλλα λόγια, ισομετρία είναι μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}^2$,που διατηρεί τις αποστάσεις.

Παρακάτω αναφέρουμε μερικά παραδείγματα ισομετριών στο $\mathbb{R}^2$

i) Παράλληλη μεταφορά $\mu_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Έστω $\vec{u} = (m, n)$ ένα διάνυσμα του Oxy. Καλούμε παράλληλη μεταφορά $\mu_{\vec{u}}$ κατά διάνυσμα $\vec{u}$, το γεωμετρικό μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζεται στο σημείο $A'(x', y')$

($\mu_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \mu_{\vec{u}}(x, y) = (x + m, y + n)$) που ορίζεται από την ισότητα: $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m \\ y+n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

Άρα η παράλληλη μεταφορά δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Είναι όμως ισομετρία. Άρα $\mu_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ θα είναι 1-1 και επι και γι'αυτό θα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση $\mu_{-\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\mu_{-\vec{u}}(x, y) = (x - m, y - n)$

Απόδειξη

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} = (m, n)$

$B(x_2, y_2)$ και $\overrightarrow{BB'} = \vec{u} = (m, n)$

Τότε $A' : \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + m \\ y_1 + n \end{bmatrix}$ και

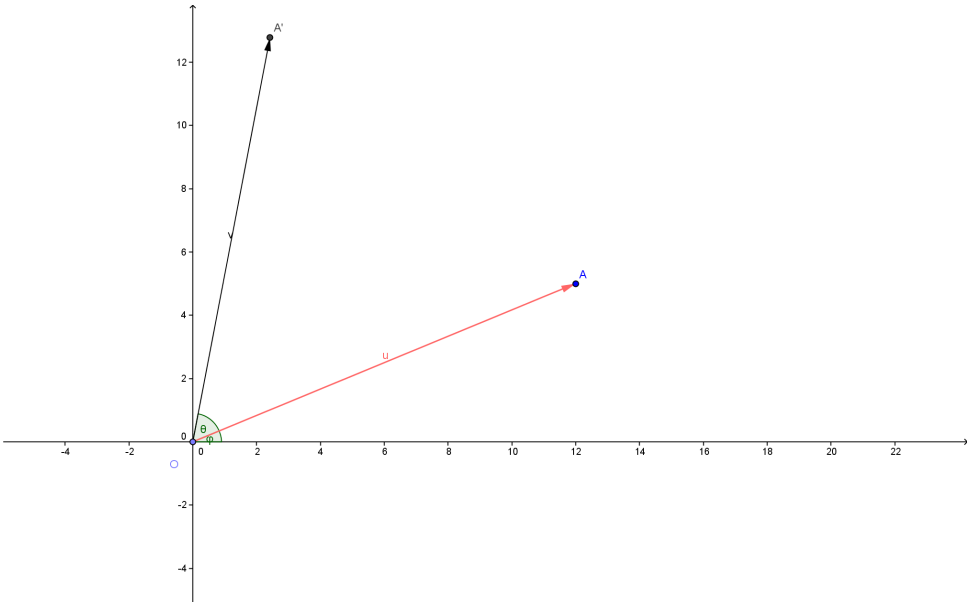
$$B':\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + m \\ y_2 + n \end{bmatrix}$$

$$d(A', B') = \sqrt{(x_1 + m - x_2 - m)^2 + (y_1 + n - y_2 - n)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(A, B)$$

Άρα πράγματι διατηρεί τις αποστάσεις, άρα είναι ισομετρία.

ii) <u>Στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ</u> $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Καλούμε στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ (θετική φορά= αντίστροφη του ρολογιού) το γεωμετρικό μετασχηματισμό R_θ όπου κάθε $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζεται στο πέρας $A'(x', y') \in \mathbb{C}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OA'}$ που είναι η τελική θέση του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ αν αυτό στραφεί γύρω από το Ο κατά γωνία θ. Αν φ είναι η γωνία του $\overrightarrow{OA}$ με τον οριζόντιο άξονα και $r = \left|\overrightarrow{OA}\right|$, τότε ισχύουν:

$$\begin{Bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{Bmatrix} x' = r\cos(\varphi + \theta) \\ y' = r\sin(\varphi + \theta) \end{Bmatrix}$$

Όπου αν προχωρήσουμε τη δεύτερη σχέση λαμβάνουμε:

$$\begin{Bmatrix} x' = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ y' = r\sin\varphi\cos\theta - r\sin\theta\cos\varphi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Άρα η στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός με πίνακα $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η στροφή αυτή είναι ισομετρία. Πράγματι:

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = r$ και

$\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left[r\cos(\varphi+\theta)\right]^2 + \left[r\sin(\varphi+\theta)\right]^2} = r$

Άρα η στροφή κατά γωνία θ, είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί τις αποστάσεις, άρα είναι ισομετρία.

Αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες που αφορούν τον γεωμετρικό μετασχηματισμό και τον ισοδύναμο πίνακα.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$R_\varphi \cdot R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix} = R_\theta \cdot R_\varphi$$

όπου είναι προφανές ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Και επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$(R_\theta)^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} : \quad P(n)$$

Απόδειξη

- Αποδεικνύω την $P(n)$ για n=1. Προφανώς $(R_\theta)^1 = \begin{bmatrix} \cos(1\theta) & -\sin(1\theta) \\ \sin(1\theta) & \cos(1\theta) \end{bmatrix}$, ισχύει.
- Δέχομαι την $P(n)$, δηλαδή ότι ισχύει: $(R_\theta)^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$
- Θα δείξω ότι ισχύει η $P(n+1)$, δηλαδή:

  $(R_\theta)^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos\left[(n+1)\theta\right] & -\sin\left[(n+1)\theta\right] \\ \sin\left[(n+1)\theta\right] & \cos\left[(n+1)\theta\right] \end{bmatrix}$

Είναι $\left(R_\theta\right)^{n+1} = \left(R_\theta\right)^n \cdot R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} \cos(n\theta)\cdot\cos\theta - \sin(n\theta)\cdot\sin\theta & -\sin\theta\cdot\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\cdot\cos\theta \\ \sin(n\theta)\cdot\cos\theta + \cos(n\theta)\cdot\sin\theta & \cos(n\theta)\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin(n\Theta) \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} \cos\left[(n+1)\theta\right] & -\sin\left[(n+1)\theta\right] \\ \sin\left[(n+1)\theta\right] & \cos\left[(n+1)\theta\right] \end{bmatrix}$ το οποίο και κλείνει την απόδειξη.

Τέλος είναι προφανές ότι $R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_{-\theta}$

<u>ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ</u>

Για να θυμόμαστε τον πίνακα των παραπάνω γεωμετρικών μετασχηματισμών, αρκεί να θυμόμαστε ότι η πρώτη στήλη είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του σημείου Α(1,0). Ενώ η δεύτερη στήλη είναι η εικόνα του Β(0,1).

Συνεχίζουμε, αφού νωρίτερα ορίσαμε την ισομετρία στο $\mathbb{R}^2$

- Υποθέτουμε ότι διατηρεί το $\vec{0}$, δηλαδή $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ (4)
- Σχόλιο: Ξέρουμε ακόμη ότι $\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^2$ (5)

Από τα παραπάνω και εάν θέσουμε $\vec{y} = \vec{0}$, λαμβάνουμε

$$\left|f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{y}\right)\right| = \left|\vec{x} - \vec{y}\right| \Leftrightarrow \left|f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{0}\right)\right| = \left|\vec{x} - \vec{0}\right| \Leftrightarrow \left|f\left(\vec{x}\right)\right| = \left|\vec{x}\right| \quad (6)$$

Από την προηγούμενη σχέση λαμβάνουμε:

$$\left|f\left(\vec{x}\right)\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2 \Leftrightarrow f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{x}\right) = \vec{x}\cdot\vec{x} \Leftrightarrow f^2\left(\vec{x}\right) = \vec{x}^2 \quad (7)$$

Αλλά και $\left|f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{y}\right)\right|^2 = \left|\vec{x} - \vec{y}\right|^2 \Leftrightarrow \left(f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{y}\right)\right)^2 = \left(\vec{x} - \vec{y}\right)^2 \Leftrightarrow$

{και επειδή στο $\mathbb{R}^2$ ισχύουν, η αντιμεταθετική και η επιμεριστική ιδιότητα}

$$\Leftrightarrow f^2\left(\vec{x}\right) + f^2\left(\vec{y}\right) - 2f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right) = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} \Leftrightarrow -2f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right) = -2\vec{x}\cdot\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right) = \vec{x}\cdot\vec{y} \quad (8)$$

Βλέπουμε ότι η ισομετρία με την υπόθεση να διατηρεί το $\vec{0}$, διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 3

Μία απεικόνιση με τις παρακάτω υποθέσεις:

- $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**, ισομετρία.**
- $f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$

Θα είναι γραμμική.

Απόδειξη

Για να είναι η f γραμμική, αρκεί να αποδείξω τις παρακάτω δύο σχέσεις:

- $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right),\ \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$
- $f\left(m\cdot\vec{x}\right)=m\cdot f\left(\vec{x}\right),\ \forall \mathrm{m}\in\mathbb{R}$ και $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$

Για το πρώτο, θεωρούμε την παράσταση $A=f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)$ και εξετάζουμε το $A^2=A\cdot A=\left[f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right]\cdot\left[f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right]=$

$$f^2\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+f^2\left(\vec{x}\right)+f^2\left(\vec{y}\right)-2f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\cdot f\left(\vec{x}\right)-2f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)+2f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)\overset{(7),(8)}{=}$$

$$\left(\vec{x}+\vec{y}\right)^2+\vec{x}^2+\vec{y}^2-2\vec{x}\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-2\vec{y}\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+2\vec{x}\cdot\vec{y}=$$

$$\vec{x}^2+\vec{y}^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}^2+\vec{y}^2-2\vec{x}^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}-2\vec{x}\cdot\vec{y}-2\vec{y}^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}=0$$

Άρα είναι $A^2=0\Rightarrow A=\vec{0}$. Επομένως

$$f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)=\vec{0}\Rightarrow f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)$$

Για τη δεύτερη συνθήκη εργαζόμαστε όμοια. Θεωρούμε την παράσταση:

$B=f\left(m\cdot\vec{x}\right)-m\cdot f\left(\vec{x}\right)$ και εξετάζουμε το

$$B^2=B\cdot B=\left[f\left(m\cdot\vec{x}\right)-m\cdot f\left(\vec{x}\right)\right]\cdot\left[f\left(m\cdot\vec{x}\right)-m\cdot f\left(\vec{x}\right)\right]=$$

$$f^2\left(m\vec{x}\right)+m^2f^2\left(\vec{x}\right)-2mf\left(m\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{x}\right)\underset{(8)}{\overset{(7)}{=}}$$

$\left(m\vec{x}\right)^2+m^2\vec{x}^2-2mm\vec{x}\cdot\vec{x}=m^2\vec{x}^2+m^2\vec{x}^2-2mm\vec{x}\cdot\vec{x}=0$. Άρα

$$B^2=0\Rightarrow B=\vec{0}\Rightarrow f\left(m\vec{x}\right)-mf\left(\vec{x}\right)=\vec{0}\Rightarrow f\left(m\vec{x}\right)=mf\left(\vec{x}\right).\square$$

Αφού η f (ισομετρία) ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες, άρα θα είναι γραμμική απεικόνιση και ως τέτοια θα έχει έναν αντίστοιχο πίνακα.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε, **ΕΑΝ**:

- $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|$, $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ ισομετρία και
- $f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$

ΤΟΤΕ η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο και είναι γραμμική, δηλ:

- $f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{x}\cdot\vec{y}$
- $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ και

  $f\left(m\cdot\vec{x}\right)=m\cdot f\left(\vec{x}\right)$, $\forall \mathrm{m}\in\mathbb{R}$ και $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$

Η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ που ορίστηκε ως ισομετρία θα είναι 1-1,διότι αν

$f\left(\vec{x}\right)=f\left(\vec{y}\right)\Rightarrow\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|=0$ και επίσης ξέρουμε ότι

$\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|$ άρα $\left|\vec{x}-\vec{y}\right|=0\Rightarrow\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}=\vec{y}$

Επίσης επειδή $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 1-1 και το $\mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές άρα η f θα είναι και επί.

Επομένως η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ θα είναι αυτομορφισμός του $\mathbb{R}^2$, $f\in Aut\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Πρόταση 4

Η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία και η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση επίσης.

Απόδειξη

Έστω $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ισομετρίες, τότε

$$\left|(f\circ g)\left(\vec{u}\right)-(f\circ g)\left(\vec{v}\right)\right|=\left|f\left(g\left(\vec{u}\right)\right)-f\left(g\left(\vec{v}\right)\right)\right|\underset{ισομετρία}{\overset{f}{=}}\left|g\left(\vec{u}\right)-g\left(\vec{v}\right)\right|\underset{ισομετρία}{\overset{g}{=}}\left|\vec{u}-\vec{v}\right|,$$

άρα η $f\circ g$ είναι ισομετρία.

Έστω $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ γραμμικές απεικονίσεις τότε

$$(f\circ g)\left(m\cdot\vec{u}+n\cdot\vec{v}\right)=f\left(g\left(m\cdot\vec{u}+n\cdot\vec{v}\right)\right)\underset{γραμμική}{\overset{g}{=}}f\left(m\cdot g\left(\vec{u}\right)+n\cdot g\left(\vec{v}\right)\right)$$

$$\underset{γραμμική}{\overset{f}{=}}m\cdot f\left(g\left(\vec{u}\right)\right)+n\cdot f\left(g\left(\vec{v}\right)\right)=m\cdot(f\circ g)\left(\vec{u}\right)+n\cdot(f\circ g)\left(\vec{v}\right).\square$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

Θεώρημα 1

Εάν $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **ισομετρία με**

$f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$ **και**

$f\left[(1,0)\right]=(1,0)$

Τότε η f διατηρεί όλα τα σημεία του xx' και αυτή προσδιορίζεται, είτε ως η ταυτοτική, είτε ως ο κατοπτρισμός ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Απόδειξη

Έστω $(x,0)\in\mathbb{R}^2$, τότε

$$f\left[(x,0)\right]=f\left[x\cdot(1,0)\right]\overset{f\ \text{γραμμική}}{=}x\cdot f\left[(1,0)\right]=x\cdot(1,0)=(x,0).$$

Άρα $f\left[(x,0)\right]=(x,0),\forall x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f διατηρεί τα σημεία του οριζόντιου άξονα.

Έστω $\vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $y\neq 0$ και $x\neq 0$.

(Αν $y=0$ έχουμε την τετριμμένη περίπτωση όπου $\vec{u}=(x,0)\in xx'$ και $f\left[(x,0)\right]=(x,0)$, οπότε λαμβάνουμε την ταυτοτική απεικόνιση).

Τότε $f\left[(x,y)\right]=f\left[(x,0)+(0,y)\right]\overset{f\ \text{γραμμική}}{=}f\left[(x,0)\right]+f\left[(0,y)\right]=$
$(x,0)+f\left[(0,y)\right]=(x,0)+y\cdot f\left[(0,1)\right]$

Από την σχέση (4) έχουμε:

$$\left|f\left(\vec{u}\right)\right|=\left|\vec{u}\right|\Leftrightarrow\left|f\left[(x,y)\right]\right|^2=\left|(x,y)\right|^2\Leftrightarrow\left\{(x,0)+f\left[(0,y)\right]\right\}^2=(x,y)^2$$

$$\Leftrightarrow(x,0)^2+2(x,0)\,f\left[(0,y)\right]+f^2\left[(0,y)\right]=x^2+y^2$$

$$\overset{(6)}{=}x^2+2x(1,0)\,y\cdot f\left[(0,1)\right]+(0,y)^2=x^2+y^2$$

$\Leftrightarrow 2xy\cdot(1,0)\cdot f\left[(0,1)\right]=0\Leftrightarrow(1,0)\cdot f\left[(0,1)\right]=0$ και από τον τρόπο που έχουμε ορίσει το εσωτερικό γινόμενο $(1,0)\perp f\left[(0,1)\right]$. Άρα, επειδή η f είναι ισομετρία, έχουμε δύο επιλογές:

- $f\left[(1,0)\right]=(1,0)$, **οπότε μιλάμε για την ταυτοτική απεικόνιση** $I:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **με** $I\left(\vec{u}\right)=\vec{u},\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^2$.

- $f\left[(1,0)\right]=(0,-1)$, **οπότε μιλάμε για τον κατοπτρισμό ως προς τον οριζόντιο άξονα xx'.** □

Οπότε για να βρούμε τον τύπο της f εργαζόμαστε ως εξής:

$$f\left[(x,y)\right]=f\left[(x,0)+(0,y)\right]\underset{\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\eta}{\overset{f}{\Longleftrightarrow}}f\left[(x,0)\right]+f\left[(0,y)\right]=$$

$$(x,0)+y\cdot f\left[(0,1)\right]=x(1,0)+y(0,-1)=(x,-y)$$

$f\left[(x,y)\right]=(x,-y)$. Για να βρούμε τον πίνακα αυτής της γραμμικής απεικόνισης, βρίσκουμε πως αυτή επιδρά στα στοιχεία της βάσης του

$\mathbb{R}^2=\langle e_1,e_2\rangle=\langle(1,0),(0,1)\rangle$.

$f\left[(1,0)\right]=(1,0)=1\cdot e_1+0\cdot e_2$ και

$f\left[(0,1)\right]=(0,-1)=0\cdot e_1-1\cdot e_2$

Άρα $matrixf=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Επομένως για μία ισομετρία του επιπέδου που διατηρεί το O(0,0) και το (1,0) καταλήγουμε ότι θα είναι, είτε η ταυτοτική, είτε ο κατοπτρισμός ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Έστω τώρα μία $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **ισομετρία με** $h\left[(0,0)\right]=(0,0)$ **που διατηρεί το O(0,0),** τότε $h\left[(1,0)\right]=(m,n)\in\mathbb{R}^2$ και $|(m,n)|=1$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε την ισομετρία στροφή που μελετήσαμε νωρίτερα: $R_\theta\left[(1,0)\right]=(m,n)$ (ανεξάρτητα από την ισομετρία h). Επειδή όμως η R_θ είναι ισομετρία, θα είναι 1-1 και θα υπάρχει η αντίστροφη, η $R_\theta^{-1}=R_{-\theta}$. Με την ιδιότητα $R_\theta^{-1}\left[(m,n)\right]=(1,0)$.

Τότε $\left(R_\theta^{-1}\circ h\right)(0,0)=R_\theta^{-1}\left[h(0,0)\right]=R_\theta^{-1}\left[(0,0)\right]=(0,0)$, δηλ. διατηρεί το O(0,0) και επιπλέον

$$\left(R_\theta^{-1}\circ h\right)(1,0)=R_\theta^{-1}\left[h(1,0)\right]\underset{\delta\iota\alpha\tau\eta\rho\varepsilon\acute{\iota}\ (0,0)}{\overset{h}{\Longleftrightarrow}}R_\theta^{-1}\left[(m,n)\right]=(1,0).$$

Άρα διαπιστώνουμε ότι η $R_\theta^{-1}\circ h$ είναι μία ισομετρία του επιπέδου που διατηρεί το O(0,0) και το (1,0). Άρα με την προηγούμενη μελέτη που κάναμε θα έχουμε δύο επιλογές για την h:

- $R_\theta^{-1} \circ h = I \Leftrightarrow R_\theta \circ R_\theta^{-1} \circ h = R_\theta \circ I \Leftrightarrow I \circ h = R_\theta \circ I \Leftrightarrow h = R_\theta$.
- $R_\theta^{-1} \circ h = f$, με τη συγκεκριμένη f να είναι ο κατοπτρισμός ως προς xx'. Θα έχουμε $R_\theta \circ R_\theta^{-1} \circ h = R_\theta \circ f \Leftrightarrow I \circ h = R_\theta \circ f \Leftrightarrow h = R_\theta \circ f$.

Επομένως η τυχαία ισομετρία του επιπέδου που διατηρεί το O(0,0) είναι, είτε στροφή, είτε σύνθεση κατοπτρισμού με στροφή.

Εάν εργαστούμε τώρα με μία τυχαία ισομετρία του επιπιπέδου που δεν διατηρεί αναγκαστικά το O(0,0). Δηλαδή $F\left[(0,0)\right] = (m,n) = \vec{u}$

Τότε μπορούμε (ανεξάρτητα από το πως ορίστηκε η F) να θεωρήσουμε την $\mu_{-\vec{u}}$ ισομετρία μετατόπιση, οπότε θα έχουμε:

$$\left(\mu_{-\vec{u}} \circ F\right)(0,0) = \mu_{-\vec{u}}\left(F(0,0)\right) = \mu_{-\vec{u}}(m,n) = (m-m, n-n) = (0,0)$$

Άρα η ισομετρία $\mu_{-\vec{u}} \circ F$ που εισήχθη με τον πιο πάνω τρόπο, διατηρεί το O(0,0).

Άρα από την προηγούμενη ανάλυση οι επιλογές για την άνωθεν ισομετρία θα είναι:

- $\mu_{-\vec{u}} \circ F = R_\theta \Rightarrow \mu_{\vec{u}} \circ \left(\mu_{-\vec{u}} \circ F\right) = \mu_{\vec{u}} \circ R_\theta$
  $\Rightarrow \left(\mu_{\vec{u}} \circ \mu_{-\vec{u}}\right) \circ F = \mu_{\vec{u}} \circ R_\theta \Rightarrow I \circ F = \mu_{\vec{u}} \circ R_\theta \Rightarrow F = \mu_{\vec{u}} \circ R_\theta$
- $\mu_{-\vec{u}} \circ F = R_\theta \circ f \Rightarrow \mu_{\vec{u}} \circ \left(\mu_{-\vec{u}} \circ F\right) = \mu_{\vec{u}} \circ \left(R_\theta \circ f\right) \Rightarrow$
  $\Rightarrow F = \mu_{\vec{u}} \circ \left(R_\theta \circ f\right) \Rightarrow F = \mu_{\vec{u}} \circ R_\theta \circ f$

Άρα οι ισομετρίες του επιπέδου που μπορούν να υλοποιηθούν είναι, είτε στροφές σύνθεση με μετατόπιση, είτε κατοπτρισμός ως προς χχ', σύνθεση στροφή, σύνθεση μετατόπιση.

Συνεχίζουμε τη διαπραγμάτευση των ισομετριών στο $\mathbb{C}$ αναφέροντας τρία παραδείγματα. Τα παραδείγματα αυτά εθίγησαν νωρίτερα, τώρα όμως θα περιοριστούμε σε συμβολισμό στο $\mathbb{C}$ χρησιμοποιόντας κάποια ιδιαίτερα ευέλικτα εργαλεία που προσφέρει το σύνολο αυτό.

Ορισμός 3

Μία ισομετρία του $\mathbb{C}$ είναι μια απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή: $\left|f(z) - f(w)\right| = |z - w|,\ \forall z, w \in \mathbb{C}$.

- **Μετατόπιση** κατά $c \in \mathbb{C}$: $t(z) = z + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$.
  Είναι: $\left|t(z) - t(w)\right| = |z + c - z - w| = |z - w|$

- **Συζυγία**: $\gamma(z)=\overline{z},\ z\in\mathbb{C}$ η οποία είναι προφανώς ισομετρία αφού $\left|\gamma(z)-\gamma(w)\right|=\left|\overline{z}-\overline{w}\right|=\left|\overline{z-w}\right|=\left|z-w\right|$.
- **Στροφή** R_θ κατά γωνία θ γύρω από το O(0,0).

Δηλώνουμε αρχικά το $\zeta=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ και ορίζουμε: $R_\theta(z)=\zeta\cdot z$, το οποίο δίνει την επιθυμιτή στροφή. (Το γνωρίζουμε από τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού μιγαδικών σε πολική μορφή).

Η R_θ είναι ισομετρία αφού $\left|R_\theta(z)-R_\theta(w)\right|=\left|\zeta z-\zeta w\right|=\left|\zeta\right|\left|z-w\right|=\left|z-w\right|$.

Επίσης:

- $R_\theta(z+w)=\zeta(z+w)=\zeta z+\zeta w=R_\theta(z)+R_\theta(w),\ z,w\in\mathbb{C}$
- $R_\theta(k\cdot z)=\zeta(k\cdot z)=k\cdot\zeta z=k\cdot R_\theta(z),\ k\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$

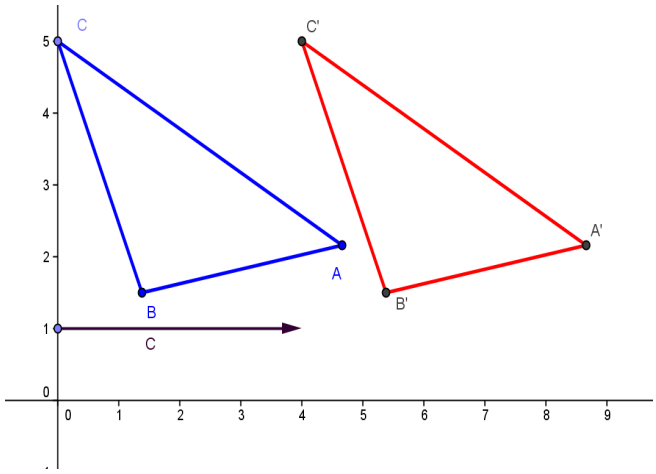
Άρα η R_θ είναι γραμμική απεικόνιση και ως τέτοια θα έχει έναν αντίστοιχο πίνακα. Μία βάση του $\mathbb{C}$ είναι $\langle e_1,e_2\rangle=\langle(1,0),(0,i)\rangle$, οπότε ας δούμε πως η R_θ επιδρά στα στοιχεία της βάσης.

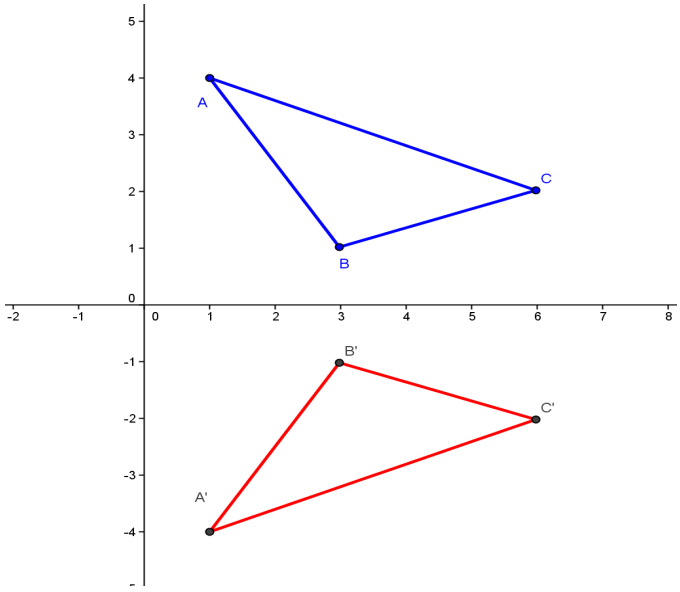
$$R_\theta(1,0)=e^{i\theta}\cdot(1,0)=\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2$$

$$R_\theta(0,i)=e^{i\theta}\cdot(0,i)=i\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta\cdot e_1+\cos\theta\cdot e_2$$

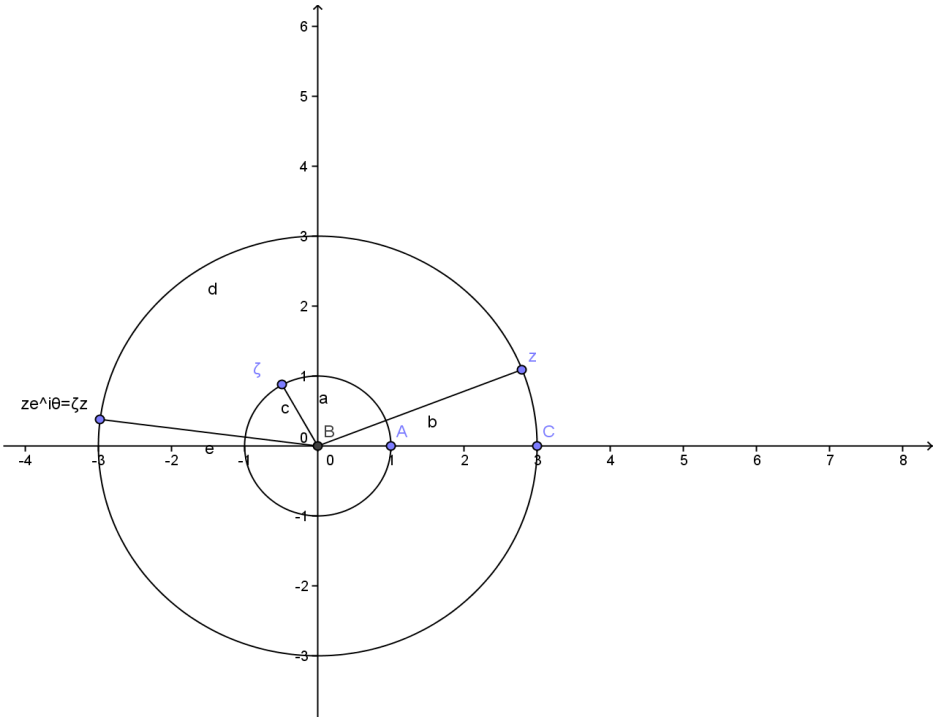
Δηλαδή ο πίνακάς της είναι $matrixR_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Δίνουμε ένα περιγραφικό σχήμα για τη μετατόπιση κατά c και τη συζυγία ($\gamma(z)=\overline{z}$):





και ένα σχήμα που περιγράφει τη στροφή ενός μιγαδικού $z \in \mathbb{C}$ κατά γωνία θ γύρω από το O(0,0).



Πρόταση 5

Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ισομετρία. Τότε η f απεικονίζει ένα κύκλο με ακτίνα r και κέντρο το $a\in\mathbb{C}$ σε ένα κύκλο με την ίδια ακτίνα και κέντρο το $f(a)\in\mathbb{C}$

Απόδειξη

Έστω κύκλος με ακτίνα $r\in\mathbb{R}_+^*$ και κέντρο $a\in\mathbb{C}$ με εξίσωση $|z-a|=r,\ z\in\mathbb{C}$.

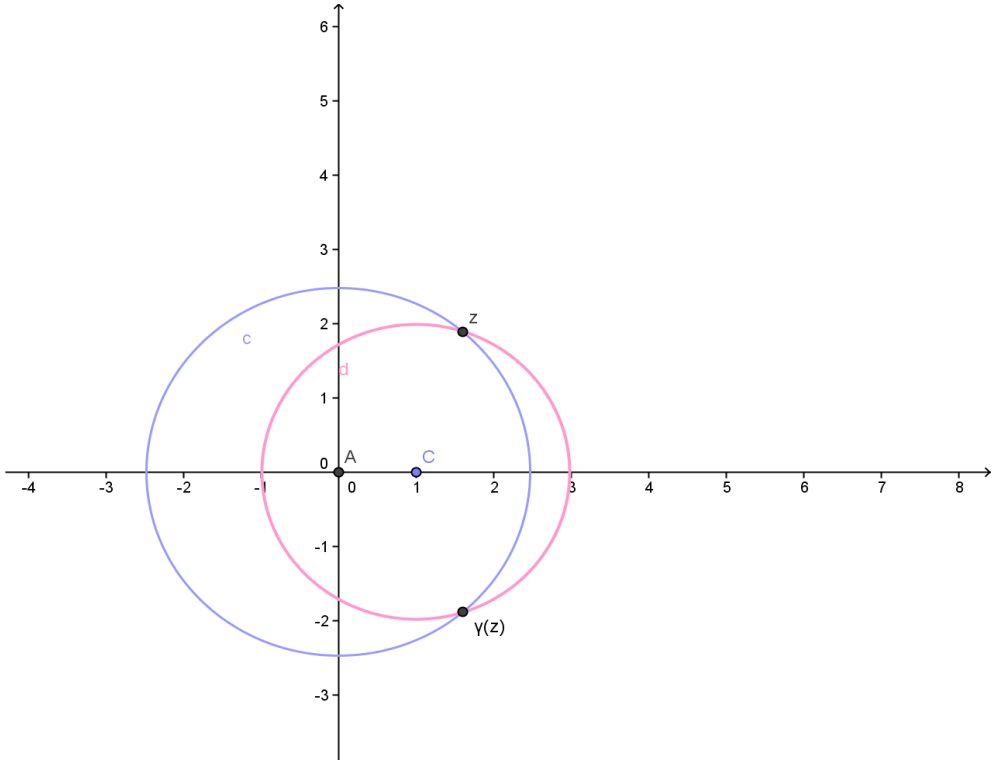
Τότε όμως $\left|f(z)-f(a)\right|=\left|z-a\right|=r$ (Αφού $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ισομετρία). Άρα οι εικόνες $f(z)$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $f(a)$ και ακτίνα r. □

Πρόταση 6

Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ μια ισομετρία που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες: $f(0)=0$ και $f(1)=1\in\mathbb{C}$. Τότε $f(z)=z,\ \forall z\in\mathbb{C}$ είτε $f(z)=\overline{z},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Απόδειξη

Αφού $f(0)=0$ και $f(1)=1$ (διατηρεί δηλαδή τα $0,1\in\mathbb{C}$) τότε από την πρόταση 5 θα διατηρεί οποιονδήποτε κύκλο με κέντρο το $0\in\mathbb{C}$ και οποιονδήποτε κύκλο με κέντρο το $1\in\mathbb{C}$. Δοθέντος ενός $z\in\mathbb{C}$, αυτός θα βρίσκεται σε μοναδικό κύκλο με κέντρο το $0\in\mathbb{C}$ και σε μοναδικό κύκλο με κέντρο το $1\in\mathbb{C}$. Άρα το $f(z)$ θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα και στου δύο προαναφερθέντες κύκλους. Άρα θα είναι $f(z)=z$ είτε $f(z)=\overline{z}$. Το παρακάτω σχήμα περιγράφει την κατάσταση:



Έστω τώρα ότι υπάρχουν κάποια $z,w\in\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z)=z\neq\overline{z}$ και $f(w)=\overline{w}\neq w$. Τότε επειδή f ισομετρία: $\left|f(z)-f(w)\right|=\left|z-w\right|$ και από την υπόθεση που κάναμε μόλις τώρα: $\left|f(z)-f(w)\right|=\left|z-\overline{w}\right|$,οπότε $\left|z-w\right|=\left|z-\overline{w}\right|$ άρα είτε $w=\overline{w}$ το οποίο απορρίπτεται είτε το z ισαπέχει από τα διαφορετικά $w,\overline{w}$

και άρα $z \in \mathbb{R}$ το οποίο επίσης απορίπτεται. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας. Είτε $f(z) = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$ (ταυτοτική), είτε $f(z) = \bar{z} = \gamma(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$ (συζυγία).
□

Πρόταση 7

Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ισομετρία. Τότε για κάποια $c \in \mathbb{C}$ και $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ η f θα έχει την εξής μορφή: είτε $f(z) = \zeta z + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$, είτε $f(z) = \zeta \bar{z} + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη

Έστω f μια οποιαδήποτε ισομετρία $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $f(0) = c$, θεωρούμε τότε την $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $g(z) = f(z) - c,\ \forall z \in \mathbb{C}$ όπου $|g(z) - g(w)| = |f(z) - c - f(w) + c| = |f(z) - f(w)| \underset{f \text{ ισομετρία}}{=} |z - w|$ άρα και η g είναι ισομετρία. Και μάλιστα $g(0) = f(0) - c = c - c = 0$. Άρα η g διατηρεί το $0 \in \mathbb{C}$. Τώρα αφού η g είναι ισομετρία, ο κύκλος κέντρου O και ακτίνας 1 διατηρείται και έστω $g(1) = \zeta = \cos\theta + i\sin\theta$. Τότε υπάρχει το $\zeta^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ και ορίζουμε την $h(z) = \zeta^{-1} \cdot g(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$ για την οποία έχουμε:

$$|h(z) - h(w)| = |\zeta^{-1} g(z) - \zeta^{-1} g(w)| = |\zeta^{-1}| \cdot |g(z) - g(w)| \underset{g \text{ isom}}{=} |z - w| \text{ και}$$

$$h(0) = \zeta^{-1} g(0) = 0 \text{ και } h(1) = \zeta^{-1} g(1) = \zeta^{-1} \cdot \zeta = 1$$

Άρα η h είναι ισομετρία και διατηρεί τόσο το 0 όσο και το 1 (στο C), επομένως από την πρόταση 6: είτε $h(z) = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$, είτε $h(z) = \bar{z},\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Άρα είτε $\zeta^{-1} \cdot g(z) = z,\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow g(z) = \zeta z \Leftrightarrow f(z) - c = \zeta z,\ \forall z \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow f(z) = \zeta z + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$

Είτε
$\zeta^{-1} \cdot g(z) = \bar{z},\ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow g(z) = \zeta \bar{z} \Leftrightarrow f(z) - c = \zeta \bar{z}$
$\Leftrightarrow f(z) = \zeta \bar{z} + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$.□

Θα θέλαμε να έχουμε μια γεωμετρική προσέγγιση των ισομετριών του $\mathbb{C}$.

- **Ας δούμε πρώτα τη μορφή $f(z) = \zeta z + c$ την οποία θα αποκαλούμε κανονική ισομετρία (proper isometry) διότι δεν μεταβάλλει τον προσανατολισμό.**

Εάν $\zeta = 1$, δηλαδή $\theta = 0^\circ$, πρόκειται για μετατόπιση , $f(z) = z + c$ και δεν υπάρχουν σταθερά σημεία. Για την παραπέρα διερεύνηση της $f(z) = \zeta z + c$ θα χρειαστούμε την:

Πρόταση 8

Εάν $f(z) = \zeta z + c,\ \forall z \in \mathbb{C}$ **με** $\zeta = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$**, τότε**

i) **Το** $p = \dfrac{c}{1-\zeta} \in \mathbb{C}$**, είναι σταθερό σημείο της** f**, δηλαδή ισχύει** $f(p) = p$.

ii) **Ισχύει** $f(z) - p = \zeta(z - p),\ \forall z \in \mathbb{C}$ **και η** f **όπως ορίστηκε αντιπροσωπεύει στροφή του** $z \in \mathbb{C}$ **γύρω από το** $p \in \mathbb{C}$ **κατά γωνία θ.**

Απόδειξη

i) $f(p) = \zeta p + c = \zeta \cdot \dfrac{c}{1-\zeta} + c = \dfrac{\zeta c + c - \zeta c}{1-\zeta} = \dfrac{c}{1-\zeta} = p$. Άρα $f(p) = p$, δηλαδή η f έχει το p ως σταθερό σημείο (διατηρεί το p).

ii) Είναι:

$$f(z) - p = \zeta(z - p) \Leftrightarrow \zeta z + c - p = \zeta z - \zeta p$$

$$\Leftrightarrow c - p = -\zeta p \Leftrightarrow c = p(1-\zeta) \Leftrightarrow p = \frac{c}{1-p}$$ το οποίο και ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική μας υπόθεση. □

Τι αντιπροσωπεύει όμως η f;

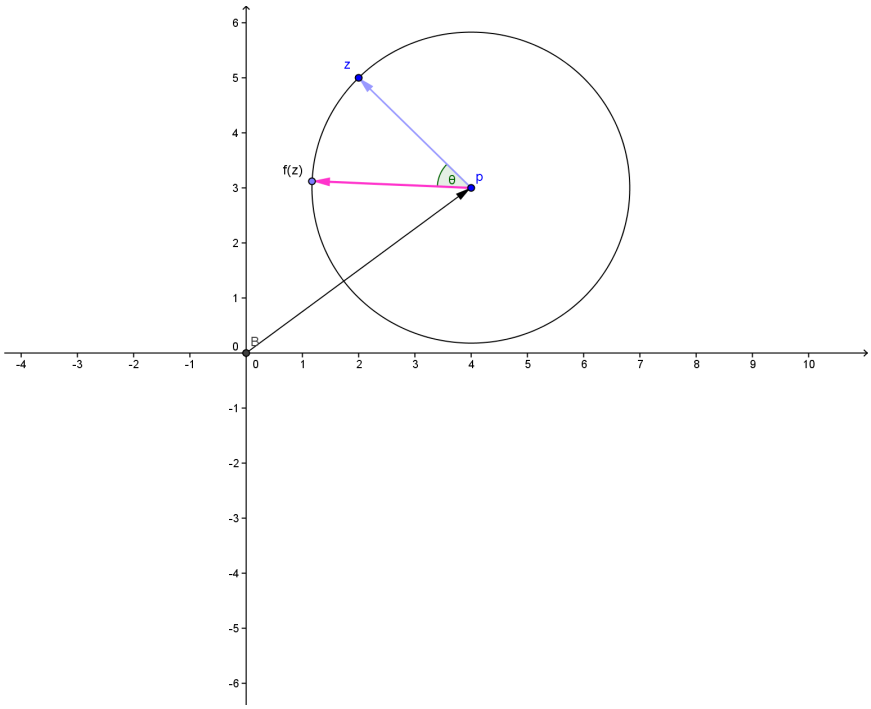
Είναι: $|f(z) - p| = |\zeta(z - p)| = |\zeta||z - p| \Leftrightarrow |f(z) - p| = |z - p|$

Ξέρουμε ακόμη ότι το $z - p$ αντιπροσωπεύει διάνυσμα με κορυφές στα $z, p \in \mathbb{C}$ και κατεύθυνση από το p προς το z.

Επίσης το $f(z) - p$ αντιπροσωπεύει διάνυσμα με κορυφές στα $f(z), p \in \mathbb{C}$ και κατεύθυνση από το p προς το $f(z)$.

Τέλος το $\zeta = e^{i\theta}$ προκαλεί περιστροφή κατά γωνία θ στο διάνυσμα που πολλαπλασιάζει. Άρα τα $z, f(z)$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου p και ακτίνας $|z - p|$. Άρα το $f(z)$ αντιπροσωπεύει τη στροφή του $z \in \mathbb{C}$ γύρω από το p κατά γωνία θ. □

Σχηματικά έχουμε:



Συμπέρασμα, για την ισομετρία με τη μορφή $f(z)=\zeta z+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$, γνωρίζουμε ότι:

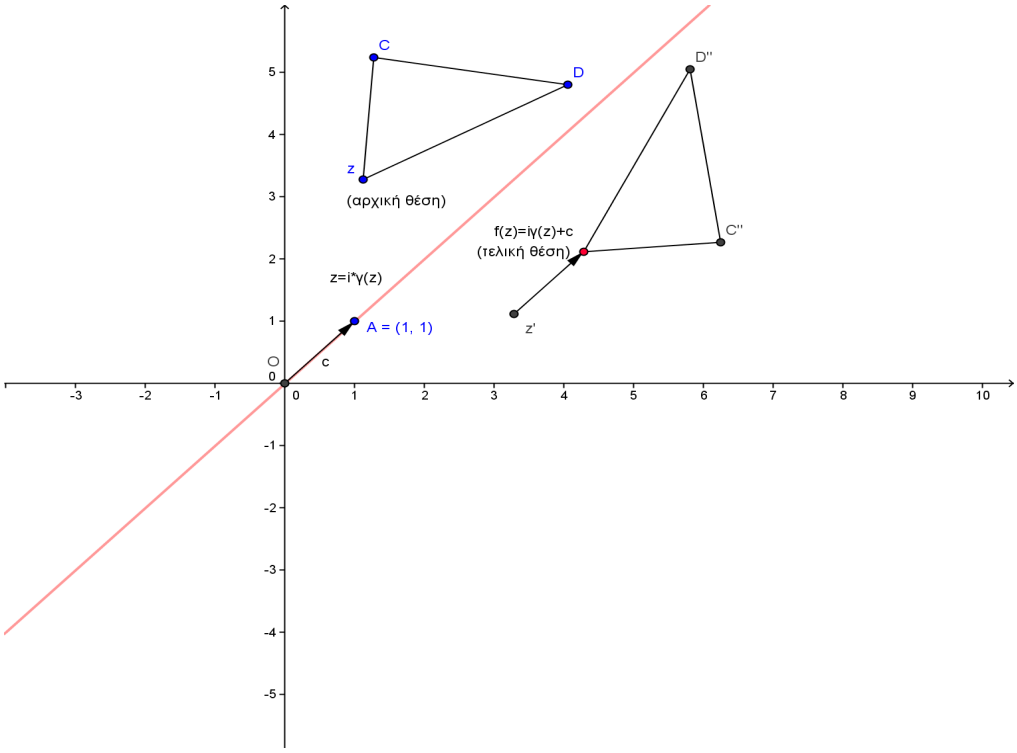
- Εάν ζ=1 είναι μετατόπιση στο επίπεδο κατά διάνυσμα $c\in\mathbb{C}$.
- Εάν $\zeta\neq 1$, τότε η f διατηρεί σημείο το $p=\dfrac{c}{1-\zeta}\in\mathbb{C}$ και αντιπροσωπεύει στροφή γύρω από το p κατά γωνία θ.

Ας εξετάσουμε τώρα τη μορφή $f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$. Την οποία θα αποκαλούμε μη κανονική ισομετρία (improper isometry) διότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα:

Έστω η $f(z)=i\bar{z}+\dfrac{1+i}{2},\ z\in\mathbb{C}$, που όπως είδαμε είναι μια ισομετρία του $\mathbb{C}$.

Αν θεωρήσουμε $z=a+bi$ τότε $\bar{z}=a-bi$ και $i\bar{z}=ia+b=b+ai$, με άλλα λόγια η απεικόνιση $z\to i\bar{z}$, $\{(a,b)\to(b,a)\}$ είναι ο κατοπτρισμός (συμμετρία) ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$. Για την $f(z)$ επιπλέον έχουμε ότι ο προηγούμενος μετασχηματισμός ακολουθείται από μετατόπιση κατά $c=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ το οποίο είναι διάνυσμα παράλληλο στην εν λόγο ευθεία.



Μία ισομετρία αυτής της μορφής θα την ονομάζουμε **ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection).**

Μια πρώτη προσέγγιση της μορφής $f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$, θα μπορούσε να είναι:

- Εάν $\zeta=1$ και $c=0$, τότε λαμβάνουμε την $f(z)=\bar{z}=\gamma(z),\ \forall z\in\mathbb{C}$, η οποία διατηρεί όλα τα σημεία του άξονα xx' και αντιπροσωπεύει κατοπτρισμό γύρω από αυτόν
- Εάν $\zeta\neq 1$ και $c=0$, τότε λαμβάνουμε τη μορφή $f(z)=\zeta\bar{z},\ \forall z\in\mathbb{C}$, και αν θέσουμε $w=e^{\frac{i\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$, έχουμε ότι $\zeta=w^2\Leftrightarrow w=\sqrt{\zeta}$. Οπότε παρατηρούμε:

  $$f(z)=\zeta\bar{z}=w^2\bar{z}=ww\bar{z}=w\left(\overline{\overline{w}z}\right)=\left(R_{\frac{\theta}{2}}\circ\gamma\circ R_{-\frac{\theta}{2}}\right)(z)$$ και

  επομένως φαίνεται ότι η απεικόνιση f (ισομετρία) διατηρεί όλα τα σημεία μιας ευθείας με κλίση $\tan\frac{\theta}{2}$ και πρόκειται για έναν κατοπτρισμό με άξονα την εν λόγο ευθεία (να προσέξουμε πχ, ότι ένα σημείο της

προαναφερθείσας ευθείας με την εφαρμογή της $R_{-\frac{\theta}{2}}$ καταλήγει στον xx', όπου με την συζυγία $\gamma(z)$ μένει αναλλοίωτο και επιστρέφει στην αρχική ευθεία με την εφαρμογή της $R_{\frac{\theta}{2}}$).

Για μια πιο μεθοδική και σε βάθος διερεύνηση της μορφής $f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$ θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 9

Εάν δούμε το $\mathbb{C}$ ως ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τους μιγαδικούς $z=a+bi,\ w=c+di$ με τα διανύσματα (a,b) και (c,d) αντίστοιχα. Κατόπιν να σχηματίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο $(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd$. Να αποδειχτεί ότι :

i) $\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)=ac+bd$ **και συνεπώς**

$$(a,b)\perp(c,d)\Leftrightarrow z\perp w\Leftrightarrow ac+bd=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)=0$$

ii) $\zeta\bar{c}+c=0\Leftrightarrow$ **το** $c\perp\sqrt{\zeta}$ **.**

Απόδειξη

i) Αν $z=a+bi,\ w=c+di$ τότε $z\bar{w}=(ac+bd)+(bc-ad)i$, οπότε αν $z\perp w\Leftrightarrow(a,b)\perp(c,d)\Leftrightarrow ac+bd=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)=0$, άρα αποκτήσαμε ένα αλγεβρικό εργαλείο ώστε να αναγνωρίζουμε πότε τα διανύσματα που αντιπροσωπεύουν δύο μιγαδικοί είναι κάθετα.

ii) Έχοντας υπόψη ότι $\zeta=w^2\Leftrightarrow w=\sqrt{\zeta}$ τότε:

$$\zeta\bar{c}+c=0\Leftrightarrow w^2\bar{c}+w\bar{w}c=0\Leftrightarrow w\left(w\bar{c}+\bar{w}c\right)=0\Leftrightarrow\left(w\bar{c}+\bar{w}c\right)=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(w\bar{c}+\bar{w}c\right)=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(w\bar{c}\right)+\mathrm{Re}\left(\bar{w}c\right)=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(w\bar{c}\right)=0$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(w\bar{c}\right)=0\Leftrightarrow w\perp c$, άρα από το προηγούμενο σκέλος το $w=\sqrt{\zeta}$ θα είναι ορθογώνιο στο c. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δούμε το κεντρικό θεώρημα αυτής της παραγράφου που διαπραγματεύεται τη γεωμετρική υπόσταση των ισομετριών με μορφή $f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Θεώρημα 2

Έστω $f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \forall z\in\mathbb{C}$ με $\zeta=e^{i\theta}$ και c κάποιος μιγαδικός. Τότε η f είναι ένας από τους δύο παρακάτω γεωμετρικούς τύπους:

i) Αν $\zeta\bar{c}+c=0$, η f είναι κατοπτρισμός (reflection) γύρω από την ευθεία που περνάει από το $\frac{c}{2}\in\mathbb{C}$, με κλίση $\tan\frac{\theta}{2}$.

ii) Αν $\zeta\bar{c}+c\neq 0$, η f είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection), γύρω από τον προηγούμενο άξονα με διάνυσμα μετατόπισης $\frac{1}{2}\left(\zeta\bar{c}+c\right)$.

Απόδειξη

i) Το σημαντικό είναι να αποφανθούμε πότε η f έχει σταθερό σημείο, αν έχει, θα πρέπει όπως είδαμε πριν, να είναι κατοπτρισμός ως προς ευθεία που διέρχεται από το εν λόγο σημείο.

Ισχυρισμός 1:

f έχει σταθερό σημείο $\Leftrightarrow \zeta\bar{c}+c=0$.

Απόδειξη

Έστω $a\in\mathbb{C}$, να είναι το σταθερό σημείο της f ,τότε:

$$f(a)=a\Leftrightarrow\zeta\bar{a}+c=a\Leftrightarrow\bar{\zeta}a+\bar{c}=\bar{a}\Leftrightarrow\zeta\left(\bar{\zeta}a+\bar{c}\right)=\zeta\bar{a}\Leftrightarrow\zeta\left(\bar{\zeta}a+\bar{c}\right)+c=\zeta\bar{a}+c$$

$$\Rightarrow\zeta\bar{\zeta}a+\zeta\bar{c}+c=f(a)=a\Rightarrow a+\zeta\bar{c}+c=a\Rightarrow\zeta\bar{c}+c=0.$$

Από την άλλη αν: $\zeta\bar{c}+c=0$ είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι $f\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{c}{2}$ διότι ισοδύναμα έχουμε $\zeta\left(\overline{\frac{c}{2}}\right)+c=\frac{c}{2}\Leftrightarrow\zeta\bar{c}+2c=c\Leftrightarrow\zeta\bar{c}+c=0$ το οποίο και ισχύει.

Άρα η $f(z)=\zeta\bar{z}+c$, {έχει σταθερό σημείο το $\frac{c}{2}$} $\Leftrightarrow$ { $\zeta\bar{c}+c=0$ }.

Ισχυρισμός 2:

Έστω ευθεία με κλίση $\tan\frac{\theta}{2}$ που διέρχεται από το $\frac{c}{2}\in\mathbb{C}$, τότε κάθε σημείο της διατηρείται από την f.

Απόδειξη

Έστω $w=\sqrt{\zeta}=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$,τότε είναι εύκολο να δούμε ότι:

Παρατήρηση 1

Ισχύει: $\zeta\overline{w}=w^2\overline{w}=w\cdot\left(w\overline{w}\right)=w\cdot\left|w\right|^2=w$ και η ευθεία με κλίση $\tan\frac{\theta}{2}$ που διέρχεται από το $\frac{c}{2}\in\mathbb{C}$ θα συμβολίζεται με $z=t\cdot w+\frac{c}{2},\ t\in\mathbb{R}$. Υπολογίζοντας το $f\left(z\right)$ θα έχουμε

$$f\left(z\right)=f\left(tw+\frac{c}{2}\right)=\zeta\left(\overline{tw+\frac{c}{2}}\right)+c=t\zeta\overline{w}+\zeta\frac{\overline{c}}{2}+c\overset{\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho}{=}tw+0.5\zeta\overline{c}+c$$

$$\overset{\zeta\overline{c}=-c}{=}tw-\frac{c}{2}+c=tw+\frac{c}{2}.$$

Άρα $f\left(tw+\frac{c}{2}\right)=tw+\frac{c}{2}$, άρα η συγκεκριμένη ισομετρία διατηρεί τα σημεία της παραπάνω ευθείας.

<u>Ισχυρισμός 3</u>

Η ισομετρία f με τις παραπάνω υποθέσεις ($f\left(z\right)=\zeta\overline{z}+c$ και $\zeta\overline{c}+c=0$) είναι κατοπτρισμός του $z\in\mathbb{C}$ με άξονα την προαναφερθείσα ευθεία που θα συμβολίζουμε με ℓ (την ℓ : $z=t\cdot w+\frac{c}{2},t\in\mathbb{R}$) .

Απόδειξη

Εάν πάρουμε ένα $z\in\mathbb{C}$ με $z\notin\ell$, τότε το μέσον του τμήματος με άκρα τα $z, f\left(z\right)$ θα είναι το $\frac{z+f\left(z\right)}{2}=\frac{z+\zeta\overline{z}+c}{2}$. Ελέγχουμε το

$$f\left(\frac{z+f\left(z\right)}{2}\right)=f\left(\frac{z+\zeta\overline{z}+c}{2}\right)=\zeta\left(\overline{\frac{z+\zeta\overline{z}+c}{2}}\right)+c=\zeta\frac{\overline{z}+\overline{\zeta}z+\overline{c}}{2}+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\zeta\overline{z}+\zeta\overline{\zeta}z+\zeta\overline{c}\right)+c=\frac{1}{2}\left(\zeta\overline{z}+z-c\right)+c=\frac{1}{2}\zeta\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{c}{2}=\frac{z+\zeta\overline{z}+c}{2}=\frac{z+f\left(z\right)}{2}$$

Άρα $f\left(\frac{z+f\left(z\right)}{2}\right)=\frac{z+f\left(z\right)}{2}$, δηλαδή η f διατηρεί το μέσον του τμήματος με άκρα τα $z, f\left(z\right)$. Οπότε η ℓ διέρχεται από τα μέσα του συγκεκριμένου τμήματος.

Αρκεί τώρα να είναι και $\left(f\left(z\right)-z\right)\perp w$ (το w αντιπροσωπεύει την κλίση της ℓ).

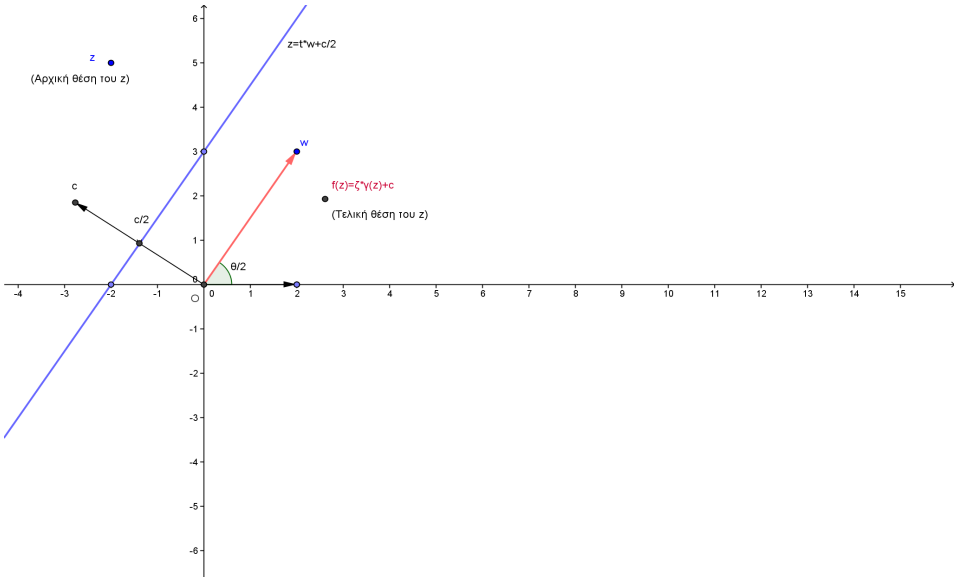
Είναι $f\left(z\right)-z=\zeta\overline{z}+c-z$. Για την καθετότητα εξετάζουμε το $\mathrm{Re}\left[w\overline{\left(f\left(z\right)-z\right)}\right]$

Είναι $w\left(\overline{\zeta\overline{z}+c-z}\right)=w\left(\overline{\zeta}z+\overline{c}-\overline{z}\right)=w\overline{\zeta}z+w\overline{c}-w\overline{z}\overset{\pi\alpha\rho\alpha\tau1}{=}\overline{w}z+w\overline{c}-w\overline{z}$. Άρα παίρνοντας το $\mathrm{Re}\left[w\overline{\left(f\left(z\right)-z\right)}\right]=\mathrm{Re}\left(\overline{w}z\right)+\mathrm{Re}\left(w\overline{c}\right)-\mathrm{Re}\left(w\overline{z}\right)=0$. Αφού όπως

έχουμε αποδείξει τα $c, w=\sqrt{\zeta}$ ορθογώνια $\Leftrightarrow \zeta\bar{c}+c=0$ και ακόμη οι μιγαδικοί $\bar{w}z, w\bar{z}$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος. Άρα αν φανταστούμε τους μιγαδικούς $w, f(z)-z$ ως διανύσματα με τις υπάρχουσες υποθέσεις, θα είναι κάθετα.

Άρα η $f(z)=\zeta\bar{z}+c$ με $\zeta\bar{c}+c=0$ εκφράζει τον κατοπτρισμό του z ως προς ευθεία με κλίση $\tan\frac{\theta}{2}$ που διέρχεται από το σταθερό σημείο $\frac{c}{2}$.

Σχηματικά θα έχουμε το εξής:



ii) Ολοκληρώνουμε τη διαπραγμάτευσή μας με την υποπερίπτωση $\zeta\bar{z}+c\neq 0$ και θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι πρόκειται για ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection).

<u>Ισχυρισμός 4</u>

Το $\zeta\bar{c}+c$ είναι πραγματικό πολλαπλάσιο του $w=\sqrt{\zeta}$ και το $-\zeta\bar{c}+c$ είναι φανταστικό πολλαπλάσιο του $w=\sqrt{\zeta}$.

Απόδειξη

Είναι $\zeta\bar{c}+c=w^2\bar{c}+w\bar{w}c=w\left(w\bar{c}+\bar{w}c\right)=2\operatorname{Re}\left(w\bar{c}\right)\cdot w$ όμοια εργαζόμαστε και $-\zeta\bar{c}+c=-w^2\bar{c}+w\bar{w}c=w\left(\bar{w}c-w\bar{c}\right)=2\operatorname{Im}\left(\bar{w}c\right)i\cdot w$. Οπότε ορίζουμε:

$c^{//}=\frac{1}{2}\left(\zeta\bar{c}+c\right)=\operatorname{Re}\left(w\bar{c}\right)\cdot w$ το οποίο είναι προφανώς παράλληλο στο w (ως πραγματικό του πολλαπλάσιο).

$c^{\perp}=\frac{1}{2}\left(-\zeta\bar{c}+c\right)=\operatorname{Im}\left(w\bar{c}\right)i\cdot w$ το οποίο είναι προφανώς κάθετο στο w αφού ο πολλαπλασιασμός με το i προκαλεί στροφή 90° κατά τη θετική φορά.

Παρατηρούμε ότι : $c=\frac{1}{2}\left(\zeta\bar{c}+c\right)+\frac{1}{2}\left(-\zeta\bar{c}+c\right)=c^{//}+c^{\perp}$. Άρα για την υπό διερεύνηση απεικόνιση $f\left(z\right)=\zeta\bar{z}+c$ με $\zeta\bar{z}+c\neq 0$ έχουμε:

$f\left(z\right)=\zeta\bar{z}+c=\zeta\bar{z}+c^{//}+c^{\perp}$ **. Ονομάζουμε** $g\left(z\right)=\zeta\bar{z}+c^{\perp}$ **, από την προηγούμενη υποπερίπτωση του θεωρήματος 2 {**$c^{\perp}$ **ορθογώνιο στο** $\sqrt{\zeta}$ **}** $\Leftrightarrow \zeta\overline{c^{\perp}}+c^{\perp}=0$**, η** $g\left(z\right)$ **θα αντιπροσωπεύει κατοπτρισμό ως προς ευθεία παράλληλη στο** $\sqrt{\zeta}$ **που διέρχεται από το μέσον του** $c^{\perp}$ **ακολουθούμενο από μετατόπιση** $c^{//}=\frac{1}{2}\left(\zeta\bar{c}+c\right)$ **η οποία είναι παράλληλη στο** $\sqrt{\zeta}=w$ **και άρα στον άξονα κατοπτρισμού. Η τελευταία επισήμανση κλείνει ουσιαστικά την απόδειξή μας.**□

Συνοπτικά έχουμε την παρακάτω κατάταξη των ισομετριών στο $\mathbb{C}$:

Σύνολο σταθερών σημείων	**Κανονική ισομετρία (proper isometry)**	**Μη κανονική ισομετρία (improper isometry)**
Κανένα	Μετατόπιση (translation) $f\left(z\right)=z+c$	Ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection) $f\left(z\right)=\zeta\bar{z}+c,\ \ \zeta\bar{c}+c\neq 0$
σημείο	Στροφή κατά γωνία θ, γύρω από $p=\frac{c}{1-\zeta}$ (rotation) $f\left(z\right)=\zeta z+c,\ \zeta\neq 1$	
Ευθεία		Κατοπτρισμός (reflection) $f\left(z\right)=\zeta\bar{z}+c,\ \ \zeta\bar{c}+c=0$
όλα	Ταυτοτική (identity) $I\left(z\right)=z$	

Θα αναφερθούμε τώρα σε μερικά χρήσιμα αλλά και σημαντικά αποτελέσματα της μελέτης των ισομετριών του επιπέδου.

Εφαρμογή 1

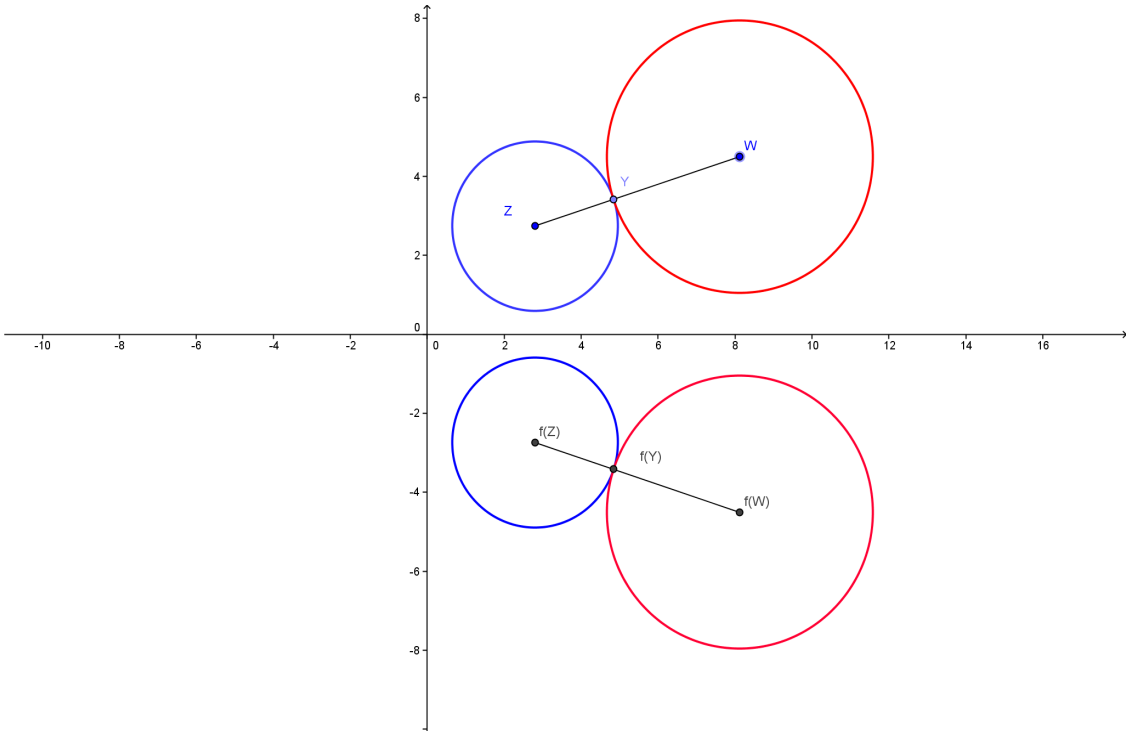
Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ μία ισομετρία. Να δειχθεί ότι $\forall z,w\in\mathbb{C}$, η f μεταφέρει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $z,w\in\mathbb{C}$ σε ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $f(z), f(w)$.

Απόδειξη

Θα δώσουμε μία γεωμετρική απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι y είναι ένα οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα z,w. Θεωρούμε δύο κύκλους με κέντρο τα z και w αντίστοιχα οι οποίοι να διέρχονται από το y. Τότε από την πρόταση 5, το y θα απεικονίζεται στο $f(y)$ και το τελευταίο θα απέχει από το $f(z)$ απόσταση ίση με αυτή που απέχει το y από το z. Αντίστοιχα το $f(y)$ θα απέχει από το $f(w)$ απόσταση ίση με αυτή που απέχει το y από το w. Επειδή η f διατηρεί το μήκος του τμήματος με άκρα z,w και αν σκεφτούμε πότε ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

Σχηματικά έχουμε:



Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι μία $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ισομετρία διατηρεί το μέτρο των γωνιών (ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της γωνίας).

Απόδειξη

Είναι άμεση από την εφαρμογή 1, θεωρώντας τρία σημεία: την κορυφή της γωνίας Ο και δύο σημεία επιλεχθέντα εκατέρωθεν του Ο στις πλευρές της γωνίας.

Εφαρμογή 3

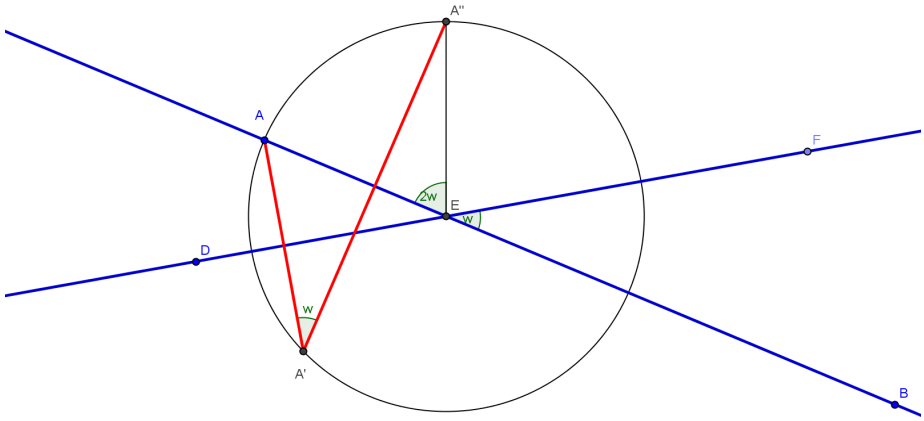
Να δειχθεί ότι η στροφή στο επίπεδο $\mathbb{C}$ γύρω από ένα σημείο Σ κατά γωνία θ μπορεί να επιτευχθεί μέσω δύο διαδοχικών κατοπτρισμών ως προς ευθείες που διέρχονται από το Σ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ/2.

Απόδειξη

Για μία αλγεβρική επίλυση μπορούμε να επιλέξουμε η πρώτη ευθεία ως προς την οποία γίνεται ο πρώτος κατοπτρισμός να είναι η χχ' (στην ουσία δηλαδή πρόκειται για την συζυγία).

Έστω $f(z)=\bar{z}, z\in\mathbb{C}$ και $g(z)=\zeta\bar{z}$ με $\zeta=\cos\theta+i\sin\theta$, δηλαδή η δεύτερη απεικόνιση είναι κατοπτρισμός γύρω από ευθεία με κλίση $\tan\theta/2$ που διέρχεται από το Ο. Τότε $g(f(z))=\zeta\overline{(\bar{z})}=\zeta z$, η οποία έχει σταθερό σημείο το Ο και αντιπροσωπεύει στροφή του επιπέδου $\mathbb{C}$ κατά γωνία θ γύρω από το Ο.

Ή για μία καθαρά γεωμετρική απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω σχήμα:



Εφαρμογή 4

I. **Να αποδειχθεί ότι μια μετατόπιση του $\mathbb{C}$ είναι η σύνθεση δύο διαδοχικών κατοπτρισμών.**

II. **Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 3 και τη συνολική διαπραγμάτευση των ισομετριών του $\mathbb{C}$ να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση (κάποιου αριθμού) κατοπτρισμών.**

Απόδειξη

I. <u>Θεωρούμε δύο διαδοχικούς κατοπτρισμούς ως προς παράλληλες ευθείες</u>.

Έστω ότι ο πρώτος κατοπτρισμός είναι:

$f(z)=\zeta\bar{z}+c,\ \mu\varepsilon\ \zeta\bar{c}+c=0$ και c ορθογώνιο στο $\sqrt{\zeta}$ και c/2 απόσταση από το O.

Έστω ότι ο δεύτερος κατοπτρισμός είναι:

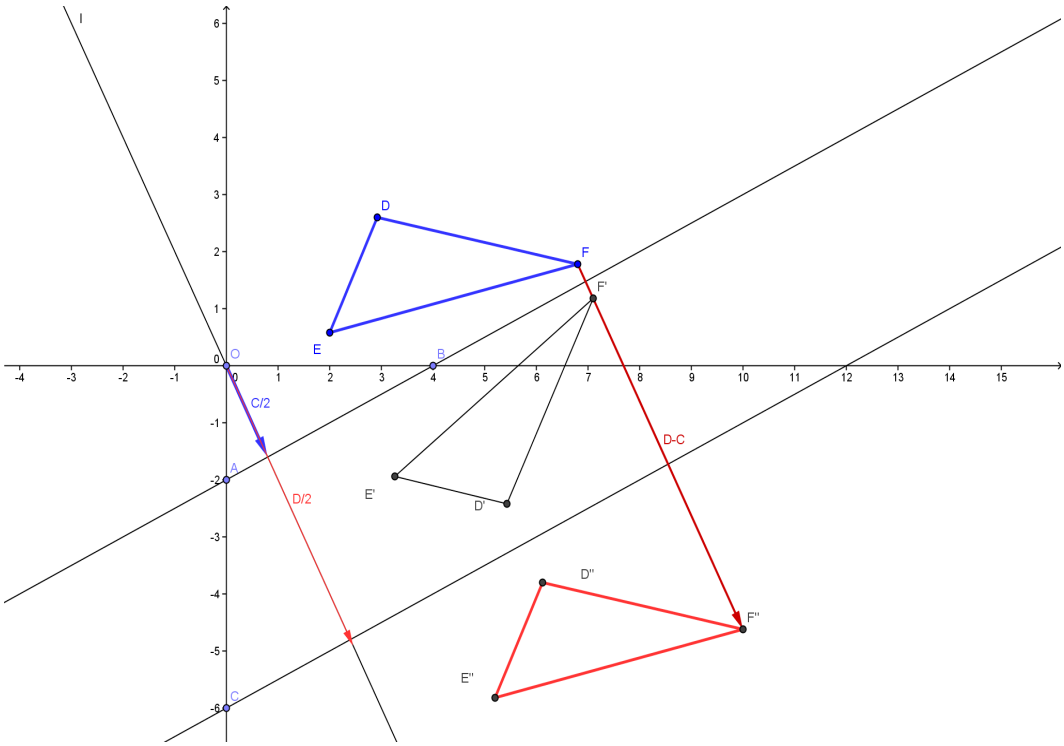
$g(z)=\zeta\bar{z}+d,$ με $\zeta\bar{d}+d=0$ και d ορθογώνιο στο $\sqrt{\zeta}$ και d/2 απόσταση από το O. Τότε:

$$g(f(z))=\zeta\overline{\left(\zeta\bar{z}+c\right)}+d=\zeta\left(\bar{\zeta}z+\bar{c}\right)+d=\zeta\bar{\zeta}z+\zeta\bar{c}+d=|\zeta|^2 z+\zeta\bar{c}+d$$

$$\overset{\zeta\bar{c}=-c}{=} z+d-c$$

. (Να σημειώσουμε ότι η απόσταση των ευθειών ήταν d/2-c/2)

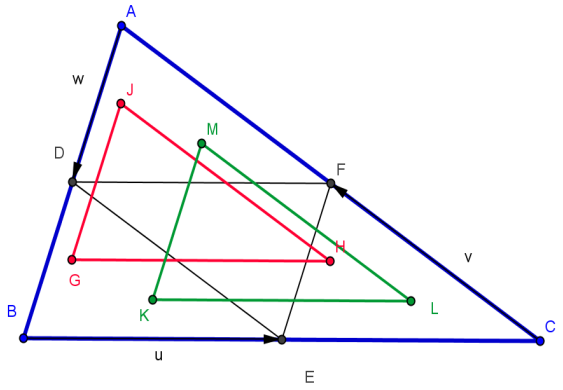
Άρα η σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς παράλληλες ευθείες δίνει μετατόπιση κατά διάνυσμα διπλάσιο της απόστασης των δύο ευθειών.



II. Τέλος επειδή είδαμε ότι οποιαδήποτε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ γράφεται στη μορφή: $F=\mu_{\bar{u}}\circ R_\theta\circ k$ όπου k: κατοπτρισμός, R_θ: στροφή κατά θ, $\mu_{\bar{u}}$: μετατόπιση. Τότε, άμεσα από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι κάθε ισομετρία F γράφεται ως σύνθεση (κάποιου αριθμού) κατοπτρισμών.

Εφαρμογή 5

Στο διπλανό σχήμα τα D, E και F είναι τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών του τριγώνου ABC. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δυο τριγώνων που σχηματίζονται από τα ορθόκεντρα G, H, J και τα κέντρα K, L, M των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων BDE, EFC και DAF, αντίστοιχα;

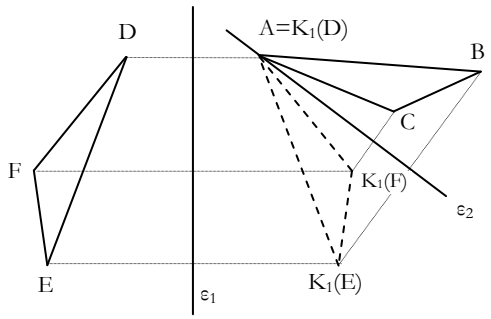


Υπόδειξη: Επειδή $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EC} = \vec{u}$, η μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$ απεικονίζει το τρίγωνο *BDE* στο *EFC* και, επειδή η μεταφορά είναι ισομετρία, απεικονίζει τα σημεία του ενός στα αντίστοιχα σημεία του άλλου. Ιδιαιτέρως, απεικονίζει το *G* στο *H* και το *K* στο *L*, αφού τα σημεία αυτά προσδιορίζονται μέσω συγκεκριμένων μετρικών σχέσεων από τις πλευρές των αντίστοιχων τριγώνων, οπότε $GH = KL = \frac{BC}{2} = \left|\vec{u}\right|$. Ανάλογα, αξιοποιώντας τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ που υποδεικνύονται στο σχήμα, αποδεικνύονται οι $HJ = LM = \frac{CA}{2} = \left|\vec{v}\right|$ και $JG = MK = \frac{AB}{2} = \left|\vec{w}\right|$ απ' όπου προκύπτει ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εφαρμογή 6

Δυο τρίγωνα είναι ίσα, αν και μόνον αν μπορούν να ταυτισθούν με μια σύνθεση το πολύ τριών κατοπτρισμών. Για τρίγωνα ίδιου προσανατολισμού αρκούν δυο κατοπτρισμοί.

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα ABC και DEF του σχήματος είναι ίσα, δηλαδή έχουν ίσες τις αντίστοιχες πλευρές τους, και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Για να μεταφέρουμε το ένα "πάνω" στο

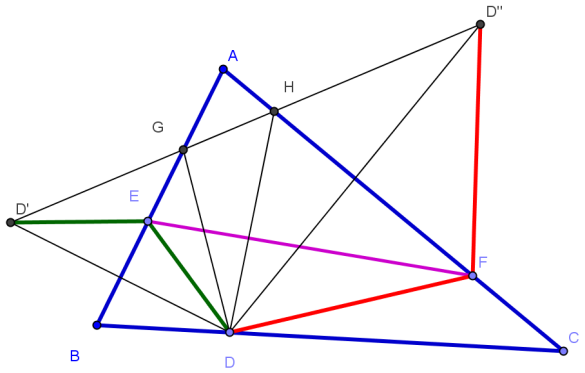


άλλο, αρκεί να εφαρμόσουμε πρώτα τον κατοπτρισμό K_1, με άξονα τη μεσοκάθετη ε_1 του ευθύγραμμου τμήματος AD, οπότε το σημείο D θα ταυτισθεί με το A, και, κατόπιν, τον κατοπτρισμό K_2, με άξονα τη μεσοκάθετη ε_2 του ευθύγραμμου τμήματος $BK_1(E)$. Ο τελευταίος κατοπτρισμός θα ταυτίσει το B με το $K_1(E)$ και το C με το $K_1(F)$. Αν τα τρίγωνα δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, τότε μπορούμε να αλλάξουμε τον προσανατολισμό του ενός μέσω οποιουδήποτε κατοπτρισμού και να αναχθούμε στην προηγούμενη περίπτωση.

Εφαρμογή 7

Ευθειοποίηση της περιμέτρου τριγώνου: Ζητείται να βρεθεί το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου που είναι εγγεγραμμένο σε οξυγώνιο τρίγωνο ABC και έχει κορυφή το δεδομένο σημείο D.

Υπόδειξη: Τα σημεία D΄ και D΄΄ που είναι κατοπτρικές εικόνες του D ως προς τις ευθείες των AB και AC, αντίστοιχα, είναι δεδομένα και η περίμετρος του τριγώνου DEF θα ισούται με το μήκος της τεθλασμένης γραμμής D΄EFD΄΄, που είναι μεγαλύτερο από το μήκος του D΄D΄΄. Συνεπώς, το εγγεγραμμένο τρίγωνο με κορυφή το D και ελάχιστη περίμετρο είναι το GDH, όπως στο σχήμα.



Εφαρμογή 8

Να αναλυθούν οι ακόλουθες ισομετρίες:

I. $f(z) = -iz + 2$

II. $f(z) = \bar{z} + 1$

III. $f(z) = i\bar{z} + 1$

IV. $f(z) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\bar{z} + \left(\sqrt{2} - 1 + i\right)$

Λύση

Η λύση είναι άμεση χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της όγδοης πρότασης και του δεύτερου θεωρήματος.

Επίσης εάν η μορφή του $f(z)=\zeta\bar{z}+c$ επιτρέπει εύκολο προσδιορισμό του $w=\sqrt{\zeta}$ μπορούμε να αναλύσουμε το c σε δύο διανύσματα. Το ένα παράλληλο στο w και το άλλο κάθετο σε αυτό χρησιμοποιώντας τον τύπο προβολής διανύσματος σε διάνυσμα ($c^{//}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{u}\right|^2}\cdot\vec{u}$)

Στο τέταρτο ερώτημα πχ. θα λάβουμε ολισθαίνουσα ανάκλαση με:

$$f(z)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\bar{z}+\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}^{c^{\perp}}+\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}i\right)}^{c^{//}}$$

Κεφάλαιο 2ο : Οι ισομετρίες στο σύνολο $\mathbb{R}^3$

ΟΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}^3$

Αρχικά θα αναφερθούμε στις ισομετρίες σε ένα γενικότερο πλαίσιο, εργαζόμενοι στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, κατόπιν θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στις κινήσεις που διατηρούν τις αποστάσεις στο χώρο (δηλ. στο $\mathbb{R}^3$).
Θυμόμαστε πως το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων χρησιμοποιείται για να καθορίζει μέτρα και γωνίες στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ και

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)^{1/2}.$$

Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x},\vec{y}$ υπολογίζεται από τον τύπο $\cos w=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}$.

Ορισμός 1

Μιά ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ είναι μία συνάρτηση που διατηρεί τις αποστάσεις , δηλαδή $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ με την ισιότητα $\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|,\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι το σύνολο όλων των ισομετρών του $\mathbb{R}^n$ σχηματίζει μία ομάδα (με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων) την οποία και δηλώνουμε $\left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right),\circ\right)$. Η απόδειξη είναι απλή αφού το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό, είναι κλειστό ως προς την πράξη που το εφοδιάσαμε, η πράξη είναι προσεταιριστική υπάρχει ταυτοτικό στοιχείο και για κάθε ισομετρία υπάρχει η αντίστροφή της.
Επίσης υπενθυμίζουμε ότι:

Ορισμός 2

Ένας πίνακας $n\times n$ καλείται ορθογώνιος $\Leftrightarrow A\cdot A^T=A^T\cdot A=I_n$ όπου A^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του A(δηλ κάθε a_{ij} στοχείο του A^T είναι το a_{ji} στοιχείο του A).

Δηλώνουμε με $O(n)$ (orthogonal group) το σύνολο όλων των $n\times n$ ορθογωνίων πινάκων και με $SO(n)$ (special orthogonal group) το σύνολο όλων των $n\times n$

ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα +1. Τέλος με $GL(n,\mathbb{R})$ (general linear group) δηλώνουμε το σύνολο των $n\times n$ αντιστρέψιμων πινάκων. Τα παραπάνω σύνολα εφοδιασμένα με τον πολλαπλασιασμό πινάκων αποτελούν ομάδες και μάλιστα:
$(SO(n),\cdot)<(O(n),\cdot)<(GL(n,\mathbb{R}))$

Παράδειγμα:

Ο πίνακας που αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία θ, στο μιγαδικό επίπεδο είναι:

$matrixR_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ο οποίος είναι ορθογώνιος.

Η ουσιαστική παρατήρηση είναι η εξής:

Λήμμα 1

Έστω Α ένας ορθογώνιος $n\times n$ πίνακας. Η γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ που δίνεται από τη σχέση $T(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$ είναι ισομετρία.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε ενδιάμεσα μία ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:
$\forall A\in O(n)$ και $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ ισχύει: $\vec{x}\cdot A\vec{y}=A^T\vec{x}\cdot\vec{y}$.

Έστω Τ γραμμική απεικόνιση με τις παραπάνω υποθέσεις τότε:

$$\left|T(\vec{x})\right|^2=\left(T(\vec{x})\right)^2=\left(A\vec{x}\right)^2=A\vec{x}\cdot A\vec{x}\overset{ιδιότητα}{=}AA^T\vec{x}^2=I_n\vec{x}^2=\vec{x}^2=\left|\vec{x}\right|^2.$$

Οπότε $\left|T(\vec{x})\right|=\left|\vec{x}\right|$

Αλλά $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι γραμμική, επομένως :
$\left|T(\vec{x})-T(\vec{y})\right|=\left|T(\vec{x}-\vec{y})\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|$ η Τ είναι ισομετρία.

Μία τέτοια γραμμική απεικόνιση την καλούμε ορθογώνια γραμμική απεικόνιση.

Είναι ενδιαφέρον ότι οποιαδήποτε ισομετρία διατηρεί το $\vec{0}$, πρέπει να είναι ορθογώνια γραμμική απεικόνιση.

Πρόταση 1

Αν $f\in Isom(\mathbb{R}^n)$ με $f(\vec{0})=\vec{0}$ (δηλ $f\in Isom_{\vec{0}}\mathbb{R}^3$) τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας Α: $f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$

Απόδειξη

Βήμα 1° :Μία ισομετρία που διατηρεί το $\vec{0}$, διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Δεδομένου ότι η f είναι μία ισομετρία που διατηρεί το $\vec{0}$, έχουμε:

$\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{0}\right)\right|=\left|\vec{x}-\vec{0}\right|=\left|\vec{x}\right|\Leftrightarrow\left|f\left(\vec{x}\right)\right|=\left|\vec{x}\right|$. Είναι:

$\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|^2=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|^2=\left|\vec{x}\right|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left|\vec{y}\right|^2$ και

$\left|f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right|^2=\left|f\left(\vec{x}\right)\right|^2-2f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)+\left|f\left(\vec{y}\right)\right|^2$

και αν εξισώσουμε τις δύο προηγούμενες σχέσεις με τη βοήθεια της $\left|f\left(\vec{x}\right)\right|=\left|\vec{x}\right|$, λαμβάνουμε ότι $f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{x}\cdot\vec{y}$

<u>Βήμα 2ο</u>: Θα δείξουμε ότι η f όπως την ορίσαμε είναι γραμμική.

Έστω $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $f\left(\vec{e_j}\right)=\vec{v_j},\ j=1,2,\ldots n$, επειδή $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=0,\forall i\neq j$ και από το 1ο βήμα $f\left(\vec{e_i}\right)\cdot f\left(\vec{e_j}\right)=\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=0, i\neq j$, επίσης είναι: $\left|\vec{v_i}\right|=\left|f\left(\vec{e_i}\right)\right|=\left|\vec{e_i}\right|$ επομένως προκύπτει ότι και τα $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}$ είναι επίσης μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, τότε αυτό θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της συνήθους ορθοκανονικής βάσης, δηλαδή $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}$ και ακόμη $f\left(\vec{x}\right)\in\mathbb{R}^n$ άρα μπορεί να γραφτεί ώς γραμμικός συνδυασμός της της δεύτερης ορθοκανονικής βάσης που αναφέρθηκε. $f\left(\vec{x}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j\vec{v_j}$ Τότε όμως θα έχουμε:

$$x_i=\vec{x}\cdot\vec{e_i}\overset{\beta\acute{\eta}\mu\alpha}{\underset{1^o}{=}}f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{e_i}\right)=f\left(\vec{x}\right)\cdot v_i=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\vec{v_j}\right)\cdot\vec{v_i}\overset{v_i\cdot v_j=0}{\underset{i\neq j}{=}}$$

$\vec{v_i}\cdot\vec{v_i}a_i=\left|\vec{v_i}\right|^2a_i=a_i$. Δηλαδή $x_i=a_i$, οπότε:

$f\left(\vec{x}\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}\right)\overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=}\sum_{j=1}^{n}a_j\vec{v_j}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{v_i}=\sum_{i=1}^{n}x_if\left(\vec{e_i}\right)$ και άρα η f είναι γραμμική.

<u>Βήμα 3ο</u> : Ξέρουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση που μεταφέρει τη συνήθη ορθοκανονική βάση $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}\in\mathbb{R}^n$ σε μία άλλη ορθοκανονική βάση $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots,\vec{v_n}\in\mathbb{R}^n$

Έστω Α ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση. Τότε η j στήλη του Α είναι $A\cdot\overrightarrow{e_j}=f\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\overrightarrow{v_j}$

Και αφού οι στήλες σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε $A^TA=I_n$. Το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξή μας.□

Πόρισμα 1

Η υποομάδα των ισομετριών που αφήνουν αναλλοίωτο το $\vec{0}$ είναι ισόμορφη κατά φυσικό τρόπο με την ομάδα των ορθογώνιων πινάκων $n\times n$. Και θα συμβολίζουμε: $\left(O(n),\cdot\right)\cong\left(Isom_{\vec{0}}\left(\mathbb{R}^n\right),\circ\right)\leq\left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right),\circ\right)$

Τώρα έχουμε τα εφόδια να εξάγουμε ένα αποτέλεσμα που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια της διερεύνησης των ισομετριών: <u>κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο (σύνθεση) μιας μετατόπισης και ενός στοιχείου $O(n)\cong Isom_{\vec{0}}$.</u>

Υπενθυμίζουμε ότι:

Ορισμός

Μετατόπιση (translation) στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση της μορφής $t=t_{\vec{c}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ με $t_{\vec{c}}\left(\vec{x}\right)=\vec{x}+\vec{c}$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$.

Να σημειώσουμε ότι όλες οι μετατοπίσεις είναι ισομετρίες και το σύνολο όλων των ισομετριών σχηματίζει μία υποομάδα: $\left(Trans\left(\mathbb{R}^n\right),\circ\right)<\left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right),\circ\right)$

Πρόταση 2

Κάθε ισομετρία $f\in Isom\left(\mathbb{R}^n\right)$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $f=t\circ Y$, t κάποια μετατόπιση και Y στοιχείο του $O(n)$

Απόδειξη

Έστω f μία οποιαδήποτε ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{c}=f\left(\vec{0}\right)\in\mathbb{R}^n$. Έστω $t=t_{\vec{c}}$.

Τότε $t^{-1}f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$, οπότε η ισομετρία $t^{-1}f$ διατηρεί το $\vec{0}$ και άρα

$t^{-1}f=Y\in O(n)\Leftrightarrow f=tY$

Η μοναδικότητα είναι προφανής, αφού το t είναι καθορισμένο μοναδικά και $Y=t^{-1}f$, με f καθορισμένη ισομετρία.

Μία άλλη απόδειξη για τη μοναδικότητα έχει ως εξής:
Έστω $f = tY = t'Y'$ με $t, t' \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right)$ και $Y, Y' \in O(n)$, τότε θα ισχύει $t'^{-1}t = Y'Y^{-1}$. Αλλά η τομή της ομάδας μετατοπίσεων του $\mathbb{R}^n$ και της ομάδας ισομετριών που αφήνουν αναλλοίωτο το $\vec{0}$ είναι η ταυτοτική, δηλαδή:
$\left(Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right) \cap \left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right) = Id_{\mathbb{R}^n}$ Επομένως $t'^{-1}t = Id \Leftrightarrow t = t'$ και $Y'Y^{-1} = Id \Leftrightarrow Y' = Y$, άρα $f = tY$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο. □

Θεώρημα 1

Η ομάδα των μετατοπίσεων του $\mathbb{R}^n$ είναι κανονική υποομάδα του συνόλου των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ και συμβολικά γράφουμε:
$\left(Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right) \lhd \left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right)$

Ακόμη ισχύει: $Isom\left(\mathbb{R}^n\right) / Trans\left(\mathbb{R}^n\right) \cong Isom_{\vec{0}}\left(\mathbb{R}^n\right) \cong O(n)$

Απόδειξη

Έστω $f \in Isom\left(\mathbb{R}^n\right)$ μια τυχαία ισομετρία και έστω $t = t_{\vec{c}} \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right)$ μια μετατόπιση.
Το ότι $\left(Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right) < \left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right)$ είναι απλό διότι:

$Id \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right) \neq \varnothing$

$t_1 \circ t_2 \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \forall t_1, t_2$ (κλειστότητα)

$t^{-1} \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \forall t$ (προφανώς)

Πρέπει μόνο να ελέγξουμε ότι το $ftf^{-1} \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \forall f \in Isom\left(\mathbb{R}^n\right)$
Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2 μπορούμε να γράψουμε $f = t'Y$ με $t' \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right)$ και $Y \in O(n)$. Τότε $ftf^{-1} = t'Yt\left(t'Y\right)^{-1} = t'\left(YtY^{-1}\right)t'^{-1}$
Τώρα αφού $Y \in O(n)$ είναι γραμμική ($Y \in Isom_{\vec{0}}\left(\mathbb{R}^n\right) \Leftrightarrow Y\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$, άρα γραμμική)
Έχουμε: $YtY^{-1}\left(\vec{x}\right) = Y\left[t\left(Y^{-1}\left(\vec{x}\right)\right)\right] = Y\left(Y^{-1}\left(\vec{x}\right) + \vec{c}\right) = \vec{x} + Y\left(\vec{c}\right) = \tilde{t}\left(\vec{x}\right)$ όπου προφανώς το $\tilde{t} = t_{Y(c)} \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right)$, είναι δηλαδή και αυτό μία μετατόπιση.
Άρα το στοιχείο που είχαμε προς έλεγχο $ftf^{-1} = t'\tilde{t}t'^{-1} \in Trans\left(\mathbb{R}^n\right)$, άρα πράγματι $\left(Trans\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right) \lhd \left(Isom\left(\mathbb{R}^n\right), \circ\right)$

Υπενθυμίζουμε το θεμελιώδες θεώρημα Ομομορφισμών:
Έστω $(G,\circ)$ και $(G',*)$ ομάδες και $g:G\to G'$ ένας ομομορφισμός
($g(a\circ b)=g(a)*g(b)$) Τότε: $G/\ker g\cong G'$
Για τη δική μας περίπτωση ορίζουμε:
$h:Isom(\mathbb{R}^n)\to O(n)$,
εφαρμόζοντας την πρόταση 2 που λέει ότι αν μας δοθεί μία $f\in Isom(\mathbb{R}^n)$
γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $f=tY$ και συμφωνούμε να είναι
$h(f)=Y$
Η h όπως ορίστηκε είναι ομομορφισμός διότι:
Αν πάρουμε την $g\in Isom(\mathbb{R}^n)$ με $g=t'Y'$ τότε
$fg=(tY)(t'Y')=t(Yt')Y'$
Από την κανονικότητα της ομάδας $Trans(\mathbb{R}^n)$ και την προηγούμενη εργασία μας
$\tilde{t}=Yt'Y^{-1}\Leftrightarrow \tilde{t}Y=Yt'$
Άρα $fg=t(\tilde{t}Y)Y'=t\tilde{t}YY'$ οπότε
$h(fg)=YY'=h(f)h(g)$
Προφανώς αφού ορίσαμε $h(f)=Y$ θα είναι $\ker h=Trans(\mathbb{R}^n)$ οπότε
$Isom(\mathbb{R}^n)/Trans(\mathbb{R}^n)\cong Isom_{\vec{0}}(\mathbb{R}^n)\cong O(n).\square$

Τι περισσότερο μπορούμε να πούμε για τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$ που διατηρούν το $\vec{0}$;
Δηλαδή την ομάδα των ορθογώνιων πινάκων $(O(3),\cdot)$ που όπως είδαμε πριν είναι ισόμορφη με το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^3$ που διατηρούν το $\vec{0}$ δηλ:
$(Isom_{\vec{0}}(\mathbb{R}^3),\circ)$
Αν $A\in O(3)$ τότε $A\cdot A^T=I_3$ και άρα
$\det(A\cdot A^T)=\det A\cdot\det A^T=(\det A)^2=1\Leftrightarrow \det A=\pm 1$

Εστιάζουμε τώρα στην περίπτωση όπου $\det A=1$

Πρόταση 3

Έστω $A \in SO(3)$. Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : A \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (καλείται ιδιοδιάνυσμα του Α) και η γραμμική απεικόνιση $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ είναι στροφή κατά γωνία θ επί ενός επιπέδου κάθετου στον άξονα που καθορίζεται από το $\vec{v}$.

Απόδειξη

Ενδιάμεσα θα χρειαστούμε τον παρακάτω **ισχυρισμό**:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και A^T ο ανάστροφος του. Τότε οι πίνακες αυτοί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Λύση

Έστω $p_1(x) = |xI_n - A|$ και $p_2(x) = |xI_n - A^T|$ τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα.

Ξέρουμε ότι: $(xI_n - A)^T = (xI_n)^T - A^T = xI_n{}^T - A^T = xI_n - A^T$

Οπότε:

$$p_1(x) = |xI_n - A| = \left|(xI_n - A)^T\right| = \left|xI_n - A^T\right| = p_2(x)$$

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της κυρίως πρότασης.

Υπάρχει ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα αν και μόνο αν $\det(A - I_3) = 0$, αλλά αφού $A \in SO(3)$ είναι:

$$\det(A - I_3) = \det(A - A \cdot A^T) = \det A \cdot \det(I_3 - A^T) \overset{\text{ισχυρισμός}}{=}$$

$$\det(I_3 - A) = (-1)^3 \det(A - I_3) \Rightarrow \det(A - I_3) = 0$$

Επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Δηλαδή

$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow A \cdot \vec{v} = \vec{v}$ και $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (αφήνει αναλλοίωτο το $\vec{v}$)

Τώρα επιλέγουμε μία ορθοκανονική βάση $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{v_1} = \vec{v}$ και αφού $f(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$ αυτό σημαίνει ότι η f πρέπει να απεικονίζει τα διανύσματα $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ σε αμοιβαία ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα ομοίως ορθογώνια ως προς το $\vec{v_1}$ (πρόταση 1).

Δηλαδή η f πρέπει να δίνει μια ορθογώνια γραμμική απεικόνιση από το επίπεδο που καθορίζουν τα $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ στον εαυτό του, δηλαδή είτε στροφή του επιπέδου είτε γινόμενο (σύνθεση) στροφής με κατοπτρισμό .

Αλλά αφού $\det A = 1$ το τελευταίο απορρίπτεται. □

Εξηγούμε το προηγούμενο με την παράθεση ενός ενδιάμεσου (ακόμη) ισχυρισμού που έχει να κάνει με το γνώριμο χώρο των ισομετριών του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

Α) Αποδεικνύουμε ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας 2×2 μπορεί να γραφτεί είτε ως $\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ \sin w & -\cos w \end{pmatrix}$ για κάποιο $w \in \mathbb{R}$

Β) Ακόμη ο δεύτερος πίνακας που αναφέραμε είναι το γινόμενο μίας στροφής και ενός κατοπτρισμού. Επιπλέον αν $A \in SO(2)$ πρόκειται αναγκαστικά για στροφή:

Λύση

Α) Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ τότε έχουμε:

Α ορθογώνιος $\Leftrightarrow AA^T = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{Bmatrix}$$

Επίσης από τη γνωστή ταυτότητα $(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, οπότε από τα δεδομένα που έχουμε $(ad-bc)^2 + 0 = 1\cdot 1$ και έτσι προκύπτει: $ad - bc = \pm 1$

- Για $ad - bc = 1$, θεωρούμε το σύστημα $\begin{Bmatrix} ac+bd=0 \\ ad-bc=1 \end{Bmatrix}$ με αγνώστους τους a,b. Είναι $D = \begin{vmatrix} c & d \\ d & -c \end{vmatrix} = -c^2 - d^2 = -1$ και $D_a = \begin{vmatrix} 0 & d \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -d$, $D_b = \begin{vmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{vmatrix} = c$. Άρα $a = d$ και $b = -c$. Παίρνουμε το διάνυσμα $\vec{x} = (a,b)$ οπότε $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ και αν w η γωνία που σχηματίζει το $\vec{x}$ με τον χχ' τότε προφανώς $a = \cos w$ και $b = \sin w$, οπότε $A = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$

- Αντίστοιχα εργαζόμενοι για $ad - bc = -1$ θεωρούμε το σύστημα $\left\{\begin{matrix} ac + bd = 0 \\ ad - bc = -1 \end{matrix}\right\}$ και επιλύοντάς το με αγνώστους a, b βρίσκουμε $d = -a$ και $c = b$ και αν w η γωνία που σχηματίζει το $\vec{x}$ με τον χχ' τότε προφανώς $a = \cos w$ και $b = \sin w = c$ και $d = -\cos w$, οπότε :
$A = \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ \sin w & -\cos w \end{pmatrix}$.

Β) Στην τελευταία περίπτωση μάλιστα παρατηρούμε ότι
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ \sin w & -\cos w \end{pmatrix}$ ο πίνακάς μας, γράφεται ως γινόμενο στροφής με κατοπτρισμό και αν $\det A = 1$ ο πίνακας που λαμβάνουμε είναι αποκλειστικά στροφή.

Για να επεκτείνουμε τη διερεύνηση που προηγήθηκε, σε όλο το $O(3)$ μπορούμε να ελέγξουμε την περίπτωση $\det A = -1$ τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα: $A\vec{v} = -\vec{v}$ (δηλαδή υπάρχει ιδιοτιμή -1)
Έλεγχος:
$\det(A + I_3) = \det(A + AA^T) = \det A \cdot \det(I_3 + A^T) = -1 \cdot \det(I_3 + A^T)$
$= -\det(I_3 + A) \Rightarrow 2\det(I_3 + A) = 0$, οπότε πράγματι υπάρχει ιδιοτιμή -1 και θα είναι: $f(\vec{v}) = A\vec{v} = -\vec{v}$

Επιλέγουμε με το ίδιο σκεπτικό όπως πριν ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v_1} = \vec{v}$ και επιλέγουμε μία ορθοκανονική βάση $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$ και αφού $f(\vec{v_1}) = -\vec{v_1}$ θα πρέπει από την πρόταση 1 να απεικονίζει τα διανύσματα $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ σε αμοιβαία ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα ομοίως ορθογώνια ως προς το $\vec{v_1}$. Δηλαδή η f πρέπει να δίνει μία ορθογώνια γραμμική απεικόνιση από το επίπεδο που καθορίζουν τα $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ στον εαυτό του, δηλαδή είτε στροφή του επιπέδου είτε κατοπτρισμό είτε σύνθεση αυτών.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε σε μία πλήρη ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}^3$, ανάλογη με εκείνη που είχαμε στον $\mathbb{R}^2$.

Προφανή παραδείγματα ισομετριών του $\mathbb{R}^3$ είναι:

1. **Μετατόπιση (translation)**: Δοσμένου διανύσματος $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ έστω $t_{\vec{c}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $t_{\vec{c}}\left(\vec{x}\right) = \vec{x} + \vec{c}$.
2. **Στροφή (rotation)**: Είδαμε ότι αν $A \in SO(3)$ τότε η γραμμική απεικόνιση $T\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$ αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από άξονα $l \subseteq \mathbb{R}^3$ (άξονας που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή 1).
3. **Κατοπτρισμός (reflection)**: Η απεικόνιση $R(x, y, z) = (x, y, -z)$ είναι ένας κατοπτρισμός στο xy επίπεδο. Με την ορολογία που αναπτύξαμε είναι μη κανονική ισομετρία (improper isometry) αφού αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Σημειώνουμε ότι με τον όρο 'κατοπτρισμός' εννοούμε πάντα ανάκλαση ως προς επίπεδο.
Τώρα όταν εξετάζουμε τη σύνθεση αυτών των τριών τυπικών απεικονίσεων, οδηγούμαστε στο να ορίσουμε τρεις επιπλέον τύπους ισομετρίας.

4. **Ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection)**: Κατοπτρισμός ως προς ένα επίπεδο και κατόπιν μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα που βρίσκεται στο αυτό επίπεδο. Παράδειγμα: $T(x, y, z) = (x+1, y, -z)$.
5. **Περιστροφικός κατοπτρισμός (rotatory reflection)**: Κατοπτρισμός ως προς ένα επίπεδο και κατόπιν στροφή γύρω από ένα άξονα κάθετο σε αυτό το επίπεδο. Παράδειγμα: $T(x, y, z) = (-y, x+1, -z)$.
6. **Ελικοειδής (screw)**: Στροφή γύρω από ένα άξονα l και κατόπιν μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα παράλληλο σε αυτόν τον άξονα. Παράδειγμα: $T(x, y, z) = (-y, x, z+1)$.

Αυτό που μένει τώρα είναι να δείξουμε ότι κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ είναι μία μορφή εκ των προηγούμενων έξι τύπων. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 2 για να αναλύσουμε όλους τους δυνατούς τύπους ισομετριών. Ως πρώτο βήμα εξάγουμε το ακόλουθο συμπέρασμα από την πρόταση.

Πόρισμα 2

Αν $A \in O(3)$, τότε η γραμμική απεικόνιση $f\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$ είναι μία εκ των παρακάτω μορφών: ταυτότητα, στροφή, κατοπτρισμός ή το γινόμενο (σύνθεση) στροφής με κατοπτρισμό.

Απόδειξη

Εάν $\det A = +1$ τότε από την πρόταση 3 η f αντιπροσωπεύει στροφή γύρω από ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, κατά γωνία θ (αν μάλιστα θ=0 λαμβάνουμε την ταυτοτική).
Έστω $r(x,y,z) = (x,y,-z)$ ο κατοπτρισμός ως προς επίπεδο xy τότε είναι $\det r = -1$, αν τώρα έχουμε και $\det A = -1$, από τον κανόνα του γινομένου για τις ορίζουσες $\det r \cdot \det A = +1$ και άρα $r \circ f$ θα είναι στροφή σύμφωνα με τα προηγούμενα (πρόταση 2). Οπότε μπορούμε να γράψουμε:
$r \circ f = R \Leftrightarrow f = r^{-1} \circ R = r \circ R$ ($r^2 = Id \Leftrightarrow rr = Id \Leftrightarrow r^{-1} = r$, ο κατοπτρισμός είναι τάξεως 2).
Άρα η f γράφεται ως γινόμενο στροφής με κατοπτρισμό. □

Αν έχουμε την περίπτωση $\det A = -1$, το πότε η $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ είναι είτε απλά κατοπτρισμός είτε περιστροφικός κατοπτρισμός το ξεκαθαρίζουμε με το παρακάτω:

Λήμμα 2

Έστω ℓ, H μία ευθεία και ένα επίπεδο αντίστοιχα που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Έστω r_H ο κατοπτρισμός ως προς επίπεδο Η, και έστω R_ℓ η στροφή περί τον άξονα ℓ. Έστω $f = r_H \circ R_\ell$. Τότε αν $\ell \subset H$, η f είναι κατοπτρισμός ως προς επίπεδο (θα δούμε ποιό), διαφορετικά η f θα είναι περιστροφικός κατοπτρισμός.

Απόδειξη

Έστω ότι αρχικά υποθέσουμε $\ell \subset H$ (η ευθεία κείνται επί του επιπέδου) και έστω $\vec{v} \in \ell$, μη μηδενικό. Θυμόμαστε ότι $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ και θεωρούμε τη δράση της f σε επίπεδο Π, ορθογώνιο στην ℓ. Είναι προφανές ότι $R_{\ell|\Pi}$ είναι στροφή του Π και $r_{H|\Pi}$ είναι κατοπτρισμός (ως προς το Η, αλλά περιοριζόμαστε στα σημεία του Π). Οπότε πρόκειται για κατοπτρισμό ως προς ευθεία $\ell' = \Pi \cap \mathrm{H}$. Ακολούθως από την εργασία μας στο $\mathbb{C}$, βρισκόμενοι επί του Π έχουμε στροφή και κατοπτρισμό, δηλαδή η σύνθεση $(r_H \circ R_\ell)|\Pi$ είναι κατοπτρισμός ως προς $\ell' \subset \Pi$. Άρα για αυτό πρόκειται για κατοπτρισμό του $\mathbb{R}^3$ ως προς επίπεδο που εκτείνεται από τις ℓ, ℓ'.
Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου $\ell \subsetneq H$ και $f = r_H \circ R_\ell$. Αντίστοιχα με το $\mathbb{C}$, η στροφή και στο $\mathbb{R}^3$ επιτυγχάνεται με διαδοχικό κατοπτρισμό σε δύο επίπεδα που σχηματίζουν μεταξύ του γωνία θ/2, οπότε έχουμε $r_\ell = r_{\mathrm{H}_1} \circ r_{\mathrm{H}_2}$.
Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι αν επιλέξουμε $H_1 \perp H$, $H_3 \perp H$ και

$H_3 \perp H_1$ είναι: $r_{\mathrm{H}} \circ r_{\mathrm{H}_1} \circ r_{\mathrm{H}_3} = -Id$ οπότε:

$$f = r_H \circ R_\ell = r_{\mathrm{H}} \circ \left(r_{\mathrm{H}_1} \circ r_{\mathrm{H}_2}\right) = \left(r_{\mathrm{H}} \circ r_{\mathrm{H}_1}\right) \circ r_{\mathrm{H}_2} = \left(r_{\mathrm{H}} \circ r_{\mathrm{H}_1}\right) \circ \left(r_{\mathrm{H}_3} \circ r_{\mathrm{H}_3}\right) \circ r_{\mathrm{H}_2}$$

$= \left(r_{\mathrm{H}} \circ r_{\mathrm{H}_1} \circ r_{\mathrm{H}_3}\right) \circ \left(r_{\mathrm{H}_3} \circ r_{\mathrm{H}_2}\right) = -r_{\mathrm{H}_3} \circ r_{\mathrm{H}_2} = -R_{\ell'}$, όπου $\ell' = H_3 \cap H_2$. Αυτό που μένει είναι να παρατηρήσουμε ότι η $-R_{\ell'}$ είναι περιστροφικός κατοπτρισμός. □

Όταν εισάγουμε μετατοπίσεις προκύπτουν ανάλογα ερωτήματα: η σύνθεση μετατόπισης και κατοπτρισμού είναι πάντα ένας κατοπτρισμός ή ολισθαίνουσα ανάκλαση;
Η σύνθεση μετατόπισης και στροφής είναι πάντα στροφή ή ελικοειδής μετατόπιση;

Λήμμα 3

Έστω $t_{\vec{c}}$ μετατόπιση και r_H κατοπτρισμός ως προς επίπεδο Η (δεν χρειάζεται να διέρχεται από την αρχή). Αν το $\vec{c}$ είναι ορθογώνιο στο Η, τότε η $t_{\vec{c}} \circ r_H$ είναι κατοπτρισμός (ως προς επίπεδο παράλληλο στο Η). Διαφορετικά η $t_{\vec{c}} \circ r_H$ είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση (ως προς επίπεδο παράλληλο στο Η).

Λήμμα 4

Έστω $t_{\vec{c}}$ μετατόπιση και R_ℓ στροφή γύρω από άξονα ℓ (δεν χρειάζεται να διέρχεται από την αρχή). Αν $\vec{c}$ είναι ορθογώνιο στον ℓ, τότε η $t_{\vec{c}} \circ R_\ell$ είναι στροφή γύρω από άξονα ℓ' παράλληλο στον ℓ. Διαφορετικά η $t_{\vec{c}} \circ R_\ell$ ελικοειδής μετατόπιση

Απόδειξη

Αν $\vec{c}$ είναι ορθογώνιο στον ℓ, τότε έστω Π το επίπεδο που περιέχει το σημείο αναφοράς και είναι ορθογώνιο στο ℓ. Τότε το $t_{\vec{c}|\Pi}$ είναι μετατόπιση κατά διάνυσμα $\vec{c} \in \Pi$ και $R_{\ell|\Pi}$ είναι στροφή του Π. Τότε όμως η $t_{\vec{c}} \circ R_\ell$ θεωρούμενη επί του επιπέδου Π είναι στροφή σύνθεση μετατόπιση που μελετήθηκε διεξοδικά στο $\mathbb{C}$ (μορφή $f(z) = \zeta z + c$) και βρέθηκε να διατηρεί σταθερό σημείο, έστω Σ, και ακολούθως να αποτελεί στροφή γύρω από το εν λόγο σημείο. Άρα πράγματι η $t_{\vec{c}} \circ R_\ell$ είναι στροφή γύρω από τον $\ell' // \ell$ που διέρχεται από το Σ.

Αν το $\vec{c}$ δεν είναι ορθογώνιο στον ℓ, το γράφουμε: $\vec{c} = \vec{c}^{//} + \vec{c}^{\perp}$, με $\vec{c}^{//} // \ell$ και $\vec{c}^{\perp}$ ορθογώνιο στον ℓ. Άρα θα έχουμε $t_{\vec{c}} = t_{c^{//}} + t_{c^{\perp}}$, οπότε: $t_{\vec{c}} \circ R_\ell = t_{c^{//}} \circ \left(t_{c^{\perp}} \circ R_\ell\right)$ όπου το $t_{\vec{c}} \circ R_\ell = R_{\ell'}$ είναι στροφή γύρω από τον $\ell' // \ell$.

Άρα τότε άμεσα η $t_{\vec{c}} \circ R_{\ell} = t_{\vec{c}^{//}} \circ R_{\ell'}$ είναι ελικοειδής μετατόπιση αφού πήραμε $\vec{c}^{//} // \ell$.□

Θεώρημα 2

Κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ είναι μία εκ των παρακάτω μορφών:

1. **Η ταυτοτική, (identity).**
2. **Μετατόπιση, (translation)**
3. **Περιστροφή, (rotation)**
4. **Κατοπτρισμός, (reflection)**
5. **Ολισθαίνουσα ανάκλαση, (glide reflection)**
6. **Περιστροφικός κατοπτρισμός, (rotatory reflection)**
7. **Ελικοειδής μετατόπιση, (screw).**

Από αυτές τις κινήσεις οι (1), (2), (3), (7) καλούνται κανονικές (proper) διότι διατηρούν τον προσανατολισμό. Ενώ οι (4), (5), (6) καλούνται μη κανονικές (improper) διότι αντιστρέφουν τον προσανατολισμό.

Απόδειξη

Από την πρόταση 2, κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $t \circ Y$ όπου t είναι μία μετατόπιση και $Y \in O(3) \cong Isom_{\vec{0}}\mathbb{R}^3$. Αφού το Y είναι στροφή, ανάκλαση ή περιστροφικός κατοπτρισμός (πόρισμα 2- Λήμμα 2), αν η $t = Id$, δεν έχουμε τίποτα να ελέγξουμε.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν μία κίνηση στον $\mathbb{R}^3$ του τύπου Y ακολουθείται από μία μετατόπιση t.

- Αν $Y = Id$, λαμβάνουμε μετατόπιση.
- Όταν το Y είναι στροφή, από το Λήμμα 4 λαμβάνουμε είτε ελικοειδή μετατόπιση είτε στροφή.
- Όταν το Y είναι κατοπτρισμός, από το Λήμμα 3, το $t \circ Y$ θα είναι είτε ένας άλλος κατοπτρισμός είτε ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection)
- Όταν το Y είναι περιστροφικός κατοπτρισμός, το $t \circ Y$ θα είναι περιστροφικός κατοπτρισμός.

  Για να στηρίξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό, έστω $t = t_c$ και $Y = r_H \circ R_{\ell}$ με $\ell \perp H$. Δεδομένου ότι, $t \circ Y = (t_c \circ r_H) \circ R_{\ell}$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις προς εξέταση. Αν c ορθογώνιο στο H το $t_c \circ r_H$ αντιπροσωπεύει κατοπτρισμό $r_{H'}$ ως προς ένα επίπεδο H'//H, οπότε $t \circ Y = r_{H'} \circ R_{\ell}$ είναι προφανώς περιστροφικός κατοπτρισμός.

  Αν το c δεν είναι ορθογώνιο στο H, το $t_c \circ r_H$ είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση και είναι $t_c \circ r_H = t_{c'} \circ r_{H'}$ όπου H'//H και c' παράλληλο στο H'. Επιπλέον είναι και μεταθετές οι συγκεκριμένες απεικονίσεις. Επομένως

$t \circ Y = r_{H'} \circ \left(t_{c'} \circ R_{\ell}\right) = r_{H'} \circ R_{\ell'}$ (Λήμμα 4) με $\ell // \ell'$ και αφού ℓ' είναι και αυτό κάθετο στο H', έχουμε πάλι περιστροφικό κατοπτρισμό (rotatory reflection). □

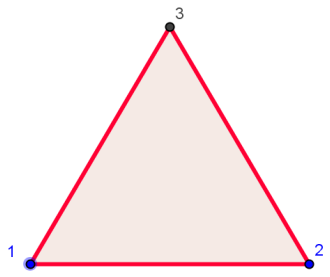
Συνοπτικά έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

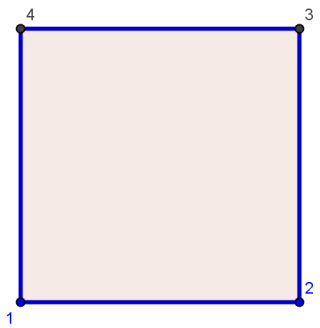
Σύνολο Σταθερών σημείων	**Κανονική ισομετρία (improper isometry)**	**Μη κανονική ισομετρία (improper isometry)**
Κανένα	Μετατόπιση ή Ελικοειδής μετατόπιση (translation or screw)	Ολισθαίνουσα ανάκλαση (glide reflection)
Ένα		Περιστροφικός κατοπτρισμός (rotatory reflection)
Ευθεία	Στροφή (rotation)	
επίπεδο		Κατοπτρισμός (reflection)
Όλα	Ταυτότητα (identity)	

Για να φτάσουμε σε αυτές τις αυστηρά ορισμένες φόρμες συμμετριών, που έχουν θεμελιωθεί με τη βοήθεια εργαλείων που προσφέρθηκαν από τα νεώτερα μαθηματικά, η ανθρώπινη διανόηση άγγιξε την έννοια της συμμετρίας πολύπλευρα μέσα από πολλά και διαφορετικά μοτίβα και ερεθίσματα. Θα αναφερθούμε σε μερικές τέτοιες περιπτώσεις:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΜΑΔΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

ΔΥΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Οι συμμετρίες του ισόπλευρου τριγώνου και του τετραγώνου.





1. Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές 1,2 και 3 τότε οι δυνατές διευθετήσεις του επί του επίπέδου ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις των κορυφών του είναι οι ακόλουθες:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

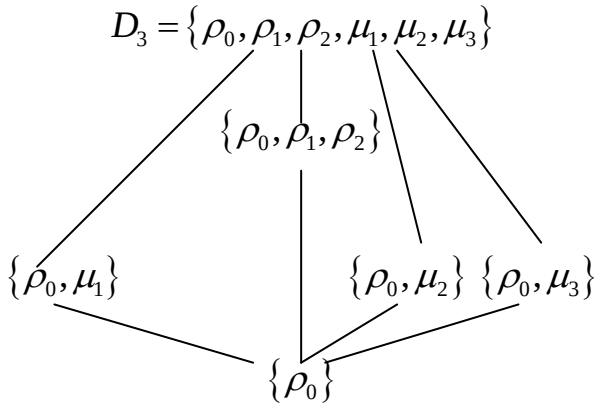
όπου με ρ_0 δηλώνουμε τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και με ρ_2, ρ_3 δηλώνουμε τη στροφή κατά 120° και 240° αντίστοιχα του ισόπλευρου τριγώνου. Τέλος με μ_1, μ_2, μ_3 ορίζουμε τις συμμετρίες του τριγώνου ως προς την αντίστοιχη κάθε φορά διχοτόμο. Είναι προφανές ότι τα προαναφερθέντα στοιχεία είναι οι μεταθέσεις του συνόλου $A = \{1,2,3\}$ και απαρτίζουν την ομάδα S_3.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο $D_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση απεικονίσεων έχει δομή ομάδας με πίνακα:

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Και λέγεται η ομάδα D_3 των συμμετριών του ισόπλευρου τριγώνου. Ο συμβολισμός D_3 προκύπτει από τον όρο ‘τρίτη διεδρική ομάδα’. Η n-στη διεδρική ομάδα D_n είναι η ομάδα των συμμετριών του κανονικού n-γώνου.

Δίνουμε το δικτυωτό διάγραμμα των υποομάδων της D_3.



2. Θα σχηματίσουμε τώρα τη διεδρική ομάδα D_4 των μεταθέσεων που αντιστοιχεί στους τρόπους με τους οποίους δύο αντίγραφα ενός τετραγώνου με κορυφές: 1,2,3 και 4 μπορούν να τοποθετηθούν ώστε το ένα να καλύπτει το άλλο. Η D_4 θα λέγεται **η ομάδα των συμμετριών του τετραγώνου** (κάποιες φορές αναφέρεται και ως οκτική ομάδα). Χρησιμοποιούμε το ρ_i για τις στροφές και το μ_i για τους κατοπτρισμούς ως προς τις μεσοκαθέτους των πλευρών και το δ_i για τους κατοπτρισμούς ως προς τις διαγώνιες. Υπάρχουν οκτώ μεταθέσεις που εμφανίζονται εδώ. Θέτουμε:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ και}$$

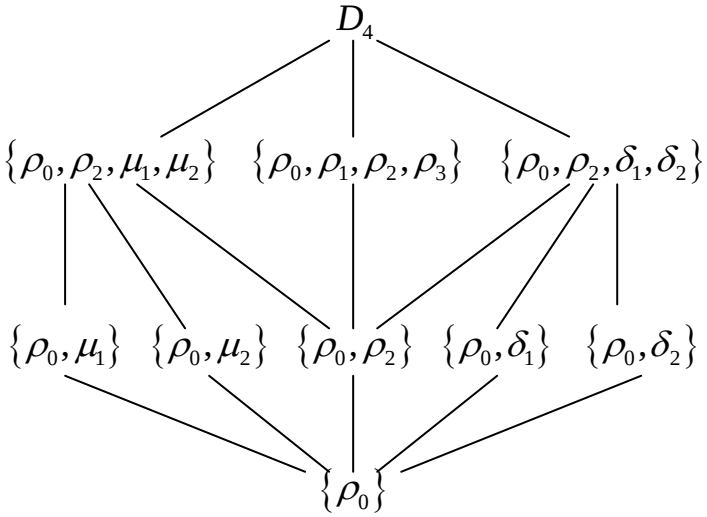
$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο πίνακας της D_4 είναι:

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Τέλος δίνουμε το δικτυωτό διάγραμμα των υποομάδων της D_4.



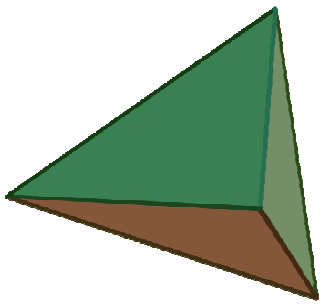
Τόσο η $(D_3,\circ)$ όσο και η $(D_4,\circ)$ είναι υποομάδες της ομάδας ισομετριών του επιπέδου $(Isom\mathbb{R}^2,\circ)$. Μας φάνηκαν ιδιαίτερα χρήσιμες ως προς τη μελέτη της ίδιας της δομής τους και τις εφαρμογές που έχουν. (π.χ. ομάδες αυτομορφισμών των ριζών μίας πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές).

Επίσης θα παρατηρήσουμε ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η ομάδα συμμετριών του, απαρτίζεται από την ταυτοτική και την ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της κορυφής. Ενώ σε ένα σκαληνό τρίγωνο ο μόνος μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτες τις αποστάσεις είναι ο ταυτοτικός. Οδηγούμαστε δηλαδή στη σκέψη ότι σε ένα δεδομένο τύπο σχήματος (τρίγωνο) όσο μεγαλύτερη είναι η συμμετρική του ομάδα τόσο μεγαλύτερη είναι η κανονικότητα που παρουσιάζει.

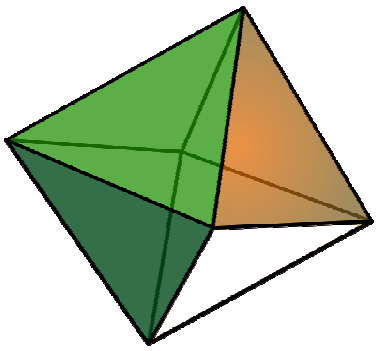
Οι συμμετρίες των πέντε πλατωνικών στερεών (περιγραφικά)

Υπάρχουν πέντε μόνο διαφορετικά είδη κανονικών πολυέδρων, το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Τα κανονικά πολύεδρα είναι συνδεδεμένα με το όνομα του Πλάτωνα (Πλατωνικά στερεά), γιατί αυτός αναπτύσσοντας το κοσμογονικό του σύστημα στο διάλογο 'Τίμαιος', κάνει αναφορά σε αυτά. Ο Θεαίτητος, που ήταν μέλος της Πλατωνικής σχολής, θεωρείται κατά γενική ομολογία ο πρώτος που απέδειξε ότι τα πέντε αυτά πολύεδρα είναι και τα μόνα δυνατά κανονικά πολύεδρα. Η θεωρία της κατασκευής των πέντε κανονικών πολυέδρων περιγράφεται στο βιβλίο XIII των 'Στοιχείων' του Ευκλείδη, από τις προτάσεις 13 μέχρι και 17.

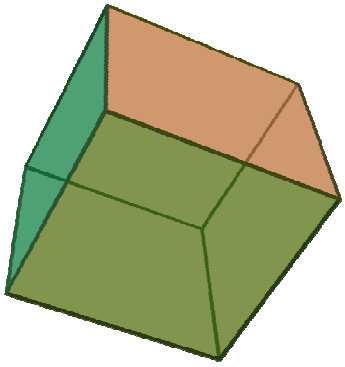
Τα κανονικά στερεά κατατάσσονται βάσει της ομάδας συμμετριών τους. Οι ομάδες συμμετριών των πέντε πλατωνικών στερεών είναι από τις βασικές υποομάδες των ισομετριών στον τρισδιάστατο χώρο.



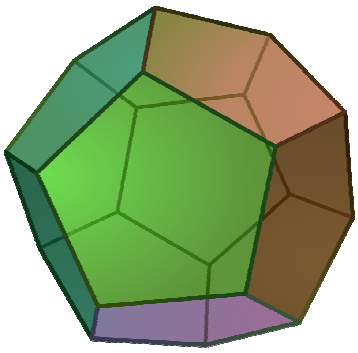
κανονικό τετράεδρο



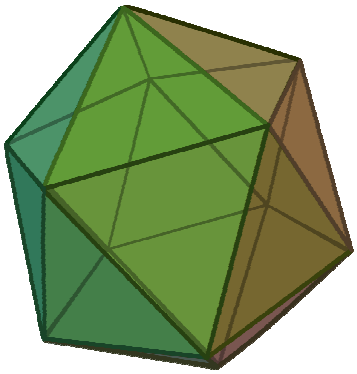
κανονικό οκτάεδρο



κανονικό εξάεδρο



κανονικό δωδεκάεδρο



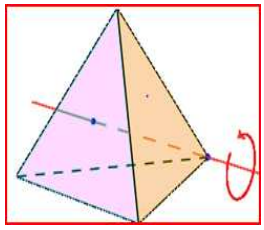
κανονικό εικοσάεδρο

<u>Συμμετρίες Τετραέδρου (Τετραεδρική ομάδα)</u>

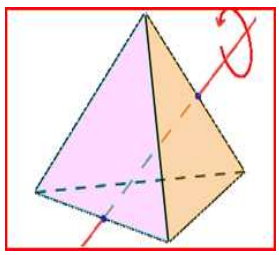
Αποδεικνύεται ότι η ομάδα των συμμετριών του κανονικού τετραέδρου είναι ισόμορφη με την ομάδα των μεταθέσεων τεσσάρων αντικειμένων S_4.

Περιγραφικά, την ομάδα συμμετριών του τετραέδρου αποτελούν οι ακόλουθες είκοσι τέσσερις συμμετρίες:

- Η ταυτοτική της S_4 που αφήνει τις τέσσερις κορυφές του τετραέδρου σταθερές.
- Οι οκτώ περιστροφές κατά 120° με άξονες περιστροφής τους τρεις άξονες που διέρχονται από τις κορυφές και το κέντρο της απέναντι έδρας του κανονικού τετραέδρου.



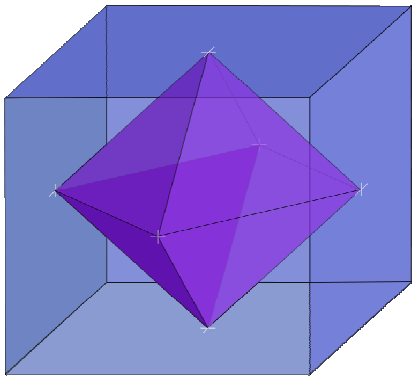
- Οι τρεις περιστροφές κατά 180° με άξονες περιστροφής τις ευθείες που διέρχονται από τα μέσα ακμών του τετραέδρου.



- Οι κατοπτρισμοί ως προς επίπεδα που διέρχονται από μία ακμή του τετραέδρου και το μέσον της απέναντι ακμής και οι συνθέσεις τους.

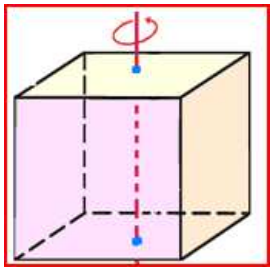
Οι συμμετρίες του τετραέδρου που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι 12 (οι 3 πρώτες κατηγορίες που αναφέραμε) και έχουν τη δομή ομάδας που είναι ισόμορφη με την A_4 (άρτιες μεταθέσεις τεσσάρων αντικειμένων).

Συμμετρίες Κύβου-οκταέδρου (Οκταεδρική ομάδα)

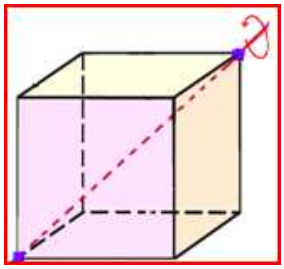


Το κανονικό οκτάεδρο και ο κύβος είναι δυικά κανονικά πολύεδρα, που σημαίνει γεωμετρικά ότι το ένα εγγράφεται στο άλλο, δηλαδή τα κέντρα των εδρών του κύβου είναι κορυφές του οκταέδρου και το αντίστροφο. Με βάση αυτή την ιδιότητα, τα δυικά πολύεδρα έχουν τον ίδιο αριθμό συμμετριών, αφού κάθε μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτο ένα πολύεδρο, θα κάνει το ίδιο και για το δυικό του. Επομένως, το οκτάεδρο θα έχει τις ίδιες συμμετρίες με τον κύβο ποιοτικά και ποσοτικά, που σημαίνει ότι θα έχει την ίδια ομάδα συμμετρίας, την οποία ονομάζουμε οκταεδρική.
Αποδεικνύεται ότι η ομάδα των συμμετριών του κανονικού τετραέδρου είναι ισόμορφη με την ομάδα $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.
Περιγραφικά, την ομάδα συμμετριών του εξαέδρου αποτελούν οι ακόλουθες σαράντα οκτώ συμμετρίες:

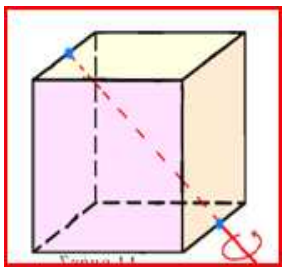
- Η ταυτοτική της S_8 που αφήνει τις οκτώ κορυφές του κύβου σταθερές.
- Οι εννέα περιστροφές κατά 90° με άξονες περιστροφής τους τρεις άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των απέναντι εδρών του κύβου, και οι οποίες αντιστοιχούν στις εννέα περιστροφές του εγγεγραμμένου οκταέδρου στον κύβο κατά 90°, με άξονες περιστροφής τους τρεις άξονες που διέρχονται από τις απέναντι κορυφές του οκταέδρου.



- Οι οκτώ περιστροφές κατά 120° με άξονες περιστροφής τους τέσσερις άξονες που διέρχονται από τις απέναντι κορυφές του κύβου, και οι οποίες αντιστοιχούν στις οκτώ περιστροφές του εγγεγραμμένου στον κύβο οκταέδρου κατά 120°, με άξονες περιστροφής τους τέσσερις άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των απέναντι εδρών του οκταέδρου.

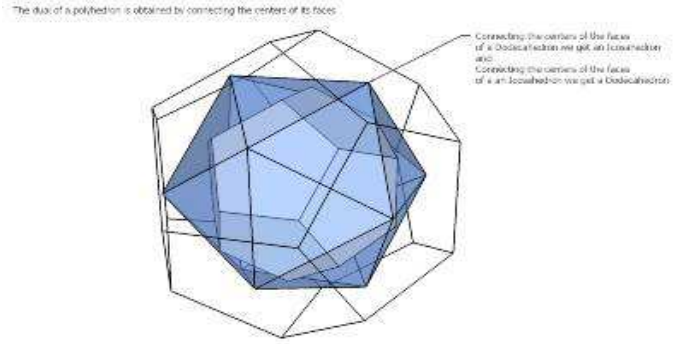


- Οι έξι περιστροφές κατά 180° με άξονες περιστροφής τους έξι άξονες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι ακμών του κύβου, οι οποίες αντιστοιχούν στις έξι περιστροφές του εγγεγραμμένου στον κύβο οκταέδρου κατά 180°, με άξονες περιστροφής τους έξι άξονες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι ακμών του οκταέδρου.



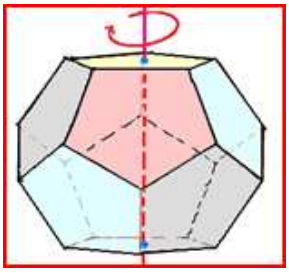
- Οι δώδεκα κατοπτρισμοί στα τρία επίπεδα που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών του κύβου, οι οποίοι αντιστοιχούν σε κατοπτρισμούς του εγγεγραμμένου στον κύβο οκταέδρου, στα τρία επίπεδα που διέρχονται από τις τέσσερις απέναντι ακμές του οκταέδρου.
- Οι δώδεκα κατοπτρισμοί στα έξι επίπεδα που ορίζονται στις απέναντι πλευρές του κύβου, οι οποίοι αντιστοιχούν σε κατοπτρισμούς του εγγεγραμμένου στον κύβο οκταέδρου, στα έξι επίπεδα που διέρχονται από δύο απέναντι κορυφές και τα μέσα των απέναντι ακμών του οκταέδρου.

<u>Συμμετρίες Δωδεκαέδρου-Εικοσαέδρου (Εικοσαεδρική ομάδα)</u>:



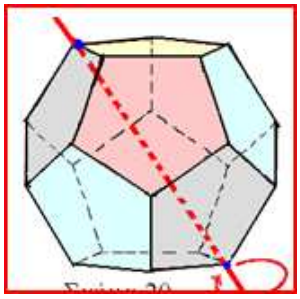
Το κανονικό εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο είναι δυικά κανονικά πολύεδρα.
Συνεπώς, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο έχουν την ίδια ομάδα συμμετριών η οποία ονομάζεται εικοσαεδρική.
Αποδεικνύεται ότι η ομάδα των συμμετριών του κανονικού δωδεκαέδρου είναι ισόμορφη με την ομάδα $A_5 \times \mathbb{Z}_2$
Την εικοσαεδρική ομάδα αποτελούν εκατόν είκοσι συμμετρίες:

- Η ταυτοτική απεικόνιση που αφήνει τις δώδεκα κορυφές του δωδεκαέδρου σταθερές.
- Οι είκοσι τέσσερις περιστροφές κατά 72° με άξονες περιστροφής τους έξι άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των απέναντι εδρών του δωδεκαέδρου, και οι οποίοι αντιστοιχούν

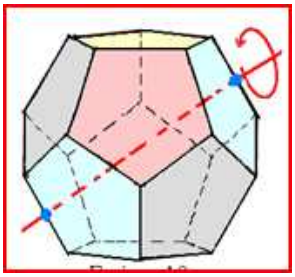


στις περιστροφές κατά 72° του εγγεγραμμένου στο δωδεκάεδρο εικοσαέδρου, με άξονες περιστροφής τους έξι άξονες που διέρχονται από τις απέναντι κορυφές του εικοσαέδρου.

- Οι είκοσι περιστροφές κατά 120° με άξονες περιστροφής τους δέκα άξονες που διέρχονται από τις απέναντι κορυφές του δωδεκαέδρου, οι οποίες αντιστοιχούν στις περιστροφές κατά 120° του εγγεγραμμένου στο δωδεκάεδρο εικοσαέδρου, με άξονες περιστροφής τους δέκα άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των απέναντι εδρών του εικοσαέδρου.



- Οι δεκαπέντε περιστροφές κατά 180° με άξονες περιστροφής τους άξονες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι ακμών του δωδεκαέδρου, οι οποίες αντιστοιχούν στις περιστροφές κατά 180° του εγγεγραμμένου στο δωδεκάεδρο εικοσαέδρου, με άξονες περιστροφής τους άξονες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι ακμών του εικοσαέδρου.



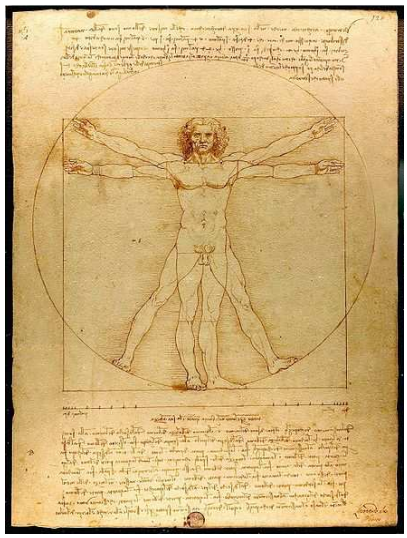
- Οι 60 μετασχηματισμοί που δεν διατηρούν προσανατολισμό είναι η συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων και αυτοί που προκύπτουν από τη σύνθεση της συμμετρίας ως προς κέντρο με τις προηγούμενες συμμετρίες.

Στο δωδεκάεδρο κατάλληλες συνδέσεις των απέναντι κορυφών σχηματίζουν ανά 8 κορυφές 5 κύβους. Στις συμμετρίες του δωδεκαέδρου μετατίθενται οι 5 κύβοι μεταξύ τους.

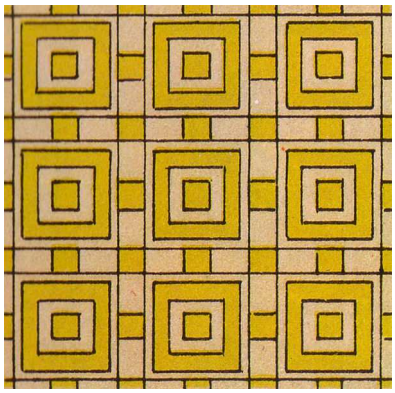
Σε κάθε έδρα του δωδεκαέδρου (κανονικό πεντάγωνο) κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σε ένα μόνο κύβο από τους προαναφερθέντες. Οι μεταθέσεις των 5 κύβων αντιστοιχούν στις μεταθέσεις των αντίστοιχων 5 διαγωνίων. Για το λόγο αυτό μελετάμε τις συμμετρίες του δωδεκαέδρου στο σύνολο των μεταθέσεων των διαγωνίων του κανονικού πενταγώνου.

Η Συμμετρία στην τέχνη

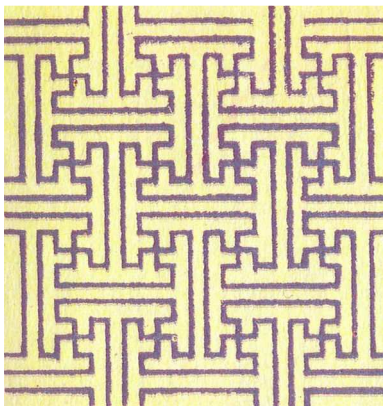
Ο ΠΥΡΓΟΣ ΤΗΣ ΠΙΖΑΣ



Leonardo da Vinci's Vitruvian Man



Διακοσμητική ζωγραφική, Nineveh, Assyria



Ζωγραφική σε πορσελάνη, Κίνα

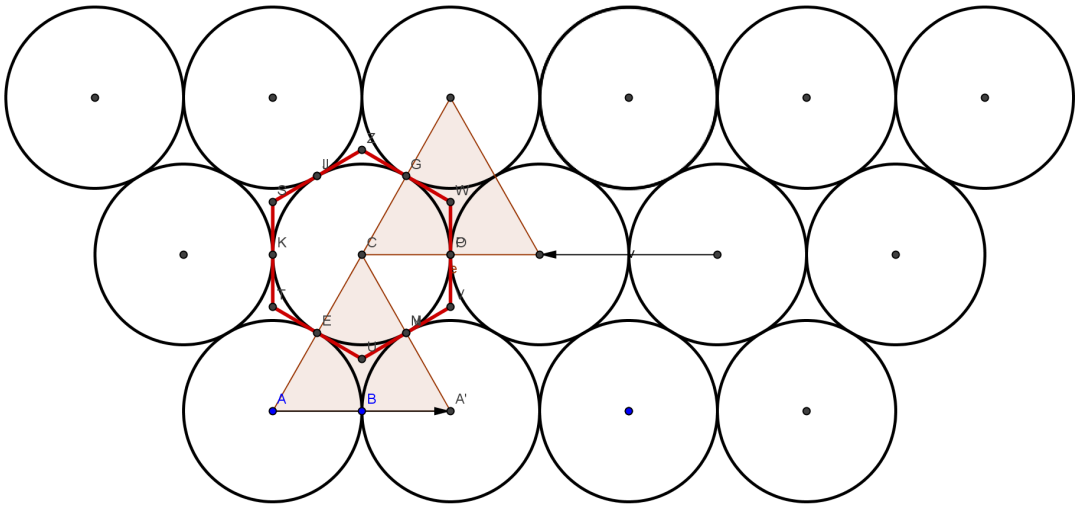
Η λέξη «συμμετρία» γενικά μεταφέρει δύο κύρια νοήματα. Το πρώτο είναι μία χωρίς απόλυτο τρόπο ορισμένη αίσθηση αρμονίας ή αισθητικά ευχάριστης αναλογίας και ισορροπίας, ώστε να αντανακλά ομορφιά ή τελειότητα. Το δεύτερο νόημα είναι η ακριβής και καλά ορισμένη έννοια της ισορροπίας ή της «αυτοομοιότητας του μοτίβου» ("patterned self-similarity") η οποία μπορεί να περιγραφεί ή να αποδειχθεί σύμφωνα με τους κανόνες ενός τυπικού συστήματος όπως π.χ. η γεωμετρία.

Παρότι τα νοήματα αυτά είναι ευδιάκριτα σε κάποια πλαίσια, και τα δύο αυτά περιεχόμενα του όρου «συμμετρία» σχετίζονται και θίγονται παράλληλα.

Έτσι τα διάφορα ήδη ισομετριών που εντοπίσαμε, μαζί με μορφές συμμετρίας που δεν διατηρούν απαραίτητα τις αποστάσεις, συντιθέμενα μεταξύ τους έχουν κάνει την εμφάνισή τους στις μορφές της τέχνες όπως είναι: η ζωγραφική, η γλυπτική, η αγγειοπλαστική, η επικάλυψη δαπέδων, η αρχιτεκτονική κλπ.

Η Συμμετρία στη Φύση

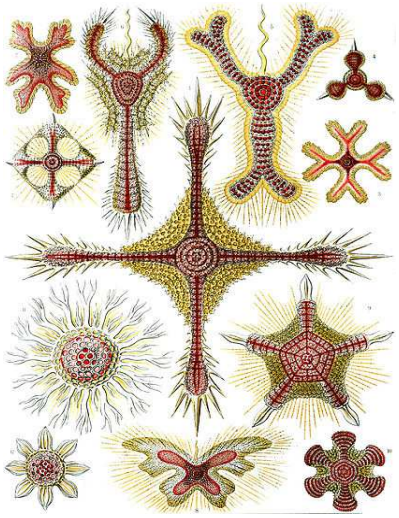
Η περίπτωση των μελισσών:



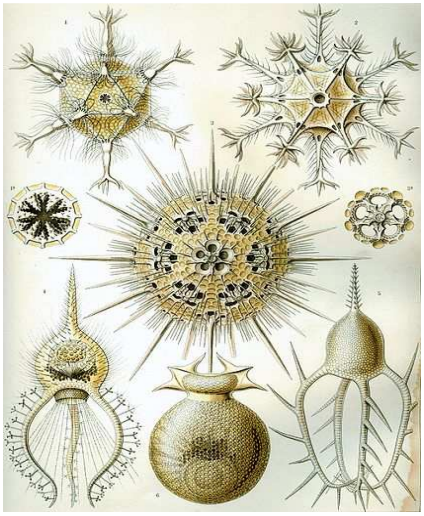
Ας δούμε λίγο το διακοσμητικό μοτίβο σε δύο διαστάσεις, το οποίο πιθανώς εμφανίζεται πιο συχνά από οποιοδήποτε άλλο, τόσο στη φύση όσο και στην τέχνη: αυτό που δημιουργείται από το κανονικό εξάγωνο. Το βλέπουμε εδώ να υλοποιείται κατά το χτίσιμο μιας κηρήθρας από τις κοινές μέλισσες. Τα κελιά των μελισσών έχουν μορφή πρίσματος και η φωτογραφία έχει ληφθεί κατά τη διεύθυνση αυτών των πρισμάτων. Όταν ξεκινά η διαδικασία, οι μέλισσες δημιουργούν κυλινδρικά κελιά όπου η κάτοψη στο σκίτσο δείχνει πως θα προέκυπταν χάσματα μεταξύ τους. Κάθε

κύκλος εφάπτεται εξωτερικά με έξι γειτονικούς, όπου αν σε κάθε σημείο επαφής φέρουμε τις εφαπτόμενες κατασκευάζουμε το περιγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο του κύκλου. Αν στη συνέχεια αντικαταστήσουμε κάθε κύκλο με αυτό το κανονικό εξάγωνο λαμβάνουμε τη διαμόρφωση από κανονικά εξάγωνα που καλύπτουν το επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι στις τρεις διαστάσεις μία σαπουνόφουσκα λαμβάνει τελικά σφαιρικό σχήμα διότι αυτή περιβάλει το δεδομένο όγκο αέρα με την ελάχιστη επιφάνεια. Γι αυτό δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι, στη δισδιάστατη εκδοχή του προηγούμενου προβλήματος, η πυκνή διάταξη ισοδύναμων κύκλων επί του επιπέδου θα καταλήξει στο μοτίβο με τα κανονικά εξάγωνα. Αφού από όλες τις διαιρέσεις του επιπέδου σε ισοδύναμες επιφάνειες η συγκεκριμένη είναι που η περιφέρεια του πλέγματος είναι ελάχιστη. Το αποτέλεσμα αυτό επιτυγχάνεται από τις τριχοειδείς δυνάμεις (συνοχής και συνάφειας) παρά από τις δυνάμεις που ασκούν οι εργαζόμενες μέλισσες. Κατά τη διάρκεια της κατασκευής το κερί είναι περίπου σε υγρή μορφή οπότε η αρχή του ελαχίστου που αναφέραμε πριν, υλοποιεί το τελικό σχήμα των κελιών. Προηγούμενες απόψεις που απέδιδαν είτε 'θεία καθοδήγηση', είτε τις συνέπειες του νόμου της φυσικής επιλογής αντιμετωπίστηκαν με σκεπτικισμό και χιούμορ από τον Hermann Weyl.

Οι σκελετοί θαλάσσιων πρωτόζωων που μελέτησε ο γερμανός βιολόγος Haeckel παρουσιάζουν κάποιες αξιοπρόσεκτες μορφές συμμετρίας:



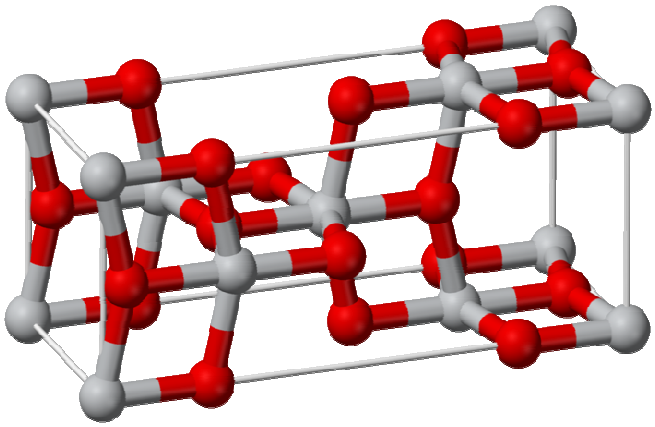
Haeckel Discoidea



Haeckel_Phaeodaria

Αν τώρα περάσουμε στους φυσικούς νόμους, τους διέπει μία γενική αρχή που αξίζει ένα σύντομο σχολιασμό. **Εάν συνθήκες που καθορίζουν μοναδικά το αποτέλεσμά τους διαθέτουν προκαθορισμένες συμμετρίες, τότε το αποτέλεσμα θα παρουσιάζει τις ίδιες συμμετρίες** (ή πιο απλά: οι συμμετρίες του αιτίου καθορίζουν

τις συμμετρίες του αποτελέσματος). Γι αυτό το λόγο ο Αρχιμήδης συμπέρανε 'a priori' ότι ίδια βάρη θα ισορροπούν σε ένα ζυγό ακριβείας. Ρίχνοντας ένα αμερόληπτο ζάρι αναμένουμε με πιθανότητα 1/6 την εμφάνιση της εκάστοτε έδρας του. Η αρχή της διατήρησης της ορμής κατά τις κρούσεις, τις συσσωματώσεις κλπ ακολουθεί συμμετρικά μοτίβα. «Γενικά, από όσο γνωρίζω όλες οι 'a priori' προτάσεις στη Φυσική οφείλουν την προέλευσή τους στη συμμετρία» (Hermann Weyl). Σε αυτή την επιστημολογική παρατήρηση προστίθεται το γεγονός ότι οι μορφολογικοί νόμοι της κρυσταλλοποίησης γίνονται σήμερα κατανοητοί ως προς τη δυναμική μεταξύ των ατόμων. Δηλαδή εάν όμοια άτομα ασκούν μεταξύ τους τέτοιες δυνάμεις που κάνουν εφικτή μία καθορισμένη κατάσταση ισορροπίας για ολόκληρο το ατομικό σύνολο, τότε αναγκαία αυτά θα διευθετηθούν σε ένα κανονικό σύστημα σημείων.



anatase crystal TiO2 (διοξείδιο Τιτανίου)

Θα κλείσουμε παραθέτοντας τα λόγια του Weyl: «**όποτε έχετε να κάνετε με μία οντότητα Σ που είναι προικισμένη με τα χαρακτηριστικά μίας δομής, προσπαθήστε να καθορίσετε την ομάδα των αυτομορφισμών της.** Την ομάδα που έχει ως στοιχεία τους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτες όλες τις δομικές σχέσεις της οντότητας Σ. Να περιμένετε ότι με αυτό τον τρόπο θα κερδίσετε βαθιά γνώση για την σύστασή της. Κατόπιν μπορείτε να ξεκινήσετε τη διερεύνηση συμμετρικών σχηματισμών, δηλαδή σχηματισμών που μένουν αναλλοίωτοι από την εφαρμογή μίας υποομάδας της ομάδας αυτομορφισμών. Επίσης θα ήταν χρήσιμο, πριν αναζητήσετε τέτοιους σχηματισμούς να μελετήσετε τις υποομάδες καθαυτές… Η συμμετρία είναι ένα αχανές πεδίο, σημαντικό για την φύση και την τέχνη. Τα μαθηματικά βρίσκονται στις ρίζες του και θα ήταν δύσκολο να βρούμε ένα καλύτερο πεδίο προκειμένου να καταδείξουμε πως λειτουργεί η μαθηματική διανόηση ».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Fraleigh Jhon B., «Εισαγωγή στην Άλγεβρα», Αθήνα 2003, εκδόσεις ΠΕΚ.
2. Shifrin Theodore, «Abstract Algebra», New Jersey 1996, Prentice Hall.
3. Weyl Hermann, «Symmetry», New Jersey 1982, Princeton University Press.
4. Wikipedia, article: «Symmetry».
5. Ανδρεαδάκης Α. Στυλιανός, «Θεωρία Galois», Αθήνα 1992, εκδόσεις Συμμετρία.
6. Πατσαλιάς Μιχάλης, Μπαραλής Η. Γεώργιος, «Συμμετρίες των πέντε πλατωνικών στερεών», Αθήνα 2009, Μαθηματική Επιθεώρηση 71, εκδόσεις ΕΜΕ.
7. Στράντζαλος Χρόνης, «Σεμινάριο Ιστορίας και Διδακτικής των μαθηματικών, θέμα: εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο Λύκειο», Αθήνα 2005.