ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική Εργασία

Η Απόδειξη σε Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Σιώπη Καλλιόπη

ΑΜ 221102

Επιβλέπων Καθηγητής: *Κωνσταντίνος Χρίστου*

Αθήνα, 2005

Στους αγαπημένους μου Λουκά, Ιωάννα και Στάθη που με στήριξαν σ’ αυτή τη δημιουργική προσπάθεια.

Πρόλογος

Είναι ευρέως γνωστό, όχι μόνο από τις έρευνες αλλά και από τη σχολική πρακτική, ότι η διδασκαλία και η εκμάθηση της απόδειξης συναντά σημαντικές δυσκολίες και εμφανίζει προβλήματα. Τα προβλήματα κυρίως έχουν να κάνουν με τη φύση της απόδειξης και το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη για απόδειξη, τα οποία είναι ευρέως γνωστά στους διδάσκοντες όλων των βαθμίδων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ποιος δάσκαλος των μαθητικών δεν έχει δοκιμάσει απογοήτευση όταν έρχεται αντιμέτωπος με την απορία των μαθητών του «*γιατί πρέπει να κάνω απόδειξη;*».

Το «πρόβλημα» της απόδειξης, και ιδιαίτερα της γεωμετρικής, γίνεται πιο ενδιαφέρον όταν οι νέες τεχνολογίες και ιδιαίτερα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας (Cabri, Sketchpad, EucliDraw κ.ά.), χρησιμοποιούνται στην τάξη ως εργαλεία οπτικοποίησης για την διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρίας με στόχους τη βελτίωση της κατανόησης του ρόλου της γεωμετρικής απόδειξης από τους μαθητές.

Η λειτουργική ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία και εκμάθηση της απόδειξης τίθεται υπό αμφισβήτηση και εκφράζονται φόβοι κατά πόσο η παρουσία και η χρήση ενός λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να μειώσει ή ακόμα και να εξαφανίζει την ήδη προβληματική ανάγκη για απόδειξη. Η πρόκληση της λειτουργικής ενσωμάτωσης είναι μεγάλη για τους δασκάλους των μαθηματικών. Ένα πολιτισμικό εργαλείο δεν μπορεί να αντικαταστήσει τον άνθρωπο· απλώς, μέσω της εσωτερικοποίησης του από «εργαλείο ολοκλήρωσης μιας δράσης» μπορεί να γίνει «εργαλείο ελέγχου της δράσης».

Δομή

Η εργασία είναι κυρίως θεωρητική και αναπτύσσεται σε έξι κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο συζητείται γενικά το πρόβλημα της διδασκαλίας και εκμάθησης της απόδειξης στα μαθηματικά - και ειδικότερα στα σχολικά μαθηματικά - και τίθεται το θέμα της μελέτης για το εάν η χρήση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να αμβλύνει ή όχι το «πρόβλημα» της απόδειξης στη σχολική πρακτική.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κυριότερα θεωρητικά εργαλεία που οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης χρησιμοποιούν για να αναλύσουν τα αποτελέσματα των ερευνών τους για τη συμβολή του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στο «πρόβλημα» της απόδειξης.

Στο τρίτο κεφάλαιο συζητούνται οι λειτουργίες του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και ο τρόπος με τον οποίον αυτές μεσολαβούν στη συνεργασία των γνωστικών διαδικασιών του γεωμετρικού συλλογισμού, της οπτικοποίησης και της διερεύνησης πριν τη φάση της παρουσίασης μιας γραπτής απόδειξης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται οι λειτουργίες που η απόδειξη μπορεί και πρέπει να εμφανίζει στη σχολική πρακτική σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και που μπορούν ενδεχομένως να την κάνουν να έχει νόημα, να είναι μια σημαντική δραστηριότητα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στις έρευνες για το «πρόβλημα» της απόδειξης, όπως αυτές καταγράφονται σε ένα μικρό μέρος της ερευνητικής βιβλιογραφίας με ή χωρίς την παρουσία λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Στο έκτο κεφάλαιο προτείνεται η χρήση ανοιχτών προβλημάτων ως μια εναλλακτική προσέγγιση για τη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης

και για την εισαγωγή των μαθητών στη γεωμετρική θεωρία και τη γεωμετρική σκέψη με τη Δυναμική Γεωμετρία.

Η εργασία συμπληρώνεται με την κατάθεση συμπερασμάτων, παρατηρήσεων και προβληματισμών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος 3

Δομή 4

Περίληψη 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12

Εισαγωγή 12

Το Πρόβλημα 13

Η Απόδειξη στη Σχολική Τάξη 14

Νέες Τεχνολογίες και Απόδειξη 17

Ο Σκοπός της Μελέτης 20

Η Σημασία της Μελέτης 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 22

Όργανα Σημειολογικής Μεσολάβησης - Instruments of Semiotic Mediation 23

Περιβάλλον – Milieu 25

Γνωστική Ενότητα (Cognitive Unity) και Μαθηματικό Θεώρημα 26

Γνωστική Ενότητα 26

Μαθηματικό θεώρημα 29

Μετασχηματιστικός Συλλογισμός - Transformation Reasoning 30

Ο «Τομέας της Εμπειρίας» - Field of Experience 32

Γνωστικές διαδικασίες «Ανόδου» και «Καθόδου» 33

Η Θεωρία των Σχηματοποιημένων Εννοιών - Figural Concepts 35

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης Van Hiele 38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 42

Η Μεσολάβηση των «Αντικειμένων» του Μικρόκοσμου Δυναμικής Γεωμετρίας 42

Το Σχήμα 44

Οι Κατασκευές 45
Οι Κατασκευές στο Πλαίσιο της Σχολικής Γεωμετρίας.....46
Οι Κατασκευές στο Μικρόκοσμο της Δυναμικής Γεωμετρίας 46
Ο Γνωστικός Ρόλος των Δυναμικών Κατασκευών 49
Το «Σύρσιμο – Dragging».....50
Οι Λειτουργίες του «Συρσίματος» 51
Ο Γνωστικός Ρόλος του «Συρσίματος».....53
Η Μέτρηση 56
Οι Λειτουργίες της Μέτρησης.....57
Ο Γνωστικός Ρόλος της Μέτρησης 58
Οπτικοποίηση 60
Οπτικοποίηση και Απόδειξη.....61
Δυναμική Πειραματική Διερεύνηση 65
Οι Λειτουργίες της Δυναμικής Πειραματικής Διερεύνησης 68
Δυναμική Διερεύνηση και Απόδειξη.....72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV ΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ.....76
Πρότυπο Λειτουργιών της Απόδειξης.....77
Επαλήθευση – Αιτιολόγηση 79
Επαλήθευση και Δυναμική Γεωμετρία.....80
Επεξήγηση 87
Επεξήγηση και Δυναμική Γεωμετρία 88
Ανακάλυψη.....92
Ανακάλυψη και Δυναμική Γεωμετρία.....92
Πνευματική Πρόκληση.....99
Πνευματική Πρόκληση και Δυναμική Γεωμετρία.....100

Συστηματοποίηση.....101
Συστηματοποίηση και Δυναμική Γεωμετρία.....102
Επικοινωνία.....103
Επικοινωνία και Δυναμική Γεωμετρία.....104
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.....106
Ο Ρόλος της Απόδειξης.....106
Κατηγορίες Ερευνητικών Προσεγγίσεων.....109
Περιοχές Ερευνητικών Προσεγγίσεων.....110
Ο Ρόλος της Διαίσθησης στην Αποδεικτική Διαδικασία.....113
Οι Επιπτώσεις σε Διδακτικό Επίπεδο.....115
Δυναμική Γεωμετρία και Διαίσθηση.....118
Οι Επιπτώσεις σε Διδακτικό Επίπεδο.....120
Από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη.....120
Ο Ρόλος του Περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας.....125
Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας και ο «Τομέας της Εμπειρίας».....126
Ο Ρόλος των Δραστηριοτήτων Μάθησης.....128
Ο Ρόλος του Δασκάλου.....134
Ο Ρόλος των Εργαλείων.....136
Τύποι Συλλογισμού και Επιχειρημάτων.....137
Αίτια Δυσκολιών της Απόδειξης.....151
Αντιλήψεις των Μαθητών για την Απόδειξη.....151
Κοινωνικομαθηματικά Πρότυπα (Sociomathematical norms).....152
Ανεπαρκής Εννοιολογική Κατανόηση.....153
Ατελέσφορες Στρατηγικές της Απόδειξης.....154
Ελλιπής Στρατηγική και Μεθοδολογική Γνώση.....155

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 158

Τα «Ανοιχτά» Γεωμετρικά Προβλήματα 158

Ο Στόχος των Ανοιχτών Προβλημάτων στο Πλαίσιο της Απόδειξης 159

Ο Στόχος των Ανοιχτών Προβλημάτων στο Πλαίσιο της Απόδειξης με τη Δυναμική Γεωμετρία 160

Το Πρόβλημα 162

Δραστηριότητα των «Μεσοκαθέτων 164

Περιγραφή της Διδακτικής Προσέγγισης 167

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 179

Σημειώσεις 184

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 187

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ 187

ΕΛΛΗΝΙΚΗ 199

Περίληψη

Αυτή η εργασία είναι μια μελέτη για το ρόλο της Δυναμικής Γεωμετρίας (ΔΓ) στην αποδεικτική διαδικασία κυρίως από μια θεωρητική αλλά, και από γνωστική σκοπιά. Ο γνωστικός στόχος είναι να διερευνηθεί πώς και με ποιους τρόπους ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να συμβάλλει στις διαδικασίες παρουσίασης γεωμετρικών αποδείξεων και, γενικότερα στην εκμάθηση της σχολικής Γεωμετρικής θεωρίας. Ο θεωρητικός στόχος, που είναι κεντρικός για την ολοκλήρωση του γνωστικού, είναι μια επισκόπηση τμήματος της ερευνητικής βιβλιογραφίας για το πώς αυτή η συμβολή μπορεί να επιτευχθεί. Πιο συγκεκριμένα, μέσω ποιών χαρακτηριστικών του περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να επιτευχθεί ο στόχος της διαδικασίας παρουσίασης αποδείξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Η απόδειξη και η λογική επιχειρηματολογία είναι ιδιαίτερα σημαντικά θέματα του τομέα της επιστήμης των μαθηματικών. Επιστημολογικά ο συλλογισμός είναι το θεμέλιο των μαθηματικών, η δε ουσία των μαθηματικών βρίσκεται στις αποδείξεις. Για γενιές οι αποδείξεις έχουν θεωρηθεί ως εργαλεία, αφενός για την επιβεβαίωση και αποκάλυψη της καθολικότητας της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων και αφετέρου για τη διδασκαλία του παραγωγικού συλλογισμού ως τμήμα του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η απόδειξη, ως κεντρικό και αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών, αποτελεί βασικό συστατικό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο μαθηματικό πολιτισμό μας, η Γεωμετρία είναι το πλαίσιο στο οποίο η μαθηματική απόδειξη διδάσκεται και το οποίο θεωρείται ως το καλύτερο για την εκμάθησή της. Η Γεωμετρία έχει τις ρίζες της στην κοινή εμπειρία και βασίζεται σε εμπειρικά στοιχεία. Όμως, δεν είναι μόνο μια απλή συλλογή εμπειρικών δεδομένων, αλλά η μελέτη της εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες, οπτικοποίησης, κατασκευής και συλλογισμού. Αν και κάθε μια από αυτές τις διαδικασίες μπορεί να εκτελεστεί ανεξάρτητα η μια από την άλλη, η γνωστική συνεργασία τους είναι απαραίτητη για τη γεωμετρική σκέψη (Κολέζα, 2000, σελ. 258-259). Κοινό συμπέρασμα όλων των ερευνητών είναι ότι, για να κατανοηθούν οι παραγωγικές αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, απαιτείται αρμονικός συνδυασμός μεταξύ της «εμπειρικής» γεωμετρίας και της «θεωρητικής» γεωμετρίας των αποδείξεων (Leung & Lopez-Real, 2002).

Είναι σαφές ότι οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν τη φύση και τα πρότυπα του παραγωγικού συλλογισμού και να κατανοήσουν το ρόλο και τη φύση της απόδειξης (σημασία, σκοπό και χρησιμότητα). Αλλά στην τάξη ο βασικός ρόλος της απόδειξης είναι η προώθηση της μαθηματικής κατανόησης και συνεπώς η σημαντικότερη πρόκληση είναι να βρεθούν οι αποτελεσματικότεροι τρόποι χρήσης της απόδειξης για αυτόν το σκοπό (Hanna, 2000). Ενδεχομένως, ένας από τους αποτελεσματικούς τρόπους είναι να χρησιμοποιηθεί ένα δυναμικό λογισμικό, το οποίο ανοίγει εξ ολοκλήρου νέες προσεγγίσεις στη διδασκαλία της απόδειξης και κυρίως της γεωμετρικής.

Το Πρόβλημα

Ο όρος «απόδειξη» σε διαφορετικά πλαίσια σημαίνει διαφορετικά πράγματα και χρησιμοποιείται με διαφορετικά νοήματα. Στην καθημερινή γλώσσα ο όρος «απόδειξη» συνδέεται με την επιβεβαίωση (Tall, 1989)· με καταστάσεις επικύρωσης και απόφασης· με τα προϊόντα που προκύπτουν από ακολουθούμενες αποδεικτικές πρακτικές· με επιχειρήματα που γίνονται αποδεκτά από μια κοινότητα ή από ένα πρόσωπο (Godino & Recio, 1997). Τα διάφορα νοήματα αναγνωρίζονται μέσω των όρων «επεξήγηση-explanation», «επιχειρηματολογία-argumentation», «επίδειξη-demostration». Εντούτοις, σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει μια κοινή ιδέα, αυτή της αιτιολόγησης (justifying) ή της επικύρωσης (validating) ενός ισχυρισμού με την παροχή των λόγων ή των επιχειρημάτων.

Στη βιβλιογραφία για την έρευνα της μαθηματικής απόδειξης ο όρος «τυπική απόδειξη» (formal proof) χρησιμοποιείται για εκείνο τον τύπο αιτιολόγησης, που συστατικά της είναι η αφαίρεση, η τυποποίηση, η αξιωματικοποίηση, και η παραγωγή, η

δε γλώσσα της έχει μια τυπική και αυστηρά ορισμένη ποιότητα, είναι γλώσσα που έχει οξυνθεί και έχει εκλεπτυνθεί ώστε να εξυπηρετεί τις ακριβείς ανάγκες για έναν ακριβή αλλά περιορισμένο διανοητικό στόχο (Davis & Hersh, 1981, σελ. 157).

Πολλοί εκπαιδευτικοί των μαθηματικών, αλλά και αρκετοί μαθηματικοί, θεωρούν τις αποδείξεις όχι μόνο ως συντακτικές παραγωγές. Στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης μια απόδειξη έχει οριστεί ως ένα επιχείρημα που πείθει έναν μαθηματικό ο οποίος γνωρίζει το θέμα (Davis & Hersh, 1981), ή ένα επιχείρημα που μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για να πειστεί ο ίδιος, να πείσει έναν φίλο, να πείσει έναν εχθρό (Tall, 1989).

Το ποιος όμως τύπος επιχειρήματος μπορεί να γίνει αποδεκτός ως έγκυρη απόδειξη από τη μαθηματική κοινότητα είναι πιθανώς αδύνατο να οριστεί (Davis & Hersh, 1981). Μερικοί εκπαιδευτικοί των μαθηματικών υποστηρίζουν ότι εάν ένα επιχείρημα γίνεται αποδεκτό ή όχι ως απόδειξη εξαρτάται όχι μόνο από τη λογική δομή του, αλλά και από τον τρόπο με τον οποίο αυτό το επιχείρημα μπορεί να γίνει πειστικό (Hanna, 2000). Άλλοι, εστιαζόμενοι στην κοινωνική φύση της απόδειξης, ορίζουν την απόδειξη ως την επεξήγηση που γίνεται αποδεκτή από μια δεδομένη κοινότητα σε μια δεδομένη στιγμή (Balacheff, 1987 ·αναφορά στο Jones, 2000).

Η Απόδειξη στη Σχολική Τάξη

Η διδασκαλία και η εκμάθηση της απόδειξης συναντά σημαντικές δυσκολίες και προβλήματα. Έρευνες παρέχουν στοιχεία ότι οι μαθητές σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση και την παραγωγή των μαθηματικών αποδείξεων (Healy & Hoyles, 1998, 2001· Recio & Godino, 2001)· είναι ανίκανοι να κάνουν αποδείξεις σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών πέρα από τις πολύ

τετριμμένες (Weber, 2001)· δεν μπορούν να κατανοήσουν τη σπουδαιότητά της και να εκτιμήσουν εάν η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης που έτοιμη τους παρουσιάζεται είναι σωστή ή όχι (Selden & Selden 2003). Το μαθηματικό περιεχόμενο (άλγεβρα - γεωμετρία) έχει λίγη συμβολή στη ικανότητα για την παραγωγή μαθηματικής απόδειξης (Recio & Godino, 2001). Ακόμα και αν οι μαθητές έχουν εγκαταλείψει την εμπειρική τοποθέτηση με επιτυχία, υπάρχουν στοιχεία ότι η εξέλιξη μιας αιτιολόγησης σε μια παραγωγική μαθηματική απόδειξη παρουσιάζει δυσκολίες και δεν αναμένεται να είναι απλή και αυθόρμητη σε όλες τις βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης (Marrioti, 2001, 1997· Recio & Godino, 2001). Μια σειρά ερευνών έχει τεκμηριώσει ότι, ακόμα και μετά από μια εισαγωγική διδασκαλία, πολλοί μαθητές αποτυγχάνουν να «δουν» την ανάγκη παρουσίασης παραγωγικών αποδείξεων, ή είναι ανίκανοι να διακρίνουν μεταξύ των διαφορετικών μορφών μαθηματικού συλλογισμού, όπως η επεξήγηση και η επαλήθευση (Hanna & Jahnke,1996· Dreyfus, 1999· Hoyles, 1997· de Villiers, 1998 αναφορά στο Jones, 2000). Ακόμα κι εκείνοι οι μαθητές που πετυχαίνουν το στόχο της παρουσίασης τυπικής απόδειξης, δε «βλέπουν» οποιονδήποτε λόγο ή δεν αισθάνονται οποιαδήποτε ανάγκη να κάνουν απόδειξη, ειδικά όταν η προς απόδειξη πρόταση έχει οπτικά προφανή χαρακτήρα, ή δίνεται σαν έτοιμο γεγονός χωρίς στοιχεία ανακάλυψης από τους ίδιους, ή όταν ήδη ξέρουν ότι είναι αληθής (de Villiers, 1999· Hadas et al., 2000· Reid, 1998). Επιπλέον, οι προσπάθειες να διδαχθεί η λογική σε σπουδαστές συχνά δεν παρέχουν καμία στατιστικά σημαντική διαφορά στην απόδοση και την αναγνώριση της αξίας της απόδειξης από τους ίδιους (Deer, 1969· Walter, 1972· Mueller,1975· αναφορά στο de Villiers, 1999). Εν ολίγοις, η αποτυχία να διδαχθεί η μαθηματική απόδειξη εμφανίζεται να είναι καθολική (Hadas et al., 2000).

Τα προβλήματα, που οι μαθητές αντιμετωπίζουν με την απόδειξη, δεν πρέπει να αποδίδονται κυρίως σε ανικανότητα ανάπτυξης λογικών συλλογισμών. Μελέτες έχουν δείξει, σε αντίθεση με την θεωρία του Piaget, ότι και τα πολύ μικρά παιδιά είναι ικανά στο να αναπτύσσουν λογικούς συλλογισμούς στις καταστάσεις που είναι για αυτά σημαντικές (Donaldon, 1978· στο *Η Σκέψη των Παιδιών*, 2001). Τα προβλήματα έχουν να κάνουν κυρίως με τη φύση της απόδειξης και την αντίληψη της ανάγκης για απόδειξη που έχουν οι μαθητές, τα οποία είναι ευρέως γνωστά σε όλους τους διδάσκοντες, κυρίως στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και προσδιορίζονται χωρίς εξαίρεση σε όλη την εκπαιδευτική έρευνα ως σημαντικά προβλήματα στη διδασκαλία της απόδειξης (de Villiers, 1999). Το λεξιλόγιο της μαθηματικής αλήθειας, η ακαμψία και η βεβαιότητα δεν είναι οικεία για τους περισσότερους μαθητές, ο κόσμος των οποίων είναι περισσότερο εμπειρικός, στηριζόμενος στο παράδειγμα, στην παρατήρηση και στις εφαρμογές.

Η μαθηματική απόδειξη είναι μια δύσκολη έννοια για τους μαθητές, επειδή η αποδεικτική λειτουργία είναι σύνθετη και εμπλέκει πολλές διαφορετικές διαδικασίες και πτυχές (Laborde, 2000): εξαρτάται από μια ευρείας έκτασης περιοχή αντιλήψεων, γνώσης και γνωστικών δεξιοτήτων, διαμορφώνεται από το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο η εκμάθησή της εμφανίζεται (Stylianou & Blanton, 2003) και δεν μπορεί να αναχθεί απλά και μόνο στη σωστή χρήση της παραγωγικής επιχειρηματολογίας (Reiss & Renkl, 2002).

Η έννοια της γεωμετρικής απόδειξης είναι δεμένη με την έννοια της γεωμετρικής θεωρίας, της «θεωρίας» από την άποψη της «συστηματικής δομής» (Hanna & Janke, 2002)· στηρίζεται σε μια σειρά μη τετριμμένων «συνηθειών του μυαλού» (Ball et al., 2002), συνδυάζοντας διαδικασίες λογικής επιχειρηματολογίας με ευρετικές διαδικασίες

παραγωγής υποθέσεων και αναζήτησης ευλόγων επιχειρημάτων για την υποστήριξή τους (Reiss & Renkl, 2002). Αυτές οι νοητικές διαδικασίες πρέπει να συντονιστούν με οπτικά ή εμπειρικά (visual or empirical) αποδεικτικά στοιχεία, με μαθηματικά αποτελέσματα και γεγονότα. Επιπλέον, οι διαδικασίες αυτές επηρεάζονται από τη διαίσθηση (intuition) και την πεποίθηση (belief), από αντιλήψεις αυθεντίας (perceptions of authority) και προσωπικής βεβαιότητας (personal conviction) και από κοινωνικούς κανόνες, οι οποίοι ρυθμίζουν εκείνο το οποίο απαιτείται για την κοινοποίηση μιας απόδειξης. Το προϊόν αυτών των διαδικασιών – που είναι η απόδειξη η οποία παρουσιάζεται γραπτώς - απεικονίζει μόνο συγκεκριμένα μέρη της πραγματικής διαδικασίας της παρουσίασης αποδείξεων. Η πραγματική διαδικασία είναι πολύ πιθανόν να παραμένει μη ευδιάκριτη στους μαθητές που μαθαίνουν τη μαθηματική απόδειξη στην τάξη (Reiss & Renkl, 2002).

Νέες Τεχνολογίες και Απόδειξη

Στην ερευνητική βιβλιογραφία πολύ συχνά αναφέρεται ότι η παραγωγική φάση μιας γεωμετρικής απόδειξης ριζοβολεί σε δραστηριότητες παραγωγής και διερεύνησης υποθέσεων συνολικά (Boero et al., 1996· Mariotti et al., 1997 κ.ά.). Διαδικασίες οπτικοποίησης όπως, η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος, ο πειραματισμός, η διερεύνηση, η διατύπωση, ο έλεγχος και η επαλήθευση μιας υπόθεσης, η επιλογή και ο συνδυασμός λογικών επιχειρημάτων σε μια παραγωγική αλυσίδα, η οργάνωση των επιχειρημάτων σύμφωνα με τα μαθηματικά πρότυπα και τελικά ένα προτεινόμενο σχέδιο μιας τυπικής απόδειξης περιλαμβάνονται σε μια πετυχημένη διαδικασία παρουσίασης γεωμετρικής απόδειξης (Boero et al., 1996· Olivero & Robutti, 2001).

Ο ρόλος των ευρετικών, των διερευνήσεων και των υποθέσεων στη γεωμετρική απόδειξη αποτελεί θέμα συζήτησης μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Έχει διατυπωθεί ένα ευρύ φάσμα απόψεων σχετικά με το θέμα αυτό. Κάποιοι ερευνητές υπογραμμίζουν τον κεντρικό ρόλο των τυπικών αποδείξεων, σε αντίθεση με τις ευρετικές που χρησιμοποιούνται σε διαδικασίες ανακάλυψης. Μερικοί άλλοι τονίζουν το θεμελιώδη ρόλο των ευρετικών έναντι των τυπικών αποδείξεων (Hanna, 2000). Πειράματα τάξεων παρέχουν στοιχεία ότι οι μαθητές που ασχολούνται με δραστηριότητες που απαιτούν ευρετικές διαδικασίες ανακάλυψης, διερεύνησης και παραγωγής υποθέσεων, είναι πιο πιθανό να είναι σε θέση να οργανώσουν μια απόδειξη στο τέλος, από το εάν τους παρουσιάζεται μια συγκεκριμένη πρόταση η οποία τους ζητείται να αποδειχθεί (Olivero, 1999).

Το θέμα γίνεται πιο ενδιαφέρον όταν οι νέες τεχνολογίες (Cabri, Sketchpad, Excel κ.ά.), και ιδιαίτερα τα λογισμικά πακέτα, γνωστά γενικά ως Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας, χρησιμοποιούνται στην τάξη ως εργαλεία οπτικοποίησης για την διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρίας και την ανάπτυξη των αποδεικτικών δεξιοτήτων των μαθητών (de Villers, 2003· Hanna, 2000). Στο επίπεδο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση, το θέμα της χρήσης των νέων τεχνολογιών έχει αντιμετωπιστεί από διαφορετικές απόψεις. Έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες για τον τρόπο με τον οποίο η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών αλλάζει την εκμάθηση στη σχολική τάξη, αλλά και για τον τρόπο με τον οποίο οι νέες τεχνολογίες μπορούν να ενσωματωθούν στη σχολική πρακτική (Laborde, 2001· Healy, 2000· Mariotti & Bartolini Bussi, 1998 κ.ά.).

Εμπειρικές μελέτες διατυπώνουν την άποψη ότι το λογισμικό με τα διαθέσιμά του «αντικείμενα», εντολές και εργαλεία γεωμετρικών κατασκευών και υπολογισμών, μεσολαβεί στην εκμάθηση της Γεωμετρικής θεωρίας, αλλά και στις διαδικασίες παρουσίασης γεωμετρικής απόδειξης. Οι παρεχόμενες από το δυναμικό λογισμικό δυνατότητες για ευρετικές διαδικασίες και διερεύνηση το καθιστούν ικανό να ενθαρρύνει την ανάγκη για απόδειξη, να μεσολαβεί στην μετάβαση από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο, και εν γένει, στην εισαγωγή των μαθητών στη θεωρητική σκέψη (Hadas et al., 2000· Jones, 2000· Marrades & Gutierrez, 2000 κ.ά.).

Όμως, οι διαπιστώσεις των ερευνών για τη χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας δεν μπορούν να παράσχουν ένα ανεξάρτητο περιβάλλον, μέσα στο οποίο οι μαθητές θα μάθουν τη θεωρία της γεωμετρίας (de Villiers, 2002), και διατυπώνεται έντονα ο ακόλουθος προβληματισμός:

Οι οπτικές και οι ευρετικές δυνατότητες που προσφέρονται από τα περιβάλλοντα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στο να «φαίνονται» τόσο εύκολα οι μαθηματικές ιδιότητες, μπορούν να μειώσουν ή ακόμα και να εξαφανίσουν οποιαδήποτε ανάγκη για να κάνουν και για να μάθουν πώς να κάνουν απόδειξη οι μαθητές (Laborde, 2000· Hoyles & Jones, 1998 κ.ά). Ή αντίθετα, μια τέτοια παρεχόμενη δυνατότητα ανοίγει νέους δρόμους σημαντικών τρόπων προσέγγισης στην απόδειξη, οι οποίοι μπορούν να συμβάλουν στην πρόοδο της κατανόησης από τους μαθητές του ρόλου της απόδειξης και ενισχύουν την ανάγκη τους για να κάνουν απόδειξη (Jones, 2000· Hadas et al., 2000 κ.ά).

Ο Σκοπός της Μελέτης

Ο σκοπός της μελέτης είναι να διερευνηθεί *η χρήση* του λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας ως μια εναλλακτική προσέγγιση στη διδασκαλία και στην εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης. Θα εξεταστεί *ο ρόλος* του περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας στις διαδικασίες παρουσίασης γεωμετρικών αποδείξεων και στην κατανόηση της φύσης της γεωμετρικής απόδειξης.

Ο σκοπός της μελέτης είναι *κοινωνικός, γνωστικός και διδακτικός*.

Ο κοινωνικός σκοπός της μελέτης είναι να επιδειχθούν τα θεωρητικά εργαλεία, που οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν κατασκευάσει και που χρησιμοποιούν για να ερμηνεύσουν και να αναλύσουν τα αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών τους για το ρόλο της Δυναμικής Γεωμετρίας στις αποδεικτικές διαδικασίες. Ο στόχος είναι να επεξηγηθεί η μεσολάβηση της Δυναμικής Γεωμετρίας στη μετάβαση από τη διαίσθηση στη θεωρία, από τη διερευνητική φάση επίλυσης προβλήματος στην παραγωγή μιας απόδειξης με την ανάδειξη της ανάγκης για απόδειξη. Ο κοινωνικός στόχος της μελέτης θεωρούμε ότι συμπληρώνεται με την έκθεση μέρους των θεμάτων της έρευνας για την απόδειξη.

Ο γνωστικός σκοπός είναι να περιγράψει και να αναλύσει τις λειτουργίες που η απόδειξη πρέπει να εμφανίζει στη σχολική τάξη, καθώς και τις λειτουργίες λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας που μεσολαβούν στις αποδεικτικές διαδικασίες της γεωμετρικής απόδειξης. Ο στόχος είναι να αναδειχθεί ο ρόλος της μεσολάβησης της Δυναμικής Γεωμετρίας στις αποδεικτικές διαδικασίες.

Ο διδακτικός σκοπός είναι να προβληματίσει με στόχο να φανεί ότι ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη του

εσωτερικού πλαισίου των μαθητών μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες που όμως αναδεικνύουν την ανάγκη για απόδειξη. Ο σκοπός θα αναδειχθεί με την παράθεση δυο δραστηριοτήτων επίλυσης προβλήματος.

Η Σημασία της Μελέτης

Η σημασία της μελέτης είναι να προσεγγίσει το ρόλο της Δυναμικής Γεωμετρίας στη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης και της θεωρίας της σχολικής Γεωμετρίας, να επισημάνει τη μεσολάβηση των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας στις αποδεικτικές διαδικασίες, και να θέσει προβληματισμούς για τη χρήση της Δυναμικής Γεωμετρίας ως ενός μέσου εναλλακτικής προσέγγισης στη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης και της σχολικής Γεωμετρικής Θεωρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι θεωρητικές έννοιες *όργανα σημειολογικής μεσολάβησης - instruments of semiotic mediation* (Vygotsky, 1978) και *περιβάλλον – milieu* (Brousseau, 1997), τα θεωρητικά εργαλεία της *γνωστικής ενότητας – cognitive unity* (Boero et al., 1996) και του *μαθηματικού θεωρήματος* (Mariotti et al., 1997), *ο τομέας της εμπειρίας – field of experience* (Boero et al., 1995), *ο μετασχηματιστικός συλλογισμός – transformation reasoning* (Simon, 1996) και *οι γνωστικές διαδικασίες ανόδου* και *καθόδου - ascending processes & descending processes (*Arzarello et al., 2002· Olivero, 1999) σε ένα δυναμικό περιβάλλον αποτελούν το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιείται ως εργαλείο για να εξηγηθούν οι καταστάσεις και να αναλυθούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης για τη συμβολή του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στην ανάπτυξη δεξιοτήτων απόδειξης και κατανόησης της φύσης της γεωμετρικής απόδειξης.

Η θεωρία των *σχηματοποιημένων εννοιών - figural concepts* του Fischbein, (1993), η οποία παρέχει ένα κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση των αποτελεσμάτων των ερευνών, και η θεωρία των *επιπέδων γεωμετρικής σκέψης* των Van Hiele (1986), η οποία χρησιμοποιείται ως εργαλείο ανάλυσης των εμπειρικών παρατηρήσεων, συμπληρώνουν το ανωτέρω θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας για το ρόλο της Δυναμική Γεωμετρία στην αποδεικτική διαδικασία.

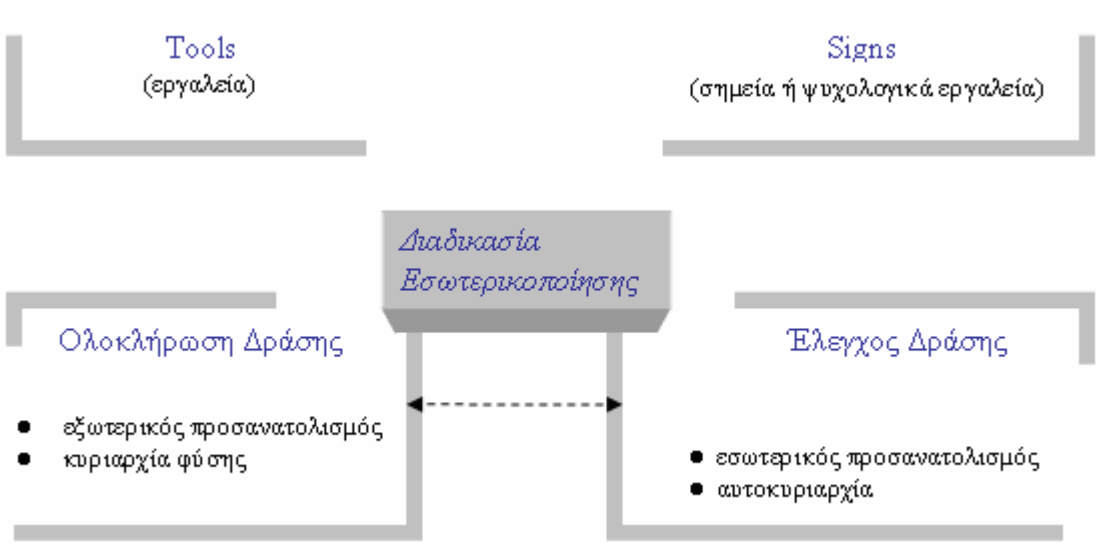
Όργανα Σημειολογικής Μεσολάβησης - Instruments of Semiotic Mediation

Η παραγωγική αλληλεπίδραση μεταξύ της θεωρίας και της πράξης στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης επιβεβαιώνεται από την ιστορική και την επιστημολογική ανάλυση (Bartolini Bussi & Mariotti, 1999). Ένα κρίσιμο σημείο της συζήτησης για τη σχέση μεταξύ της θεωρίας και της πρακτικής αφορά το ρόλο των *τεχνικών εργαλείων* - *technical tools*.

Τα εργαλεία έχουν μια *διπλή λειτουργία*: αφενός, προσανατολισμένα εξωτερικά στοχεύουν στην *ολοκλήρωση* μιας δράσης, και αφετέρου, προσανατολισμένα εσωτερικά στοχεύουν στον *έλεγχο* της δράσης. Η διάκριση αυτή, η οποία χρησιμοποιείται στις μελέτες για τη χρήση και την ανάπτυξη των τεχνολογιών, αρχικά διαμορφώθηκε από τον Vygotsky (1978) στη θεωρία του της *σημειολογικής (δια)μεσολάβησης* - *semiotic mediation* (αναφορά στο Mariotti, 2000).

Ο Vygotsky στην ίδια κατηγορία μεσολαβητών τοποθετεί αυτά που καλεί *εργαλεία (tools)* και *σημεία (signs)*, ή όργανα σημειολογικής μεσολάβησης (instruments of semiotic mediation). Αν και τα δυο είδη (*εργαλεία* και *σημεία)* παράγονται και χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο και είναι μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς της ανθρωπότητας, κατά τον Vygotsky, διαφέρουν ως προς τη λειτουργία μεσολάβησής τους. Η διαφορά τους στηρίζεται στο διαφορετικό τρόπο που ορίζουν την ανθρώπινη συμπεριφορά. Η λειτουργία των εργαλείων, προσανατολισμένη εξωτερικά, χρησιμεύει ως αρωγός της ανθρώπινης δραστηριότητας που έχει ως στόχο την κυριαρχία του φυσικού περιβάλλοντος. Η λειτουργία των σημείων, προσανατολισμένη εσωτερικά, είναι ένα μέσο της εσωτερικής δραστηριότητας που έχει ως στόχο την αυτοκυριαρχία και τον αυτοέλεγχο.

Για τα σημεία, τα προσανατολισμένα εσωτερικά, χρησιμοποιείται και ο όρος *ψυχολογικά εργαλεία (psychological tools)*, ο οποίος βασίζεται στην αναλογία μεταξύ των εργαλείων και των σημείων, αλλά και στη σχέση που συνδέει τα συγκεκριμένα εργαλεία και την εξωτερικά προσανατολισμένη χρήση τους με την αντίστοιχη εσωτερικά προσανατολισμένη χρήση τους. Τα εργαλεία μπορούν να μετασχηματιστούν σε ψυχολογικά εργαλεία μέσω της διαδικασίας της *εσωτερικοποίησης*. Κατά τη διαδικασία της εσωτερικοποίησης ένα εργαλείο μετατρέπεται σε ένα εσωτερικά προσανατολισμένο εργαλείο (ψυχολογικό εργαλείο) και παρέχει δυνατότητες να διαμορφωθούν νέες έννοιες, και ως εκ τούτου λειτουργεί ως ένας σημειολογικός μεσολαβητής (Mariotti, 2000) (Σχήμα 2. 1).



Σχήμα 2.1: Σχηματική παράσταση της Λειτουργίας και των χαρακτηριστικών Οργάνων της Σημειολογικής Μεσολάβησης

Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας διαδικασίας εσωτερικοποίησης είναι ο γεωμετρικός διαβήτης. Το μεταλλικό εργαλείο που αποθηκεύεται στην κασετίνα του μαθητή δεν είναι μόνο ένα υλικό εργαλείο, έχει γίνει ένα νοητικό αντικείμενο το οποίο μόλις εφαρμοστεί παρέχει τη δυνατότητα να διαμορφωθούν νέες έννοιες και μπορεί να αντικατασταθεί ή να ζωντανέψει από μια σωματική χειρονομία, για παράδειγμα με την περιστροφή χεριών (Mariotti, 2000, 2001).

Εμπειρικές μελέτες έχουν εστιάσει στην ανάλυση συγκεκριμένων στοιχείων του μικρόκοσμου (ο έλεγχος με το «σύρσιμο», διαθέσιμες εντολές, μακρο-εντολές κτλ.) ως όργανα της σημειολογικής μεσολάβησης που ο δάσκαλος των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιήσει προκειμένου να εισαχθούν οι μαθητές στη γεωμετρική θεωρία (Bartolini Bussi & Mariotti, 1999· Arzarello et al., 2002· Mariotti, 2000, 2001· Cerulli & Mariotti, 2003).

Περιβάλλον – Milieu

Ο Brousseau (1997, αναφορά στο Laborde, 2000) προκειμένου να ερμηνεύσει τις στρατηγικές επίλυσης που ένας μαθητής εφαρμόζει σε ένα έργο έχει εισάγει την έννοια *περιβάλλον (milieu)*. Υποστηρίζει ότι οι στρατηγικές επίλυσης είναι το αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων μεταξύ: μαθητή και περιβάλλοντος. Το περιβάλλον είναι ένα σύστημα αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθητών και μέσων μάθησης, προσφέρει δυνατότητες για δράσεις του μαθητή με τα μέσα μάθησης και αναδράσεις ανάλογα με την ανατροφοδότηση από τα μέσα αυτά. Δεδομένου ότι οι στρατηγικές των σπουδαστών επηρεάζονται από το πλαίσιο, είναι φανερό ότι το πλαίσιο και το περιβάλλον συσχετίζονται. Η έννοια του πλαισίου αναφέρεται σε όλα τα υποκείμενα στην αντίληψη

στοιχεία, ενώ στην έννοια του περιβάλλοντος προσμετρώνται ένα σύνολο από διαθέσιμα μέσα και διαδικασίες τα οποία έχουν είτε υλική υπόσταση (elements of material) - χαρτί, μολύβι, γεωμετρικά όργανα, εκπαιδευτικό λογισμικό και άλλα διαθέσιμα υλικά - είτε νοητική υπόσταση (intellectual nature) – παιδαγωγικοί στόχοι, μαθησιακές προσδοκίες, διδακτικές προθέσεις, εννοιολογικές συμβάσεις και κανόνες χρήσης των εργαλείων από μαθητές και καθηγητές στην τάξη- τα οποία μεσολαβούν στις μαθηματικές συμπεριφορές του μαθητή σε ένα έργο.

Γνωστική Ενότητα (Cognitive Unity) και Μαθηματικό Θεώρημα

Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (Mariotti, 2001· Mariotti, 2000· Mariotti et al., 1997· Garutti et al., 1998· Boero et al., 1996) προκειμένου να αναλύσουν τις δυσκολίες που οι μαθητές συναντούν με τη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης, εισάγουν δυο θεωρητικά εργαλεία, τη *γνωστική ενότητα* και *το μαθηματικό θεώρημα*. Υποστηρίζουν ότι αυτά μπορούν να βοηθήσουν στη διαχείριση της εργασίας της τάξης με τα γεωμετρικά θεωρήματα, στις ερμηνείες της συμπεριφοράς των μαθητών στη σύνδεση μεταξύ της διαδικασίας παρουσίασης μιας υπόθεσης (διατύπωση-έλεγχος) και της διαδικασίας παρουσίασης της αντίστοιχής τους απόδειξης των γεωμετρικών θεωρημάτων.

Γνωστική Ενότητα

Η γνωστική ενότητα είναι ένα θεωρητικό εργαλείο που αρχικά είχε προταθεί για να ερμηνεύσει τη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και στη συνέχεια μετασχηματίστηκε σε εργαλείο που μπορεί να φανεί χρήσιμο για την

πρόβλεψη και την ερμηνεία των δυσκολιών που οι μαθητές συναντούν όταν πρέπει να παρουσιάσουν μια απόδειξη μιας πρότασης.

Από την επιστημολογική ανάλυση της εργασίας προηγούμενων αλλά και σημερινών γεωμετρών αποκαλύπτεται μια συνέχεια μεταξύ δυο διαδικασιών, αυτής της διατύπωσης μιας υπόθεσης (πρότασης) και της απόδειξής της (Garutti et al., 1998). Αυτή η συνοχή δεν είναι φανερή στη θεωρητική συστηματοποίηση των αρχαίων κλασσικών γεωμετρών, όπως ο Ευκλείδης και ο Απολλώνιος, αλλά υπογραμμίζεται από τον 17^{ο} αιώνα, σε έγραφα που αποκαλύπτουν τη διαδικασία μέσα από την οποία ένα αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί (Bardin, 1988, αναφορά στο Mariotti et al., 1997) Αυτό που υπάρχει είναι μια σχέση μεταξύ της υπόθεσης και της έρευνας για μια απόδειξη.

Η συνοχή μεταξύ των διαδικασιών της διατύπωσης μιας υπόθεσης και της κατασκευής της απόδειξής της, εκφράζει ένα γνωστικό φαινόμενο το οποίο αναφέρεται ως *γνωστική ενότητα*. Οι Boero et al. (1996) και Garutti et al. (1998) 1998) περιγράφουν τη γνωστική ενότητα ως εξής: Κατά τη διάρκεια της παραγωγής μιας υπόθεσης ο μαθητής προοδευτικά επεξεργάζεται τη διατύπωση της υπόθεσής του αναπτύσσοντας μια λογική επιχειρηματολογία η οποία αναμιγνύεται λειτουργικά με την προσπάθεια αιτιολόγησης της ευλογοφάνειας των επιλογών του. Κατά τη διάρκεια του επόμενου σταδίου της παρουσίασης αποδείξεων, ο μαθητής συνδέει πάνω σε αυτή τη διαδικασία με ένα συνεπή τρόπο μερικά από τα προηγούμενα παραχθέντα επιχειρήματα οργανώνοντάς τα σε μια λογική αλυσίδα, η οποία και παρουσιάζεται με το γράψιμο μιας απόδειξης (Σχήμα 2.2).

Ειδικότερα, οι Boero et al. (αναφορά στο Leung & Lopez-Real, 2002) προτείνουν μια υπόθεση για τη διαδικασία παραγωγής υποθέσεων: *Η διαδικασία παραγωγής μιας υπόθεσης μπορεί να είναι το προϊόν μιας δυναμικής διερεύνησης κατά την επίλυση*

προβλήματος, κατά τη διάρκεια της οποίας συμβαίνει, κάποια χρονική στιγμή, η αναγνώριση μιας χαρακτηριστικής κανονικότητας ή λογικής συνέπειας, η οποία στη συνέχεια θα αποκοπεί από τη φάση της διερεύνησης και θα πάρει την μορφή μιας υπόθεσης από μια λογική σκοπιά (εάν…..τότε).

Σχήμα 2.2: Σχηματική Παράσταση της Λειτουργίας της Γνωστικής Ενότητας

Πειράματα τάξεων δείχνουν ότι η φτωχή επιχειρηματολογία κατά τη φάση παραγωγής μιας υπόθεσης αντιστοιχεί στην έλλειψη επιχειρημάτων κατά τη φάση κατασκευής της αντίστοιχης απόδειξης. Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να επιβεβαιώνει τη στενή επαφή που υπάρχει μεταξύ των διαδικασιών παραγωγής μιας υπόθεσης και της αντίστοιχης απόδειξής της (Garutti et al., 1998). Πειραματικές έρευνες παρέχουν στοιχεία για το γεγονός ότι η γνωστική ενότητα μπορεί να «κατασκευαστεί» πάνω στη βάση της παραγωγής υποθέσεων σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (Mariotti, 2000· Mariotti et al, 1997· Olivero, 1999).

Μαθηματικό θεώρημα

Στα μαθηματικά που κάνουν ή χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί η προαναφερθείσα συνοχή μεταξύ της πρότασης και της απόδειξης εξετάζεται πάντα σε ένα θεωρητικό πλαίσιο. Ακόμα και αν το πλαίσιο αλλάξει με το χρόνο η ύπαρξη μιας θεωρίας αναφοράς ως ένα σύστημα αρχών και κανόνων αφαίρεσης απαιτείται. Οποιοδήποτε μαθηματικό θεώρημα χαρακτηρίζεται από μια πρόταση και μια απόδειξη, η δε σχέση μεταξύ της πρότασης και της απόδειξης έχει νόημα μέσα σε ένα θεωρητικό πλαίσιο (Mariotti et al., 1997· Mariotti, 2000). Κατά συνέπεια *ένα μαθηματικό θεώρημα* θα θεωρείται *ένα σύστημα που αποτελείται από μια πρόταση, μια απόδειξη και μια θεωρία αναφοράς* (Σχήμα 2.3).

Σχήμα 2.3: Μαθηματικό Θεώρημα

Ένα *θεώρημα* περιλαμβάνει αφενός την εισαγωγή της ιδέας της επικύρωσης και αφετέρου την ανάπτυξη των κανόνων μιας τέτοιας επικύρωσης. Η αποδοχή της επικύρωσης (απόδειξη) εξαρτάται από τους κανόνες και τις έννοιες που αυτό το σύστημα επιβάλλει (Mariotti, 2001). Η *πρόταση* εκφράζει τις υπονοούμενες σχέσεις μεταξύ των αρχών μιας θεωρίας και του θέματος της προς συζήτηση πρότασης και της απόδειξής

της, με όρους που δηλώνονται από τις υποθέσεις (Mariotti et al., 1997). Με το να γίνουν αυτές οι σχέσεις φανερές, που αρχικά είναι υπονοούμενες στο διαισθητικό επίπεδο, αποτελεί ένα πρώτο βήμα προς την κατασκευή μιας επιχειρηματολογίας, η οποία στο πλαίσιο μιας θεωρίας μπορεί να γίνει απόδειξη. Το *θεώρημα* αντιπροσωπεύει ένα κομμάτι της γνώσης και πρέπει να ιδιοποιηθεί από το μαθητή· δηλαδή, για να μπορεί ένα θεώρημα να χρησιμοποιηθεί στον παραγωγικό συλλογισμό πρέπει να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά μιας διαίσθησης. Για να γίνει όμως αυτό, απαιτείται η σύνδεση της πρότασης και της απόδειξής της.

Η ιστορική- επιστημολογική ανάλυση δίνει έμφαση στις σημαντικές πτυχές αυτής της σύνθετης σχέσης και παρουσιάζει πώς έχει εξελιχθεί κατά τη διάρκεια των αιώνων. Το γεγονός ότι η θεωρία αναφοράς παραμένει συχνά υπονοούμενη οδηγεί κάποιον συχνά να ξεχνά ή να και να υποτιμά το ρόλο της στην κατασκευή της έννοιας της απόδειξης (Mariotti, 2000).

Σε ένα δυναμικό περιβάλλον η αφθονία των διαθέσιμων γεωμετρικών εργαλείων από το περιβάλλον, μπορεί να επιτείνει την ασάφεια για διαισθητικά γεγονότα και θεωρήματα, και μπορεί να αποτελέσει ένα εμπόδιο στην επιλογή των σωστών στοιχείων της παραγωγικής αλυσίδας μιας απόδειξης (είναι δύσκολο να δηλωθεί τι δίνεται - αξιώματα ή «παλιά» θεωρήματα, και τι πρέπει να αποδειχθεί – «νέα» θεωρήματα) (Mariotti, 2001).

Μετασχηματιστικός Συλλογισμός - Transformation Reasoning

Σε ένα δυναμικό περιβάλλον οι δραστηριότητες διατύπωσης υπόθεσης περιλαμβάνουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και του οπτικού μικρόκοσμου.

Επομένως, απαιτείται ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων που να μπορούν να οδηγήσουν στο σχηματισμό υποθέσεων και να έχουν τη δυνατότητα να οδηγήσουν στην ενόραση και την κατανόηση, και όχι οπτικές δραστηριότητες που εστιάζουν στην εμπειρική επαλήθευση. Αυτές οι κατάλληλα δομημένες δραστηριότητες υπόθεσης πρέπει να παράγουν μια αποδεικτική διαδικασία συλλογισμού που ο Simon (1996) ονομάζει *μετασχηματιστικό συλλογισμό* (Σχήμα 2.4).

Σχήμα 2.4: Σχηματική παράσταση της Λειτουργίας του Μετασχηματιστικού Συλλογισμού

Ο μετασχηματιστικός συλλογισμός είναι *η νοητική ή σωματική καθιέρωση μιας δράσης ή ενός συνόλου δράσεων σε ένα αντικείμενο ή σε ένα σύνολο αντικειμένων που επιτρέπουν σε κάποιον να προβλέψει τόσο τους μετασχηματισμούς που τα αντικείμενα υφίστανται όσο και το σύνολο των αποτελεσμάτων αυτών των δράσεων.* Στο μετασχηματιστικό συλλογισμό η δυνατότητα να εξεταστεί, όχι μια στατική κατάσταση, αλλά μια δυναμική μεταβολή από την οποία μια νέα κατάσταση ή μια συνέχεια της ήδη υπάρχουσας προκύπτει, είναι κεντρική.

Κατά τον Simon αυτό το είδος του συλλογισμού μεσολαβεί μεταξύ του επαγωγικού και του παραγωγικού συλλογισμού και ως εκ τούτου μπορεί όχι μόνο να παράγει ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, αλλά μπορεί να εμπλέξει και ένα διαφορετικό σύνολο ερωτήσεων. Η μαθηματική κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί όταν ο μαθητευόμενος οικειοποιηθεί την αποδεικτική διαδικασία (επιχειρηματολογία), η οποία καθοδηγείται από τον μετασχηματιστικό συλλογισμό, της κατάλληλης σε ένα ιδιαίτερο γεωμετρικό πλαίσιο.

Ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας είναι κατάλληλο στο μετασχηματιστικό συλλογισμό, επειδή μέσα σε αυτό μια σχηματική συνέχεια των γεωμετρικών καταστάσεων μπορεί να προκύψει οπτικά. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον ο μετασχηματιστικός συλλογισμός εφαρμόζεται στα αντικείμενα της οθόνης του υπολογιστή με τη χρήση των διαθέσιμων κατασκευαστικών εργαλείων.

Ο «Τομέας της Εμπειρίας» - Field of Experience

Ο *Τομέας της Εμπειρίας* είναι ένας θεωρητικός όρος που οι Boero et al., (1995) εισήγαγαν αναφερόμενοι σε ένα τομέα του ανθρώπινου πολιτισμού, που ο δάσκαλος και ο μαθητής μπορούν να αναγνωρίσουν και να θεωρήσουν ως ενωτικό και ομοιογενή (αναφορά στους Mariotti, 2000· Olivero, 2003). Ορίζεται ως ένα εξελικτικό σύστημα τριών συστατικών: *εξωτερικό πλαίσιο, εσωτερικό πλαίσιο μαθητή, εσωτερικό πλαίσιο δασκάλου*.

Η έννοια των εσωτερικών και εξωτερικών πλαισίων αφορά την κατασκευή ενός κοινού χώρου εργασίας. Το εσωτερικό πλαίσιο αναφέρεται στο τι υπάρχει και τι συμβαίνει στο μυαλό των μαθητή-δασκάλου, και το εξωτερικό πλαίσιο στο τι παράγεται

και τι είναι ορατό και αναγνωρίσιμο (για παράδειγμα, υπολογιστής, λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, σχήματα, σχέδια, προτάσεις, γεωμετρικά εργαλεία, χειρονομίες, κείμενα, διάλογοι κτλ.). Μάθηση μπορεί να επιτευχθεί εφόσον τα πλαίσια είναι σαφή και είναι σε θέση να επικοινωνήσουν. Η ανάπτυξη του τομέα της εμπειρίας είναι αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων μεταξύ αυτών των πλαισίων και πραγματοποιείται μέσω δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην κοινωνική κατασκευή της γνώσης. Οι δραστηριότητες μέσα σε οποιονδήποτε τομέα της εμπειρίας μπορούν να έχουν διαφορετικούς στόχους, για παράδειγμα, στόχους σχετικούς με την προσέγγιση γεωμετρικών θεωρημάτων ή την παραγωγή εννοιών. Αυτό απαιτεί την ύπαρξη χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του συγκεκριμένου τομέα της εμπειρίας. Όπως, η παρουσία συγκεκριμένου εξωτερικού πλαισίου για την εκτέλεση συγκεκριμένων ενεργειών που επιτρέπουν την εσωτερικοποίηση του οπτικού πεδίου όπου πραγματοποιούνται τα νοητικά πειράματα· η παρουσία εργαλείων σημειολογικής (δια)μεσολάβησης που επιλέγονται από το δάσκαλο και αποτελούν μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς προκειμένου να επιτευχθεί ο επιλεγόμενος στόχος και η κατασκευή ενός εξελισσόμενου εσωτερικού πλαισίου, που εξελίσσεται μέσα από τη δυναμική διερεύνηση (Mariotti et al., 1997˙ Mariotti, 2000).

Γνωστικές διαδικασίες «Ανόδου» και «Καθόδου»

Έχει υποστηριχθεί ότι περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας τείνουν να ενισχύσουν και να αναδείξουν κάποιους τύπους εμπειρικών αιτιολογιών και να εμποδίσουν τις τυπικές αιτιολογίες (Healy, 2000). Οι διάφορες ταξινομήσεις των αιτιολογιών των μαθητών από διάφορους ερευνητές υποθέτουν σιωπηρά ότι οι μαθητές

εργάζονται με ένα συγκεκριμένο γραμμικό τρόπο από την αρχή μέχρι το τέλος της λύσης ενός προβλήματος (Marrades & Gutierrez, 2000). Εντούτοις, η πραγματικότητα είναι σε πολλές περιπτώσεις διαφορετική. Πολλοί μαθητές αρχίζουν με έναν εμπειρικό έλεγχο και όταν καταλάβουν το πρόβλημα και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να δικαιολογηθεί η υπόθεση, συνεχίζουν με μια παραγωγική αιτιολόγηση. Είναι επίσης συνηθισμένο να γίνονται διάφορα άλματα μεταξύ των εμπειρικών και παραγωγικών μεθόδων κατά τη διάρκεια της λύσης ενός προβλήματος.

Οι Arzarello et al. (2002) και Olivero (1999), από την εξέταση αυτών των περιπτώσεων, διατύπωσαν την ύπαρξη γνωστικών διαδικασιών οι οποίες αποκαλύπτονται με τις στρατηγικές συρσίματος που ακολουθούν οι μαθητές σε δραστηριότητες μέσα σε ένα δυναμικό περιβάλλον, και οι οποίες φανερώνουν την ύπαρξη γνωστικών μετατοπίσεων από το εμπειρικό- αντιληπτικό επίπεδο σε ένα θεωρητικό και τανάπαλι στις δραστηριότητες των μαθητών:

- Διαδικασίες Ανόδου (ascending processes), από τα σχέδια στη θεωρία, προκειμένου να κατανοηθεί το πρόβλημα, να παραχθεί μια υπόθεση ή να ελεγχθεί, να αναζητηθούν οι κανονικότητες, οι σταθερές, κλπ. Οι διαδικασίες ανόδου χαρακτηρίζουν μια εμπειρική δραστηριότητα και συγκεκριμένα τη φάση διερεύνησης που υποστηρίζεται από τον επαγωγικό συλλογισμό.
- Διαδικασίες Καθόδου (descending processes,) από τη θεωρία στα σχέδια, προκειμένου να επικυρωθούν ή να αντικρουστούν οι υποθέσεις, να ελεγχθούν οι ιδιότητες, να παραχθεί μια παραγωγική αιτιολόγηση.

Οι μορφές ανόδου και καθόδου:

- ποικίλλουν κατά τη διάρκεια της λειτουργίας συρσίματος,

- χαρακτηρίζουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές εξετάζουν αυτό που θεωρείται ως δοθέν και αυτό που εικάζεται να βρεθεί, και
- αποτελούν ένα λεπτό γνωστικό σημείο.

Είναι ακριβώς σε αυτές τις δύο διαδικασίες που κάποιος μπορεί να παρατηρήσει τις διαφορετικές δυναμικές μεταξύ του περιβάλλοντος της γεωμετρίας με χαρτί και μολύβι και της δυναμικής γεωμετρίας.

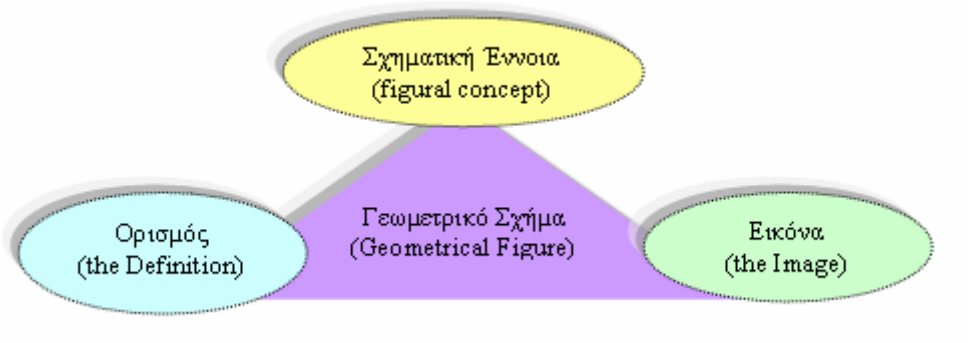
Η μετάβαση από τις διαισθητικές- εμπειρικές πτυχές στις θεωρητικές μέσω των μορφών ανόδου και καθόδου δεν συμβαίνει αυτόματα, δεν είναι ούτε απλή ούτε αυθόρμητη, αλλά είναι συνέπεια συγκεκριμένων διδακτικών επεμβάσεων του δασκάλου προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές σε μια τέτοια διαδικασία μέσα στα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας (Arzarrelo et al., 2002· Mariotti & Bartolini Bussi, 1998).

Η Θεωρία των Σχηματοποιημένων Εννοιών - Figural Concepts

Στο γεωμετρικό συλλογισμό περιλαμβάνεται ένα ιδιαίτερο είδος νοητικού αντικειμένου (mental object), το *γεωμετρικό σχήμα*. Ένα γεωμετρικό σχήμα, στο γεωμετρικό συλλογισμό, δεν είναι ούτε μια καθαρή εικόνα ούτε μια καθαρή έννοια (Mariotti, 1997). Είναι μια νοητική κατασκευή η οποία χειραγωγείται από το γεωμετρικό συλλογισμό και στερείται συγκεκριμένων αισθητηριακών ιδιοτήτων (Κολέζα, 2000, σελ. 261). Για το γεωμέτρη, τα γεωμετρικά αντικείμενα θεωρούνται αμιγείς (pure) νοητικές οντότητες και αντιμετωπίζονται σε αμιγώς νοητικό επίπεδο και μια υλική διερεύνηση δεν είναι αυστηρά απαραίτητη, για να αυξηθεί και να αναπτυχθεί η γεωμετρική γνώση. Παρόλα αυτά η γεωμετρία διατηρεί την ιδιομορφία της και συντηρεί στη διαδικασία

συλλογισμού μια εικονική αναπαράσταση της πραγματικότητας του χώρου (Mariotti, 1997).

Ο Fischbein (1993,αναφορά στο Mariotti, 1997) εισάγει την έννοια των *σχηματοποιημένων εννοιών (figural concepts)*, που αναφέρονται στα γεωμετρικά σχήματα ως νοητικές οντότητες που κατέχουν, ταυτόχρονα, και εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος κατά τον Fischbein (1993, αναφορά στο Κολέζα, 2000, σελ. 261) εμπεριέχει τρεις κατηγορίες νοητικών οντοτήτων : τον *ορισμό* (*the definition*), την *εικόνα* (*the image*) που στηρίζεται στην αισθησιοαντιληπτική εμπειρία και τη *σχηματική έννοια* (*the figural concept*) (Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Σχήμα και Νοητικές Οντότητες

Ένα σχέδιο δεν είναι αυτό το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα, αλλά μια γραφική, υλική παρουσίασή του. Το γεωμετρικό σχήμα είναι η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο που καθορίζεται επακριβώς από τον ορισμό του. Ένα γεωμετρικό σχήμα, όμως, ως αντικείμενο της Γεωμετρίας εμπίπτει και σε μια ιδιαίτερη κατηγορία εννοιών, τις λογικομαθηματικές έννοιες. Αυτές οι έννοιες δεν έχουν σχηματική μορφή, δεν είναι

ασαφείς και αφορούν πράξεις, σχέσεις και τελεστές που δεν υπάρχουν αυτούσια στο περιβάλλον και για το λόγο αυτό οι αναπαραστάσεις τους δεν μπορεί να θεωρηθούν προϊόντα της εμπειρίας (Κωσταρίδου- Ευκλείδη, 1992). Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο είναι μια αφηρημένη, ιδεατή και τυπικά καθορισμένη οντότητα, είναι μια έννοια. Συγχρόνως όμως είναι και μια οπτική εικόνα, έχει συγκεκριμένες σχηματικές ιδιότητες και συνοδεύεται από τον ορισμό του. Η συνιστώσα της εικόνας παρακινεί τη σκέψη προς νέες κατευθύνσεις. Οποιοσδήποτε γεωμετρικός συλλογισμός εξετάζει ένα μίγμα δυο ανεξάρτητων, καθορισμένων οντοτήτων που είναι, αφ' ενός, αφηρημένες ιδέες (έννοιες) και αφ' ετέρου, αναπαραστάσεις που αντανακλούν μερικές συγκεκριμένες διαδικασίες. Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός συλλογισμός στην ισότητα δυο τριγώνων αναφέρεται στις έννοιες της γωνίας, πλευράς, σημείο, τρίγωνο, αλλά και στις σχηματικές πληροφορίες και στις σχηματικά αναπαριστώμενες διαδικασίες, όπως η επίθεση δυο γωνιών ή των πλευρών που οριοθετούν τη γωνία, και επίσης στη μεταξύ τους σχέση ισότητας (λογικομαθηματική έννοια).

Σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας τα αντικείμενα στην οθόνη του υπολογιστή, όταν έχουν κατασκευαστεί κατάλληλα, έχουν μια διπλή φύση, σχηματική και εννοιολογική· είναι σχήματα αλλά και ιδεατές γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες περιορίζονται τυπικά στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος. Αυτή τη συμβίωση μεταξύ της έννοιας και του σχήματος είναι το συστατικό που υποκινεί σε νέες κατευθύνσεις τη σκέψη, αλλά δεν παύει να υπάρχουν εννοιολογικοί περιορισμοί οι οποίοι και ελέγχουν την τυπική αυστηρότητα της διαδικασίας (Fischbein, 1993· εισαγωγή στο Mariotti et al., 1997). Ενδεχομένως ο μετασχηματιστικός συλλογισμός, που παρακινείται από κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες διατύπωσης

υποθέσεων σε ένα δυναμικό περιβάλλον, να επιτρέπει τη διαδικασία παραγωγής και απόδειξης ενός θεωρήματος να συγκλίνει προς τις σχηματοποιημένες έννοιες, οι οποίες με τη σειρά τους θα μπορούσαν να οδηγήσουν στις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις (Leung & Lopez-Real, 2002).

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης Van Hiele

Πολλές φορές οι δάσκαλοι των μαθηματικών βρίσκονται μπροστά σε ένα αδιέξοδο, όταν ζητούν από τους μαθητές τους να σκεφτούν «γεωμετρικά» με τις δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται. Αυτό περιλαμβάνει την ικανότητα να δοθεί ή να κατανοηθεί ένας τυπικός ορισμός ενός γεωμετρικού αντικειμένου, να κατασκευαστεί ή να ακολουθηθεί μια τυπική απόδειξη, και να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που πιθανόν να προκύψουν. Δεν είναι μόνο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται, αλλά είναι σαν να λειτουργούν σε ένα διαφορετικό στόχο από αυτόν που τους τίθεται. Τα αντικείμενα, οι χρησιμοποιούμενοι συλλογισμοί και η χρησιμοποιούμενη γλώσσα είναι διαφορετικά. Υπάρχει μια απόκλιση μεταξύ των αναμενόμενων αποδόσεων στη γεωμετρία και του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

Οι.van Hiele (1986) προσπάθησαν να εξηγήσουν γιατί οι μαθητές συναντούν προβλήματα στην εκμάθηση της ευκλείδειας γεωμετρίας και πρότειναν έναν κύκλο εκμάθησης, γνωστό ως επίπεδα van Hiele. Κατά τους van Hiele οι δυσκολίες που οι μαθητές συναντούν στην εκμάθηση της ευκλείδειας οφείλονται στο γεγονός ότι τα προγράμματα σπουδών της γεωμετρίας παρουσιάζονται σε επίπεδο υψηλότερο από εκείνο των μαθητών. Με άλλα λόγια, οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν το δάσκαλο, αλλά και ο δάσκαλος δεν μπορεί να καταλάβει γιατί οι μαθητές δεν

καταλαβαίνουν. Οι μαθητές στερούνται απλά της απαραίτητης γεωμετρικής εμπειρίας. Οι έρευνες του Senk (1989, αναφορά στο Weber, 2003) επιβεβαίωσαν τον παραπάνω ισχυρισμό των van Hiele, ότι, δηλαδή, οι πιο πολλοί μαθητές βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο κατανόησης van Hiele από αυτό που απαιτείται από το πρόγραμμα σπουδών.

Οι van Hiele διέκριναν πέντε ιδιαίτερα επίπεδα σκέψης όσον αφορά την ανάπτυξη της κατανόησης των μαθητών στη γεωμετρία. Τα γενικά χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου μπορούν να περιγραφούν ως εξής (αναφορά στα Κολέζα Ε., 2000 & de Villiers 1996):

♦ Πρώτο επίπεδο: *Επίπεδο Αναγνώρισης (Recognition) ή Οπτικοποίησης (Visualization).* Οι μαθητές αναγνωρίζουν οπτικά τα σχήματα ως μια ολότητα με βάση τη μορφή τους και όχι σε σχέση με τις ιδιότητές τους. Αναγνωρίζουν τα τρίγωνα, τα τετράγωνα, τα παραλληλόγραμμα, και ούτω καθ' εξής από τη μορφή τους, αλλά δεν μπορούν να προσδιορίσουν τις ιδιότητες αυτών των σχημάτων.

♦ Δεύτερο επίπεδο: *Περιγραφικό επίπεδο (Descriptive) ή Ανάλυσης (Analysis).* Σε αυτό το επίπεδο τα σχήματα αναγνωρίζονται από τις ιδιότητές τους. Οι μαθητές είναι ικανοί να ανακαλύπτουν και να περιγράφουν τις ιδιότητες των σχημάτων και μαθαίνουν την κατάλληλη τεχνική ορολογία για την περιγραφή τους, αλλά δεν μπορούν να συσχετίζουν τα σχήματα ή τις ιδιότητες των σχημάτων.

♦ Τρίτο επίπεδο: *Θεωρητικό επίπεδο (Theoretical level) ή επίπεδο Άτυπης Παραγωγής (Informal deduction) ή Διάταξης (Ordering).* Οι μαθητές μπορούν να διατάζουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται το ρόλο του ορισμού και μπορούν να ακολουθήσουν απλές παραγωγικές συλλογιστικές διαδικασίες, αλλά δεν μπορούν ακόμη να κατανοήσουν ή να συνθέσουν μια πλήρη

απόδειξη. Μπορούν για παράδειγμα να επιλέξουν από την πλήρη λίστα των ιδιοτήτων του τετραγώνου τις ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του και είναι ικανοί να αναγνωρίσουν ιδιότητες εγκλεισμού (τα τετράγωνα είναι ορθογώνια).

♦ Τέταρτο επίπεδο: *Επίπεδο Τυπικής λογικής (Formal logic) ή Τυπικής Παραγωγής.* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σημασία της παραγωγικής διαδικασίας ως ένα μέσο κατασκευής και ανάπτυξης της γεωμετρικής θεωρίας. Αρχίζουν να καταλαβαίνουν τη σημασία της αφαίρεσης, το ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων στην κατασκευή αποδείξεων, και ως εκ τούτου είναι ικανοί να αναπαράγουν ή να συνθέτουν αποδείξεις. Σε πολλά προγράμματα σπουδών η ουσιαστική μελέτη της γεωμετρίας ξεκινά από αυτό το επίπεδο.

♦ Πέμπτο επίπεδο: *Επίπεδο Αυστηρότητας (Rigor).* Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με μια ποικιλία αξιωματικών συστημάτων και είναι ικανοί για αφηρημένους συλλογισμούς και πλήρεις αποδείξεις. Η γεωμετρία αναγνωρίζεται ως αφηρημένος αυστηρός κλάδος.

Η θεωρία των van Hiele θέτει ως χαρακτηριστικά των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης τα εξής:

♦ Η σειρά με την οποία οι μαθητές περνούν από το ένα επίπεδο στο άλλο είναι αμετάβλητη. Με άλλα λόγια, ένας μαθητής δεν μπορεί να είναι σε επίπεδο χωρίς να περάσει από το προηγούμενό του.

♦ Δύο μαθητές που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους.

♦ Τα επίπεδα είναι διακριτά και σφαιρικά. Σε κάθε επίπεδο σκέψης αυτό που ήταν εγγενές στο προηγούμενο επίπεδο γίνεται εξωγενές στο τρέχον επίπεδο.

- Κάθε επίπεδο έχει τα ιδιαίτερά του γλωσσικά σύμβολα και το δίκτυο σχέσεών του που συνδέουν εκείνα τα σύμβολα.

Η μετακίνηση από το ένα επίπεδο στο άλλο απαιτεί χρόνο και εμπειρία για την ανάπτυξη του λεξιλογίου, τη χρήση των κατάλληλων τύπων συλλογισμού για το νέο επίπεδο. Αυτή η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν είναι μια φυσική διαδικασία, αλλά αποτέλεσμα ενός προγράμματος διδασκαλίας – μάθησης.

Σήμερα το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας αναγνωρίζεται ευρέως ως εργαλείο οπτικοποίησης. Πρόσφατες εμπειρικές μελέτες παρέχουν στοιχεία ότι τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας συμβάλλουν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και ότι η χρήση ενός τέτοιου λογισμικού, και ιδιαίτερα ο δυναμικός χειρισμός των γεωμετρικών σχημάτων με το «σύρσιμο», μπορεί να βοηθήσει στη μετάβαση από το ένα επίπεδο van Hiele στο άλλο μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες και με την καθοδήγηση του δασκάλου (Jones, 2000· Gawlick, 2004).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στα πλαίσια του *τι* μαθαίνεται και *πώς* μαθαίνεται, από την προοπτική της κοινωνικο-πολιτισμικής θεωρίας (Sierpinska & Kilpatrick, 1998) η υπόθεση είναι ότι η χρήση ενός εργαλείου όπως ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας δε χρησιμεύει απλά στο να διευκολύνει τις νοητικές διαδικασίες· αντί αυτού, η χρήση του θεωρείται ότι διαμορφώνει και μετασχηματίζει πλήρως τις νοητικές διαδικασίες των χρηστών (Jones, 2000· Bartollini Bussi & Mariotti 1999).

Ο όρος λειτουργίες του λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας αναφέρεται στο σύνολο των «σημείων» του λογισμικού και των «δράσεων» που αυτά υποστηρίζουν μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η παροχή κινήτρων για απόδειξη και η εισαγωγή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.

Οι λειτουργίες του περιβάλλοντος ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και ο τρόπος με τον οποίον αυτές μεσολαβούν στη συνεργασία των γνωστικών διαδικασιών του γεωμετρικού συλλογισμού (παραγωγή υποθέσεων και γεωμετρικών αποδείξεων) και οι λειτουργίες των γνωστικών διαδικασιών της οπτικοποίησης και της διερεύνησης, όπως διαμορφώνονται από την παραπάνω μεσολάβηση, συζητούνται στη συνέχεια.

Η Μεσολάβηση των «Αντικειμένων» του Μικρόκοσμου Δυναμικής Γεωμετρίας

Κατά τους Mariotti (2000, 2001) και Cerulli και Mariotti (2003), από την άποψη της θεωρίας του Vygotsky, τα σχήματα, τα εργαλεία και οι εντολές σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να θεωρηθούν ως εξωτερικά σημάδια της γεωμετρικής

θεωρίας και υπό αυτή τη μορφή μπορεί να γίνουν όργανα της σημειολογικής μεσολάβησης τα οποία μπορούν να εισάγουν τους μαθητές στη θεωρητική σκέψη.

Μια αντιστοιχία μεταξύ του κόσμου των εργαλείων σε ένα δυναμικό περιβάλλον και του θεωρητικού κόσμου της ευκλείδειας γεωμετρίας φαίνεται να υπάρχει (Mariotti, 2000, 2001). Ένας μικρόκοσμος, Cabri, Sketchpad, Euclidraw κ.α., ενσωματώνει τη σχολική Ευκλείδεια Γεωμετρία με τα στοιχεία της και τις ιδιότητές τους, όπως σημεία, ευθεία, κύκλοι, μέσο τμήματος, διχοτόμος γωνίας, κάθετος, παραλληλία. Τα βασικά εργαλεία είναι «αντικείμενα» που αναπαριστάνουν απλά ή και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και είναι σημάδια των αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων.

Τα διαθέσιμα από το μικρόκοσμο «αντικείμενα» χαρακτηρίζονται τόσο από την υπολογιστική φύσης τους, όσο και από τη δύναμή τους η οποία πηγάζει από τη σχέση τους με τη γεωμετρική γνώση (Mariotti, 2000):

- Τα γεωμετρικά σχήματα καθίστανται ρεαλιστικά από τα σχήματα της οθόνης του υπολογιστή.
- Οποιοδήποτε σχήμα στην οθόνη είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας κατασκευής που λαμβάνεται μετά από επαναλαμβανόμενη χρήση εργαλείων που επιλέγονται μεταξύ εκείνων που είναι διαθέσιμα, μέσα από επιλογή μιας σειράς εντολών από το menu εντολών, όπως για παράδειγμα η εντολή «κατασκευή»- «διχοτόμος γωνίας» (Cabri, Sketchpad).
- Οι σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων καθίστανται ρεαλιστικές από τις δυναμικές σχέσεις των σχημάτων της οθόνης.
- Η λειτουργία της «δοκιμής με το σύρσιμο» (dragging test) παρέχει έναν αντιληπτικό έλεγχο της ορθότητας της κατασκευής.

♦ Νέα εργαλεία μπορούν να εισαχθούν χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη εντολή (macro construction για παράδειγμα στο λογισμικό Cabri II). Τέτοιες νέες εντολές γίνονται σημάδια νέων θεωρημάτων.

Το Σχήμα

Η γεωμετρία που διδάσκεται στο σχολείο φαίνεται να μην αλλάζει ουσιαστικά τη σχέση μεταξύ ενός σχεδίου και ενός γεωμετρικού σχήματος. Ένα σχέδιο είναι σίγουρα περιορισμένο στον κόσμο της εμπειρίας και η σύνδεση μεταξύ της θεωρίας και του σχεδίου ελέγχεται από τα πρότυπα μέσω των εμπειρικών επαληθεύσεων (Mariotti, 1997). Στην πραγματικότητα τα γεωμετρικά σχήματα διαδραματίζουν ένα διφορούμενο ρόλο: Αφενός αναφέρονται σε θεωρητικά αντικείμενα, και αφετέρου διαθέτουν γραφικές και χωρικές (graphical-spatial) ιδιότητες, οι οποίες μπορεί να δώσουν αφορμή για μια με το «μάτι» δραστηριότητα του ατόμου (Laborde, 2000).

Τα σχήματα στην οθόνη ενός μικρόκοσμου δεν μπορούν να θεωρηθούν ως γνήσιοι αντιπρόσωποι στο διαισθητικό επίπεδο· είναι σχέδια που έχουν μια εγγενή λογική ανάλογα με τη διαδικασία που έχει χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εμφανιστούν στην οθόνη του υπολογιστή. Η λογική της «μηχανής» γίνεται η λογική του σχεδίου. Η κατανόηση και η διαχείριση αυτής της λογικής είναι απαραίτητες για μια παραγωγική αλληλεπίδραση με τα σχέδια στην οθόνη (Mariotti, 1997).

Όσον αφορά τη γεωμετρία ο ρόλος μεσολάβησης των σχεδίων της οθόνης είναι περίπλοκος. Εξαρτάται τόσο από τη διαίσθηση και την αντίληψη έννοιας (conseptualisation), όσο και από την αλληλεπίδρασή τους. Οι εικόνες στην οθόνη ενός μικρόκοσμου είναι εξωτερικές αναπαραστάσεις αυτού που ο Fischbein (1993, αναφορά

στη Mariotti, 1997) αποκαλεί σχηματοποιημένες έννοιες (figural concept) στο νοητικό επίπεδο, οντότητες με εννοιολογικές ιδιότητες. Επομένως για να διευθετηθούν οι εικόνες της οθόνης, και το σχηματικό (figural) και το εννοιολογικό (conceptual) συστατικό πρέπει να ληφθεί υπόψη. Ένας οποιοδήποτε στόχος κατασκευής πρέπει να ερμηνευθεί και στο σχηματικό και στο εννοιολογικό επίπεδο. Οι εμπλεκόμενες έννοιες γίνονται συγκεκριμένες από τη σειρά των διαφορετικών εντολών που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία κατασκευής τους. Οι μαθητές πρέπει να επιτύχουν τον εννοιολογικό έλεγχο αυτού που βλέπουν στην οθόνη του υπολογιστή (Mariotti et al., 1997). Οι δραστηριότητες σε ένα δυναμικό περιβάλλον είναι χρήσιμες εφόσον αναπτυχθεί η σωστή αλληλεπίδραση μεταξύ των σχηματοποιημένων και εννοιολογικών συστατικών του γεωμετρικού συλλογισμού.

Οι Κατασκευές

Μια γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από μια διαδικασία η οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγει ένα σχέδιο. Μια κατασκευή θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες. Η ιδέα της κατασκευής και η εξέλιξή της από το εμπειρικό στο θεωρητικό επίπεδο αποτελεί το κλειδί στην πρόσβαση της ιδέας του «μαθηματικού θεωρήματος», κινούμενη από μια γενική ιδέα της αιτιολόγησης προς την ιδέα της επικύρωσης– την ιδέα της απόδειξης- μέσα σε ένα γεωμετρικό σύστημα (Mariotti, 2001).

Οι Κατασκευές στο Πλαίσιο της Σχολικής Γεωμετρίας

Από την αρχαιότητα οι γεωμετρικές κατασκευές είχαν θεμελιώδη θεωρητική σημασία (Heath, 1956 σελ. 124), η οποία εμφανίζεται σαφώς στην ιστορία των κλασικών αδύνατων προβλημάτων. Στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας τα σχεδιαστικά εργαλεία διαβήτης και χάρακας, παρά την εμπειρική τους προέλευση, μπορούν να συλληφθούν ως θεωρητικά εργαλεία τα οποία καθορίζουν μια ιδιαίτερη γεωμετρία (Mariotti, 2001). Τα εργαλεία και οι κανόνες χρήσεις τους αντιστοιχούν στα αξιώματα και τα θεωρήματα ενός θεωρητικού συστήματος, έτσι ώστε οποιαδήποτε κατασκευή αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο θεώρημα (Mariotti, 1997). Μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα, ένα θεώρημα επικυρώνει την ακρίβεια της κατασκευής. Οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του σχεδίου που παράγεται από την κατασκευή δηλώνονται από ένα θεώρημα σχετικό με το γεωμετρικό σχήμα που παρουσιάζεται από το σχέδιο (Mariotti, 2001, 2000,1997· Mariotti et al., 1997).

Η σχέση μεταξύ μιας γεωμετρικής κατασκευής, με χαρτί και μολύβι, και του θεωρήματος που την επικυρώνει δεν φαίνεται να είναι άμεση στους μαθητές. Η προσοχή εστιάζεται στην άμεση αντίληψη πάνω στο σχέδιο το ίδιο και η ακρίβειά του ελέγχεται από μια εμπειρική αξιολόγηση. Η θεωρητική επικύρωση του σχεδίου αφορά τη διαδικασία κατασκευής παρά το παραγόμενο σχέδιο και δεν επιτυγχάνεται αυθόρμητα, αλλά μπορεί να προκύψει μέσα από επιλεγμένες αναφορές και δράσεις των μαθητών από τον τομέα της εμπειρίας τους (Mariotti et al., 1997).

Οι Κατασκευές στο Μικρόκοσμο της Δυναμικής Γεωμετρίας

Παρά τη θεμελιώδη θεωρητική τους αξία, οι γεωμετρικές κατασκευές φαίνεται να χάνουν την κεντρική τους θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας

(Mariotti, 2001). Εντούτοις, η εμφάνιση των λογισμικών πακέτων της δυναμικής γεωμετρίας ανανεώνει το ενδιαφέρον για τις κατασκευές.

Η δυναμική γεωμετρία παρέχει έναν κατασκευαστή ακριβείας για:

- Οποιαδήποτε Ευκλείδεια κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.
- Οποιοδήποτε σχήμα που μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας σχετικούς μετασχηματισμούς (ισομετρίες, περιστροφές, ανακλάσεις, ομοιοθεσίες) σε μια Ευκλείδεια κατασκευή,
- Οποιοδήποτε γεωμετρικό τόπο ενός ή πλήθους αντικειμένων που προκύπτει όταν μέρος της κατασκευής μεταφέρεται στο χώρο.

Η εμπιστοσύνη στην ακρίβεια των γεωμετρικών σκίτσων και των μετρήσεων του λογισμικού είναι τόσο βασική και, παρόλο που δεν συζητείται, εννοείται σε κάθε συζήτηση επιχειρηματολογίας. Βέβαια, η ακρίβεια περιορίζεται από τις προγραμματισμένες δυνατότητες του δυναμικού λογισμικού, της ακρίβειας της οθόνης και της αξιοπιστίας του εκτυπωτή, και μπορεί να μειωθεί από την επιλογή ευρετικών για ένα αλγόριθμο ή από αδυναμίες που ένα τέτοιο πολύπλοκο λογισμικό μπορεί να παρουσιάσει.

Η επίδραση των περισσότερων από τα διαθέσιμα εργαλεία ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αντιστοιχεί με την έννοια των κλασσικών γεωμετρικών εργαλείων, αφού ένα σχήμα στο μικρόκοσμο λαμβάνεται με την τομή γραμμών και κύκλων, με την κατασκευή καθέτων και παράλληλων γραμμών.

Στο πλαίσιο των γεωμετρικών κατασκευών οι παρεχόμενες δυνατότητες από τη δυναμική γεωμετρία για γεωμετρικές κατασκευές επιβάλλουν τη διερεύνηση της σχέσης

μεταξύ της γεωμετρίας που ενσωματώνεται σε ένα δυναμικό περιβάλλον και της γεωμετρίας με χαρτί και μολύβι.

Ένα γεωμετρικό σχήμα στον κόσμο της σχολικής γεωμετρίας με χαρτί και μολύβι είναι η σύνθεση εκείνων των στοιχείων που ενσωματώνουν τις διάφορες σχέσεις οι οποίες αφορούν τους διάφορους ορισμούς και θεωρήματα της γεωμετρίας. Στον κόσμο της δυναμικής γεωμετρίας τα στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος σχετίζονται με μια ιεραρχία σχέσεων και ιδιοτήτων που αντιστοιχούν στη διαδικασία κατασκευής τους, μια διαδικασία τήρησης ορισμένων προϋποθέσεων λογικής και χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων. Η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος στον κόσμο της δυναμικής γεωμετρίας είναι κατασκευή μιας «ιδιαίτερης» περίπτωσης, ενώ σε περιβάλλον με χαρτί και μολύβι είναι η κατασκευή μιας «γενικής» περίπτωσης (Sanchez & Sacristan, 2003).

Και στους δυο κόσμους, οι γεωμετρικές κατασκευές πρέπει να είναι έγκυρες. Το κριτήριο επικύρωσης της εγκυρότητας της κατασκευής στους δυο κόσμους είναι διαφορετικό: Στον κόσμο της κλασικής ευκλείδειας γεωμετρίας μια κατασκευή είναι αποδεκτή αν και μόνο αν έχει γίνει με τη χρήση του χάρακα και του διαβήτη, ενώ στον κόσμο της δυναμικής γεωμετρίας μια κατασκευή είναι αποδεκτή αν και μόνο εάν περνά τη «δοκιμή συρσίματος – dragging test» (Jones, 2000· Mariotti, 2001), αν και μόνο αν δεν είναι δυνατόν να γίνει «άνω κάτω» με το σύρσιμο (Healy et al., 1994· αναφορά στο Jones, 2000). Η δοκιμή συρσίματος που αρχικά προσανατολίζεται εξωτερικά, στοχεύει να εξετάσει με έναν αντιληπτό τρόπο την ακρίβεια του σχεδίου η οποία, κάτω από τις αλληλεπιδραστικές συζητήσεις μεταξύ δασκάλων και μαθητών, αλλάζει τη λειτουργία του και γίνεται ένα σημάδι που αναφέρεται σε μια έννοια, στην έννοια της θεωρητικής ακρίβειας του σχήματος.

Ο Γνωστικός Ρόλος των Δυναμικών Κατασκευών

Όταν ένα πρόβλημα κατασκευής παρουσιάζεται σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, η ανάγκη μιας αιτιολόγησης της ακρίβειας της κατασκευής του παραγόμενου σχήματος στην οθόνη απαιτεί μια επεξήγηση γιατί μερικές κατασκευές λειτουργούν και άλλες όχι. Το περιβάλλον αλληλεπιδρά μεταξύ της γεωμετρικής κατασκευής και της διαδικασίας απόδειξης. Η ακρίβεια των σχεδίων και των γεωμετρικών αμετάβλητων γεγονότων, κάνουν τους μαθητές περισσότερο επιφυλακτικούς στο τι υπονοείται και που πρέπει να αποδειχθεί (Gravina, 2000). Το ειδικό κριτήριο επικύρωσης της λύσης των προβλημάτων κατασκευής που εισάγει η δοκιμή συρσίματος υπονοεί μια μετατόπιση της προσοχής από το παραγόμενο σχέδιο στη διαδικασία που το παρήγαγε (Mariotti, 2000). Για να περάσει το σχήμα τη δοκιμή συρσίματος πρέπει να έχει κατασκευαστεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι σύμφωνος με τη γεωμετρική θεωρία (Jones, 2000).

Συνεπώς, το σύρσιμο γίνεται αποδεκτό ως εργαλείο επικύρωσης, αλλά το πρόβλημα πρέπει να μετατοπιστεί από *την επικύρωση με το σύρσιμο* στην *επεξήγηση της απόδειξης με το σύρσιμο*, (Mariotti 1997). Κατά συνέπεια, αν ένα σχήμα στην οθόνη περνά επιτυχώς την δοκιμή συρσίματος, ένα θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί από τη γεωμετρική κατασκευή. Η επίλυση των προβλημάτων κατασκευής σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας σημαίνει αποδοχή όχι μόνο όλων των γραφικών ευκολιών του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, αλλά και αποδοχή ενός συστήματος λογικής στο οποίο τα παρατηρούμενα φαινόμενά του έχουν νόημα (Mariotti, 2000, 2001).

Κατά τη Mariotti (2000), ο δάσκαλος σε ένα δυναμικό περιβάλλον μπορεί να βρει εκείνα τα συγκεκριμένα εργαλεία της σημειωτικής μεσολάβησης που συμβάλλουν στην

ανάπτυξη της έννοιας της γεωμετρικής κατασκευής. Οι εντολές σε ένα δυναμικό περιβάλλον μπορούν να λειτουργήσουν ως εξωτερικά σημάδια του θεωρητικού ελέγχου, ο οποίος αντιστοιχεί στη χρησιμοποίηση των αξιωμάτων, θεωρημάτων και ορισμών. Το γεγονός ότι οι διαθέσιμες εντολές από τις υπάρχουσες επιλογές αναγνωρίζονται ως διαθέσιμες θεωρητικές ιδιότητες, κάνει την ίδια τη διαδικασία κατασκευής ένα εξωτερικό σημάδι ενός θεωρήματος της γεωμετρικής θεωρίας (Mariotti, 2000). Για παράδειγμα, η εντολή «διχοτόμος γωνίας» ή «μεσοκάθετος» στους μικρόκοσμους της δυναμικής γεωμετρίας, αναφέρεται σε μια κατασκευή που μπορεί ο χρήστης εύκολα να πραγματοποιήσει, και αντιστοιχεί σε ένα θεώρημα που περιλαμβάνεται στη διαθέσιμη από το δυναμικό λογισμικό θεωρία. Η διαδικασία της εσωτερικοποίησης τέτοιων σημαδιών καθορίζει την κατασκευή της θεωρητικής έννοιας των προβλημάτων κατασκευής και κάνει διαθέσιμη τη θεωρητική πλευρά των γεωμετρικών προβλημάτων γενικά (Mariotti, 2000).

Το «Σύρσιμο – Dragging»

Το «σύρσιμο» είναι ένα μοναδικό χαρακτηριστικό γνώρισμα της δυναμικής γεωμετρίας το οποίο καθιστά τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας ισχυρότερα από αυτά με χαρτί και με μολύβι (Marrades & Gutierrez, 2000). Η Laborde (2000, 2001) τονίζει τη σημασία της λειτουργίας συρσίματος προκειμένου να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ των εννοιών «σχήμα» και «σχέδιο». Ένα σχέδιο είναι η υλοποιημένη αναπαράσταση ενός ιδανικού σχήματος, το οποίο αναγνωρίζεται μόνο από τις ιδιαίτερες ιδιότητές του.

Οι Λειτουργίες του «Συρσίματος»

Το «σύρσιμο» είναι ένα εργαλείο για τη δημιουργία διαφορετικών αναπαραστάσεων ενός και του αυτού σχήματος με τη συνεχή μεταβολή του. Επειδή το σύρσιμο ενεργεί σε ένα σχέδιο κάτω από την επίδραση του υπάρχοντος σχεδίου, προκύπτει μια λειτουργία μεσολάβησης. Αυτή η μεσολαβούσα λειτουργία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τουλάχιστον δυο τρόπους (Holzl, 2001).

- ♦ ως τρόπος δοκιμής – ελέγχου, αν μια κατασκευή έχει τις επιθυμητές ιδιότητες,
- ♦ ως τρόπος αναζήτησης και αναγνώρισης νέων ιδιοτήτων.

Οι Arzarello et al. (2002) και Olivero (1999) παρατηρώντας πώς οι σπουδαστές χρησιμοποιούν το ποντίκι λύνοντας ένα πρόβλημα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας έχουν βρει τις ακόλουθες μορφές:

1. *Σύρσιμο περιπλάνησης (wandering dragging)*: κίνηση των βασικών σημείων στην οθόνη τυχαία, χωρίς κάποιο σχέδιο, προκειμένου να ανακαλυφθούν ενδιαφέρουσες μορφές ή κανονικότητες στα σχέδια.
2. *Δεσμευμένο σύρσιμο (bound dragging)*: κίνηση ενός ημι- συρόμενου σημείου (semi- dragable) (σημείο που συνδέεται με ένα αντικείμενο, που μπορεί να κινηθεί αλλά μόνο στο αντικείμενο που ανήκει).
3. *Καθοδηγημένο σύρσιμο (guided dragging)*: σύρσιμο των βασικών σημείων ενός σχεδίου προκειμένου να του δοθεί μια ιδιαίτερη μορφή.
4. *Σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου (dummy locus dragging)*: κίνηση ενός βασικού σημείου έτσι ώστε το σχέδιο να *διατηρεί* μια αποκαλυφθείσα ιδιότητα. Το κινούμενο σημείο ακολουθεί μια πορεία, οι χρήστες δεν την αντιλαμβάνονται, ο

γεωμετρικός τόπος δεν είναι ορατός και «δεν μιλά» στους σπουδαστές, οι οποίοι δεν συνειδητοποιούν πάντα ότι σέρνουν κατά μήκος ενός γεωμετρικού τόπου.

5. *Σύρσιμο γραμμών (line dragging)*: έλξη νέων σημείων κατά μήκος μιας γραμμής προκειμένου να διατηρηθεί η κανονικότητα του σχήματος.

6. *Συνδεμένο σύρσιμο (linked dragging)*: σύνδεση της κίνησης ενός σημείου με την κίνηση ενός άλλου γεωμετρικού αντικειμένου.

7. *Δοκιμή συρσίματος (dragging test)*: κίνηση των συρόμενων ή ημι- συρόμενων σημείων προκειμένου να φανεί εάν το σχέδιο διατηρεί ή όχι τις ιδιότητες με βάση των οποίων κατασκευάστηκε: αν περνά τη δοκιμή τότε κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις επιθυμητές γεωμετρικές ιδιότητες, διαφορετικά όχι.

Οι ίδιοι οι ερευνητές παρατηρούν μια ιεράρχηση στη χρήση αυτών των μορφών συρσίματος, δεδομένου ότι η διαδικασία λύσης αναπτύσσεται μέσω μιας σειράς διαφορετικών μορφών. Η ιεράρχηση, όμως, αυτή δεν είναι καθοδηγούμενη, δεδομένου ότι δεν θα την ακολουθήσουν όλοι οι λύτες. Επισημαίνουν ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν ιεραρχημένο σύρσιμο πάρα πολύ. Χρειάζεται να μάθουν πρώτα να κινούν τα σχήματα προτού αρχίσουν να χρησιμοποιούν το σύρσιμο με κάποια ιεράρχηση. Μια υπόθεση είναι ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να «εσωτερικοποιήσουν» τη λειτουργία συρσίματος προκειμένου να είναι σε θέση να την χρησιμοποιήσουν με έναν παραγωγικό τρόπο. Δηλαδή, το πρώτο σύρσιμο θα μπορούσε ακόμη και να θεωρηθεί ως στοιχείο που παρεμβαίνει και αποσπά την προσοχή, δεδομένου ότι δεν χρησιμοποιείται από κάποιον για να δει τα κινούμενα αντικείμενα σε χαρτί. Στη συνέχεια αρχίζει ο πειραματισμός με το σύρσιμο. Αλλά μέχρις ότου να επιτευχθεί μια συνειδητή χρήση, είναι απίθανο ότι

μπορούν οι μαθητές πραγματικά να χρησιμοποιήσουν το σύρσιμο με έναν παραγωγικό και επωφελή για αυτούς τρόπο.

Ο Γνωστικός Ρόλος του «Συρσίματος»

Το σύρσιμο μπορεί να είναι αξιωματικά ουδέτερο, αλλά βέβαια όχι και ευρετικά ουδέτερο (Leung & Lopez-Real, 2002). Ο τρόπος έλξης στη δυναμική γεωμετρία φαίνεται να είναι ένας ισχυρός πυρήνας με πλούσιες διδακτικές προεκτάσεις· υποδηλώνει νέες μορφές σκέψης και συλλογισμού που κατά κάποιο τρόπο είναι χαρακτηριστικές της δυναμικής γεωμετρίας όχι από μια αξιωματική αντίληψη αλλά από μια διδακτική. Ο τρόπος με τον οποίο οι μορφές του συρσίματος στη δυναμική γεωμετρία χρησιμοποιούνται (Marrades & Gutierrez, 2000),

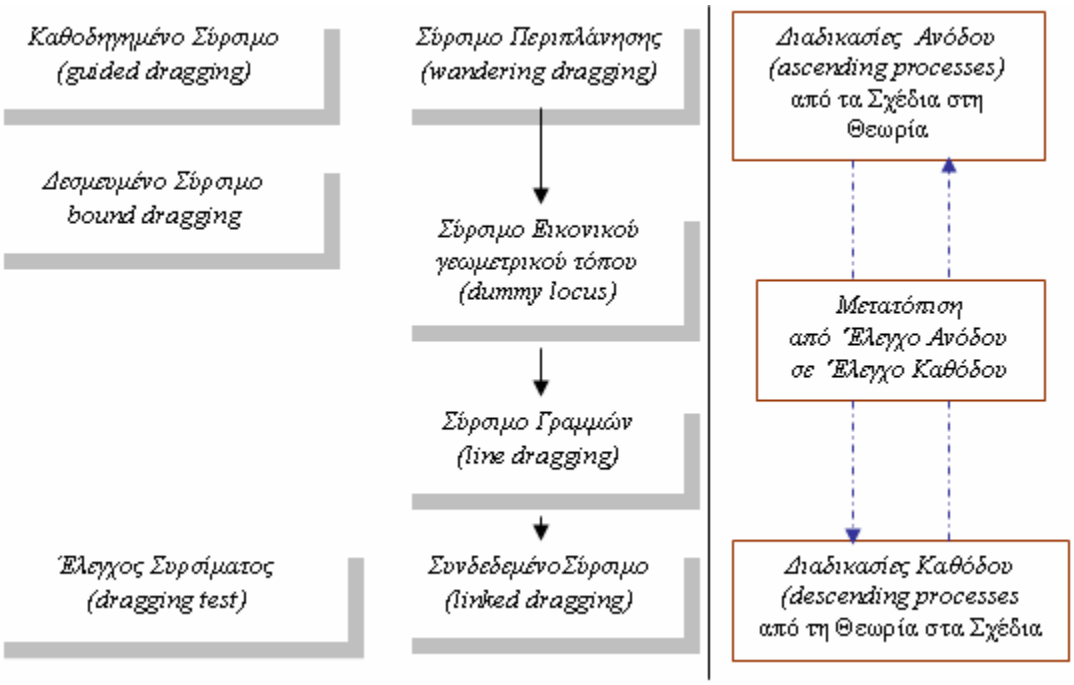
- καθορίζει τους τύπους των επεξηγήσεων και τις φάσεις λύσης των προβλημάτων απόδειξης, των οποίων η ποιότητα βελτιώνεται με το χρόνο και το κατάλληλο διδακτικό συμβόλαιο μεταξύ δασκάλου και μαθητών όσον αφορά τα είδη των αποδεκτών επεξηγήσεων, και
- μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν την ανάγκη για τυπικές αιτιολογήσεις και αποδείξεις στα μαθηματικά, εφόσον υπάρχει παράλληλη εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων των σχετικών με το θέμα που μελετάται.

Κατά τους Arzarello et al. (2002), το σύρσιμο αποκαλύπτεται κρίσιμο στη συζήτηση για τη σχέση μεταξύ των διαισθητικών (perceptual) και των θεωρητικών πτυχών οι οποίες χαρακτηρίζουν ολόκληρο το γεωμετρικό συλλογισμό. Πρακτικές, όπως το σύρσιμο, μπορεί να μεσολαβήσουν στη σχέση μεταξύ της διαίσθησης και της θεωρίας, της εμπειρικής και θεωρητικής προσέγγισης, δημιουργώντας οντότητες με νέα χαρακτηριστικά, οι οποίες προκύπτουν από την επίλυση προβλήματος και έχουν

καθιερωμένα (institutional) και προσωπικά (personal) χαρακτηριστικά γνωρίσματα (Mariotti, 2001). Η λειτουργία συρσίματος παρέχει έναν οπτικό έλεγχο της ακρίβειας της κατασκευής και της επικύρωσής της, που αντιστοιχεί στο θεωρητικό έλεγχο – απόδειξη και ορισμός - το συνεπή με την ευκλείδεια γεωμετρική θεωρία (Mariotti, 2000). Η διαδικασία συρσίματος ισχυροποιεί την υπόθεση (Hanna, 2000· Arzarello et al., 2002· de Villiers, 1998), αφού αυτή επιβεβαιώνεται από την εξερεύνηση των σχεδίων με την κίνησή τους και των τρόπων με τους οποίους αλλάζουν οι μορφές τους (ή δεν αλλάζουν). Αυτό βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν μια νοητική εικόνα και να ανακαλύψουν αμετάβλητες ή νέες ιδιότητες και προτάσεις (Hanna, 2000). Το σύρσιμο προσφέρει μια ανατροφοδότηση στη φάση της ανακάλυψης, δεδομένου ότι επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ των αντιληπτικών και θεωρητικών πτυχών της γεωμετρίας (Laborde, 2001). Με αυτό τον τρόπο παρέχει τη δυνατότητα και ενθαρρύνει τη διερεύνηση (ψάξιμο για ιδιότητες, ειδικές περιπτώσεις, αντιπαραδείγματα κτλ., που θα μπορούσαν να συνδεθούν για να διαμορφώσουν μια υπόθεση ή μια αιτιολόγηση)· ενισχύει την πεποίθηση των μαθητών για την ορθότητα των εικασιών τους· υποστηρίζει το ρόλο των αποδείξεων ως «πραγματικές επεξηγήσεις» των υποθέσεων ή των ιδιοτήτων (Arzarello et al., 2002).

Η χρήση των διαφορετικών μορφών συρσίματος πιθανόν να οδηγεί σε διαφορετικές προσεγγίσεις στη λύση ενός προβλήματος και σε διαφορετικά αποτελέσματα από το στόχο της λύσης του προβλήματος (Arzarello et al., 2002), και οι οποίες (μορφές συρσίματος) είναι κρίσιμες κατά τη μετατόπιση από τη διατύπωση μιας υπόθεσης στην παρουσίαση της απόδειξής της (Olivero, 1999· Marrades & Gutierrez, 2000).

Οι Arzarello et al (2002) υποστηρίζουν ότι οι μορφές συρσίματος σε ένα δυναμικό περιβάλλον συνδέονται με τις φάσεις ανόδου και καθόδου και με τις γνωστικές διαδικασίες των μαθητών σε δραστηριότητες που έχουν ως στόχους την διερεύνηση (*σύρσιμο περιπλάνησης, δεσμευμένο και καθοδηγημένο)*, την ανακάλυψη και τη διατύπωση υπόθεσης (*σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου)*, τον έλεγχο της υπόθεσης (*συνδεμένο σύρσιμο),* την επικύρωση της υπόθεσης (*δοκιμή συρσίματος)* (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Σχηματική σύνδεση των Μορφών Συρσίματος με τις Φάσεις Μετάβασης από τη Διαίσθηση στη Θεωρία κατά τους Arzarello et al. (2002)

Το σύρσιμο περιπλάνησης, το δεσμευμένο, και το καθοδηγούμενο είναι μέρος της φάσης ανόδου. Το σύρσιμο εικονικού γεωμετρικού τόπου, μπορεί να θεωρηθεί ως σύρσιμο

περιπλάνησης που έχει βρει την πορεία του, και μπορεί να ενεργήσει και ως παραγωγός νέων ισχυρών ευρετικών και ως λογικός αναδιοργανωτής προηγούμενων ερευνών (Rea, 1987, αναφορά στο Arzarello et al., 2002). Αυτή η μορφή συρσίματος αποκαλύπτει την αρχή της μετατόπισης από τη διαδικασία ανόδου στη διαδικασία καθόδου. Το σύρσιμο γραμμών, ακολουθεί το σύρσιμο του πλαστού γεωμετρικού τόπου και είναι μέρος της διαδικασίας μετάβασης προς τη φάση καθόδου

Οι Leung και Lopez-Real (2002) μετά από πειραματικές μελέτες διατυπώνουν την άποψη ότι, σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας οι δραστηριότητες συρσίματος λειτουργούν ως καταλύτες που προωθούν οπτικά το μετασχηματιστικό συλλογισμό, ο οποίος παρακινούμενος από κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες διατύπωσης υποθέσεων επιτρέπει τη διαδικασία παραγωγής και απόδειξης ενός θεωρήματος να συγκλίνει προς τις ενσωματωμένες σχηματοποιημένες έννοιες (figural concept), οι οποίες θα μπορούσαν να οδηγήσουν στις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις.

Η Μέτρηση

Η χρήση της μέτρησης για την αξιολόγηση της ακρίβειας των γεωμετρικών προτάσεων (υποθέσεις), προτού γίνουν οι αποδείξεις, θεωρείται ως μια κοινή πρακτική από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (de Villiers, 2002). Ένα σύστημα μέτρησης, κατά την άποψη του Vygotsky, που παράγεται και που χρησιμοποιείται για να αξιολογήσει μια ποσότητα μπορεί να εσωτερικοποιηθεί και να λειτουργήσει στην επίλυση προβλήματος (Mariotti, 2000).

Οι Λειτουργίες της Μέτρησης

Από τις παρατηρήσεις τάξεων προκύπτει ότι οι τρόποι που οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται μπορούν να ταξινομηθούν σε δυο τύπους (Olivero & Robutti, 2001, 2002):

♦ Χρήση των μετρήσεων ως *ευρετικό* εργαλείο μέσα σε μια ανοδική διαδικασία (από το σχέδιο στη θεωρία) προκειμένου να ερευνηθεί μια κατάσταση. Τα σχέδια θεωρούνται ως πηγή διερεύνησης και ανακάλυψης και οι μετρήσεις παρέχουν κυρίως πληροφορίες στο αντιληπτικό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μετρήσεις:

i. Όταν δεν έχουν συγκεκριμένες ιδέες και ερευνούν την κατάσταση τυχαία (δράση παρόμοια με το σύρσιμο περιπλάνησης). Οι μαθητές παίρνουν τις μετρήσεις μερικών στοιχείων του σχήματος τυχαία και τις 'διαβάζουν' προκειμένου να αποκτήσουν ιδέες για τις ιδιότητες, τις σταθερές και τις σχέσεις σε ένα σχήμα.

ii. Όταν κάνουν μια καθοδηγημένη διερεύνηση του σχήματος (δράση παρόμοια με το καθοδηγημένο σύρσιμο). Οι μαθητές παίρνουν συγκεκριμένες μετρήσεις με στόχο τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων μιας ιδιαίτερης σχηματικής μορφής, μέσω της διερεύνησης. Οι μετρήσεις αυτές μπορεί να μεταφερθούν για να χρησιμοποιηθούν σε ένα στατικό σχήμα σε χαρτί (αν και δεν είναι πολύ συνηθισμένο). Διαφορετικά, οι μετρήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν μαζί με το σύρσιμο προκειμένου να παρατηρηθεί πως οι ιδιότητες ενός σχήματος αλλάζουν, ή για να προσδιοριστούν οι σχέσεις για μια συγκεκριμένη μορφή του σχήματος, ή για να ανακαλυφθούν σταθερές (είναι το πιο συνηθισμένο).

iii. Ως μέσο ελέγχου της ισχύος μιας αντίληψης. Οι μαθητές 'βλέπουν' μερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του σχήματος, αλλά δεν είναι σίγουροι, και έτσι χρησιμοποιούν τις μετρήσεις προκειμένου να επικυρώσουν αυτή τους τη διαίσθηση, παραμένοντας όμως στο ιδιαίτερο σχέδιο της οθόνης.

♦ Χρήση των μετρήσεων ως εργαλείο *ελέγχου* μέσα σε μια καθοδική διαδικασία ανόδου (από τη θεωρία στα σχέδια) προκειμένου να επικυρωθούν ή να αντικρουστούν υποθέσεις, ή να βρεθούν οι λογικές σχέσεις που μπορεί να συμβάλλουν στην κατασκευή μιας απόδειξης. Τα σχέδια εκλαμβάνονται ως πηγή επικύρωσης και υπό αυτή τη μορφή ενσωματώνουν τις ήδη ανακαλυμμένες γεωμετρικές ιδιότητες που είναι κομμάτια μιας θεωρίας. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μετρήσεις προκειμένου:

i. Να ελέγξουν μια εικασία τους· για παράδειγμα, αν αντιλαμβάνονται μια λογική συνέπεια, αλλά δεν μπορούν να κρίνουν εάν είναι πραγματικά μια ιδιότητα του σχήματος, τότε χρησιμοποιούν τις μετρήσεις για να την ελέγξουν.

ii. Να απορρίψουν ή να επικυρώσουν πειραματικά μια διατυπωμένη από τους ίδιους πρόταση.

iii. Να γίνει μια απόδειξη που έχουν κάνει περισσότερο κατανοητή και να πετύχουν μια καλύτερη εξήγηση.

Ο Γνωστικός Ρόλος της Μέτρησης

Εμπειρικές μελέτες διατυπώνουν την άποψη ότι οι μετρήσεις αποτελούν μια γέφυρα μεταξύ του αντιληπτικού και του θεωρητικού επιπέδου και μπορούν να παρέχουν μια υποστήριξη σε μια παραγωγική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο επιπέδων (Olivero & Robutti, 2001, 2002).

Μια δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος σε δυναμικό περιβάλλον περιλαμβάνει τη χρήση των μετρήσεων στις διάφορες φάσεις της διαδικασίας και με διαφορετικούς σκοπούς. Η ανάγκη για μετρήσεις προέρχεται από το αντιληπτικό επίπεδο, στις περιπτώσεις που οι μαθητές έχουν τη διαίσθηση ότι, παραδείγματος χάριν, μια γωνία ενός τριγώνου είναι διπλάσια με μια άλλη γωνία του. Όταν όμως «διαβάζουν» τις μετρήσεις στην οθόνη δεν λειτουργούν πλέον μόνο σε ένα καθαρώς αντιληπτικό επίπεδο αλλά σε ένα υψηλότερο, επειδή ψάχνουν μια απάντηση στο εάν *η διαίσθησή τους είναι αληθής ή λαθεμένη*.

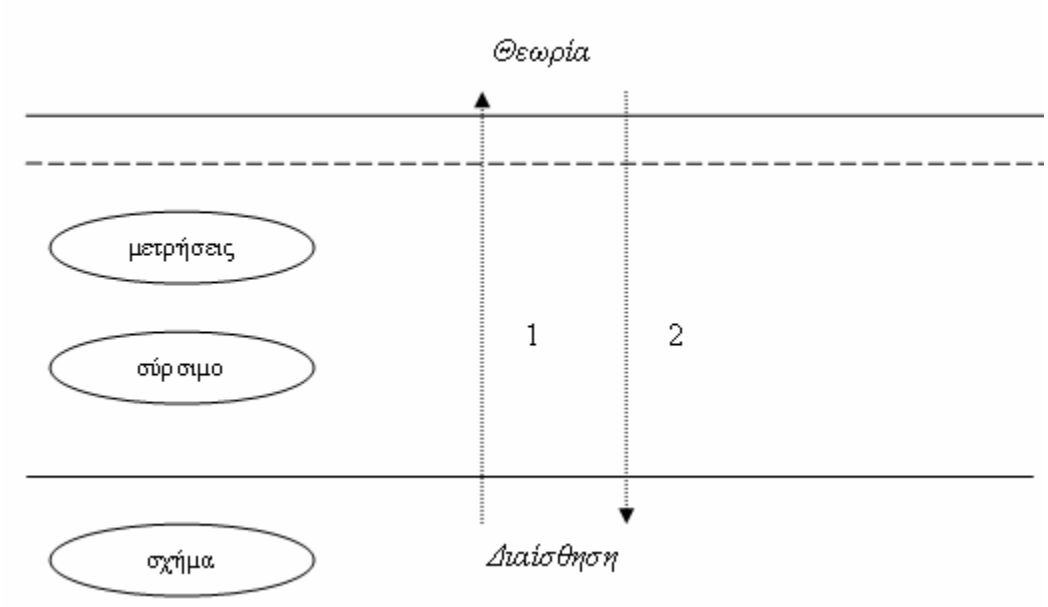
Οι μετρήσεις, επειδή ενθαρρύνουν και την αντίληψη αλλά συγχρόνως δείχνουν και το δρόμο προς τη θεωρία, λειτουργούν ως ένα εργαλείο το οποίο μπορεί να παρέχει διαφορετικά είδη απαντήσεων (Olivero & Robutti, 2001) μέσω:

- Της ποιοτικής απάντησης *ναι ή όχι* (γνωρίζοντας πια αν δυο ποσότητες είναι ίσες ή άνισες).
- Των ποσοτικών πληροφοριών (ένας αριθμός, ο οποίος πληροφορεί για το μέτρο μιας ποσότητας όσον αφορά μια μονάδα μέτρησης).
- Μιας απάντησης συσχετισμού (π.χ. αυτή η γωνία είναι ίση με το διπλάσιο της άλλης).

Μια δραστηριότητα μέτρησης αποκαλύπτει δυο τύπους γνωστικών μετατοπίσεων, ανάλογες με αυτές που αποκαλύπτονται επίσης με το σύρσιμο: μια μετάβαση από το αντιληπτικό στο θεωρητικό επίπεδο (διαδικασία ανόδου), και μια μετάβαση από το θεωρητικό στο αντιληπτικό επίπεδο (διαδικασία καθόδου) (Σχήμα 3.2).

Εάν οι μαθητές εμπιστεύονται τις μετρήσεις και τις θεωρούν απολύτως ακριβείς, μένουν στο αντιληπτικό επίπεδο. Εάν όμως χρησιμοποιούν τις πληροφορίες που

παρέχονται από την ανατροφοδότηση των μετρήσεων με το σύρσιμο για να διατυπώσουν μια υπόθεση με τη μορφή «εάν.. τότε» και για να θεωρήσουν το σχήμα ως γενικό παράδειγμα - generic example (Balacheff, 1999, αναφορά στο Olivero & Robutti, 2001), τότε περνούν στο θεωρητικό επίπεδο.



Σχήμα 3.2: Σχηματική παράσταση του Ρόλου των Μετρήσεων στη Μετάβαση από τη Διαίσθηση στη Θεωρία των Olivero & Robutti (2001)

Οπτικοποίηση

Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ως εργαλείο επίδειξης (demonstration tool) στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να «δουν τι μπορεί να υπονοείται σε μια γεωμετρική κατάσταση. Ο Morrow (1997, αναφορά στο Hanna, 2000) υποστηρίζει ότι η οπτικοποίηση είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων και το

λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει στη διαδικασία οπτικοποίησης σε όλες τις τάξεις των μαθηματικών και όχι μόνο στη μελέτη της γεωμετρίας. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του δυναμικού λογισμικού για να κατασκευάσουν, να διορθώσουν την κατασκευή τους, να την επανεξετάσουν και να βλέπουν συνεχώς ποικίλα γεωμετρικά σχεδιαγράμματα. Η παρεχόμενη δυνατότητα στους μαθητές να μπορούν να μετασχηματίζουν τις δικές τους οπτικές αναπαραστάσεις με το σύρσιμό τους, προσθέτει μια νέα δυναμική διάσταση της οποίας οι εφαρμογές μπορούν να κατανοηθούν. Έννοιες, όπως της μεταβλητής, της συνάρτησης και της σταθερότητας έχουν νόημα μέσω της οπτικοποίησης.

Οι Cuoco & Goldenbrerg (1997) υποστηρίζουν ότι τα δυναμικά περιβάλλοντα, επιτρέποντας στους μαθητές να διερευνούν άμεσα τις σχηματικές παραλλαγές, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα νοερών κατασκευών, που είναι χρήσιμη ικανότητα για την αναλυτική σκέψη.

Τα συμπεράσματα των Healy και Hoyles (1998, 2001) έδειξαν ότι ο οπτικός συλλογισμός μέσω της εύρωστης και εύκαμπτης κατασκευής δεν είναι σίγουρο ότι μπορεί να παρακινήσει τους μαθητές να επεξηγήσουν τις εμπειρικές υποθέσεις τους χρησιμοποιώντας την τυπική απόδειξη. Η οπτικοποίηση βοηθά τους μαθητές στον προσδιορισμό των γεωμετρικών ιδιοτήτων, αλλά όχι πάντα και στην παρουσίαση αποδείξεων· μόλις αρχίζουν το γράψιμο της απόδειξης, οι αλληλεπιδράσεις με τον υπολογιστή αναστέλλονται (Healy, 2000).

Οπτικοποίηση και Απόδειξη

Τα τελευταία χρόνια, λόγω του ότι οι υπολογιστές έχουν αυξήσει τις δυνατότητες για απεικόνιση, η έρευνα έχει στραφεί στη διερεύνηση της πιθανής συμβολής των

οπτικών αναπαραστάσεων στις μαθηματικές αποδείξεις (μέχρι ποιο σημείο οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο ως στοιχεία για μια μαθηματική πρόταση, αλλά και στην αιτιολόγησή της), και το ρόλο της οπτικοποίησης στη διαδικασία εκμάθησης και παραγωγής αποδείξεων (Hanna, 2000). Ερευνητές που προτείνουν τη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά και στη διδασκαλία των μαθηματικών επισημαίνουν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις, που μπορεί να παραπλανήσουν και να οδηγήσουν σε λάθη, αφθονούν (Brown, 1999, αναφορά από Hanna, 2000).

Όλοι οι δάσκαλοι των μαθηματικών αναγνωρίζουν τα διαγράμματα και τις οπτικές αναπαραστάσεις ότι είναι απαραίτητα συστατικά μιας επιτυχημένης διδασκαλίας ή ενός μαθηματικού επιχειρήματος, ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διευκολύνουν τη φάση της απόδειξης, και ότι είναι ικανά να μεταβιβάσουν τη διορατικότητα και τη γνώση (Hanna, 2000). Όμως, τουλάχιστον μέχρι σήμερα, δεν θεωρούνται υποκατάστατα της παραδοσιακής απόδειξης.

Είναι ενδιαφέρον το πώς η Hanna (2000) καταγράφει τις απόψεις των ερευνητών για το ρόλο της οπτικοποίησης και των οπτικών αποδείξεων στο χώρο της έρευνας για την απόδειξη, το συλλογισμό και για τα ίδια τα μαθηματικά.

♦ Ο Francis (1996) επισημαίνει ότι η επανάσταση των τεχνολογιών θα κινήσει τους μαθηματικούς μακριά από το φορμαλισμό της δεκαετίας των Bourbaki που εξουσιάζει ακόμα τα ακαδημαϊκά μαθηματικά. Προσθέτει ότι είναι παράλογο να αναμένεται ο πειραματισμός με τους υπολογιστές να αντικαταστήσει την αυστηρότητα των μαθηματικών. *Ο οπτικός συλλογισμός δεν μπορεί να αναγνωρίζεται ως ίσης αξίας με τον προτασιακό*.

♦ Ο Palais (1999) παρατηρεί ότι η χρήση των υπολογιστών στη μοντελοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων επιτρέπει όχι μόνο το μετασχηματισμό των δεδομένων, την αλλαγή των εικόνων, αλλά και την εξέταση χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τους που ήταν απρόσιτα χωρίς τους υπολογιστές. Η οπτικοποίηση μπορεί άμεσα να ανοίξει το δρόμο για αυστηρές αποδείξεις, αλλά *οι οπτικές αναπαραστάσεις δεν θα μπορούσαν να γίνουν αποδεκτές ως νόμιμες αυταπόδεικτες αποδείξεις*.

♦ Οι Borwein και Jorgenson (1997) υποστηρίζουν ότι η οπτικοποίηση μπορεί να συμβάλει άμεσα στο σώμα της μαθηματικής γνώσης και μια εικόνα μπορεί να παίξει το ρόλο μιας οπτικής απόδειξης. Αναγνωρίζουν όμως ότι *μια οπτική αναπαράσταση συναντά περιορισμούς εάν πρόκειται να γίνει αποδεκτή ως απόδειξη*. Επισημαίνουν διαφορές μεταξύ οπτικών και λογικών μεθόδων παρουσίασης αποδείξεων. Ενώ μια μαθηματική πρόταση παραδοσιακά παρουσιάζεται με τον προτασιακό τρόπο (ως ακολουθία έγκυρων συμπερασμάτων), μια οπτική αναπαράσταση ως οπτική απόδειξη δεν θα ήταν κάτι περισσότερο από μια στατική εικόνα. Μια τέτοια εικόνα μπορεί να παρέχει τις ίδιες πληροφορίες με την προτασιακή διαδικασία απόδειξης, αλλά δεν θα φανερώνει σαφώς την πορεία και αφήνει τον θεατή να βγάλει το συμπέρασμα τι είναι σημαντικό και τι δεν είναι και με ποια σειρά οι συνδέσεις πρέπει να αξιολογηθούν. Οι ερευνητές αυτοί θεωρούν ότι οι επιτυχείς οπτικές αποδείξεις είναι λίγες. Οι Borwein και Jorgenson προτείνουν τρεις απαραίτητους, αλλά όχι ικανούς, όρους για μια αποδεκτή οπτική απόδειξη:

i. *Αξιοπιστία (reliability)*, όταν τα μέσα που χρησιμοποιούνται σε μια απόδειξη είναι αξιόπιστα και το συμπέρασμα είναι αμετάβλητο σε κάθε αυστηρό έλεγχο.

ii. *Συνέπεια (consistency),* όταν τα μέσα και το συμπέρασμα είναι συνεπή με άλλες γνωστές ήδη γνώσεις, πεποιθήσεις και αποδείξεις.

iii. *Επαναληπτικότητα (repeatability)*, όταν η απόδειξη μπορεί να επιβεβαιωθεί από άλλους ή να επιδειχθεί σε άλλους και να έχει το ίδιο αποτέλεσμα όσες φορές και αν επαναληφθεί.

Η Hanna (2000) θεωρεί ότι τα τρία κριτήρια θα μπορούσαν να ισχύουν σε κάθε τύπο απόδειξης και όχι μόνο στις οπτικές. Παρατηρεί ότι το πρώτο κριτήριο δεν παρέχει συγκεκριμένες ικανοποιητικές οδηγίες για το χωρισμό των αποδεκτών από τις μη αποδεκτές οπτικές αποδείξεις. Η Laborde (2000) επισημαίνει ότι η κατανόηση δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσω της οπτικής ένδειξης, δεδομένου ότι η κατανόηση απαιτεί αναδόμηση του αντιληπτικού συστήματος και των εννοιών, και μόνο η απόδειξη η βασισμένη στα θεωρητικά επιχειρήματα αποτελεί μέσο κατανόησης.

Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν την αλλαγή της αντίληψης ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα ευρετικό εργαλείο. Οι Barwise και Etchemendy (1991,1996) αναζητούν τρόπους για να τυποποιηθεί ο *διαγραμματικός συλλογισμός (diagrammatic reasoning)* και να γίνει όχι λιγότερο ακριβής από τον παραδοσιακό παραγωγικό συλλογισμό. Αναγνωρίζουν την ιστορική έννοια της απόδειξης ως παραγωγή. Επισημαίνουν όμως ότι η εστίαση στις λογικές δομές και τον προτασιακό συλλογισμό έχει παραμελήσει πολλές άλλες μορφές της μαθηματικής σκέψης, όπως το διαγραμματικό τρόπος σκέψης, τους χάρτες, τα δίκτυα και τις εικόνες, με το σκεπτικό ότι δεν είναι κατάλληλα στο καθιερωμένο συμπερασματικό πρότυπο (inferential model).Υποστηρίζουν ότι, όποτε υπάρχει δομή, υπάρχουν και πληροφορίες, και ότι *μια οπτική αναπαράσταση μπορεί να φέρει έναν πλούτο πληροφοριών πολύ*

αποτελεσματικών. Επειδή οι πληροφορίες μπορούν να παρουσιάζονται και με γλωσσικούς αλλά και μη γλωσσικούς τρόπους, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η ακριβής εμμονή στο συμπέρασμα μέσω της προτασιακής λογικής είναι πάρα πολύ περιοριστική, δεδομένου ότι η προτασιακή λογική ισχύει απλώς για γλωσσικές αναπαραστάσεις. Αν και η άποψη αυτών των ερευνητών είναι ότι η απόδειξη δεν εξαρτάται μόνο από την προτασιακή αναπαράσταση, δεν θεωρούν ότι ο οπτικός και προτασιακός συλλογισμός αποκλείουν ο ένας τον άλλο.

Οι Barwise και Etchemendy (1991) οικοδομώντας πάνω στην έννοια της *έτερογενούς απόδειξης (heterogeneous proof)* έχουν αναπτύξει ένα αλληλεπιδρών πρόγραμμα, το Hyperproof, το οποίο διευκολύνει το συλλογισμό με οπτικά αντικείμενα. Έχει ως σκοπό να κατευθύνει την προσοχή των μαθητών στο περιεχόμενο μιας απόδειξης, και όχι στη συντακτική δομή μιας πρότασης. Διδάσκει το λογικό συλλογισμό και την κατασκευή απόδειξης μέσω του χειρισμού των ενσωματωμένων και οπτικών και προτασιακών συλλογισμών. Μια απόδειξη με αυτό το πρόγραμμα, δεν είναι ένα απλό διάγραμμα, αλλά μια παραγωγή στη βάση σαφώς διατυπωμένων κανόνων που ισχύουν και για τις προτασιακές και τις οπτικές αποδείξεις.

Δυναμική Πειραματική Διερεύνηση

Ο ρόλος των ευρετικών τεχνικών, μέθοδοι και κανόνες ανακάλυψης και εφεύρεσης, και του «*ευρετικού συλλογισμού*» στη διαδικασία παρουσίασης μιας απόδειξης έχει αποτελέσει αντικείμενο συζήτησης μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών της μαθηματικής απόδειξης (Hanna, 2000). Ο «*ευρετικός συλλογισμός*», είναι ένα είδος συλλογισμού που δε θεωρείται τελικός και αυστηρός, αλλά μόνο προσωρινός και

εύλογος· σκοπός του είναι η ανακάλυψη της λύσης ενός προβλήματος· χρησιμοποιεί την αφαίρεση με επιπρόσθετα βοηθητικά επαγωγικά και στατιστικά στοιχεία και βασίζεται συνήθως στην επαγωγή και την αναλογία (Polya,1957, σελ 132, 133).

Η δυναμική γεωμετρία υποστηρίζει την ευρετική φάση επίλυσης προβλήματος (Holzl, 2001). Η πιο καλοδεχούμενη δυνατότητα της δυναμικής γεωμετρίας είναι το ότι εισάγει τους μαθητές από νωρίς σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ενθαρρύνει τον επαγωγικό συλλογισμό (συλλογισμός ευλογοφανής, πειραματικός και ευρετικός) και είναι ισχυρό εργαλείο, όχι μόνο για τις αληθείς προτάσεις, αλλά και εξαιρετικά πολύτιμο εργαλείο στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων για αναληθείς υποθέσεις.

Η διερεύνηση (exploration) είναι μια σημαντική δραστηριότητα στη μαθηματική πρακτική, πολύ πριν εφευρεθούν οι υπολογιστές, και δεν θεωρήθηκε ασυμβίβαστη με την άποψη των μαθηματικών ως αναλυτική επιστήμη ή με τον κεντρικό ρόλο της απόδειξης στα μαθηματικά. Η Hanna (2000) τονίζει ότι η διερεύνηση, με ή χωρίς χρήση του υπολογιστή, χρησιμοποιεί τον παραγωγικό συλλογισμό, το θεμέλιο της απόδειξης.

Ο Polya (1957, αναφορά στη Hanna, 2000) έχει συζητήσει το ρόλο του παραγωγικού συλλογισμού στην διερεύνηση και την επίλυση του προβλήματος. Επισημαίνει ότι η επίλυση προβλήματος συνίσταται στην εύρεση σύνδεσης μεταξύ δεδομένων στοιχείων και του αγνώστου. Αυτό γίνεται μέσω του ευρετικού συλλογισμού: «*Χρειαζόμαστε ευρετικό συλλογισμό όταν θέλουμε να κάνουμε μια αυστηρή απόδειξη, όπως χρειαζόμαστε σκαλωσιά όταν χτίζουμε μια οικοδομή»* (Polya,1957, σελ 133).

Η διαθεσιμότητα στη σχολική τάξη του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας έχει δώσει μια νέα ώθηση στη μαθηματική διερεύνηση (Hanna, 2000) και έχει τη δυνατότητα

να ενθαρρύνει και τη διερεύνηση και την απόδειξη. Οι δυναμικοί γεωμετρικοί μικρόκοσμοι επιτρέπουν τους μαθητές να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με σχετικά μεγάλη ακρίβεια· να διατυπώσουν τις υποθέσεις τους και να τις ελέγξουν εύκολα για ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων με το να διερευνήσουν τις δεδομένες ιδιότητες των κατασκευών τους ή ακόμα και να ανακαλύψουν νέες.

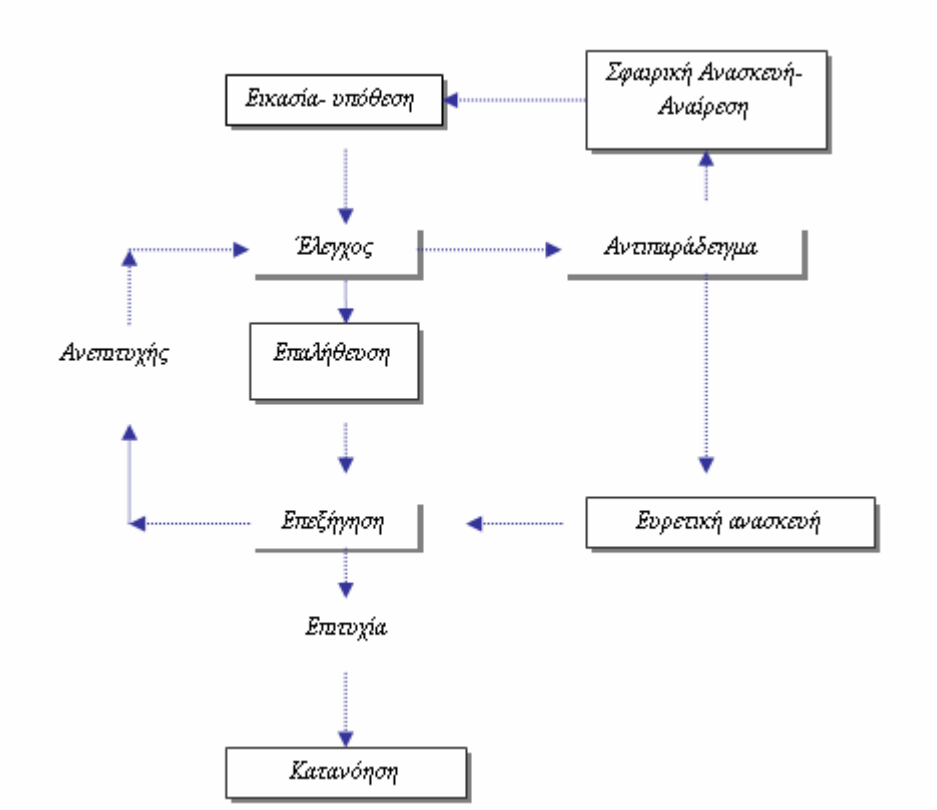
Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας σχεδιάστηκαν με την προϋπόθεση να παρέχουν ένα περιβάλλον για την πειραματική – εμπειρική διερεύνηση της γεωμετρίας του επιπέδου. Σε ένα δυναμικό λογισμικό τα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να κατασκευαστούν με ακρίβεια, γρήγορα και εύκολα, μέσω ενεργειών και σε μια γλώσσα πολύ οικεία. Μόλις σχεδιαστεί ένα σχήμα η δυνατότητα του δυναμικού μετασχηματισμού του μέσω της «έλξης», δίνει την ευκαιρία στο μαθητή να επαναλάβει ένα μεγάλο αριθμό πειραμάτων και να παρατηρήσει σταθερές ή μεταβλητές ιδιότητες του σχήματος. Επομένως, η πιο ευπρόσδεκτη δυνατότητα της δυναμικής γεωμετρίας είναι να ενθαρρύνει ή να επανεισάγει τον πειραματισμό και ένα είδος προσανατολισμένης διερεύνησης στη γεωμετρία στο μαθητή.

Ο όρος δυναμική πειραματική διερεύνηση αναφέρεται σε όλες τις μη παραγωγικές μεθόδους, συμπεριλαμβανομένων του *διαισθητικού*, *επαγωγικού ή αναλογικού συλλογισμού*, οι οποίες υποστηρίζονται από ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Με άλλα λόγια, η δυναμική πειραματική διερεύνηση, που υποστηρίζεται από ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, υιοθετείται όταν: α) οι μαθηματικές υποθέσεις ή προτάσεις αξιολογούνται αριθμητικά ή οπτικά, μέσω της μελέτης ειδικών περιπτώσεων, μέσω ακριβών γεωμετρικών κατασκευών, μέσω μετρήσεων κτλ., και όταν

β) οι υποθέσεις, οι γενικεύσεις ή τα συμπεράσματα συνάγονται διαισθητικά, επαγωγικά ή εμπειρικά.

Οι Λειτουργίες της Δυναμικής Πειραματικής Διερεύνησης

Οι σημαντικότερες λειτουργίες της πειραματικής διερεύνησης στη δυναμική γεωμετρία, μπορούν να διακριθούν ως ακολούθως (de Villiers, 2003· Hadas et al., 2000) (Σχήμα 3.3): *διατύπωση υπόθεσης, επαλήθευση, σφαιρική ανασκευή, ευρετική ανασκευή, κατανόηση.*



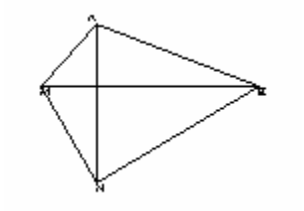
Σχήμα 3.3: Λειτουργίες της Δυναμικής Πειραματικής Διερεύνησης (De Villiers, 1999· Hadas et. al., 2000)

♦ *Διατύπωση υπόθεσης*, ψάξιμο ενός επαγωγικού σχεδίου: Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη με αρκετά παραδείγματα όπου οι εικασίες έγιναν με βάση τη διαίσθηση, την αριθμητική διερεύνηση, ή την κατασκευή και τη μέτρηση. Οι μαθηματικοί μερικές φορές, από την έλλειψη αυστηρών αποδείξεων, μπορούν να δεχτούν ορισμένες επαγωγικά επιβεβαιωμένες εικασίες ως «θεωρήματα», ειδικά αν σχετίζονται με έναν τομέα της εμπειρίας τους. Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας παρέχει μια μοναδική ευκαιρία για τη διατύπωση ενός μεγάλου αριθμού υποθέσεων και επιτρέπει την άμεση εξέταση μιας ιδιαίτερης κατάστασης.

♦ *Επαλήθευση,* απόκτηση της βεβαιότητας για την αλήθεια ή την ισχύ μιας πρότασης ή μιας υπόθεσης: Η βεβαιότητα, στη μαθηματική έρευνα, εξαρτάται συνήθως από έναν συνδυασμό πειραματισμού (διαίσθησης και εμπειρικής επαλήθευσης) και της ύπαρξης μιας λογικής, όχι απαραίτητα άκαμπτης, απόδειξης. Στην πράξη, ένα υψηλό επίπεδο βεβαιότητας μπορεί μερικές φορές να επιτευχθεί ακόμα και ελλείψει μιας απόδειξης. Ακόμα και αν λογικά απαιτούμε κάποια μορφή παραγωγικής απόδειξης, υποσυνείδητα φαίνεται ότι χρειαζόμαστε επίσης κάποια πειραματική εξερεύνηση ή διαισθητική κατανόηση (de Villiers, 2003).

♦ *Σφαιρική ανασκευή*, ανασκευή μιας αναληθούς πρότασης με την παραγωγή ενός αντιπαραδείγματος: Στην καθημερινή ζωή οι άνθρωποι συχνά θεωρούν ότι ορισμένα πράγματα είναι αληθινά, αγνοώντας απλά τις περιπτώσεις όπου δεν είναι αληθινά. Αντίθετα με την καθημερινή ζωή, στα μαθηματικά θεωρήματα μόνο ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό να ανασκευάσει μια μαθηματική πρόταση. Με τον όρο *σφαιρική ανασκευή* ο de Villies (2003) αναφέρεται στην παραγωγή ενός λογικού αντιπαραδείγματος που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις μιας πρότασης, αλλά αντικρούει το συμπέρασμα, και κατά

συνέπεια την ισχύ της πρότασης. Στα μαθηματικά τα σφαιρικά αντιπαραδείγματα παράγονται συνήθως με την εμπειρική δοκιμή και όχι με τον παραγωγικό συλλογισμό Αν κάποιος θέλει να εξετάσει την αλήθεια ή μη της πρότασης *«ένα τετράπλευρο με κάθετες τις διαγώνιούς του είναι ρόμβος»,* είναι αρκετό να ελέγξει πειραματικά αν οι παρεχόμενες πληροφορίες είναι αρκετές για την κατασκευή ενός ρόμβου. Εύκολα χωρίς να χρησιμοποιήσει την αφαίρεση μπορεί να σχεδιάσει ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες που δεν είναι ρόμβος (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4

♦ *Ευρετική ανασκευή* (heuristic *refutation),* διατύπωση μιας νέας υπόθεσης ή ενός ευρετικού αντιπαραδείγματος: Η ευρετική ανασκευή υιοθετείται στην περίπτωση όπου η αρχική υπόθεση ούτε αντικρούεται, ούτε επιβεβαιώνεται και ταιριάζει σε καταστάσεις αβεβαιότητας (Hadas et al., 2000). Τα ευρετικά αντιπαραδείγματα δεν είναι συνήθως αυστηρά λογικά αντιπαραδείγματα, δεδομένου ότι δεν είναι ασυμβίβαστα με την αρχική εικασία, αλλά αντιπαραδείγματα που κεντρίζουν την αύξηση της γνώσης Η πρόσθετη δυναμική εμπειρική δοκιμή μιας ήδη αποδεδειγμένης πρότασης μπορεί να βοηθήσει μερικές φορές στην εύρεση κενών σε μια απόδειξη ή στη διατύπωση μιας υπόθεσης.

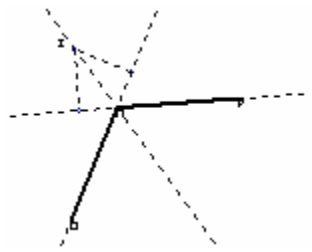
♦ *Κατανόηση* (understanding), παροχή πρόσθετων πηγών εξήγησης και κατανόησης: Η λειτουργία της κατανόησης αφορά την κατανόηση της σημασίας μιας

πρότασης, μιας έννοιας, ενός ορισμού (de Villies, 2003). Η εμπειρική έρευνα και η αξιολόγηση των ήδη αποδεδειγμένων συμπερασμάτων, μπορούν μερικές φορές να οδηγήσουν σε νέες προοπτικές και σε μια βαθύτερη κατανόηση ή επέκταση των προηγούμενων εννοιών και ορισμών με την παροχή πρόσθετων πηγών εξήγησης ή με την ανακάλυψη μιας απόδειξης. Μια κοινή πρακτική μεταξύ των μαθηματικών είναι η έρευνα για ειδικές ή οριακές περιπτώσεις μιας μαθηματικής κατάστασης, προκειμένου να καταλάβουν όχι μόνο τα αποτελέσματα, αλλά και τις αποδείξεις. Μια τέτοια έρευνα μπορεί να βοηθήσει να καθοριστούν πιο αυστηρά οι διαισθητικές έννοιες, οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να οδηγήσουν σε νέες έρευνες σε έως τώρα ανεξερεύνητες περιοχές.

Παραδείγματος χάριν, η πρόταση «*κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντιστρόφως κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από της πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της*» (Αργυρόπουλος και λοιποί, 2004, σελ. 16) δεν είναι τόσο διαισθητικά προφανής όσο φαίνεται, κατά τη διάρκεια μιας πειραματικής διερεύνησης. Πράγματι, τα ίχνη των αποστάσεων ενός σημείου της διχοτόμου στις περιπτώσεις της πλήρους γωνίας, και γενικά των μη κυρτών γωνιών δεν βρίσκονται *πάνω* στις *πλευρές* της γωνίας (Σχήμα 3.5).

Σχήμα 3.5

Αυτή η διαφορετική με τη διαίσθηση παρατήρηση πιθανώς δεν είναι δυνατή χωρίς τη δυναμική πειραματική διερεύνηση. Αυτό βοηθά να επαναπροσεγγιστεί η ιδιότητα αυτή των σημείων της διχοτόμου και όχι να αμφισβητηθεί, είναι αναμφισβήτητη. Από μαθηματική άποψη η κατάσταση εύκολα μπορεί να επιλυθεί είτε με την επισήμανση ότι η ιδιότητα αυτή είναι ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου κυρτής γωνίας, είτε με την επαναδιατύπωσή της «*κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τους φορείς των πλευρών της και αντιστρόφως κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τους φορείς των πλευρών της είναι σημείο της διχοτόμου της»* (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6

Δυναμική Διερεύνηση και Απόδειξη

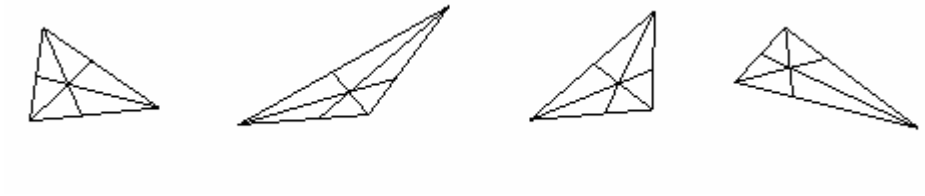
Η διερεύνηση και η απόδειξη είναι διαφορετικές δραστηριότητες, αλλά όμως συμπληρωματικές· όχι μόνο και οι δυο είναι μέρος της διαδικασίας λύσης ενός προβλήματος, αλλά απαιτούνται και οι δυο για την επιτυχία στα μαθηματικά, η διερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη και η απόδειξη είναι η επιβεβαίωσή της (Hanna, 2000).

Η επιτυχής χρήση του λογισμικού στη διερεύνηση, πρόσφερε σε κάποιους εκπαιδευτικούς στήριγμα στην άποψή τους ότι η παραγωγική απόδειξη στη γεωμετρία θα πρέπει να εγκαταλειφθεί για λογαριασμό μιας εξ ολοκλήρου εμπειρικής προσέγγισης στη

μαθηματική αιτιολόγηση, και επομένως μια παραγωγική απόδειξη δεν είναι αναγκαία (Hanna, 2000).

Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για υποστηρίξουν την άποψη ότι οι προσφερόμενες δυνατότητες ενός μικρόκοσμου δυναμικής γεωμετρίας για διερεύνηση μπορεί να οδηγήσει αρκετούς μαθητές στην ανάγκη για μια παραγωγική απόδειξη.

Έστω ότι ένας μαθητής πρέπει να αποδείξει το θεώρημα ότι «οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο». Σε ένα χαρτί θα μπορούσε να σχεδιάσει ένα τρίγωνο και κατά προσέγγιση τις τρεις διχοτόμους των γωνιών του και να αποδείξει ότι πράγματι το θεώρημα ισχύει. Αν έκανε την κατασκευή του τριγώνου και των διχοτόμων του σε ένα δυναμικό περιβάλλον θα είχε τη δυνατότητα να «σύρει» το τρίγωνο στην οθόνη με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να αλλάζει συνεχώς η μορφή του. Με δεδομένο ότι οι διχοτόμοι επανασχεδιάζονται συνεχώς, ο μαθητής θα «έβλεπε» ότι πάντοτε οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο ανεξάρτητα από τη μορφή του τριγώνου (Σχήμα 3.7). Αυτή η διαδικασία είναι ισοδύναμη με το σχεδιασμό ενός πολύ μεγάλου αριθμού τριγώνων σε χαρτί ή στη φαντασία του μαθητή.



Σχήμα 3.7

Η δυναμική διερεύνηση βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν μια νοητική εικόνα (Mason, 1991, αναφορά στο Hanna, 2000). Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα

παρέχει τα στοιχεία στο μαθητή ότι το θεώρημα είναι αληθινό και ενισχύει την αξία της διερεύνησης. Επομένως θα ήταν πολύ φυσικό ο μαθητής να βγάλει βιαστικά το συμπέρασμα ότι η διερεύνηση είναι επαρκής για τον καθορισμό ότι οι διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η ανάγκη όμως για μια επεξήγηση ακολουθεί μετά την υποβολή του ερωτήματος «*γιατί συμβαίνει αυτό*».

Η δυναμική διερεύνηση ενός προβλήματος μπορεί να οδηγήσει κάποιον στο να αντιληφθεί τη δομή και τις συνδέσεις του, χωρίς όμως να μπορεί να αποδώσει με σαφήνεια την κάθε σύνδεση. Συνεπώς, η διερεύνηση ενός προβλήματος μπορεί να οδηγήσει στη διατύπωση συμπερασμάτων, τα οποία όμως πρέπει να παραμείνουν δοκιμαστικά. Αν και η αλήθεια μιας πρότασης μπορεί να φανεί προφανής από τη διερεύνηση, χρειάζεται η *ευαπόδεικτη αιτιολόγηση - demonstrable justification* (Giaquinto, 1994 αναφορά στο Hanna, 2000), κάτι που μόνο η απόδειξη μέσω μιας παραγωγικής διαδικασίας από αποδεκτές προτάσεις μπορεί να κάνει.

Γενικά, όπως η Hanna (2000) επισημαίνει, γίνεται αποδεκτό ότι η διαίσθηση, ο επαγωγικός συλλογισμός, οι ευρετικές διαδικασίες, ο πειραματισμός, η διερεύνηση και η οπτικοποίηση, είναι χρήσιμα στα προκαταρκτικά στάδια της επίτευξης των μαθηματικών συμπερασμάτων, και είναι μια πιθανή πρόκληση για τη σημασία της απόδειξης στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά.

Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας συμβάλει στην κατανόηση της «θεωρητικής» γεωμετρίας μέσω της διαδικασίας της σημειωτικής μεσολάβησης, η οποία βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία της διερεύνησης, της διατύπωσης εικασίας και της συζήτησης με κάποιο τρόπο ώστε να φτάσουν σε μια έγκυρη απόδειξη (Mariotti, 2000). Επιβάλλεται όμως, να γίνει διάκριση μεταξύ μιας απόδειξης και ενός

ευρετικού επιχειρήματος και να γίνει σαφές ότι η ισχύς των μαθηματικών στηρίζεται στην απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Παραδοσιακά, οι δάσκαλοι των μαθηματικών προσπαθούν να δημιουργήσουν αμφιβολίες στους μαθητές τους για την εγκυρότητα των εμπειρικών παρατηρήσεών τους, ώστε να αισθανθούν την ανάγκη για απόδειξη ως μέσο «σιγουριάς» (de Villiers, 2004). Αυτή η προσέγγιση προέρχεται ενδεχομένως από μια στενή φορμαλιστική άποψη, ότι η κύρια λειτουργία της απόδειξης είναι αυτή της επαλήθευσης και επικύρωσης της ακρίβειας των μαθηματικών προτάσεων. Σαφώς, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να πουν πότε ένα αποτέλεσμα έχει επιτευχθεί ή όχι και να κατασκευάζουν αποδείξεις, όχι επειδή το απαιτεί ο δάσκαλος, αλλά επειδή οφείλουν να αναγνωρίζουν ότι είναι απαραίτητες. Η απόδειξη όμως έχει και άλλες σημαντικές λειτουργίες στα μαθηματικά, ίσης ή και μεγαλύτερης σπουδαιότητας ίσως από αυτές της επαλήθευσης και της επικύρωσης.

Οι λειτουργίες της απόδειξης αναφέρονται στο σύνολο των δραστηριοτήτων της απόδειξης που συνδέονται με τη σημασία, τη χρησιμότητα και το σκοπό της, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται ο κύριος σκοπός της που είναι η καθιέρωση της εγκυρότητας ή μη μιας πρότασης και η διασάφηση των λόγων αποδοχής ή απόρριψής της.

Η ανάπτυξη της δυναμικής γεωμετρίας και η εφαρμογή της στις τάξεις των μαθηματικών, απαιτεί μια ριζική αλλαγή στη διδασκαλία της απόδειξης. Συνεπώς, κατά την προσπάθεια καθορισμού του ρόλου της απόδειξης στην τάξη, είναι χρήσιμο να αναζητηθούν οι λειτουργίες που η απόδειξη μπορεί και πρέπει να εμφανίζει στη σχολική

πρακτική σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και που μπορούν ενδεχομένως να κάνουν την απόδειξη να έχει νόημα, να είναι μια σημαντική δραστηριότητα.

Πρότυπο Λειτουργιών της Απόδειξης

Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν επεκτείνει αρκετά τους στόχους που πρέπει να πληρούνται κατά τη διδασκαλία της εκμάθησης της απόδειξης (Hadas et al, 2000). Ως κύριοι στόχοι της διδασκαλίας προτείνονται η επαλήθευση ή αιτιολόγηση της ορθότητας μιας πρότασης, η επεξήγηση του γιατί μια πρόταση είναι αληθής, η συστηματοποίηση των συμπερασμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα (ένα σύστημα αξιωμάτων, ορισμών, αποδεκτών θεωρημάτων κτλ.), η ανακάλυψη νέων θεωρημάτων, η κοινοποίηση ή μετάδοση της μαθηματικής γνώσης και η πνευματική πρόκληση (Bell, 1976α· de Villiers, 1996 αναφορά στο Marrades et al., 2000). Οι στόχοι βρίσκονται σε αντιστοιχία με μια σειρά λειτουργιών που η απόδειξη αναμένεται να εμφανίζει στη σχολική πρακτική.

Πολλοί ερευνητές παρέχουν το ακόλουθο πρότυπο των λειτουργιών της απόδειξης (Bell, 1976· de Villiers 1999· Hadas et al., 2000):

- Επαλήθευση – αιτιολόγηση (verification - justification),
- Επεξήγηση (explanation),
- Συστηματοποίηση (systemization),
- Ανακάλυψη (discovery),
- Επικοινωνία (communication),
- Πνευματική πρόκληση (intellectual challenge).

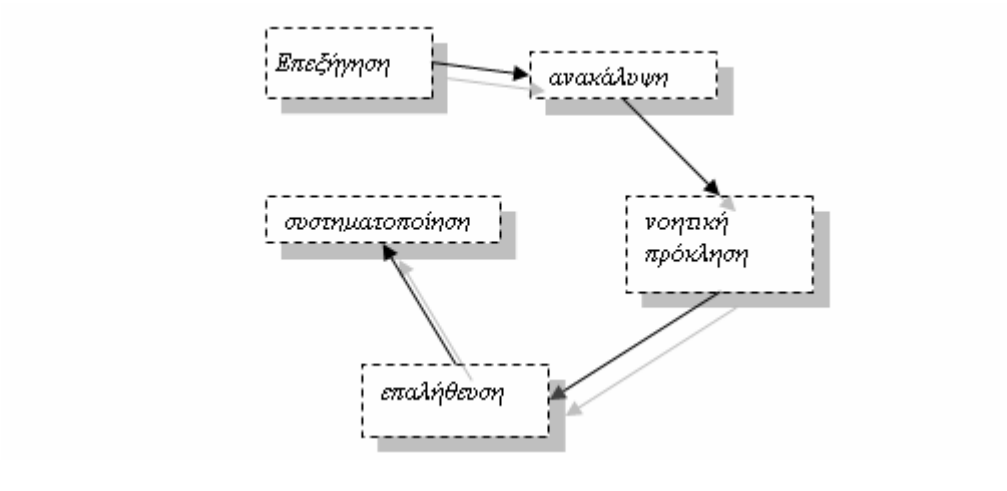
Τον προηγούμενο κατάλογο συμπληρώνει η Hanna (2000) με τις λειτουργίες:

- Διερεύνηση (exploration) της έννοιας ενός ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης.
- Κατασκευή (construction) μιας εμπειρικής θεωρίας.
- Ενσωμάτωση (incorporation) γνώσης σε ένα νέο πλαίσιο και την εξέτασή της από μια νέα προοπτική.

Οι λειτουργίες της απόδειξης για τους μαθηματικούς δεν είναι όλες στον ίδιο βαθμό συναφείς με την εκμάθηση των μαθηματικών, και κατά συνέπεια δεν προσδίδουν σε αυτές την ίδια βαρύτητα στη διδασκαλία (Hanna, 2000). Οι δυο πρώτες λειτουργίες, η επαλήθευση - αιτιολόγηση και η επεξήγηση, που προτείνονται από τους ερευνητές, σχετίζονται με τους κύριους ρόλους της απόδειξης στα μαθηματικά. Η επαλήθευση είναι συνώνυμη με την εγκυρότητα μιας πρότασης και η επεξήγηση με τη διασάφηση των λόγων αποδοχής ή απόρριψής της. Η Hanna (2000) θεωρεί την επαλήθευση και την επεξήγηση ως τις θεμελιώδεις λειτουργίες της απόδειξης, με τις οποίες πρέπει να αρχίζει κάθε σπουδαστής μόλις μπαίνει στον κόσμο των μαθηματικών, γιατί είναι προϊόν της μακροχρόνιας ιστορικής ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Όμως, οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών, προκειμένου να κάνουν την απόδειξη μια σημαντική δραστηριότητα για τους μαθητές τους, πρέπει με τη διδασκαλία τους να προσπαθήσουν να αναπτύξουν οι μαθητές τους την κατανόηση και την εκτίμηση και των άλλων λειτουργιών της απόδειξης.

Ο de Villiers (2002, 2003) επισημαίνει ότι οι λειτουργίες της επεξήγησης και της ανακάλυψης είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθούν αρχικά προκειμένου να εισαγάγουν την απόδειξη ως σημαντική δραστηριότητα στους μαθητές, η δε εισαγωγή των μαθητών στην απόδειξη ως επεξήγηση είναι σημαντικό να μην καθυστερεί αδικαιολόγητα. Προτείνεται μια σπειροειδής προσέγγιση στην εισαγωγή των διάφορων λειτουργιών της απόδειξης

(Σχήμα 4.1). Αυτό απαιτεί αφενός, τη διαπραγμάτευση του δασκάλου με τους μαθητές των κριτηρίων για τα αποδεκτά στοιχεία, τις επεξηγήσεις και τα επιχειρήματα και αφετέρου, την εισαγωγή από νωρίς των μαθητών σε ευρετικές διαδικασίες επίλυσης προβλήματος και διαδικασίες διερεύνησης (διατύπωσης υπόθεσης, ελέγχου, επιβεβαίωσης της υπόθεσης ή απόρριψη και επαναδιατύπωσής της).



Σχήμα 4.1: Σπειροειδής προσέγγιση των Λειτουργιών της Απόδειξης (De Villiers, 1999)

Επαλήθευση – Αιτιολόγηση

Ο όρος *επαλήθευση* αναφέρεται στη λειτουργία της απόδειξης που έχει ως στόχο την εξακρίβωση ή την επιβεβαίωση με έλεγχο της αλήθειας ή μη μιας πρότασης και την ενίσχυση της βεβαιότητας για την αλήθειά της ή την επιβεβαίωση της αλήθειας της με ανακατασκευασμένες ή νέες αποδείξεις.

Παραδοσιακά, η λειτουργία της απόδειξης κατανοείται σχεδόν αποκλειστικά ως η διαδικασία που χρησιμοποιείται για να επιβεβαιωθεί η ορθότητα των μαθηματικών

προτάσεων. Κατά κύριο λόγο, στην πράξη της διδασκαλίας, στις περισσότερες συζητήσεις και στην έρευνα για τη διδασκαλία της απόδειξης, επικρατεί η άποψη ότι η απόδειξη, ως επαλήθευση, χρησιμοποιείται κυρίως για να εξαλειφθεί η αμφιβολία και η αβεβαιότητα για την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων είτε του ίδιου του λύτη, είτε ενός συνομιλητή του, όταν γίνεται προσπάθεια να αποδειχθεί κάτι που δεν είναι προφανές (de Villiers, 1999, 2002) και αρμόζει σε καταστάσεις όπου αναζητείται ένα πειστικό επιχείρημα αναγκαίο για την επικύρωση μιας μαθηματικής πρότασης.

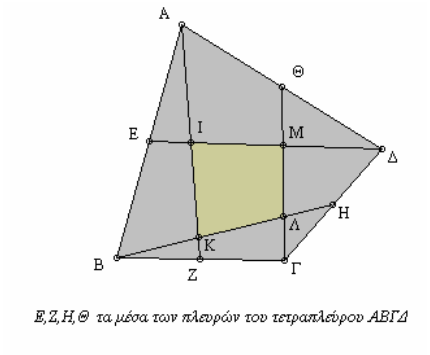
Επαλήθευση και Δυναμική Γεωμετρία

Με πολύ λίγες εξαιρέσεις, οι δάσκαλοι των μαθηματικών φαίνονται να θεωρούν ότι μόνο η απόδειξη παρέχει τη βεβαιότητα για το μαθηματικό και ότι είναι η μόνη αρχή για την καθιέρωση της ισχύος μιας πρότασης (de Villiers, 1999). Το γεγονός ότι οι μαθητές σε ένα πλαίσιο δυναμικής γεωμετρίας μεταβάλλοντας πολύ λίγο τις γεωμετρικές μορφές μπορούν να επιβεβαιώσουν εμπειρικά (επαγωγική επαλήθευση) τις διατυπωμένες εικασίες τους, είναι πρόβλημα, γιατί αποκτούν ένα υψηλό επίπεδο βεβαιότητας, με αποτέλεσμα να αισθάνονται λίγο ή και καθόλου την ανάγκη για περαιτέρω επιβεβαίωση ή επαλήθευση (de Villiers, 2000). Συνεπώς, η εμπειρική επαλήθευση με χρήση του δυναμικού λογισμικού ίσως όχι μόνο παρέχει ελάχιστο ή κανένα κίνητρο για απόδειξη (de Villiers, 2002), αλλά φαίνεται να εμποδίζει και την ανάπτυξη μιας ήδη προβληματικής ανάγκης για απόδειξη (Holzl, 2001). Από μαθηματική σκοπιά στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας, προβληματική φαίνεται να είναι και η άποψη του Polya (1954, σελ. 83-84), ότι μόνο αφού κάποιος είναι βέβαιος ότι ένα αποτέλεσμα είναι αληθινό θα προσπαθήσει να το αποδείξει. Προβληματική επίσης φαίνεται να είναι και η άποψη του de Villiers (1999, 2002) ότι η απόδειξη δεν είναι απαραίτητα μια προϋπόθεση

για τη βεβαιότητα· το αντίθετο, η βεβαιότητα πριν από την απόδειξη είναι συχνά μια προϋπόθεση για την εύρεση μιας απόδειξης.

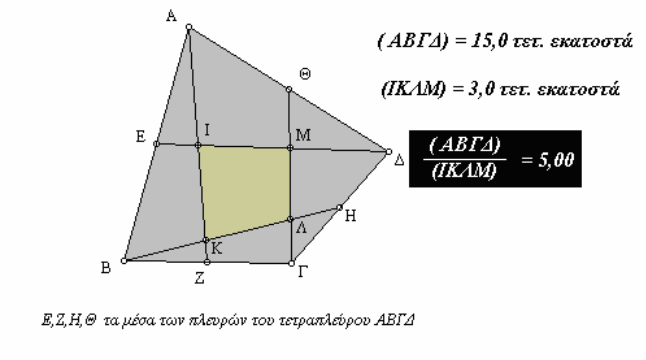
Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας είναι ακριβές και εξαιρετικά χρήσιμο για τον εμπειρικό έλεγχο μιας διατυπωμένης εικασίας. Όμως, δεν παρέχει τη απόλυτη βεβαιότητα ότι μια εικασία είναι αληθής, αν κάποιος δεν είναι πολύ προσεκτικός. Επίσης, το πλαίσιο στο οποίο το λογισμικό είναι μέρος της διδασκαλίας και εκμάθησης, επηρεάζει έντονα τους τρόπους με τους οποίους η ανάγκη για απόδειξη, ως επαλήθευση, προκύπτει ή όχι (Holzl, 2001). Για παράδειγμα, το πρόβλημα που ακολουθεί φαίνεται να επιβεβαιώνει τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Η αφορμή γι' αυτό το παράδειγμα πάρθηκε από τα βιβλία, *Geometry Turned On* (1997) όπου ο συντάκτης Keyton Michael, της ενότητας *Students Discovering Geometry Using Dynamic Geometry Software*, σχολιάζει τις ανακαλύψεις μαθητών με τη χρήση λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας, και *Rethinking Proof* (2004), αλλά και από το άρθρο του De Villiers (2002), *Developing Understanding For Different Roles of Proof in Dynamic Geometry*.

Πρόβλημα 1: Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα Ε,Ζ,Η,Θ μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Ενώστε την κάθε κορυφή με το μέσο της απέναντί της πλευράς, για παράδειγμα όπως στο σχήμα 4.2. Βρείτε το λόγο του εμβαδού του εξωτερικού τετράπλευρου προς το εμβαδόν του εσωτερικού τετράπλευρου. Σύρετε μια οποιαδήποτε κορυφή του εξωτερικού τετράπλευρου σε διάφορες θέσεις στην επιφάνεια σχεδίασης. Προσπαθήστε να διατυπώσετε μια εικασία και ελέγξτε την. Είστε βέβαιοι ότι η εικασία σας είναι πάντα αληθής για το τυχαίο τετράπλευρο; Αν είστε βέβαιοι ότι είναι αληθής, υποστηρίξτε την με λογική εξήγηση ή μια πειστική αιτιολόγηση. Διαφορετικά δοκιμάστε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα και προσπαθήστε να δώσε μια αιτιολόγηση.



Σχήμα 4.2

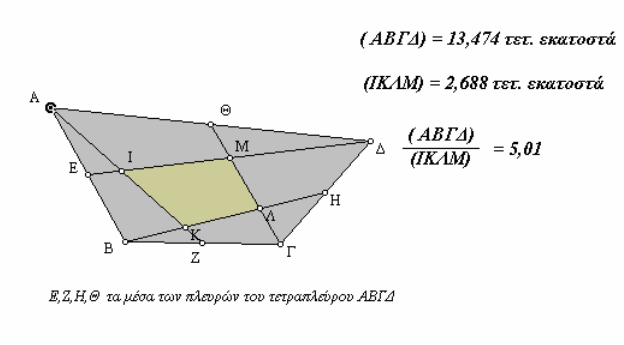
Αν σκόπιμα, πριν από τη δραστηριότητα, η μέτρηση και η ακρίβεια των υπολογισμών επιλεγεί να είναι μόνο ένα δεκαδικό ψηφίο και οι μαθητές πειραματιστούν με το σύρσιμο, θα είναι βέβαιοι ότι η υπόθεσή τους «*ο λόγος των εμβαδόν είναι ίσος με 5»,* είναι αληθής σε τυχαίο τετράπλευρο (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3

Αν στη συνέχεια τους ζητηθεί να αυξήσουν την ακρίβεια των υπολογισμών τους στα δύο ή τρία δεκαδικά ψηφία, θα βρεθούν μπροστά σε μεγάλη έκπληξη, αφού ο λόγος τώρα δεν θα είναι ίσος με 5 (Σχήμα 4.4). Η εικασία τους καταρρίπτεται και κατά συνέπεια φαίνεται να εμφανίζεται η ανάγκη να εξηγηθεί, γιατί δεν είναι αληθής. Η αβεβαιότητα για ένα αποτέλεσμα οδηγεί συνήθως στην αναζήτηση ενός

αντιπαραδείγματος και όχι σε μια απόδειξη (de Villiers, 2003). Επομένως η προτροπή για αναζήτηση ενός αντιπαραδείγματος είναι επιβεβλημένη.



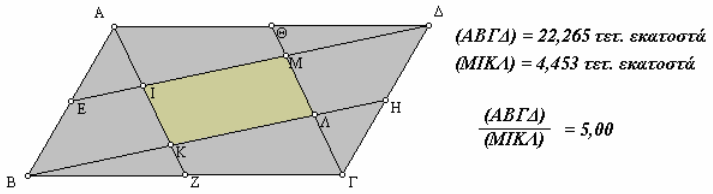
Σχήμα 4.4

Αυτό το παράδειγμα λειτουργεί καλά για δύο λόγους. Αφενός, για να ευαισθητοποιήσει τους μαθητές ότι η μέτρηση με το λογισμικό δεν μπορεί να παρέχει την απόλυτη βεβαιότητα για την αλήθεια της εικασίας τους και δεν είναι βέβαιο ότι δεν θα υπάρξει και πάλι αλλαγή και για τα επόμενα δεκαδικά ψηφία. Επομένως μια λογική εξήγηση, μια πειστική αιτιολόγηση είναι απαραίτητη για την απόλυτη βεβαιότητα. Αφετέρου, σε περιπτώσεις όπου η εύρεση μιας λογικής εξήγησης για μια υπόθεση που δε «φαίνεται» να είναι αληθής, η ύπαρξη ενός αντιπαραδείγματος είναι μια αποδεκτή αιτιολόγηση.

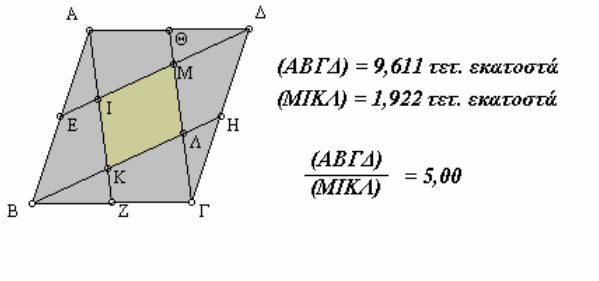
Οποτεδήποτε διεξάγεται μια έρευνα για την ισχύ μιας νέας, άγνωστης υπόθεσης, οι μαθηματικοί συνήθως δεν ψάχνουν μόνο για αποδείξεις, αλλά προσπαθούν να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα με τη βοήθεια μιας ημιεμπειρικής δοκιμής, δεδομένου ότι μια τέτοια δοκιμή μπορεί να αποκαλύψει αντιφάσεις, λάθη ή αοριστίες. Κατά συνέπεια τα αντιπαραδείγματα παράγονται μερικές φορές από την απαίτηση των

μαθηματικών να ανασκευάσουν τις παλιές αποδείξεις ή να κατασκευάσουν νέες (de Villiers, 2003).

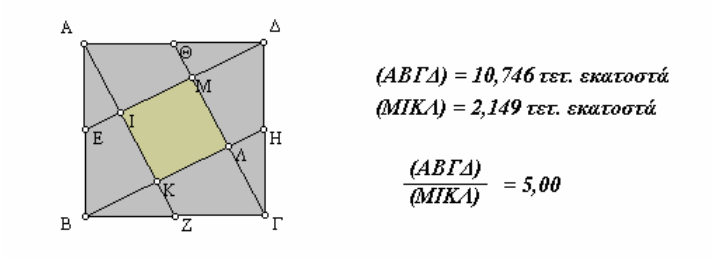
Συνεπώς, προτρέποντας τους μαθητές να δοκιμάσουν να γενικεύσουν το συμπέρασμά τους πειραματιζόμενοι και με άλλα τετράπλευρα, θα ανακαλύψουν ότι στην περίπτωση των παραλληλογράμμων η αρχική τους εικασία αληθεύει, ο λόγος των εμβαδών είναι πάντα ίσος με 5 (Σχήμα 4.5, 4.6, 4.7, 4.8), αλλά όχι και στις περιπτώσεις του τραπεζίου, ισοσκελούς ή μη (Σχήμα 4.9, 4.10) και του ρομβοειδούς (Σχήμα 4.11), και δεν υφίσταται στα μη κυρτά τετράπλευρα.



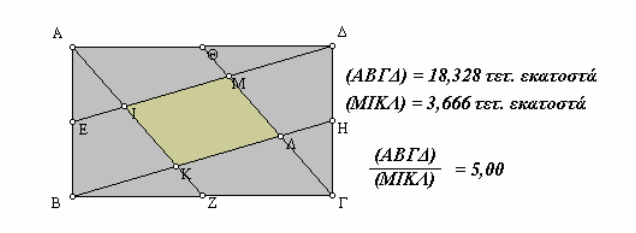
Σχήμα 4.5



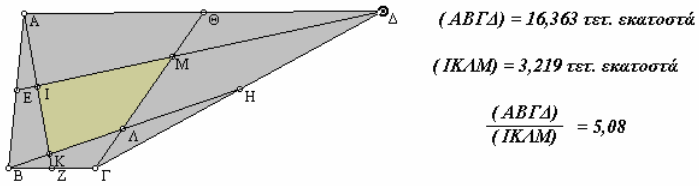
Σχήμα 4.6



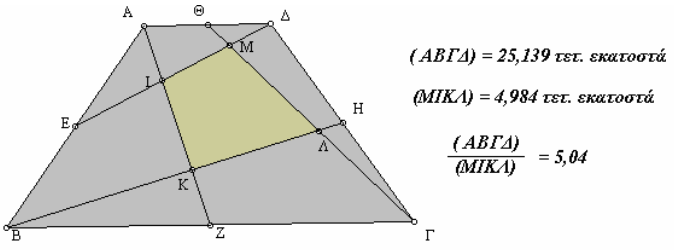
Σχήμα 4.7



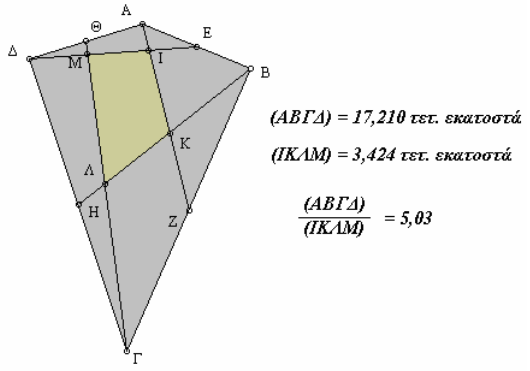
Σχήμα 4.8



Σχήμα 4.9



Σχήμα 4.10



Σχήμα 4.11

Η βεβαιότητα ότι η εικασία τους δεν μπορεί να είναι γενικά αληθής είναι ισχυρή. Η απόδειξη, ως επαλήθευση και επιβεβαίωση με έλεγχο, προέκυψε μέσα από ένα αντιπαράδειγμα. Συνεπώς, οι απόψεις των Polya και de Villiers δεν είναι προβληματικές στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας. Το ίδιο το πλαίσιο επηρεάζει έντονα τους τρόπους με τους οποίους η ανάγκη για απόδειξη-μέσω ενός αντιπαραδείγματος-προκύπτει. Το πλαίσιο, βοηθώντας τους μαθητές να λειτουργήσουν μέσω ευρετικών στρατηγικών, διερευνήσεων και οπτικών επιχειρημάτων, τους επιτρέπει μέσα από ένα αντιπαράδειγμα να επινοήσουν ένα σχέδιο λύσης (Hadas et al., 2000).

Ακόμα και αν η λειτουργία της απόδειξης ως επαλήθευση δεν θεωρηθεί ότι πρέπει να είναι η αφετηρία για την εισαγωγή των αρχαρίων στην απόδειξη σε ένα πλαίσιο δυναμικής γεωμετρίας, μπορεί και πρέπει να αναπτυχθεί αργότερα, ώστε να επιτρέψει στους μαθητές να πετύχουν μια βαθύτερη κατανόηση της αξίας και της φύσης της παραγωγικής απόδειξης (Villiers, 2002).

Επεξήγηση

Ο όρος *επεξήγηση* αναφέρεται στη λειτουργία της απόδειξης που έχει ως στόχο τη λεπτομερή εξήγηση, διασάφηση *γιατί* η επιβεβαιωμένη ορθότητα με έλεγχο μιας διατυπωμένης εικασίας ή μιας πρότασης ή ιδιότητας μιας έννοιας είναι αληθής. Η επεξήγηση είναι συνώνυμη με την επίγνωση *γιατί* κάτι είναι αληθινό (Hadas et al., 2000), αλλά και με τη διορατικότητα *πώς* μπορεί να συμβεί αυτό. Η επεξήγηση προεικονίζει την απόδειξη, υπό την έννοια ότι συνδέεται με τη διατύπωση μαθηματικών όρων που προκύπτουν ως συμπεράσματα από μια σειρά ιδιοτήτων, κάτι που είναι απαραίτητο, για να γίνει αντιληπτό πώς λειτουργεί η απόδειξη (Laborde, 2000). Για τους μαθηματικούς, η μαθηματική επεξήγηση, λαμβάνεται ως η συνομιλία ενός ατόμου που έχει ως σκοπό να εδραιώσει σε κάποιον άλλο την εγκυρότητα μιας μαθηματικής πρότασης (Balacheff, 1988a, αναφορά στο Jones, 2000).

Η απόδειξη ως επεξήγηση δίνει εγκυρότητα στα διατυπωμένα συμπεράσματα (Laborde, 2000), παρέχει την μεγαλύτερη δυνατή αιτιολόγηση ενός μαθηματικού συλλογισμού και τη μεγαλύτερη δυνατή εμπιστοσύνη στην αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων, συστηματοποιεί τα αποτελέσματα, συμβάλει στην ανακάλυψη και άλλων προτάσεων και στη διάχυση της μαθηματικής γνώσης (de Villers, 2002, 2004).

Η εμπειρική επαλήθευση μιας υπόθεσης (π.χ. με το διαβήτη, το χάρακα ή τον υπολογιστή) είναι δυνατόν να παράσχει ένα ισχυρό αίσθημα βεβαιότητας για την εγκυρότητα της υπόθεσης, αλλά δεν παρέχει καμιά ικανοποιητική εξήγηση *γιατί* η υπόθεση μπορεί να είναι αληθής. Ακόμα και αν η εξέταση πολλών παραδειγμάτων μπορεί να αυξήσει την σιγουριά για την αλήθεια μιας εικασίας ακόμα περισσότερο, δεν

παρέχει καμιά ικανοποιητική επίγνωση ή κατανόηση στο *πώς* η υπόθεση είναι συνέπεια άλλων γνωστών αποτελεσμάτων (de Villiers, 2002).

Συνεπώς, σε καταστάσεις όπου τα ευρετικά αποτελέσματα είναι διαισθητικά αυτονόητα ή υποστηρίζονται από πειστικά ημιεμπειρικά στοιχεία, η κύρια λειτουργία της απόδειξης δεν είναι αυτή της επαλήθευσης, αλλά μάλλον αυτή της επεξήγησης (de Villiers, 1999), και η ανάγκη για απόδειξη ως τρόπος διασάφησης του *πώς* και κατανόησης του *γιατί* η εικασία είναι αληθής κάνει την εμφάνισή της. Η αναζήτηση του *πώς* και του *γιατί* συνδέεται και με την ενδεχόμενη κατασκευή παραγωγικών αποδείξεων ως νοητική πρόκληση (μπορώ να το αποδείξω;) και την ικανοποίηση μιας βαθύτερης ανάγκης για την καθιέρωση της αλήθειάς τους.

Μερικές αποδείξεις είναι από τη φύση τους πιο επεξηγηματικές από άλλες και αυτό που τις διακρίνει είναι η δυνατότητά τους να παραπέμπουν σε μια χαρακτηριστική ιδιότητα μιας οντότητας ή μιας δομής που αναφέρεται στο υπό εξέταση θεώρημα, έτσι ώστε από την απόδειξη να είναι φανερό ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από την ιδιότητα (Steiner,1978 αναφορά στη Hanna, 2000). Η επιλογή επεξηγηματικών αποδείξεων από τους δασκάλους παρέχει πλεονεκτήματα. Παρόλα αυτά δεν είναι πάντα δυνατή η εύρεση μιας επεξηγηματικής απόδειξης για κάθε υπό συζήτηση θεώρημα, αφού στα μαθηματικά μερικά θεωρήματα πρέπει να αποδειχθούν χρησιμοποιώντας την εις άτοπο απαγωγή, την μαθηματική επαγωγή ή κάποια άλλη μη επεξηγηματική μέθοδο (Hanna, 2000).

Επεξήγηση και Δυναμική Γεωμετρία

Στη διεθνή βιβλιογραφία παρέχονται πολυάριθμα παραδείγματα για το πώς η Δυναμική Γεωμετρία μπορεί να υποστηρίξει την ευρετική φάση επίλυσης γεωμετρικού

προβλήματος. Ένα πιο προσεκτικό βλέμμα στα διάφορα παραδείγματα μπορεί να θέσει υπό αμφισβήτηση την υπόθεση ότι το δυναμικό λογισμικό χρησιμοποιείται αποτελεσματικά, για να υποστηρίξει ένα συστηματικό και ενεργό τρόπο απόκτησης γνώσης (Holzl, 2001).

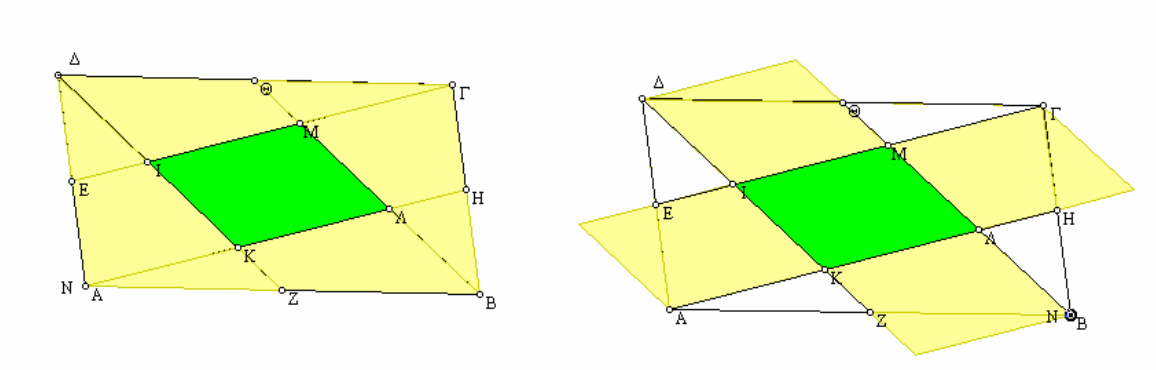
Μια λογική επεξήγηση είναι αναγκαία σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας, δεδομένου ότι κάποιος μπορεί να οδηγηθεί στην αποδοχή μη αληθών προτάσεων, εάν δεν είναι πολύ προσεκτικός (δείτε παράδειγμα 1 ανωτέρω). Ο τρόπος που τίθεται ένα πρόβλημα, αν οδηγεί σε μια περιορισμένη διαδικασία αναζήτησης και αν ο διδακτικός στόχος είναι αυτός της αναγνώρισης μιας ιδιότητας ή μιας σχέσης, τότε δεν μπορεί να αναμένεται να παραχθεί τίποτε περισσότερο από την εμπειρική επιβεβαίωση και είναι απίθανο να αφυπνιστεί οποιοδήποτε συναίσθημα διασάφησης, κάτι που θα βοηθούσε στην αναζήτηση μιας επεξήγησης (Holzl, 2001).

Σε καταστάσεις όπως αυτές που διαμορφώνονται σε ένα δυναμικό περιβάλλον, η λειτουργία της απόδειξης δεν μπορεί να είναι σαφώς μόνο αυτή της επαλήθευσης, της λήψης της βεβαιότητας με έλεγχο, αλλά πρέπει να αναζητηθούν και άλλες λειτουργίες της απόδειξης όπως η επεξήγηση, η διανοητική πρόκληση κ. ά.

Προκειμένου να μη χρησιμοποιείται η δυναμική γεωμετρία μόνο για την πειραματική επαλήθευση γεωμετρικών γεγονότων, είναι αναγκαίο να δημιουργείται ένα κατάλληλο ευρετικό πλαίσιο για μια συγκεκριμένη γεωμετρική κατάσταση με την ενσωμάτωση, για παράδειγμα, μιας ερώτησης σε γενικότερες ή συγκεκριμένες καταστάσεις.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 1, η ερώτηση «*είστε βέβαιοι ότι η εικασία σας είναι πάντα αληθής για οποιοδήποτε είδος τετράπλευρου;*» δημιουργεί το κατάλληλο

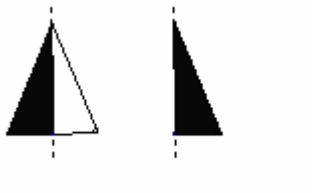
ευρετικό πλαίσιο, ώστε μια ανάγκη για επεξήγηση, *γιατί* ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με 5 *μόνο* στα παραλληλόγραμμα, φαίνεται να προκύπτει. Στην περίπτωση των παραλληλογράμμων οι κοινές τους ιδιότητες, της παραλληλίας και της ισότητας των απέναντι πλευρών, «φαίνεται» να είναι η αναγκαία συνθήκη για να είναι ο λόγος των εμβαδών 5:1. Μια επεξήγηση με μαθηματικούς όρους είναι άμεση και εφικτή. Με τη μεταφορά (σύγκριση) τριγώνων σε ίσα τους τρίγωνα στις εξωτερικές πλευρές των τεσσάρων εσωτερικών κυρτών τετράπλευρων και από την παραλληλία των πλευρών τους, άμεσα προκύπτει η επεξήγηση πώς και γιατί ό λόγος είναι 5: *το εμβαδόν του εξωτερικού παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των πέντε (5) επιμέρους ίσων παραλληλογράμμων* (Σχήμα 4.12).



Σχήμα 4.12

Ο de Villiers (2003) επισημαίνει, ότι η εισαγωγή στην απόδειξη με την επεξήγηση είναι σημαντικό να μη καθυστερεί αδικαιολόγητα. Για παράδειγμα, ακόμα και οι μαθητές που αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μια ολότητα με βάση τη μορφή τους (οπτικό επίπεδο), και όχι σε σχέση με τις ιδιότητές τους (περιγραφικό επίπεδο), θα μπορούσαν εύκολα να χρησιμοποιήσουν τη συμμετρία για να επεξηγήσουν γιατί

ορισμένα αποτελέσματα είναι αληθή (π.χ. γιατί στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες, σχήμα 4.13).



Σχήμα 4.13

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι, η απόδειξη ως επεξήγηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας αποτελεί μια εναλλακτική λύση στην παραδοσιακή προσέγγιση. Οι de Villiers (2000) και Jones (2000) επισημαίνουν ότι και οι αρχάριοι στην απόδειξη μαθητές, ανεξάρτητα από την ανάγκη τους για τη βεβαιότητα η οποία ικανοποιείται πλήρως από τη διερεύνηση σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, στην πλειοψηφία τους επιδεικνύουν μια ανάγκη, για να επεξηγήσουν. Η διατύπωση μαθηματικών ιδιοτήτων στη μαθηματική γλώσσα, μέσα από την επεξήγηση του τι παρατηρείται στο σχέδιο στην οθόνη, προεικονίζει την απόδειξη. Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μεσολαβεί στις μαθηματικές επεξηγήσεις και τα επιχειρήματα και προωθεί την προοδευτική αφαίρεση. Η δυναμική φύση του λογισμικού επηρεάζει τη μορφή των επεξηγήσεών τους. Διατυπώνουν επιχειρήματα τα οποία εξηγούν ικανοποιητικά, γιατί το αποτέλεσμα είναι αληθές και δεν επιβεβαιώνουν απλά ένα αποτέλεσμα. Οι μαθηματικές επεξηγήσεις εξελίσσονται από «καθημερινές» εκφράσεις μέσω του συλλογισμού σε μαθηματικές επεξηγήσεις της γεωμετρικής κατάστασης, καθώς οι μαθητές γίνονται πιο πεπειραμένοι και με τη γεωμετρία και με το λογισμικό (Jones, 2000).

Ανακάλυψη

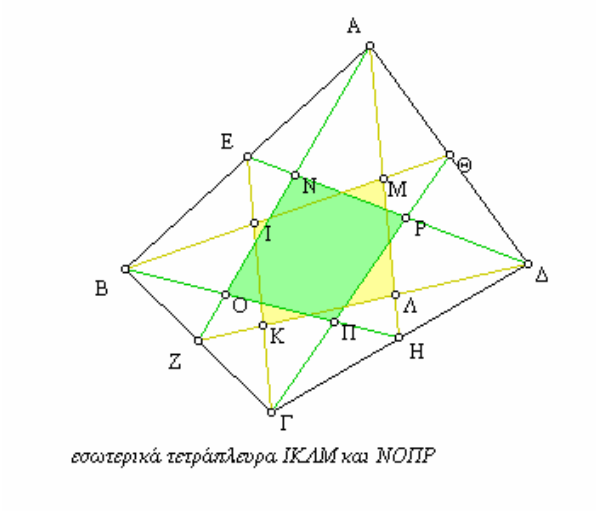
Η απόδειξη ως *ανακάλυψη* στη γεωμετρία είναι συνώνυμη με την εφεύρεση ή την επινόηση νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων, ιδιοτήτων και σχέσεων των γεωμετρικών σχημάτων και εννοιών. Οι κριτικοί της παραδοσιακής προσέγγισης συχνά υποστηρίζουν ότι τα θεωρήματα πρώτα εφευρίσκονται (κατασκευάζονται) με τη βοήθεια της διαίσθησης ή μέσω ημιεμπειρικών μεθόδων και στη συνέχεια ελέγχονται μέσω μιας παραγωγικής απόδειξης. Εντούτοις, υπάρχουν πολυάριθμα παραδείγματα στην ιστορία των μαθηματικών όπου τα νέα αποτελέσματα ανακαλύφθηκαν ή εφευρέθηκαν κατά τρόπο καθαρώς παραγωγικό (μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες κτλ.). Ακόμα και μέσα σε ένα πλαίσιο παραγωγικών διαδικασιών, όπως η αξιωματικοποίηση και οι ορισμοί, η απόδειξη δεν είναι μόνο ένας τρόπος αιτιολόγησης και επεξήγησης, αλλά και ένας τρόπος για διερεύνηση, ανακάλυψη, εφεύρεση και γενίκευση νέων αποτελεσμάτων (de Villiers, 1999, 2002).

Ανακάλυψη και Δυναμική Γεωμετρία

Ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να παρασχεθούν ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη εμπειρία και γνώση τους αλλά και τη φαντασία τους, για να ανακαλύψουν νέες ιδέες. Το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες για ανακάλυψη, επιτρέποντας στους μαθητές να εξετάσουν καταστάσεις που αντιπαραβάλλουν η μία την άλλη (Holzl, 2001).

Πράγματι, αρκετά συχνά η προσπάθεια επεξήγησης γιατί ένα αποτέλεσμα είναι αληθές, επιτρέπει την περαιτέρω γενίκευση και την ανακάλυψη νέων συμπερασμάτων, όπως παρουσιάζεται ακολούθως, ως συνέχεια του παραδείγματος 1: Στην προσπάθειά τους οι μαθητές να αναζητήσουν μια λογική επεξήγηση γιατί ο λόγος των εμβαδών του

εξωτερικού τετράπλευρου προς το εσωτερικό τετράπλευρο δεν είναι σταθερός, μπορούν να διαπιστώνουν ότι για κάθε κορυφή του τετράπλευρου αντιστοιχούν δυο απέναντι πλευρές και κατά συνέπεια σχεδιάζονται δυο εσωτερικά τετράπλευρα (μεσοδιαγώνια) (Σχήμα 4.14).

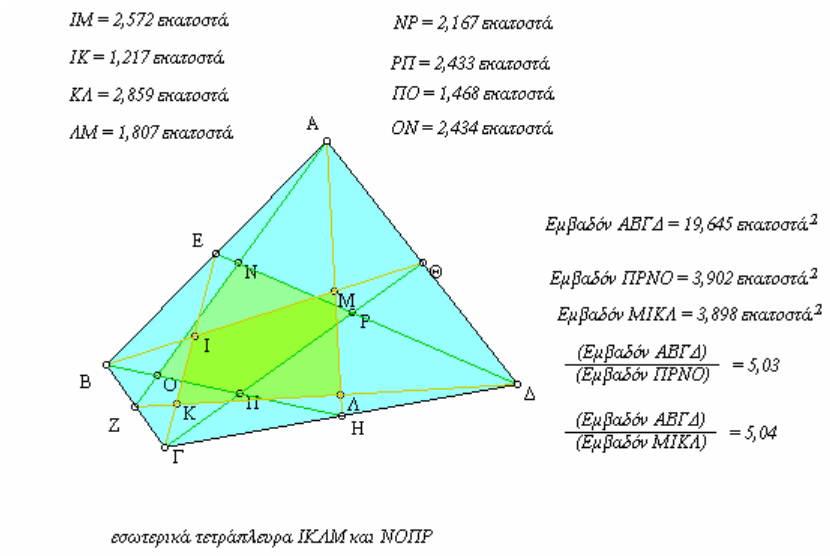


Σχήμα 4.14

Ένας στόχος ανακάλυψης των ιδιοτήτων των δυο εσωτερικών τετράπλευρων μπορεί άμεσα να τεθεί. Οι μαθητές διερευνώντας το σχήμα με τη βοήθεια των μετρήσεων του λογισμικού μπορούν να διαπιστώνουν ότι τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα δεν είναι ίσα, αλλά και δεν έχουν τον ίδιο λόγο εμβαδών ως προς το εξωτερικό τετράπλευρο (Σχήμα 4.15).

Αυτή η παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να αναρωτηθούν αν υπάρχει περίπτωση τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα να είναι ίσα. Με τη μέτρηση μπορούν να διαπιστώσουν ότι μπορεί να είναι ισεμβαδικά αλλά όχι ίσα γενικά. Συνεπώς, μπορεί

να τεθεί ο προβληματισμός, «*κάτω από ποιες προϋποθέσεις τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα είναι ίσα και κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι ισεμβαδικά*».



Σχήμα 4.15

Για να κάνουν τη γενίκευση θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι η ύπαρξη ενός τουλάχιστον άξονα συμμετρίας στο εξωτερικό τετράπλευρο (*η μεσοκάθετος δυο απέναντι πλευρών ή μια διαγώνιος του τετραπλεύρου)* είναι αναγκαία συνθήκη, η οποία τους επιτρέπει να δώσουν μια επεξήγηση γιατί μπορεί τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα να είναι ίσα και κατ' επέκταση και ισεμβαδικά. Μόνο για την ισεμβαδικότητα των δύο εσωτερικών τετράπλευρων η ύπαρξη ενός τουλάχιστον ζεύγους παράλληλων πλευρών φαίνεται να είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη. Με την έρευνα μπορούν να ανακαλύψουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες μεταξύ του εξωτερικού τετράπλευρου και των δυο εσωτερικών τετράπλευρων, των οποίων οι στρατηγικές επίλυσής τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε άλλα γεωμετρικά προβλήματα αλλά και ενδιαφέρουσες γενικεύσεις:

Γενίκευση 1η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο έχει έναν τουλάχιστο άξονα συμμετρίας, τότε τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα είναι ίσα (ορθογώνιο, τετράγωνο, ρόμβος, ισοσκελές τραπέζιο, τετράπλευρο με δύο ζεύγη ίσων διαδοχικών πλευρών- ρομβοειδές · Σχήμα 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.22).

♦ Γενίκευση 2η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, τότε και τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, τετράγωνο, ρόμβος, παραλληλόγραμμο ·Σχήμα 4.16, 4.17, 4.18, 4.21).

♦ Γενίκευση 3η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο (πλάγιο), τότε και τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα είναι ισεμβαδικά αλλά όχι ίσα (Σχήμα 4.21).

♦ Γενίκευση 4η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο είναι τραπέζιο, τότε τα τμήματα που ορίζονται από τις αντίστοιχες κορυφές, μία προς μια, των εσωτερικών τετράπλευρων, είναι παράλληλα με τις παράλληλες πλευρές του τραπεζίου (αναγκαία συνθήκη η παραλληλία των απέναντι πλευρών, Σχήμα 4.19).

♦ Γενίκευση 5η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο είναι τετράγωνο, τότε και τα εσωτερικά είναι τετράγωνα (Σχήμα 4.17).

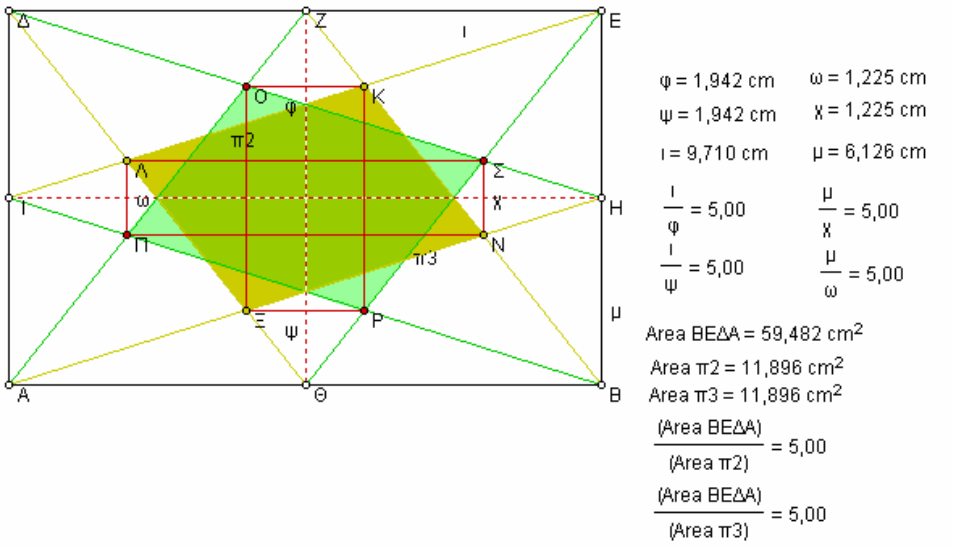
♦ Γενίκευση 6η: αν το εξωτερικό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, τότε το εμβαδόν του είναι πέντε φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν του καθενός από τα δυο εσωτερικά τετράπλευρα (γενικά δεν ισχύει η αναλογία 5:1).

Επίσης οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν μια υπόθεση, που δεν μπορούν να την αποδείξουν, αλλά και δυο άλυτα προβλήματα (*Geometry Turned On,* 1997, σελ. 67)

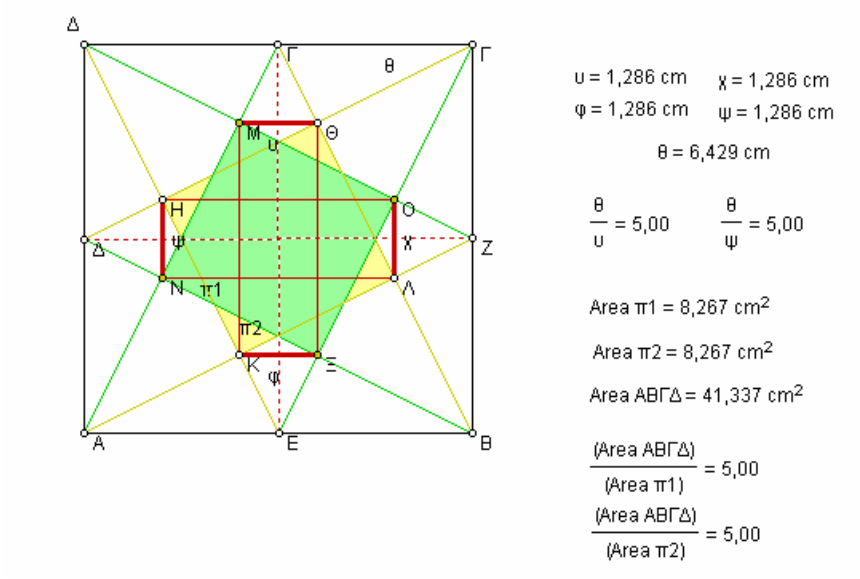
♦ Υπόθεση 1η: το εμβαδόν του εξωτερικού τετράπλευρου είναι τουλάχιστον πέντε φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν του καθενός από τα εσωτερικά τετράπλευρα.

♦ Άλυτο πρόβλημα 1: κάτω από ποιες (κοινές) προϋποθέσεις θα μπορούσε τα εσωτερικά τετράπλευρα να είναι ισεμβαδικά για οποιοδήποτε τετράπλευρο.

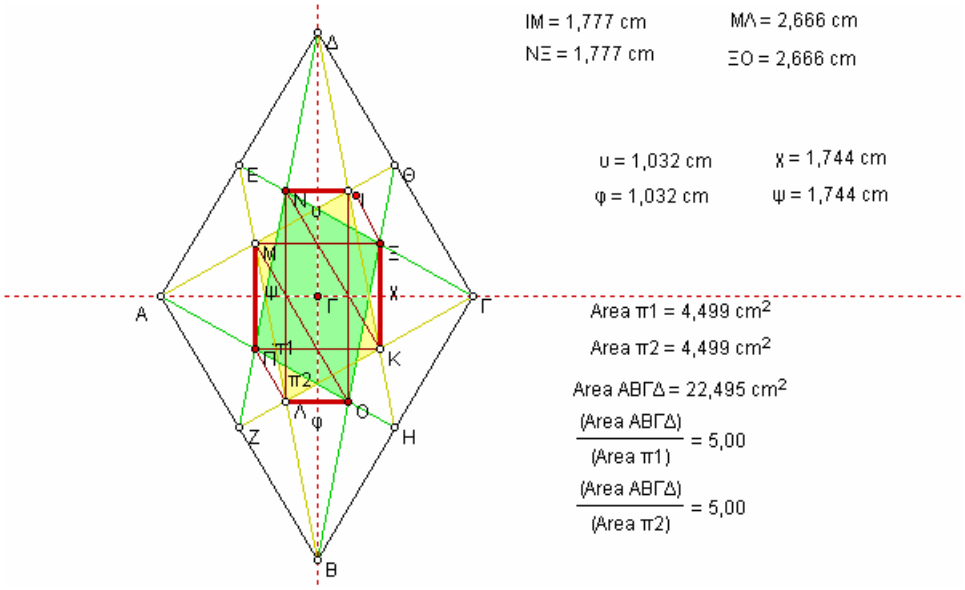
♦ Άλυτο πρόβλημα 2: κάτω από ποιες (κοινές) προϋποθέσεις θα μπορούσε τα εσωτερικά τετράπλευρα να είναι ίσα για οποιοδήποτε τετράπλευρο.



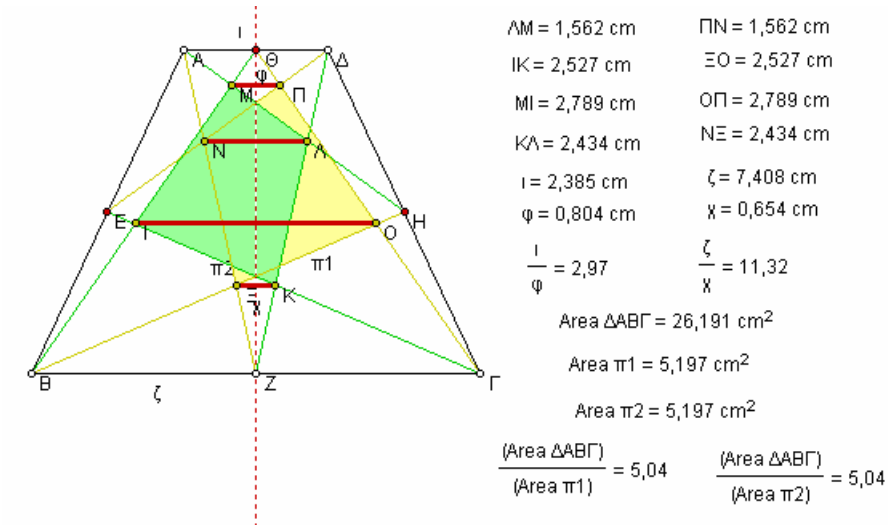
Σχήμα 4.16



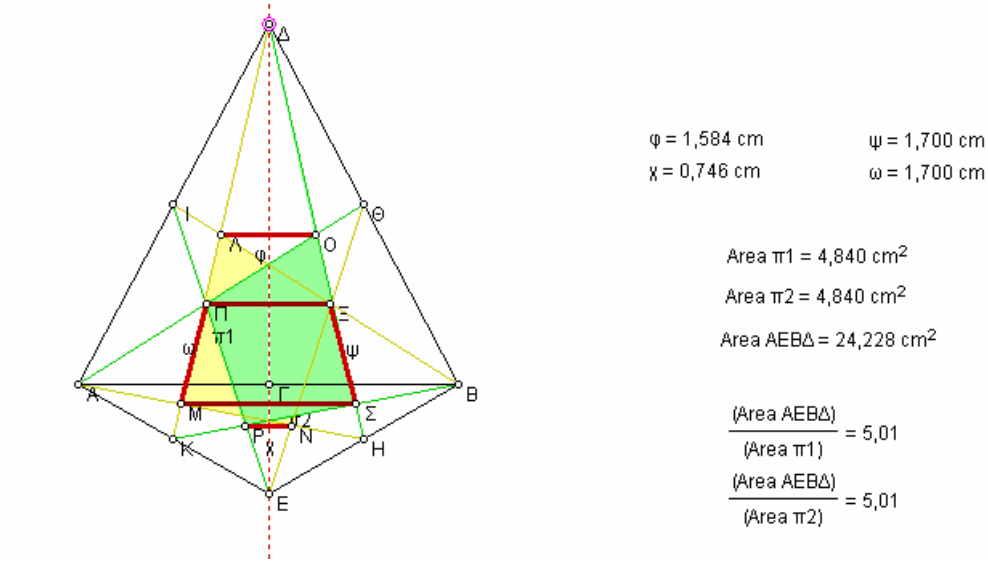
Σχήμα 4.17



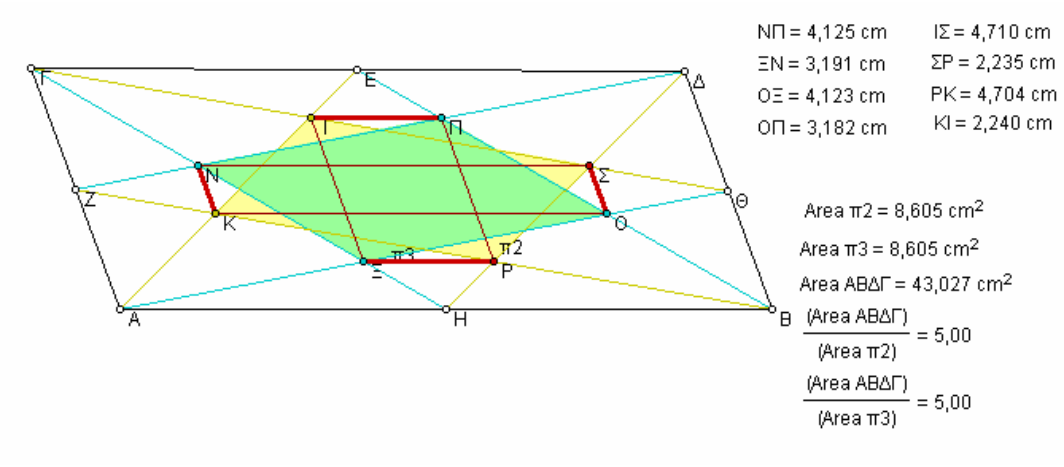
Σχήμα 4.18



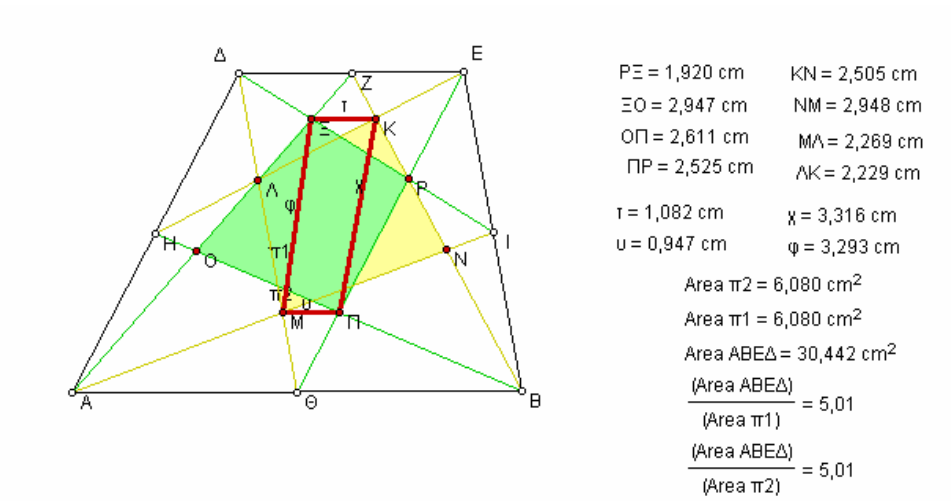
Σχήμα 4.19



Σχήμα 4.20



Σχήμα 4.21



Σχήμα 4.22

Πνευματική Πρόκληση

Η απόδειξη ως *πνευματική πρόκληση* είναι συνώνυμη με την αυτοπραγμάτωση, την εσωτερική ικανοποίηση που προέρχεται από την κατασκευή μιας απόδειξης. Οι μαθηματικοί αντιλαμβάνονται την απόδειξη ως μια γοητευτική πνευματική πρόκληση, ένα ευχάριστο χόμπι. Κατά τον de Villiers (2002), το να μπορεί κάποιος να κάνει

αποδείξεις στα μαθηματικά θα μπορούσε ίσως να συγκριθεί με την ικανοποίηση που ακολουθεί τον τερματισμό σε έναν αγώνα μαραθώνιου ή του τριάθλου. Από αυτή την άποψη, η απόδειξη εξυπηρετεί τη λειτουργία της αυτοπραγμάτωσης και της εσωτερικής ευχαρίστησης, και προσφέρεται ως γόνιμο έδαφος, για να εξεταστεί η διανοητική αντοχή και η ευστροφία του μαθηματικού (de Villiers, 1999).

Πνευματική Πρόκληση και Δυναμική Γεωμετρία

Αφενός, σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας η διερεύνηση με το σύρσιμο μιας διατυπωμένης υπόθεσης εύκολα μπορεί να παράγει συναισθήματα βεβαιότητας ή και αβεβαιότητας και να δημιουργήσει προσδοκίες. Αφετέρου, οι καλοσχεδιασμένοι διδακτικοί στόχοι δημιουργούν μια γνωστική σύγκρουση και μια πνευματική περιέργεια για να κατανοηθεί γιατί η αναμενόμενη ιδιότητα δεν είναι αληθής (δείτε πρόβλημα 1 ανωτέρω).

Στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας η ακρίβεια της κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων και η προσέγγιση των πολλαπλάσιων μορφών τους με το σύρσιμο, παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές, ώστε μέσα από το 'παιχνίδι' και την εξερεύνηση (Papert, 1980), να κάνουν συνδέσεις με την προηγούμενη γνώση τους, και ένα κίνητρο για οδηγήσουν τη σκέψη τους σε περιοχές που η μαθηματική φαντασία μόνη της δεν μπορεί να φτάσει. Η αμεσότητα των μαθητών με το αντικείμενο έχει επιπτώσεις στη γνωστική και στη συναισθηματική τους ανάπτυξη και αναπτερώνει το ενδιαφέρον τους για τη μαθηματική κατάσταση (Sinclair, 2002). Η δυναμική φύση του λογισμικού μπορεί να επιτρέψει στους μαθητές να οδηγηθούν σε εντυπωσιακά αποτελέσματα (διατύπωση γενικεύσεων ανωτέρω) και μπορεί να οδηγήσει στην ανακάλυψη και

απόδειξη προβλημάτων, ανεξάρτητων από το αρχικό, αλλά και στην εφαρμογή τους σε άλλα παρόμοια.

Όπως παρατηρεί η Sinclair (2002), η ελκυστικότητα της γεωμετρικής μορφής στην οθόνη του υπολογιστή εκπλήσσει και ευχαριστεί και μπορεί να οδηγήσει σε απαντήσεις που είναι, όχι μόνο, χρήσιμες για τη σημασία ή την αξία ενός μαθηματικού αποτελέσματος, αλλά μπορεί να καθοδηγήσει τη μαθηματική έρευνα και να συμβάλλει στα συναισθήματα προσωπικής ικανοποίησης και ευχαρίστησης.

Συστηματοποίηση

Η λειτουργία της απόδειξης ως *συστηματοποίηση* αναφέρεται στην κατάταξη ή οργάνωση διάφορων αποτελεσμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Η απόδειξη ως συστηματοποίηση, είναι ένα αναγκαίο εργαλείο για τη οργάνωση της αποκτηθείσας γνώσης σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων, αφού αποκαλύπτει τις υφιστάμενες σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών προτάσεων με τρόπους που η εμπειρική δοκιμή και η καθαρή διαίσθηση δεν μπορεί.

Ο de Villiers (1999, 2002) υποστηρίζει ότι η παραγωγική συστηματοποίηση:

- Βοηθά στην αναγνώριση αντιφάσεων μεταξύ φανερών και μη σαφώς διατυπωμένων υποθέσεων.
- Ενώνει και απλοποιεί τις μαθηματικές θεωρίες με την ενσωμάτωση ανεξάρτητων προτάσεων, θεωρημάτων και εννοιών, πετυχαίνοντας με αυτόν τον τρόπο μια οικονομική παρουσίαση αποτελεσμάτων.

- Παρέχει μια χρήσιμη σφαιρική προοπτική ενός θέματος με την έκθεση της υφιστάμενης αξιωματικής δομής εκείνου του θέματος από το οποίο όλες οι άλλες ιδιότητες μπορούν να προέλθουν.
- Είναι χρήσιμη για εφαρμογές τόσο μέσα όσο και έξω από τα μαθηματικά και
- οδηγεί συχνά σε εναλλακτικά παραγωγικά συστήματα που παρέχουν νέες προοπτικές ή είναι πιο οικονομικά και ισχυρά από τα ήδη υπάρχοντα.

Μερικά στοιχεία της επαλήθευσης είναι παρόντα στις λειτουργίες της συστηματοποίησης. Όμως, ο κύριος στόχος της δεν είναι να ελεγχθούν αν οι προτάσεις είναι πραγματικά αληθείς, αλλά να οργανωθούν λογικά οι ανεξάρτητες μεμονωμένες προτάσεις που ήδη είναι γνωστές ώστε να είναι αληθείς σε ένα συνεπές ενοποιημένο σύνολο.

Με δεδομένο ότι καθένας με λίγη εμπειρία στην απόδειξη μπορεί να επαληθεύσει, στα πραγματικά μαθηματικά η καθαρή λειτουργία της απόδειξης ως συστηματοποίησης έρχεται στην επιφάνεια μόνο σε ένα πολύ προχωρημένο επίπεδο. Καθώς η γεωμετρική σκέψη των μαθητών εξελίσσεται από το διαισθητικό επίπεδο στο θεωρητικό και οι άλλες λειτουργίες της απόδειξης μπορούν να εισαχθούν βαθμιαία, αλλά η λειτουργία της συστηματοποίησης πρέπει να καθυστερήσει έως ότου οι μαθητές φτάσουν στα ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης ($3^{ο}$ και $4^{ο}$ επίπεδα van Hiele) (de Villiers,1999).

Συστηματοποίηση και Δυναμική Γεωμετρία

Ερευνητικές μελέτες έδειξαν ότι η λειτουργία της συστηματοποίησης σπάνια επιτυγχάνεται στις σχολικές τάξεις και ότι ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, μέσα

από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες μπορεί να ωθήσει τους μαθητές στη συστηματοποίηση των συμπερασμάτων τους (Villiers 1999, 2002· Handas et al., 2000).

Η λειτουργία της απόδειξης ως συστηματοποίηση μπορεί να κάνει την εμφάνισή της και στο αρχικό μας πρόβλημα 1. Μια διάκριση των κυρτών τετράπλευρων του προβλήματος 1 ως προς την έννοια της ισεμβαδικότητας και κατ' επέκταση την έννοια της ισότητας των μεσοδιαγώνιων τετράπλευρων με κριτήρια την παραλληλία των απέναντι πλευρών και την ύπαρξη ή μη άξονα συμμετρίας στα κυρτά τετράπλευρα, όπως προκύπτει από τις ανωτέρω διατυπωμένες γενικεύσεις, μπορεί να είναι η ακόλουθη (Σχήμα 4.23).

Επικοινωνία

Η απόδειξη ως *επικοινωνία* αναφέρεται στη λειτουργία της μεταβίβασης ή της ανταλλαγής της μαθηματικής γνώσης μεταξύ των μελών μιας μαθηματικής κοινότητας, επιστημονικής ή σχολικής τάξης των μαθηματικών. Η επικοινωνία κατά τον Vygotsky (1987) είναι ένα πολιτισμικό γεγονός και η γλώσσα είναι πρωτίστως ένα εργαλείο επικοινωνίας. Η απόδειξη από την ίδια της τη φύση είναι μια μορφή επικοινωνίας, αφού χρησιμοποιεί το λόγο, γραπτό ή προφορικό, για την ανακοίνωση ενός μαθηματικού επιχειρήματος. Η απόδειξη είναι ένας μοναδικός τρόπος μετάδοσης και κοινοποίησης των μαθηματικών αποτελεσμάτων μεταξύ των επιστημόνων, μεταξύ δασκάλων των μαθηματικών και των μαθητών και μεταξύ των ίδιων των μαθητών.

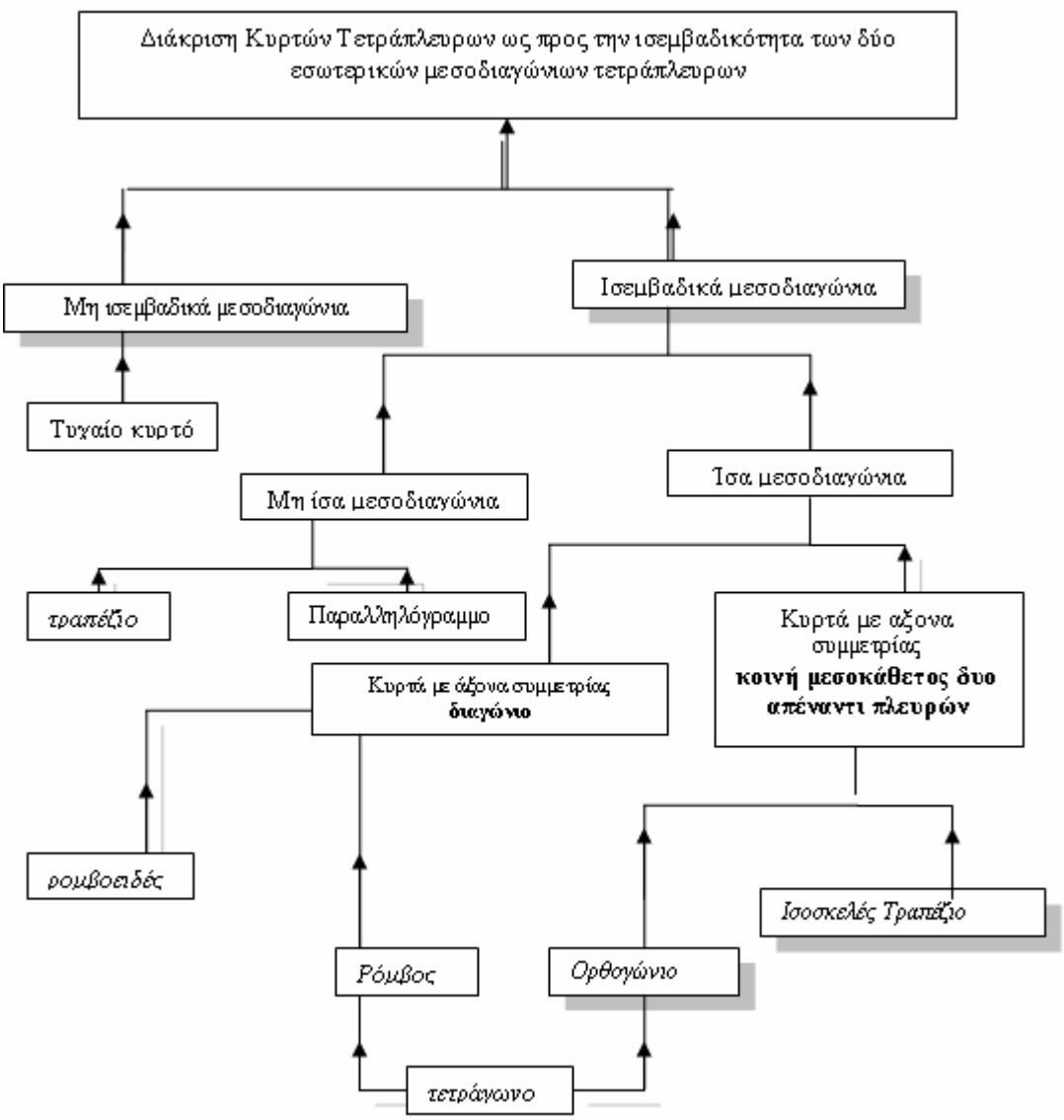
Κατά τους Davis και Hersh (1981) όταν η απόδειξη εκτίθεται στην εξονυχιστική έρευνα και την κρίση ενός νέου ακροατηρίου, υπόκειται σε μια διαρκή διαδικασία κριτικής και επανεξέτασης. Η έκθεση της απόδειξης ενός γεγονότος διασαφηνίζει

σφάλματα, αμφιβολίες και παρανοήσεις και αποκαλύπτει τη ουσία του, με αποτέλεσμα να αποτελέσει έναυσμα για νέα μαθηματικά.

Επικοινωνία και Δυναμική Γεωμετρία

Η λειτουργία της επικοινωνίας είναι παρούσα σε όλη τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Αφενός ο δάσκαλος διαπραγματεύεται με τους μαθητές συνεχώς τα κριτήρια για το τι αποτελεί απόδειξη, και αφετέρου οι μαθητές πρέπει να ανακοινώσουν τους ισχυρισμούς τους, προκειμένου να γίνουν πιστευτοί για την αλήθεια των ισχυρισμών τους.

Κατά τον de Villiers (1999, 2002), η απόδειξη ως μορφή αλληλεπίδρασης, περιλαμβάνει υποκειμενικά τη διαπραγμάτευση, όχι μόνο των σημασιών των εμπλεκόμενων εννοιών, αλλά κάνει σαφή και τα κριτήρια για ένα αποδεκτό επιχείρημα. Στη συνέχεια ένα τέτοιο κοινωνικό φιλτράρισμα μιας απόδειξης μέσα από συζητήσεις συμβάλλει στον προσδιορισμό των λαθών ή στην απόρριψη της προς απόδειξη πρότασης με την ανακάλυψη ενός αντιπαραδείγματος.


Διάκριση Κυρτών Τετράπλευρων ως προς την ισεμβαδικότητα των δύο εσωτερικών μεσοδιαγώνιων τετράπλευρων
Μη ισεμβαδικά μεσοδιαγώνια
Ισεμβαδικά μεσοδιαγώνια
Τυχαίο κυρτό
Μη ίσα μεσοδιαγώνια
Ίσα μεσοδιαγώνια
τραπέζιο
Παραλληλόγραμμο
Κυρτά με άξονα συμμετρίας διαγώνιο
Κυρτά με αξονα συμμετρίας κοινή μεσοκάθετος δυο απέναντι πλευρών
ρομβοειδές
Ισοσκελές Τραπέζιο
Ρόμβος
Ορθογώνιο
τετράγωνο

Σχήμα 4.23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η αποτυχία να διδαχθούν οι αποδείξεις, η αναγνώριση ότι η δραστηριότητα της παρουσίασης αποδείξεων οφείλει να συμμορφωθεί με τα κίνητρα του μαθητή και η εμφάνιση των δυναμικών εργαλείων (Hadas et al., 2000) έχουν κάνει το συλλογισμό, την απόδειξη και την επιχειρηματολογία σημαντικά ζητήματα εμπειρικής έρευνας για τα σχολικά μαθηματικά, μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο συζητήσεων για το ρόλο της απόδειξης στα μαθηματικά και ειδικότερα στα σχολικά μαθηματικά.

Ο Ρόλος της Απόδειξης

Υπήρξαν και ακόμη υπάρχουν συγκρουόμενες απόψεις μεταξύ των μαθηματικών, των ιστορικών των μαθηματικών, των φιλοσόφων των μαθηματικών και των εκπαιδευτικών μαθηματικών για το τι πραγματικά είναι η απόδειξη, ποιος είναι ο ρόλος της στα μαθηματικά και τι είναι αυτό που καθιστά μια απόδειξη αποδεκτή (Hanna, 2000). Όμως μια αυστηρή απόδειξη, με δεδομένη την εγκυρότητά της από την άποψη της τυπικής προέλευσης, γίνεται πραγματικά πειστική, νόμιμη και πολυτιμότερη μόνο αν οδηγεί στην πραγματική μαθηματική κατανόηση (Hanna, 2000).

Ο ρόλος της απόδειξης στα μαθηματικά έχει συνέπειες για τη διδασκαλία της στα σχολικά μαθηματικά. Αφενός, η κοινή βάση γνώσης των σπουδαστών διαφέρει από αυτήν της μαθηματικής κοινότητας. Επομένως, κάποιος πρέπει να δεχθεί και άλλα είδη αποδείξεων στην τάξη των μαθηματικών. Αφετέρου, οι μαθητές πρέπει να

γνωρίσουν την ακριβή εικόνα των μαθηματικών και ειδικότερα στο Λύκειο πρέπει να προετοιμαστούν για τα επιστημονικά μαθηματικά, τα οποία διαδραματίζουν έναν ουσιαστικό ρόλο σε πολλές περιοχές στο πανεπιστημιακό επίπεδο. Συνεπώς, η απόδειξη στη σχολική τάξη θα πρέπει να στοχεύει στη συναίνεση της μαθητικής κοινότητας, να είναι πιθανώς λιγότερο αυστηρής φύσης (Heinze & Reiss, 2003) και να λειτουργεί ως ένα επεξηγηματικό εργαλείο, ώστε να ασκήσει το ρόλο της ως μορφή μαθηματικής αιτιολόγησης (Hanna, 2000).

Παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά θεωρούνται ως η επιστήμη των αποδείξεων, ο ρόλος της απόδειξης στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών δεν απεικονίζει πάντα αυτή τη σημασία και είναι ένα σημαντικό αντικείμενο συζήτησης σε διάφορες χώρες κατά την διάρκεια των τελευταίων είκοσι και πλέον ετών (Hanna, 2000). Οι συζητήσεις για το ρόλο της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά διχάζουν τους ερευνητές και τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών, υπάρχει πολύ λίγη ομοφωνία για τη μέθοδο με την οποία, *πότε*, *γιατί, σε ποιον ή ποιους* να διδαχθεί, η δε καταλληλότητά της για τα σχολικά μαθηματικά τίθεται υπό συζήτηση (Steen, 1999). Έχουν υπάρξει αμφισβητήσεις για τη θέση της απόδειξης στα ίδια τα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων των προβλέψεων «θάνατος της απόδειξης» (Horgan 1993, αναφορά στο Hoyles et al., 2002). Η κίνηση των νέων μαθηματικών στις δεκαετίες του ’50 και του ’60 προς μια απόδειξη που δίνει έμφαση στην αυστηρότητα και την ακαμψία, οι εντατικές συζητήσεις στις δεκαετίες του ’70 και του ’80 ως προς το εάν οι αποδείξεις πρέπει να είναι ακόμα μέρος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Reiss & Renkl, 2002) και οι νεότερες εξελίξεις και στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν θέσει υπό αμφισβήτηση το ρόλο της απόδειξης στα μαθηματικά και ειδικότερα αυτό που

καθιστά μια απόδειξη αποδεκτή (Hanna, 2000). Οι παρεχόμενες από τους υπολογιστές δυνατότητες για δημιουργία και επαλήθευση εξαιρετικά πολύπλοκων αποδείξεων οδήγησε στην ανάπτυξη νέων τύπων αποδείξεων και όχι μόνο προσέδωσε στον πειραματισμό χαρακτηριστικά μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά προτάθηκε ως μια εναλλακτική λύση στην απόδειξη, ως μια εξίσου έγκυρη μορφή μαθηματικής επικύρωσης (Hanna, 1996). Η επιρροή αυτών των εξελίξεων στα μαθηματικά ενισχύθηκε και από τις αντιλήψεις μερικών εκπαιδευτικών των μαθηματικών, εμπνεόμενων από την άποψη του Lakatos (1976) για το ρόλο της απόδειξης. Ότι δηλαδή, ο ρόλος της απόδειξης συνίσταται στην κριτική των μαθηματικών συμπερασμάτων και όχι στην καθιέρωση της αλήθειάς τους, και ως τέτοια αποτελεί την κινητήρια δύναμη στην αύξηση της μαθηματικής γνώσης, η δε παραγωγική απόδειξη δεν είναι κεντρική στη μαθηματική ανακάλυψη, αλλά μπορεί και να εμποδίσει ακόμα και την εκμάθηση μεταξύ ορισμένων πολιτισμικών μονάδων (αναφορά στους Reid, 2002 και Hanna, 1996).

Η Hanna (2000) επισημαίνει ότι καμιά από τις εξελίξεις δεν υπονομεύει τη σημασία ή την αξία της απόδειξης και ότι πολλοί από τους διατυπωμένους ισχυρισμούς είναι είτε λανθασμένοι, είτε βασίζονται σε παρανοήσεις. Η απόδειξη αξίζει να έχει μια προεξέχουσα θέση στο πρόγραμμα σπουδών, επειδή συνεχίζει να είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των ίδιων των μαθηματικών, ως η μόνη συνιστώμενη μέθοδος επαλήθευσης, και επειδή είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τη μαθηματική κατανόηση.

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια προσπάθεια επαναπροσδιορισμού της φύσης των σχολικών μαθηματικών, τι σημαίνει κάνω μαθηματικά στο σχολείο, πώς οι μαθηματικές έννοιες μαθαίνονται και πώς μπορούν να διδαχθούν. Η νέα έκδοση των

NCTM (2000) συστήνει το συλλογισμό και την απόδειξη ως απαραίτητο μέρος του αναλυτικού προγράμματος της διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Οι στόχοι που θέτει είναι ότι οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν το συλλογισμό και την απόδειξη ως θεμελιώδεις πτυχές των μαθηματικών, να κάνουν και να ερευνούν μαθηματικές υποθέσεις, να αναπτύσσουν και να αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις, να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν τους διαφόρους τύπους συλλογισμών και μεθόδων απόδειξης.

Κατηγορίες Ερευνητικών Προσεγγίσεων

Στην έρευνα για τη διδασκαλία και την εκμάθηση της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, και ιδιαίτερα στη γεωμετρία, διακρίνονται οι ακόλουθες βασικές προσεγγίσεις (Hershkowitz, 1989· αναφορά στο Κολέζα, 2000, σελ.266-267). Σε μια πρώτη προσέγγιση ο στόχος είναι η διατύπωση μιας θεωρίας και στη συνέχεια η επιβεβαίωσή της ή απόρριψή της με βάση τα ερευνητικά δεδομένα (*top-down*). Χαρακτηριστικό αυτής της προσέγγισης στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών, και ιδιαίτερα στη γεωμετρία, είναι η επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων που να ταιριάζουν στη διατυπωμένη θεωρία και που δεν αντανακλούν απαραίτητα την πραγματικότητα των μαθητών. Στόχος της δεύτερης προσέγγισης (*bottom-up*), η οποία είναι και η επικρατέστερη, είναι η κατανόηση και η ερμηνεία των δυνατοτήτων των μαθητών και των διαδικασιών που αυτοί ακολουθούν. Κατά την προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται μια ήδη διατυπωμένη θεωρία ως εργαλείο για να εξηγηθούν οι καταστάσεις και να αναλυθούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την έρευνα, προκειμένου να διατυπωθούν συμπεράσματα που οδηγούν στη βελτίωση των ήδη υπαρχόντων θεωριών ή στη διατύπωση νέων.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις εξετάζονται από την ερευνητική κοινότητα των μαθηματικών ερωτήματα για τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης με τη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης, την παραγωγή και την κατανόηση της φύσης της από διαφορετικές σκοπιές: ιστορικά, επιστημολογικά, γνωστικά και διδακτικά (Olivero, 2000). Οι δυσκολίες αυτές προκύπτουν από τη συνύπαρξη συγκεκριμένων διαδικασιών, σχετικών με το πλαίσιο - ιστορικό, επιστημολογικό, γνωστικό και διδακτικό - των σχολικών μαθηματικών γενικά ή των επιμέρους πλαισίων τους (άλγεβρα ή γεωμετρία). Τα μεν συμπεράσματα από τις ιστορικές και επιστημολογικές μελέτες έχουν δείξει ότι η απόδειξη είναι σημαντική για τα μαθηματικά, τα δε, από τις γνωστικές και διδακτικές μελέτες, μπορούν να φανούν χρήσιμα εργαλεία για τη διαμόρφωση νέων διδακτικών προτάσεων (Recio & Godino, 2001), με στόχο την επιτυχή διδασκαλία και εκμάθηση της απόδειξης από τους μαθητές (Olivero, 2000).

Περιοχές Ερευνητικών Προσεγγίσεων

Στη έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για τα προβλήματα διδασκαλίας και εκμάθησης της απόδειξης στη σχολική τάξη (Hanna, 2000). Αναζητούνται εναλλακτικές ερμηνείες των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τη διδασκαλία και εκμάθηση της απόδειξης (Recio & Godino, 2001). Στόχος των ερευνών δεν είναι μόνο να βρεθούν οι τρόποι μέσω των οποίων θα βελτιωθεί η ικανότητα των μαθητών στην παρουσίαση μιας τυπικής μαθηματικής απόδειξης. Σκοπός είναι να μελετηθεί η εξέλιξη της κατανόησης από τους μαθητές της φύσης της μαθηματικής απόδειξης (*γνωστικός χαρακτήρας* της

απόδειξης), ώστε να ανακαλυφθεί με ποιον τρόπο θα μπορούσε αυτή η κατανόηση να βελτιωθεί με παράλληλη ανάπτυξη των αποδεικτικών τους δεξιοτήτων.

Μια πλήρης αξιολόγηση των αποδεικτικών δεξιοτήτων έχει να κάνει τόσο με τις *παραγόμενες εκτιμήσεις* (δηλαδή τις δικαιολογίες ή τα επιχειρήματα που παράγονται από τους μαθητές), όσο και με τις *διαδικασίες* (δηλαδή τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές χρησιμοποιούν τα όποια επιχειρήματά τους για να παράγουν τις αιτιολογίες τους και να κάνουν αποδείξεις) προκειμένου να βρεθούν τα στοιχεία που είναι ικανά να οδηγήσουν στην απόδειξη (Marrades & Gutierrez, 2000). Αυτή η αλλαγή των στόχων της έρευνας προέκυψε εν μέρει από την πεποίθηση ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι ικανοί να αρχίσουν να μαθαίνουν τις μεθόδους της τυπικής απόδειξης ξαφνικά, αλλά χρειάζεται χρόνος και εμπειρία (Mariotti, 2001, 1997).

Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης θέλουν να γνωρίζουν *πώς αναπτύσσονται οι αποδεικτικές ικανότητες των μαθητών* και ποιες είναι *οι πεποιθήσεις και αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της απόδειξης*. Δηλαδή, ποιο είδος συλλογισμού και ποια είδη επιχειρημάτων και αποδείξεων βοηθούν στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων απόδειξης των μαθητών (Balacheff, 1988· Harel & Sowder, 1998· Mariotti, 1997· Marrades & Gutierrez, 2000· Recio & Godino, 2001· Simon, 1996). Μέσω ποιων διαδικασιών μπορεί να υπάρξει σύνδεση μεταξύ της διερευνητικής φάσης επίλυσης προβλήματος και της επόμενης φάσης, στην οποία όλα τα κομμάτια που ανεπίσημα ανακαλύπτονται αναδιοργανώνονται σε επικυρωμένες προτάσεις (Arzarello et al.,2002· Boero et al., 1996· Olivero, 1999· Simon, 1996). Ποιος ο ρόλος της διαίσθησης στη μετάβαση από την πράξη στη θεωρία, από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη (Hanna, 2000· Mariotti 1998). Τι

σημαίνει για τους μαθητές η έννοια της απόδειξης και πώς ερμηνεύουν την έκφραση ‘κάνω απόδειξη’ (Reid, 2002). Πότε πείθονται οι μαθητές ότι μια πρόταση είναι αληθής (Sowder & Harel, 1998).

Μια άλλη πιο σύγχρονη προσέγγιση αφορά τη διερεύνηση του ρόλου του κοινωνικού πλαισίου στην κατανόηση της φύσης της απόδειξης από τους μαθητές (*κοινωνικός χαρακτήρας της απόδειξης*) και στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων απόδειξης απ’ αυτούς (Stylianou & Blanton, 2003· Harel & Sowder, 1998· Laborde, 2000· Gerulli & Mariotti, 2003 κ.ά.). Αφορά την εξέταση των διαδικασιών μέσα από τις οποίες αναπτύσσεται γενικά η μαθηματική γνώση από μια κοινωνικοπολιτιστική άποψη και την ερμηνεία των μαθηματικών αντικειμένων ως πολιτισμικών οντοτήτων κοινών για τα μέλη μιας κοινωνίας (Recio & Godino, 2001). Η βασική ιδέα είναι ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν και χτίζουν τη γνώση αλληλεπιδρώντας ο ένας με τον άλλο και ως εκ τούτου οι ατομικές και κοινωνικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης είναι αλληλένδετες. Στην προσέγγιση αυτή διερευνώνται ερωτήματα που προκύπτουν από τη συνύπαρξη του εξωτερικού πλαισίου (περιβάλλον και διαθέσιμα πολιτισμικά εργαλεία) και των εσωτερικών πλαισίων του δασκάλου και του μαθητή (Mariotti, 2000). Υποστηρίζεται η άποψη ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των ανωτέρω πλαισίων μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας και των αποδεικτικών δεξιοτήτων μεταξύ των μαθητών (Douek & Pichat, 2003).

Συγκεκριμένα, διερευνώνται ποια χαρακτηριστικά πρέπει να έχουν μαθησιακά περιβάλλοντα ώστε να είναι ικανά να συμβάλουν θετικά στην αποδεικτική διαδικασία (Laborde, 2000). Με ποιον τρόπο τα μαθησιακά περιβάλλοντα μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές στη μετάβαση από τη διερεύνηση στον πιο τυπικό συλλογισμό και τις αποδείξεις, στη διάκριση μεταξύ εμπειρικών στοιχείων και

αναλυτικού επιχειρήματος και στην παροχή κινήτρου για απόδειξη (Healy, 2000· Mariotti & Bartolini Bussi, 1998 κ.ά.). Ποιος είναι ο ρόλος που τα δυναμικά περιβάλλοντα διαδραματίζουν στα στάδια ανάπτυξης μιας απόδειξης (de Villiers, 1998, 2002· Jones, 2000· Marrades & Gutierrez, 2000· Mariotti, 2000· Hadas et al., 2000).

Ο Ρόλος της Διαίσθησης στην Αποδεικτική Διαδικασία

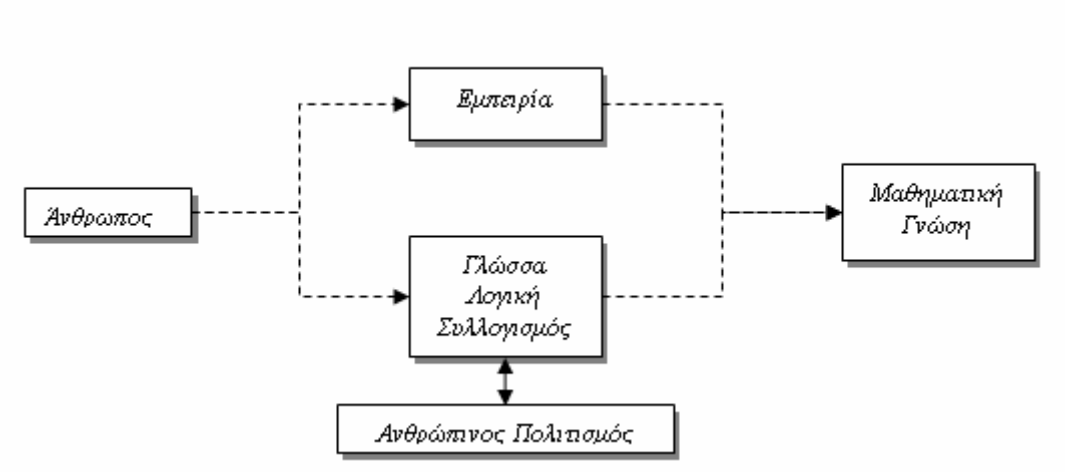
Ένα προσφιλές θέμα της έρευνας για την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά είναι η σχέση μεταξύ των εμπειρικών και παραγωγικών επιχειρημάτων. Διάφορα θεωρητικά πλαίσια έχουν διατυπωθεί, στην προσπάθεια να διερευνηθεί κατά πόσο υπάρχει μια συνέχεια και μια σύνδεση μεταξύ των φάσεων της απόδειξης που χρησιμοποιούν τη διαίσθηση και εκείνων που χρησιμοποιούν τη θεωρία. Συγκεκριμένα, από τη φάση της διερεύνησης στον πιο τυπικό συλλογισμό και τις αποδείξεις, από την *επιχειρηματολογία στην απόδειξη*, από τη συλλογή εμπειρικών στοιχείων στο αναλυτικό επιχείρημα. Πρόσφατες μελέτες στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν τονίσει την ύπαρξη συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών πτυχών της διαδικασίας παρουσίασης απόδειξης (Mariotti, 2001, 2000, 1998· Harel & Sowder, 1998· Simon, 1996· κ.ά.). Άλλοι ερευνητές υπογραμμίζουν το γνωστικό και επιστημολογικό χάσμα μεταξύ της επιχειρηματολογίας και απόδειξης (Duval, 1991, στο Healy, 2000). Σε μια ενδιάμεση θέση βρίσκεται η ανάλυση των φάσεων μετάβασης στην απόδειξη από τους Balacheff, (1988), Bell, (1976a,b) και Marrades & Gutierrez, (2000) με την ταξινόμηση των τύπων συλλογισμού και επιχειρημάτων (αιτιολογίες).

Από πολλούς ερευνητές επισημαίνεται ο κρίσιμος ρόλος της διαίσθησης στη μαθηματική ανακάλυψη και εφεύρεση (Mariotti, 1998). Οι περισσότεροι ερευνητές έντονα υπογραμμίζουν ότι η διαίσθηση εξαρτάται από την εμπειρία και δεν είναι απλά μια έμφυτη, φυσική δραστηριότητα, αλλά αναπτύσσεται συνήθως από τη διερεύνηση και τον επιδέξιο χειρισμό των μαθηματικών αντικειμένων (de Villiers, 2002). Τέτοια εμπειρία όχι μόνο παραπέμπει στον τυπικό λογικό χειρισμό, αλλά και στην πειραματική διερεύνηση των μαθηματικών αντικειμένων.

Η κρίσιμη για τα μαθηματικά σχέση μεταξύ της εμπειρικής αλήθειας και της λογικής εγκυρότητας είναι σύνθετη και λεπτή, είναι μια σχέση μεταξύ διαισθητικής και θεωρητικής προσέγγισης των μαθηματικών γενικά. Η σχέση αυτή θεωρείται προβληματική, με την πλειοψηφία των μαθητών να μην μπορούν να διακρίνουν μεταξύ του επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού και κατά συνέπεια μεταξύ εμπειρικών και παραγωγικών αποδείξεων (Healy, 2000). Κάποιοι ερευνητές παραλληλίζουν το γνωστικό χάσμα μεταξύ των διαφορετικών τρόπων συλλογισμού με το επιστημολογικό χάσμα μεταξύ της συνηθισμένης επιχειρηματολογίας – στην οποία οι αναφορές στα εμπειρικά στοιχεία γίνονται κοινά αποδεκτές – και της μαθηματικής απόδειξης (Balacheff, 1988· Duval, 1991· αναφορά στο Healy, 2000).

Με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο είναι αδύνατο να συλληφθεί μια θεωρία που είναι άδεια από διαισθητικά νοήματα, έτσι και τα μαθηματικά δε νοούνται αποκομμένα από τη θεωρητική τους οργάνωση, που είναι τα αξιώματα, τα θεωρήματα και οι ορισμοί. Τα θεωρήματα είναι βασικά στοιχεία της μαθηματικής γνώσης, οργανώνονται σε μια συγκεκριμένη θεωρία και μπορούν να εκληφθούν ως προϊόν της διαδικασίας απόκτησης γνώσης. Αποκτώνται είτε άμεσα, μέσω της

εμπειρίας με στοιχεία από τον πραγματικό κόσμο, είτε έμμεσα, με τη μεσολάβηση μέσων όπως η γλώσσα, η λογική και ο συλλογισμός (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1

Η Mariotti (1998) επισημαίνει ότι, λόγω αυτής της μεσολάβησης, είναι δύσκολη η δομική ενότητα μεταξύ της γνώσης και των αντιδράσεων προσαρμογής. Η γνώση μέσω του συλλογισμού γίνεται ένα αυτόνομο είδος δραστηριότητας και δεν υπόκειται σε περιορισμούς προσαρμογής της στη συμπεριφορά των ανθρώπινων όντων (Fichbein, 1982· αναφορά στο Mariotti, 1998). Μια κρίσιμη διαφοροποίηση εμφανίζεται μεταξύ της εμπειρικής επαλήθευσης και της τυπικής αφαίρεσης, με αποτέλεσμα η σχέσης τους να γίνεται προβληματική. Κατά συνέπεια, η απόκλιση μεταξύ της εμπειρικής επαλήθευσης (χαρακτηριστικό της ευρέως διαδεδομένης συμπεριφοράς) και του παραγωγικού συλλογισμού (χαρακτηριστικό της θεωρητικής συμπεριφοράς) είναι μια πηγή δυσκολιών, ένα εμπόδιο στην εκτίμηση της αίσθησης της αιτιολόγησης.

Οι Επιπτώσεις σε Διδακτικό Επίπεδο

Η Γεωμετρία είναι ένας τομέας των μαθηματικών που στηρίζεται στη διαίσθηση. Οι απόψεις, εντούτοις, ποικίλλουν για το πώς η γεωμετρική διαίσθηση

μπορεί να βοηθήσει ή να εμποδίσει στην εκμάθηση της γεωμετρίας (αλλά και άλλων τομέων των μαθηματικών). Οι Piaget και Van Hiele θεώρησαν τη «διαισθητική σκέψη» σημαντική στα αρχικά στάδια των προτύπων τους· άλλοι γεωμέτρες τείνουν να αναγνωρίσουν τη σημασία της γεωμετρικής διαίσθησης και στα τελευταία στάδια των προτύπων των Piaget και Van Hiele (Fujita et al., 2004).

Η παραγωγική γεωμετρία είναι ένα αυστηρά δομημένο σύστημα από αξιώματα, θεωρήματα και ορισμούς τα οποία καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων της. Στο πλαίσιό της κάθε ισχυρισμός είναι είτε δεδομένος, είτε μπορεί να παραχθεί από τα δεδομένα μέσω λογικών συλλογισμών. Επομένως, η παραγωγική γεωμετρία διαφέρει από τη γεωμετρία των παρατηρήσεων, η οποία δεν είναι καν δομημένο σύστημα και της οποίας στοιχεία είναι οπτικά αντικείμενα και κάθε ισχυρισμός που προκύπτει από την παρατήρηση μπορεί να γίνει αποδεκτός ως δεδομένο. Ως εκ τούτου, όπως επισημαίνει η Laborde (2000), φαίνεται να υπάρχει μια αλλαγή στα χαρακτηριστικά των αντικειμένων κατά τη μετάβαση από τη γεωμετρία της παρατήρησης και των οπτικών αποδεικτικών στοιχείων στη γεωμετρία των γεωμετρικών αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Αυτή η εννοιολογική μετατόπιση δεν υπονοεί ούτε ότι η διαισθητική- εμπειρική γνώση των μαθητών δεν είναι χρήσιμη όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα στόχο παρουσίασης αποδείξεων, ούτε ότι οι διαδικασίες επίλυσης που εφαρμόζονται κατά την απόδειξη ενός προβλήματος είναι καθαρά παραγωγικές. Η διαχείριση αυτής της σύνθετης σχέσης μεταξύ της διαίσθησης και της θεωρίας αποτελεί μια από τις κύριες δυσκολίες της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρία, και η σχολική πρακτική φαίνεται να παραμελεί ή και να υποτιμά τουλάχιστον τις δυσκολίες τις σχετικές με την

ασυμφωνία μεταξύ της πρακτικής και της θεωρητικής πλευράς της γεωμετρίας (Mariotti, 1997).

Εκτός από τις πιθανές αποκλίσεις μεταξύ της διαισθητικής και της θεωρητικής προσέγγισης, η διαίσθηση μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην πορεία προς την απόδειξη. Όταν η αλήθεια μιας προς απόδειξη πρότασης είναι προφανής, εμποδίζεται η διαδικασία της ανάλυσης των υπονοούμενων θεωρητικών συνδέσεων και κατά συνέπεια η κατασκευή της αναλυτικής δομής που αποτελεί μια απόδειξη δεν πραγματοποιείται. Σ' αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατό να γίνει κατανοητή η έννοια της απόδειξης, επειδή τα αυτονόητα στοιχεία, η αμεσότητα και το συναίσθημα βεβαιότητας, που χαρακτηρίζουν την πρόταση, μπορούν να εμποδίσουν οποιοδήποτε είδος επιχειρηματολογίας.

Στη σχολική πρακτική, η εμπειρική επαλήθευση και ο παραγωγικός συλλογισμός δεν είναι ξεκάθαρες διαδικασίες για τους μαθητές και δημιουργούν σύγχυση. Οι μαθητές μαθαίνουν, παραδείγματος χάριν, ότι η πρόταση «*σε οποιοδήποτε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι* 180^0» είναι αληθής, επειδή έχει αποδειχθεί από μαθηματική άποψη. Οι ίδιοι, όμως, έρχονται στην τάξη με την πεποίθηση ότι η γεωμετρία έχει κάτι να πει για τα τρίγωνα που βρίσκονται γύρω του, και συνήθως παρερμηνεύουν τον ισχυρισμό του δασκάλου τους ότι η τυπική αφαίρεση μπορεί να προσεγγιστεί από την εμπειρική αλήθεια (Hanna, 2000). Αλλά μια σχολική πρακτική, περιορισμένη στην επανάληψη αποδείξεων που άλλοι έχουν παραγάγει, και κάνοντας το ίδιο για προτάσεις, των οποίων η αλήθεια είναι αυτονόητη και δεν εμφανίζεται καμιά ανάγκη για αιτιολόγησή τους, είναι σίγουρο ότι θα εμποδίσει τους μαθητές να οικοδομήσουν τη σύνθετη σχέση μεταξύ της διαισθητικής και παραγωγικής προσέγγισης (Mariotti, 1998).

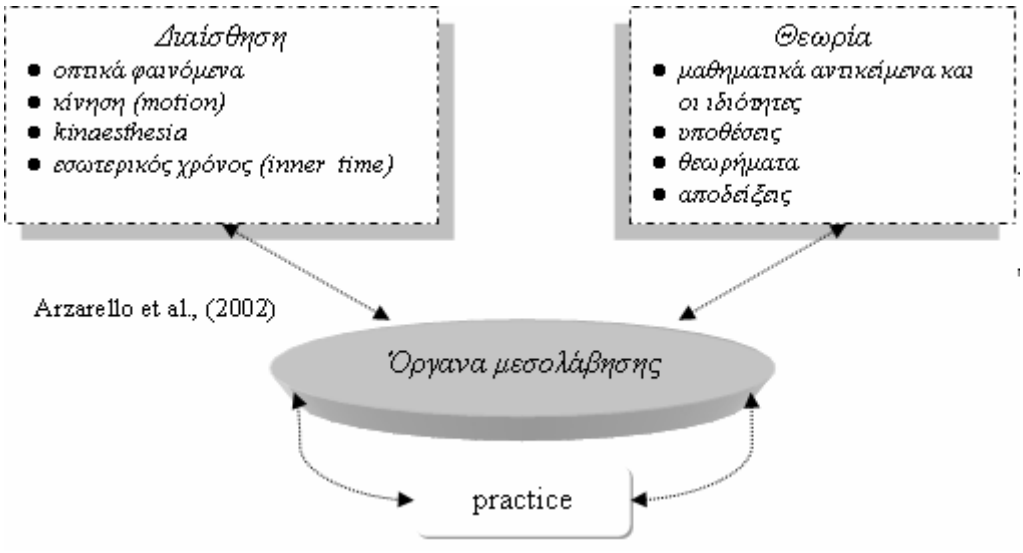
Οι Marrades & Guttierez (2000) συνηγορούν ότι η μετάβαση από τη διαίσθηση στη θεωρία είναι μακροχρόνια και αργή, η δε παραγωγική φάση δεν εμφανίζεται στην αρχή της διαδικασίας επίλυσης, αλλά μετά από διάφορες εμπειρικές προσεγγίσεις και, όταν εμφανίζεται, σχετίζεται και πάλι με εμπειρικές προσεγγίσεις. Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές, ακόμα και αν υποστηρίζουν ότι καταλαβαίνουν την απόδειξη, όταν τους παρουσιάζεται η απόδειξη ενός θεωρήματος πολύ συχνά αναζητούν την εμπειρική δοκιμή (Hanna, 2000· Mariotti, 1998). Εμπειρικές μελέτες επιβεβαιώνουν ότι η παραγωγή ενός κατάλληλου συνόλου γεωμετρικών παραδειγμάτων δε παρακινεί απαραίτητα τους μαθητές στην ανάγκη για μια παραγωγική αιτιολόγηση, δεν φαίνεται να υπάρχει καμιά φυσική πρόοδος από τον επαγωγικό στον παραγωγικό συλλογισμό (Healy, 2000).

Δυναμική Γεωμετρία και Διαίσθηση

Η φύση της σχέσης μεταξύ του διαισθητικού (perceptive) και του θεωρητικού επιπέδου είναι σύνθετη και απαιτεί μια ανάλυση από διαφορετικές προσεγγίσεις: *επιστημολογικές, γνωστικές, διδακτικές* Οι διαισθητικές πτυχές που πρέπει να αναλυθούν αφορούν πολλά συστατικά: *οπτικά φαινόμενα, κίνηση (motion), kinaesthesia, εσωτερικός χρόνος (inner time)*. Από την άλλη πλευρά, τα πιο θεωρητικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα είναι τα δομημένα *μαθηματικά αντικείμενα, οι αμετάβλητες ιδιότητές τους, οι υποθέσεις, τα θεωρήματα, οι αποδείξεις* (Arzarello et al., 2002).

Μέσα σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας η αλληλεπίδραση αφορά έντονα τις διαισθητικές πτυχές, οι οποίες περιλαμβάνουν όχι μόνο τα μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. σχέδια), αλλά και τις φυσικές διαισθήσεις των μαθητών: ενέργειες,

χειρονομίες, γλώσσα και τα πολιτισμικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ως όργανα μεσολάβησης (Arzarello et al., 2002) (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2

Η μετάβαση από τη «διαισθητική» γεωμετρία στη «θεωρητική» γεωμετρία δεν είναι ούτε απλή, ούτε αυθόρμητη. Η δυνατότητα τροποποίησης του συστήματος των σχέσεων μεταξύ των προτάσεων σε γεωμετρική γνώση από τη μεσολάβηση ενός περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας ερευνάται από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (Mariotti, 1997). Όταν η εμπειρική και η επαγωγική διάσταση πρόκειται να προστεθεί σε μια προσέγγιση που παραδοσιακά ριζοβολεί στην παραγωγική λογική, απαιτείται προσεκτική εξέταση στο πώς να συνδυαστούν αυτές οι δυο φαινομενικά αντίθετες απόψεις, πώς να αντιμετωπιστεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η κτήση και η αιτιολόγηση (απόδειξη) της γεωμετρικής γνώσης σε μια ενσωματωμένη σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας γεωμετρική κατάσταση (Leung & Lopez- Real, 2002). Η ιδιομορφία του περιβάλλοντος είναι καθοριστική προκειμένου να εξελιχθεί η αιτιολόγηση από μια εμπειρική επαλήθευση προς μια θεωρητική απόδειξη (Mariotti, 1997).

Οι Επιπτώσεις σε Διδακτικό Επίπεδο

Εμπειρικές έρευνες δείχνουν ότι η αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας δεν είναι σίγουρο ότι θα μπορέσει να τους ωθήσει να αναπτύξουν μια ποικιλομορφία προσεγγίσεων του συλλογισμού και να τους διευκολύνει σε σκέψεις μέσω της κατασκευής και του χειρισμού των σχεδίων της οθόνης του υπολογιστή (Healy, 2000). Πειραματικές μελέτες παρατηρούν ότι το ίδιο το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας δε χορηγεί τη μετάβαση από το διαισθητικό σε ένα θεωρητικό επίπεδο· η τεχνολογία η ίδια δεν μπορεί να επιφέρει μια εκπαιδευτική αλλαγή (Arzarello, 2002). Οι Healy & Hoyles (2001) κατέδειξαν ότι υπάρχει μια διαφορά στην αντίληψη που έχουν οι μαθητές μεταξύ των δυναμικών κατασκευών και των τυπικών ευκλείδειων αποδείξεων· ο μη κατάλληλος προγραμματισμός της χρήσης των εργαλείων του λογισμικού μπορεί να αποτρέψει τους μαθητές από σωστές μαθηματικές ιδέες και να εμποδίσει ακόμα και τη λύση του προβλήματος. Το δυναμικό περιβάλλον βοηθά τους μαθητές στο να καθορίσουν και να προσδιορίσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες και τις μεταξύ τους εξαρτήσεις, αλλά δεν τους βοηθά στην παρουσίαση αποδείξεων· η παραγωγή ενός κατάλληλου συνόλου παραδειγμάτων δεν παρακινεί τους μαθητές στην ανάγκη για μια παραγωγική απόδειξη· δε φαίνεται να υπάρχει καμιά πρόοδος για τη μετάβαση από τον εμπειρικό στον παραγωγικό συλλογισμό (Healy, 2000).

Από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη

Από τα ανωτέρω φαίνεται να απουσιάζει μια σχέση που να γεφυρώνει τις εμπειρικές και γνωστικές περιοχές. Η έλλειψη αυτής της απαραίτητης σχέσης για το γεφύρωμα των δυο πτυχών έχει να κάνει με δυο κρίσιμα σημεία που συζητούνται

στην τρέχουσα βιβλιογραφία: αφενός, το πρόβλημα της ύπαρξης *κινήτρου για απόδειξη*, και αφετέρου, η *διάκριση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης* (Mariotti, 1997).

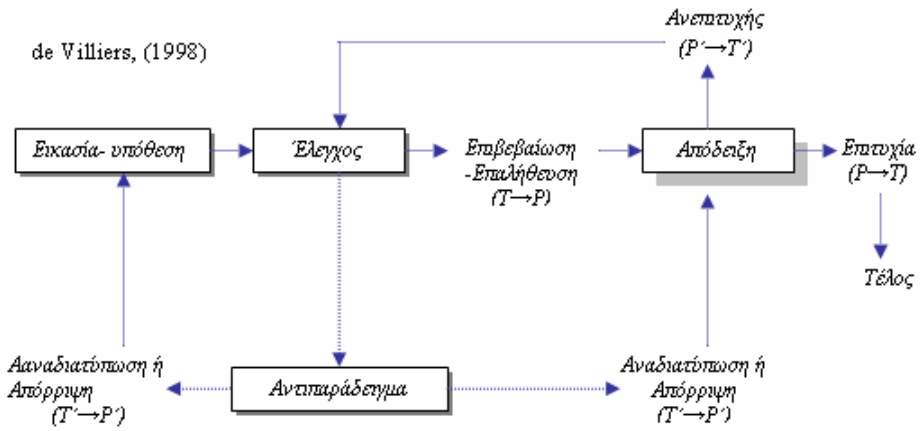
Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη συνδέονται το ένα με το άλλο με ένα σύνθετο τρόπο. Όταν εισάγεται μια παραγωγική προσέγγιση, ένα κρίσιμο σημείο είναι αυτό της αλλαγής της θέσης της αιτιολόγησης. Η απόδειξη συνίσταται αφενός στην παροχή λογικά συνδεδεμένων επιχειρημάτων που αναφέρονται σε μια θεωρία, και αφετέρου στην παροχή μιας επιχειρηματολογίας η οποία μπορεί να απομακρύνει τις αμφιβολίες για την αλήθεια ενός γεγονότος. Αυτή η διπλή έννοια της απόδειξης είναι αναπόφευκτη και παιδαγωγικά συνεπής (Hanna, 2000). Κοινά γίνεται αποδεκτό ότι η επιχειρηματολογία και η απόδειξη δεν έχουν την ίδια φύση. Η επιχειρηματολογία έχει στόχο να πείσει, αλλά η ανάγκη πειθούς κάποιου δε συμπίπτει πάντα με την ανάγκη να καταγραφεί και η θεωρητική αλήθεια μιας πρότασης (Mariotti, 2000).

Στην παραδοσιακή διδασκαλία δίνεται έμφαση στο ότι *κάτι ισχύει, είναι αληθινό (T) αν μπορεί (συμπερασματικά) να αποδειχθεί (P)*, δηλαδή η συνεπαγωγή $P \rightarrow T$ (Leung & Lopez- Real, 2002). Λογικά, τα μαθηματικά θεωρείται ότι βασίζονται στο αξίωμα: *κάτι είναι αληθινό (T) εάν και μόνο εάν μπορεί να αποδειχθεί (P)*, δηλαδή στην ισοδυναμία $P \leftrightarrow T$. Αυτή η μορφή λογικής, κατά τον de Villiers, (1997), παριστάνεται με τις ακόλουθες μορφές:

- $T \rightarrow P$, εάν κάτι ισχύει τότε μπορεί να αποδειχθεί
- $P \rightarrow T$, εάν κάτι μπορεί να αποδειχθεί τότε ισχύει
- $T' \rightarrow P'$, εάν κάτι δεν ισχύει τότε δεν μπορεί να αποδειχθεί
- $P' \rightarrow T'$, εάν κάτι δεν μπορεί να αποδειχθεί τότε δεν ισχύει

Οι μαθητές στην παραδοσιακή διδασκαλία μπορούν να δουν την απόδειξη ενός θεωρήματος και ως εκ τούτου να δεχτούν την αλήθειά του, ως ανεξάρτητη από διερευνητικές δραστηριότητες στις οποίες το περιεχόμενο του θεωρήματος μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά. Στην πραγματική μαθηματική έρευνα, όπως ο de Villiers υποστηρίζει, όλες οι άλλες λογικές συνεπαγωγές συχνά παίζουν σημαντικότερο ρόλο (στην υπόθεση και την απόδειξη) στην παροχή κινήτρου και στην καθοδήγηση των πράξεών μας (de Villiers, 1997· στο Geometry Turned On, 1997, σελ. 20).

Επομένως, αν το συμπέρασμα δεν υποστηρίζεται σε κάποιες περιπτώσεις, τότε το απορρίπτουμε ως αναληθές και δεν επιχειρούμε να το αποδείξουμε (Τ΄→Ρ΄). Αν όμως υποστηρίζεται από τις περιπτώσεις, μπορούμε να πιστέψουμε ότι ισχύει και αυτό μας ωθεί να ψάξουμε για την απόδειξή του (Τ→Ρ). Αν αποτύχουμε να βρούμε την απόδειξη, θα αρχίσουμε να αμφιβάλουμε για την εγκυρότητα της υπόθεσης και του συμπεράσματος, οπότε θα σκεφτούμε άλλες περιπτώσεις (Ρ΄→Τ΄). Αυτή η διαδικασία συμπεράσματος, ελέγχου, ανασκευής ή αναίρεσης, απόδειξης και απόρριψης μπορεί πολλές φορές να κάνει τον ίδιο κύκλο, που αναπαρίσταται στο σχήμα 5.3:



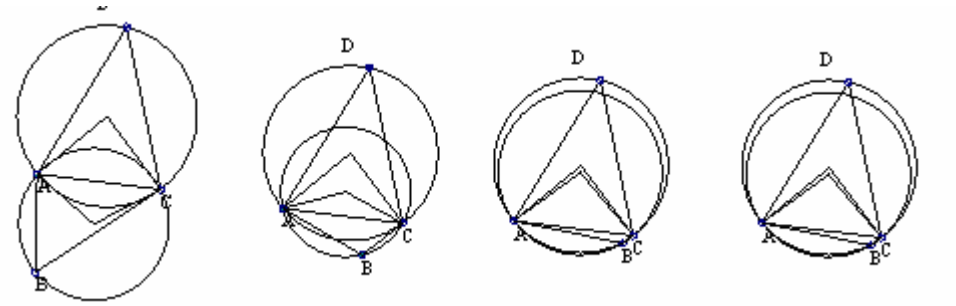
Σχήμα 5.3

Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται να εξαχθεί από μια δραστηριότητα το συμπέρασμα «*ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές*» (Αργυρόπουλος και λοιποί, 2004, σελ 131).Το συγκεκριμένο θεώρημα καθορίζει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο (κριτήριο), και είναι το αντίστροφο του θεωρήματος «*αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές»*, του οποίου η διατύπωση και η απόδειξη έχει προηγηθεί.

Το κίνητρο για επικύρωση του γεγονότος (απόδειξη) μπορεί να εκφραστεί σε διαφορετικά επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο η αναζήτηση της αλήθειας του γεγονότος είναι κεντρική (είναι το γεγονός αληθινό;). Στο δεύτερο επίπεδο, η αλήθεια δεν μπορεί πλέον να είναι το ζητούμενο, αλλά απαιτείται η θεμελίωσή της (γιατί είναι πράγματι αληθινό το γεγονός;). Επομένως, η αίσθηση και η ανάγκη για επικύρωση αποδεσμεύονται από την αλήθεια του γεγονότος. Στο πρώτο επίπεδο η αλήθεια του γεγονότος είναι αβέβαιη, ενώ στο δεύτερο επίπεδο η αλήθεια του γεγονότος είναι σίγουρη. Η *αβεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης μπορεί να προκαλέσει αναζήτηση κινήτρων και να αρχίσει μια διαδικασία επιχειρηματολογίας* (Mariotti, 1998). Η αβεβαιότητα είναι κρίσιμη στην αρχική κατασκευή της έννοιας της απόδειξης και απαιτεί προσεκτική επιλογή καταστάσεων επίλυσης προβλήματος, όπου απαιτείται η παραγωγή μιας υπόθεσης (Mariotti, 1997). *Το κλίμα αβεβαιότητας που δημιουργείται από τη γνωστική σύγκρουση από μια λάθος εικασία και η διανοητική πρόκληση να καταλάβουν και όχι απλά να ελέγξουν το λάθος χάρη στην ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος, είναι το πλαίσιο που δίνει νόημα στην απόδειξη* (Hadas et al., 2000). Ένα τρίτο επίπεδο αφορά την αποδέσμευση των θεωρημάτων

από το ζήτημα της αναζήτησης της αλήθειας, δηλαδή των τυπικών αποδείξεων, οι οποίες σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας δεν εξετάζονται.

Σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας η προσπάθεια προσέγγισης της αλήθειας του προαναφερθέντος θεωρήματος θα ακολουθούσε οπτικά πιθανώς τις παρακάτω φάσεις (Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4

Ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας παρέχει το κίνητρο για απόδειξη, όπως φαίνεται και από το προηγούμενο παράδειγμα. Η βεβαιότητα δεν έρχεται με την απόδειξη, αλλά συχνά προηγείται από αυτήν (de Villiers, 2002). Καθώς τα αντικείμενα υποβάλλονται σε συνεχή μετασχηματισμό στην οθόνη του υπολογιστή σε ένα δυναμικό περιβάλλον, φαίνεται η εγκυρότητα της υπόθεσης. Αυτό όμως δεν παρέχει καμιά ικανοποιητική επεξήγηση γιατί μπορεί η υπόθεση να είναι αληθινή, δεν παρέχει καμιά διορατικότητα ή κατανόηση στο πώς είναι συνέπεια άλλων γνωστών αποτελεσμάτων. Απλά επιβεβαιώνει την ισχύ της (de Villiers, 2002).Η απόδειξη έρχεται ως ανάγκη για την αναζήτηση γιατί είναι αληθινό το γεγονός, γιατί αν κάτι ισχύει και δεν μπορούμε να το συναγάγουμε, αυτό είναι σημάδι ότι υπάρχει έλλειψη κατανόησης από μέρους μας (Davis & Hersh, 1983, σελ. 368).

Ο Ρόλος του Περιβάλλοντος Δυναμικής Γεωμετρίας

Ο ρόλος του περιβάλλοντος σε διαδικασίες εκμάθησης της απόδειξης (παραγωγή υπόθεσης και κατασκευή απόδειξης) αποτελεί αντικείμενο συζήτησης στους χώρους της έρευνας των μαθηματικών (Laborde, 2000) και ερευνάται η συμβολή του.

Στην ερευνητική βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης επισημαίνεται ότι η εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες απόδειξης πρέπει να γίνεται σε ένα κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον για την απόδειξη και την επιχειρηματολογία, το οποίο να υποστηρίζει ευρετικές διαδικασίες επίλυσης και με το οποίο ο μαθητής να μπορεί να αλληλεπιδρά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης και παραγωγής μιας απόδειξης (Reiss & Renkl, 2002· Olivero, 1999· Laborde, 2000). Όμως, η οργάνωση ενός κατάλληλου για την απόδειξη περιβάλλοντος απαιτεί να ληφθεί υπόψη η διπλή φύση της απόδειξης, γνωστική και κοινωνική (Laborde, 2000). Αφού, η απόδειξη στα μαθηματικά είναι ένα είδος «*ομιλίας*» που χρησιμοποιεί τη «*γλώσσα*» για «*επικοινωνία*» (*γλώσσα μαθηματική* αλλά και γλώσσα για την *επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών*), βασίζεται σε ένα σύστημα κανόνων και πρακτικών που αυτή η επικοινωνία επιβάλλει, και ισοδυναμεί:

- με την επικύρωση της αλήθειας μιας πρότασης μέσω συστήματος κανόνων μιας θεωρίας (γνωστική),
- με το να πειστούν οι άλλοι για την ισχύ του ισχυρισμού μέσω κοινωνικών κανόνων μιας συλλογικής συζήτησης (κοινωνική).

Η οργάνωση κατάλληλα επιλεγμένου μαθησιακού περιβάλλοντος, το οποίο να παρέχει ευκαιρίες για την ανάπτυξη του τομέα της εμπειρίας, αποτελεί έναν από τους στόχους των ερευνητών της απόδειξης στη Δυναμικής Γεωμετρία. Η σωστή

οργάνωση ενός δυναμικού περιβάλλοντος μπορεί να επιτευχθεί με δυο διαφορετικούς τρόπους, ένα γνωστικό και έναν κοινωνικό (Laborde, 2000):

- ♦ ο γνωστικός αποτελείται από μια προοδευτική κατασκευή μαθηματικών προτάσεων με τη βοήθεια διδακτικών στόχων,
- ♦ ο κοινωνικός αποτελείται από την κατασκευή των κοινωνικών κανόνων της αποδοχής των αποτελεσμάτων στην τάξη.

Ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρία φαίνεται ότι μπορεί να ικανοποιεί τους στόχους της απόδειξης, γνωστικό και κοινωνικό, εφόσον η οργάνωσή του αποσκοπεί στην ανάπτυξη του τομέα της εμπειρίας με τη μεσολάβηση του δασκάλου και των εργαλείων του δυναμικού περιβάλλοντος.

Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας και ο «Τομέας της Εμπειρίας»

Ένας μικρόκοσμος Δυναμικής Γεωμετρίας (Cabri, Sketchpad, Euclidraw κ.α.) είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση πολιτισμικού μέσου διαμεσολάβησης (cultural artefact), το οποίο χαρακτηρίζεται από την παρουσία (Mariotti, 2000, 2001):

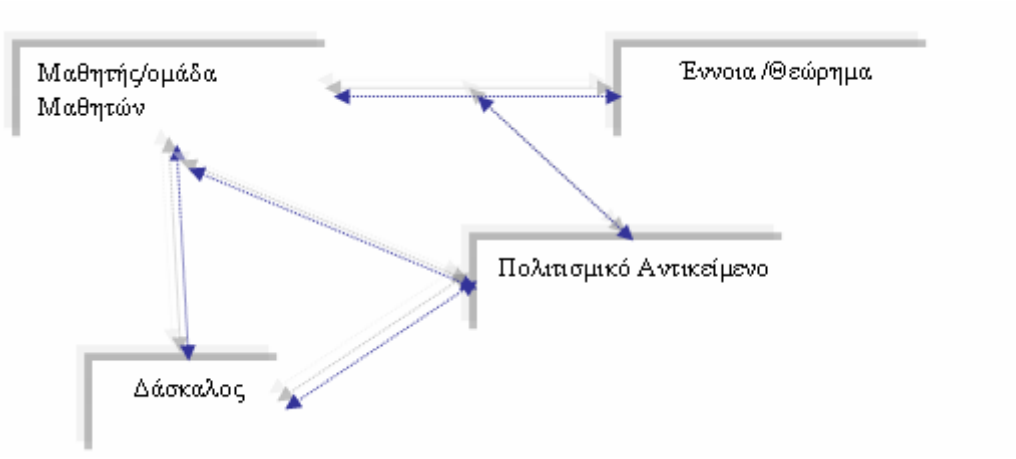
♦ Ενός αντικειμένου που κατασκευάστηκε με σκοπό να πετυχαίνει ένα αποτέλεσμα (να ζωγραφίζει σχέδια στην οθόνη). Για το λόγο αυτό σχεδιάστηκε, για να ενσωματώνει μια ορισμένη μαθηματική γνώση προσιτή για χρήση από το μαθητή,

♦ Συγκεκριμένων σχημάτων χρήσης (utilisation schemes), δηλαδή μορφές δράσης που ολοκληρώνονται με τη χρήση του πολιτισμικού εργαλείου σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο στόχο (να ζωγραφίζει μια εικόνα στην οθόνη η οποία θα περάσει τη δοκιμή συρσίματος).

Η μεσολάβηση του περιβάλλοντος στην εξέλιξη του τομέα της εμπειρίας προϋποθέτει την ύπαρξη μιας μορφής *καλής επικοινωνίας* μεταξύ των συστατικών του πεδίου της εμπειρίας. Το πώς αυτή η μορφή επικοινωνίας οδηγεί στην εξέλιξη

του τομέα της εμπειρίας μπορεί να περιγραφεί λαμβάνοντας υπόψη τη διαδικασία της σημειωτικής μεσολάβησης που αναπτύσσεται σε διαφορετικά επίπεδα (Σχήμα 5.5) (Cerulli & Mariotti, 2003).

- Ο δάσκαλος χρησιμοποιεί το πολιτισμικό αντικείμενο σύμφωνα με συγκεκριμένα σχέδια ενεργειών που σχετίζονται με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους και κίνητρα, για να κατευθύνει την ανάπτυξη εννοιών, συνεπών από μαθηματική άποψη. Τα δε λειτουργικά σχέδια των ενεργειών μπορούν να συνίστανται από ιδιαίτερες στρατηγικές επικοινωνίας που κεντροθετούνται πάνω στο πολιτισμικό αντικείμενο.
- Ο μαθητής χρησιμοποιεί το πολιτισμικό αντικείμενο σύμφωνα με συγκεκριμένα σχέδια ενεργειών, προκειμένου να ολοκληρωθεί το αποτέλεσμα που ορίζεται από το διδακτικό στόχο. Με αυτές τις ενέργειες το πολιτισμικό αντικείμενο μπορεί να λειτουργήσει ως σημειωτικός μεσολαβητής όπου η έννοια προκύπτει από τη συμμετοχή του μαθητή στη δραστηριότητα.
- Οι έννοιες είναι ριζωμένες στη φαινομενολογική εμπειρία – δράσεις του χρήστη και αναδράσεις από το περιβάλλον, του οποίου το πολιτισμικό εργαλείο είναι συστατικό του-, αλλά η ανάπτυξή τους επιτυγχάνεται με την κοινωνική κατασκευή της γνώσης στην τάξη κάτω από την καθοδήγηση του δασκάλου (Cerulli & Mariotti, 2003).



Σχήμα 5.5: Σχηματική παράσταση της Λειτουργίας της Επικοινωνίας του Τομέα της Εμπειρίας σε ένα Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Ο ρόλος του δασκάλου στη λειτουργία της 'επικοινωνίας' του τομέα της εμπειρίας είναι καθοριστικός αφού αυτός φέρει την αποκλειστική ευθύνη για το σχεδιασμό του κατάλληλου για τη μάθηση γνωστικού πλαισίου (δραστηριότητες) και την επιλογή των εργαλείων μεσολάβησης για τον σκοπό αυτό. Οι ρόλοι του πλαισίου μάθησης, του δασκάλου και των εργαλείων στην εξέλιξη του τομέα της εμπειρίας και ειδικότερα του εσωτερικού πλαισίου συζητούνται στη συνέχεια.

Ο Ρόλος των Δραστηριοτήτων Μάθησης

Ο τομέας της εμπειρίας, και ιδιαίτερα του εσωτερικού πλαισίου μπορεί να εξελιχθεί και αυτή η εξέλιξη μπορεί να είναι ένας καταλύτης για την απόδειξη μόνο μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων κοινωνικών και γνωστικών δραστηριοτήτων, οι οποίες θα αναδεικνύουν την ανάγκη για απόδειξη για κοινωνικούς και γνωστικούς λόγους (Laborde, 2000, Mariotti, 2000). Οι δραστηριότητες που ταιριάζουν σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας και που συμβάλλουν στην ανάπτυξη του τομέα της

εμπειρίας και του εσωτερικού πλαισίου ειδικότερα είναι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος και δραστηριότητες διατύπωσης (Cerulli & Mariotti, 2003).

♦ *Δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος*: Οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος (προβλήματα κατασκευής και υπόθεσης) σε ένα δυναμικό περιβάλλον, που εμπλέκονται με διαδικασίες παρουσίασης αποδείξεων, περιέχουν στόχους κατασκευής, ερμηνείας, μαντέματος που αναφέρονται στον τομέα της φαινομενολογικής ερμηνείας. Σε μια δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας οι λειτουργίες της απόδειξης - επαλήθευση, επεξήγηση, διανοητική πρόκληση και επικοινωνία - κατά κύριο λόγο είναι παρούσες.

Δραστηριότητες κατασκευής: Κατά τη Mariotti (2000) ένας στόχος κατασκευής μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα κλειδί για την πρόσβαση στην έννοια της απόδειξης. Σε ένα στόχο κατασκευής δυο διαδικασίες απαιτούνται:

- διαδικασία κατασκευής ενός υπαρκτού γεωμετρικού σχήματος,
- διαδικασία αιτιολόγησης των λόγων της ακρίβειας της κατασκευής

Η δραστηριότητα κατασκευής πραγματοποιείται μέσω των διαθέσιμων εντολών από το menu του λογισμικού. Η ιδέα της γεωμετρικής κατασκευής είναι συνδεδεμένη με την ιδέα του θεωρήματος (Mariotti, 1999, 2000), αφού κάτω από μια κατασκευή υπάρχει ένα θεώρημα που την επικυρώνει (γνωστικός στόχος). Η λειτουργία συρσίματος μεσολαβεί ως εργαλείο ελέγχου της ακρίβειας της κατασκευής: αν το σχήμα στην οθόνη περνά τη δοκιμή συρσίματος, ο στόχος κατασκευής επιτεύχθηκε. Η ανάγκη για απόδειξη εμφανίζεται ως το εργαλείο που *επικυρώνει* την ύπαρξη της γεωμετρικής κατασκευής και ως εργαλείο που *επεξηγεί* γιατί η κατασκευή λειτουργεί ή προβλέπεται ότι θα λειτουργήσει (κοινωνικός στόχος). *Το πλαίσιο που δίνει νόημα στην απόδειξη ως επεξήγηση είναι η ευρωστία – αντοχή ενός σχήματος με το σύρσιμο*

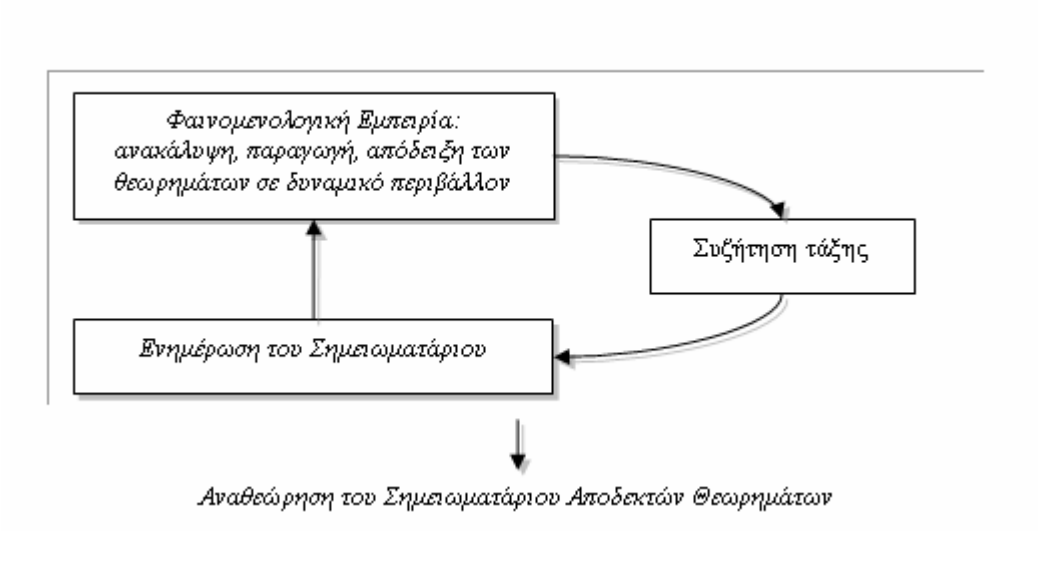
(Laborde, 2000). Οι επεξηγήσεις δίνουν τους μαθηματικούς λόγους για το γεγονός ότι ένα σχήμα αντέχει με το σύρσιμο. Η ανάγκη να παραχθούν σχήματα που αντιστέκονται στη δυναμική διερεύνηση (έλξη) είναι η κατευθυντήρια δύναμη πίσω από την παραγωγή αποδεκτών κατασκευών και την απόδειξη της ισχύος τους (Mariotti et al., 1997).

Δραστηριότητες υπόθεσης: Σε δραστηριότητες υπόθεσης η ισχύς της υπόθεσης μπορεί να είναι το προϊόν μιας δυναμικής διερεύνησης της κατάστασης του προβλήματος, κατά τη διάρκεια της οποίας η αναγνώριση μιας ανάγκης για απόδειξη προέρχεται από τη βεβαιότητα για την ισχύ της υπόθεσης (Boero et al., 1999). Η απόδειξη εμφανίζεται ως το εργαλείο που αποκαλύπτει την καθολικότητα της υπόθεσης και ως εργαλείο επεξήγησης (Hadas et al., 2000). Η λειτουργία συρσίματος επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν μια ολόκληρη κατηγορία αντικειμένων στην οποία η ιδιότητα της υπόθεσης είναι αμετάβλητη.

♦ *Δραστηριότητες διατύπωσης*. Στη βιβλιογραφία ο ρόλος της συζήτησης στην εισαγωγή της έννοιας της απόδειξης έχει αναλυθεί και η διαφορά μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης έχει περιγραφεί (Balacheff, 1987· Duval, 1992-1993, αναφορά στο Mariotti, 2001). Η ανάγκη μιας αιτιολόγησης σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος ενισχύεται κατά τη διάρκεια δραστηριοτήτων διατύπωσης μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών λύσεων στο πλαίσιο των κοινά αποδεκτών κανόνων αποδοχής.

Στον όρο *δραστηριότητες διατύπωσης* οι Cerulli & Mariotti, (2003) περιλαμβάνουν όλες τις μορφές επικοινωνίας κατά τη διάρκεια δραστηριοτήτων επίλυσης προβλήματος, όπως *συλλογικές συζητήσεις* (collective discussions), *σημειωματάριο αποδεκτών συμπερασμάτων* (edition of notebook) (Laborde, 2000),

προκειμένου να τις διακρίνουν από τις «πρακτικές» δραστηριότητες που πραγματοποιούνται με το λογισμικό. Οι έννοιες που δημιουργούνται από τη φαινομενολογική εμπειρία μοιράζονται μέσα από μια συλλογική συζήτηση (Cerulli & Mariotti, 2003)(Σχήμα 5.6).



Σχήμα 5.6: Η κύρια δομή των Δραστηριοτήτων Διατύπωσης κατά τους Gerulli & Mariotti (2003)

Συλλογικές συζητήσεις: Κατά τη Marrioti (2001, 2000, 1997), οι συλλογικές συζητήσεις διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην εξελικτική πορεία από την έννοια της αιτιολόγηση προς την έννοια της επικύρωσης μέσα σε ένα θεωρητικό σύστημα, δηλαδή της απόδειξης. Αυτή η εξέλιξη μπορεί να αρθρωθεί από μια σειρά τριών βημάτων:

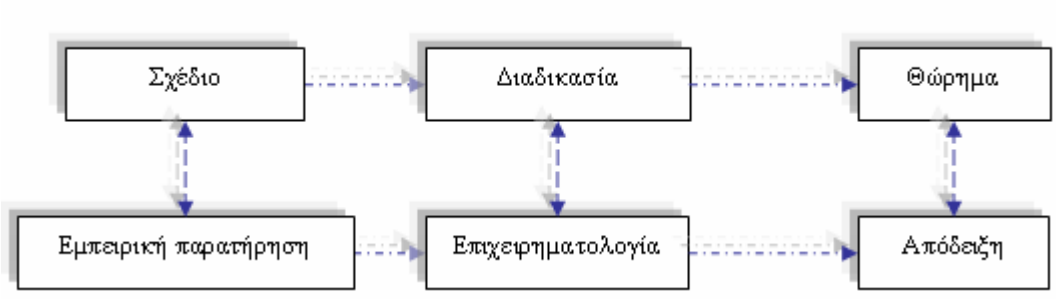
- Περιγραφή, γραπτώς, της διαδικασίας λύσης: Ο κύριος στόχος της γραπτής έκθεσης είναι η κατανόηση, αφού συνίσταται στη διαβίβαση του συλλογισμού κάποιου και στο δάσκαλο και στους συμμαθητές του.

- Αιτιολόγηση της λύσης: Οι λύσεις που παράγονται, κοινοποιούνται και αποτελούν τη βάση μιας συλλογικής συζήτησης. Ένας νέος στόχος προκύπτει: οι αναφορές πρέπει να παρέχουν μια σαφή περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε, αλλά και μια αιτιολόγηση, έτσι ώστε αυτή να περάσει τη συλλογική δοκιμή, και αυτό σημαίνει να παραχθούν καλά επιχειρήματα που μπορούν να καταστήσουν τη λύση αποδεκτή.
- Αιτιολόγηση σύμφωνα με κοινούς και καθορισμένους κανόνες: Στις συλλογικές συζητήσεις ο κύριος στόχος είναι η υπεράσπιση της λύσης κάποιου μέσα σε ένα πλαίσιο συμφωνημένων διαδικασιών και κανόνων. Η αιτιολόγηση μιας λύσης, μέσα σε ένα σύστημα κοινώς αποδεκτών κανόνων, εισάγει τους μαθητές σε μια θεωρητική πτυχή της λύσης.

Από τις συλλογικές συζητήσεις οι *μαθηματικές συζητήσεις* λαμβάνουν ένα ουσιαστικό μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία, με συγκεκριμένους στόχους, οι οποίοι είναι γνωστικοί (κατασκευή γνώσης) και μεταγνωστικοί (κατασκευή στάσης απέναντι στην εκμάθηση των μαθηματικών (Mariotti, 2000). Σύμφωνα με τη γενικά αποδεκτή παραδοχή για την κοινωνική κατασκευή της γνώσης, η μαθηματική συζήτηση είναι ουσιαστικό μέρος των δραστηριοτήτων της τάξης (Mariotti, 1997).

Η μαθηματική συζήτηση ορίζεται ως η πολυφωνία έναρθρων φωνών για ένα μαθηματικό αντικείμενο, η οποία είναι ένα από τα κίνητρα της δραστηριότητας εκμάθησης (Bartolini Bussi, 1996· αναφορά στο Mariotti, 2000) και η οποία δεν είναι μια απλή σύγκριση διαφορετικών απόψεων, ούτε μια αντιπαράθεση επιχειρημάτων. Είναι γνωστικές διαλεκτικές αντιπαραθέσεις διαφορετικών προσωπικών αντιλήψεων και της γενικής έννοιας της μαθηματικής απόδειξης που εισάγεται και προωθείται

από το δάσκαλο (Mariotti, 2001). Οι διαφορετικές αντιλήψεις της αιτιολόγησης αντιστοιχούν σε δυο διαφορετικούς στόχους της συζήτησης. Ο προσδιορισμός της εγκυρότητας ενός ορισμένου γεγονότος (*γιατί;*) και ο καθορισμός της ακρίβειας μιας επιχειρηματολογίας σύμφωνα με σαφή κριτήρια (*ποιο το σχετικό θεώρημα;*) αντιστοιχούν στην εξέλιξη της έννοιας της αιτιολόγησης, η οποία είναι και το κύριο κίνητρο της συζήτησης (Mariotti, 2000). Ο δεύτερος στόχος σχετίζεται με τη συνειδητοποίηση της θεωρητικής θέσης ορισμένων προτάσεων στα πλαίσια μιας θεωρίας. Η ανάπτυξη από τον πρώτο στο δεύτερο μπορεί να περιγραφεί ως εξής (Mariotti, 1997) (Σχήμα 5.7*):*



Σχήμα 5.7

Το Σημειωματάριο αποδεκτών συμπερασμάτων: Το σημειωματάριο (προσωπικό, αλλά βασισμένο στις κοινές παραγωγές) μαζί με το σύνολο των εντολών του δυναμικού λογισμικού αντιπροσωπεύουν τον «πολιτισμό» και την «ιστορία» της τάξης. Κατά συνέπεια η ενημέρωση και η αναθεώρησή του σημαίνει την ενημέρωση του πολιτισμού της τάξης. Η αναθεώρηση του σημειωματάριου πρέπει να ερμηνευτεί ως φαινομενολογική εμπειρία που αυξάνει τις έννοιες, οι οποίες στη συνέχεια θα αναπτυχθούν κάτω από την καθοδήγηση του δασκάλου (Cerulli &Mariotti, 2003).

Οι δραστηριότητες διατύπωσης κατά τους Cerulli & Mariotti (2003) διευκολύνουν την παραγωγή νέων *σημείων* που χρησιμοποιούνται και μοιράζονται με την κοινωνική ομιλία, η οποία οδηγεί στην εξέλιξη και την παραγωγή των γεωμετρικών αντικειμένων. Γιατί, όπως επισημαίνουν, η επικοινωνία μόνο μεταξύ του χρήστη και του δυναμικού λογισμικού - δεδομένου ότι περιορίζει τις ενέργειες του χρήστη και ως εκ τούτου και τις δυνατότητες έκφρασης του ίδιου του χρήστη - θα μπορούσε να είναι ένα εμπόδιο κατά την άποψη του Vygotsky, όπου η παραγωγή των νέων σημαδιών διαδραματίζει ένα βασικό ρόλο στην παραγωγή και εξέλιξη των εννοιών. Επιπλέον, οι δραστηριότητες διατύπωσης δίνουν τη δυνατότητα να φανούν οι σχέσεις μεταξύ της θεωρίας (αξιώματα, θεωρήματα, ορισμοί) και των εργαλείων του δυναμικού λογισμικού (Mariotti, 2000)

Ερευνητικά συμπεράσματα επισημαίνουν το ρόλο των δραστηριοτήτων διατύπωσης σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, τονίζοντας ότι οι βασισμένες στο λογισμικό διερευνήσεις, χωρίς συγκεκριμένες συμπληρωματικές δραστηριότητες για την ανάπτυξη της γλώσσας, δεν παρέχουν πολλές ευκαιρίες για την ανάπτυξη πρώτα μιας περιγραφικής γλώσσας και έπειτα μιας λειτουργικής (Sanchez & Sacristan, 2003). Οι συλλογικές συζητήσεις, και ιδιαίτερα το σημειωματάριο των κοινά αποδεκτών συμπερασμάτων (αξιώματα, θεωρήματα, ορισμοί), ενισχύουν την παραγωγή των αιτιολογήσεων, παρέχοντας στους μαθητές μια έτοιμη και εύκολη πρόσβαση σε όλα τα αποδεκτά αποτελέσματα (Marrades & Gutierrez, 2000).

Ο Ρόλος του Δασκάλου

Η παρουσία του υπολογιστή και ιδιαίτερα του δυναμικού λογισμικού είναι ένα σημείο διαταραχής στο εσωτερικό πλαίσιο του δασκάλου. Ο ρόλος του δασκάλου είναι διπλός. Αφενός, πρέπει να διαμορφώσει μια νέα σχέση με τη μαθηματική γνώση, η οποία φαίνεται να μεταβάλλεται από την παρουσία του δυναμικού

λογισμικού. Αφετέρου, πρέπει να επαναπροσδιορίσει το ρόλο του ως μεσολαβητή, λαμβάνοντας υπόψη τα νέα στοιχεία που προσφέρονται από το λογισμικό. Ο ρόλος του δασκάλου δεν περιορίζεται μόνο στην οργάνωση της διδασκαλίας (επιλογή διδακτικών στόχων)· οι δραστηριότητες του δασκάλου είναι κεντρικές, δεδομένου ότι είναι αυτός ο υπεύθυνος για τη δόμηση δραστηριοτήτων σύμφωνων με τους διδακτικούς στόχους, έτσι ώστε μια «εσωτερικοποίηση» να πραγματοποιείται και να γίνεται μέρος του πολιτισμού τάξεων (Arzarello et al., 2002).

Σε κάθε φάση των δραστηριοτήτων διατύπωσης ο ρόλος του δασκάλου θεωρείται θεμελιώδης. Αφενός, να κατευθύνει την συζήτηση στο στόχο (απόδειξη) και αφετέρου, να καθοδηγήσει την εξέλιξη των προσωπικών αντιλήψεων προς την ερμηνεία. Μέσα σε ένα δυναμικό περιβάλλον ο δάσκαλος μπορεί να βρει τα συγκεκριμένα εργαλεία της σημειωτικής μεσολάβησης, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη συζήτηση, προκειμένου να καθοδηγηθούν οι προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών προς την εξέλιξη της έννοιας της αιτιολόγησης· προς την έννοια της απόδειξης, ως αιτιολόγηση σύμφωνα με τους κοινά αποδεκτούς κανόνες (Mariotti, 2000). Η συμφωνηθείσα διδακτική σύμβαση μεταξύ δασκάλου και μαθητών, όσον αφορά ποια είδη αιτιολογήσεων γίνονται αποδεκτά – αιτιολόγηση με τη χρησιμοποίηση ορισμών και θεωρημάτων που ήδη είναι γνωστά - είναι ένα σημαντικό στοιχείο στην επιτυχία της προώθησης της προόδου των μαθητών (Marrades & Gutierrez, 2000).

Με δεδομένο ότι η τεχνολογία είναι όχι μόνο ένα πρόσθετο στοιχείο στο σύστημα δάσκαλος – μαθητής – γνώση, αλλά αλληλεπιδρά με τα άλλα συστατικά του συστήματος, εμπειρικές μελέτες εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν τα πολιτισμικά εργαλεία σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος

(Laborde, 2001). Οι μη έμπειροι στη διδασκαλία ή τη χρήση της τεχνολογίας στην τάξη δάσκαλοι βλέπουν την τεχνολογία ως ένα πρόσθετο συστατικό του συστήματος διδασκαλίας, αλλά εξωτερική στις διαδικασίες εκμάθησης. Τη χρησιμοποιούν για στόχους παρατήρησης και κατασκευής παράλληλα με τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Οι έμπειροι στη διδασκαλία ή τη χρήση της τεχνολογίας στην τάξη δάσκαλοι παρέχουν δραστηριότητες διερεύνησης, με το σύρσιμο να είναι κεντρικό σε στόχους παρατήρησης και σε ανοιχτά προβλήματα προκειμένου να εξαχθούν ιδιότητες, ώστε μέσω της οπτικοποίησης να φτάσουν στη λύση. Εν κατακλείδι, η διαχείριση της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στους διδακτικούς στόχους απαιτεί από τους δασκάλους να γνωρίζουν ακόμα και τις πιθανές στρατηγικές της χρήσης της τεχνολογίας από τους μαθητές.

Ο Ρόλος των Εργαλείων

Εμπειρικές έρευνες εξετάζουν τις αλληλεπιδράσεις που πραγματοποιούνται κατά τη διαδικασία παρουσίασης αποδείξεων μεταξύ των σπουδαστών και των χρησιμοποιούμενων εργαλείων (Olivero, 2003). Όταν δυο ή περισσότεροι μαθητές λύνουν ένα πρόβλημα στον υπολογιστή, ο καθένας έχει το δικό του εσωτερικό πλαίσιο, το οποίο και προβάλλεται στην κατάσταση επίλυσης του προβλήματος. Υπάρχουν στιγμές στη διαδικασία στην οποία οι μαθητές σκέφτονται και κάνουν διαφορετικά πράγματα και στιγμές στις οποίες έχουν μια καλή επικοινωνία και στιγμές που εργάζονται πραγματικά στο ίδιο πρόβλημα. Κατά τη συνεργασία υπάρχει μια συνεχής ανατροφοδότηση από το εξωτερικό πλαίσιο στις ενέργειες των μαθητών, με αποτέλεσμα το εσωτερικό πλαίσιο συνεχώς να τροποποιείται και από την ανατροφοδότηση από το περιβάλλον και από την αλληλεπίδραση με τον άλλο μαθητή. Μια διαδικασία εσωτερικοποίησης πραγματοποιείται, έτσι ώστε τα

εξωτερικά εργαλεία μπορούν να εσωτερικοποιηθούν ως ψυχολογικά εργαλεία που κατευθύνουν τη συμπεριφορά των σπουδαστών στην επίλυση προβλήματος.

Στιγμές όπου υπάρχει τομή, υπάρχει και η κατασκευή της κοινής κατανόησης και γνώσης, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν την παραγωγή των υποθέσεων και των αποδείξεων. Οι στιγμές του συγχρονισμού δε συμπίπτουν με την ανάπτυξη των καλοσχεδιασμένων λογικών προτάσεων. Όταν υπάρχει ένας συγχρονισμός μεταξύ των μαθητών καταλαβαίνουν ο ένας τον άλλο χωρίς να υπάρχει η ανάγκη μιας καλοσχεδιασμένης λογικής γλώσσας.

Τύποι Συλλογισμού και Επιχειρημάτων

Η ανάλυση των φάσεων μετάβασης στην απόδειξη και η ταξινόμηση των τύπων συλλογισμού και επιχειρημάτων, που οι μαθητές χρησιμοποιούν κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αποτελεί αντικείμενο πειραματικών ερευνών, προκειμένου να κατανοηθεί πώς γίνεται η μετάβαση από την εμπειρική στην παραγωγική φάση της εργασίας των μαθητών. Από πολλούς ερευνητές τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται από τους λύτες κατά τη λύση (απόδειξη) μαθηματικών προβλημάτων καλούνται συχνά και *σχέδια απόδειξης*.

Ο Bell (1976a,b) προσδιόρισε δυο κατηγορίες επιχειρημάτων που οι μαθητές χρησιμοποιούν όταν λύνουν προβλήματα απόδειξης, ανάλογα με το αν χρησιμοποιούν ή όχι παραδείγματα προκειμένου να πείσουν. Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνεται η *εμπειρική αιτιολόγηση*, αν χρησιμοποιούν παραδείγματα ως ένα μέσο πειθούς. Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνεται η *παραγωγική αιτιολόγηση*, αν χρησιμοποιούν την αφαίρεση για να συνδέσουν τα δεδομένα με τα συμπεράσματα. Σε κάθε κατηγορία προσδιόρισε και άλλους τύπους, ανάλογα με τους βαθμούς

πληρότητας- ολοκλήρωσης του ελέγχου της πρότασης στο σύνολο των πιθανών παραδειγμάτων ή της κατασκευής των παραγωγικών επιχειρημάτων (Bell 1976a & b,αναφορά στο Marrades & Gutierrez, 2000).

Κατά την εξέταση του παραγωγικού συλλογισμού και των διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της παρουσίασης αποδείξεων των μαθητών, ο Balacheff (1987,1999 αναφορά στο Jones, 2000· Sanchez & Sacristan, 2003· Marrades & Gutierrez, 2000) βρήκε χρήσιμο να κάνει μια διάκριση μεταξύ δύο κατηγοριών αιτιολογιών: *των πραγματικών - ρεαλιστικών (pragmatic)* και *των νοητικών* ή *εννοιολογικών (intellectual or conceptual),* υπογραμμίζοντας το ρόλο της γλώσσας στη μετάβαση από την πρώτη κατηγορία στη δεύτερη.

♦ *Πραγματικές αιτιολογίες,* όταν στηρίζονται πάνω στα ίδια τα μαθηματικά ή γεωμετρικά αντικείμενα και βασίζονται στη χρήση παραδειγμάτων, ή των ενεργειών πάνω στις αναπαραστάσεις αυτών των αντικειμένων, ή στην επίδειξή τους. Οδηγούν στην ρεαλιστική- πρακτική γνώση που κάποιος μπορεί να τη χρησιμοποιήσει προκειμένου να πείσει κάποιον άλλο για την ισχύ μιας πρότασης. Η κατηγορία των πραγματικών αιτιολογιών περιλαμβάνει τρεις τύπους αιτιολογιών (Σχήμα 5.8).

i. *Απλός εμπειρισμός (naive empiricism)*: Μια πρόταση που αποδεικνύεται, ελέγχεται με μερικά, κάπως τυχαία επιλεγμένα, παραδείγματα.

ii. *Κρίσιμο πείραμα (crucial experiment)*: Μια πρόταση ελέγχεται με ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα.

iii. *Γενικό παράδειγμα (generic example)*: Η αιτιολόγηση βασίζεται στις διαδικασίες ή τους μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα, το οποίο έχει επιλεγεί ως χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος μιας κατηγορίας. Σε αυτή την

περίπτωση, οι διαδικασίες ή οι μετασχηματισμοί στο παράδειγμα προορίζονται να γίνουν σε ολόκληρη την κατηγορία.

- *Οι Εννοιολογικές* αιτιολογίες δεν περιλαμβάνουν ενέργειες, αλλά στηρίζονται στις διατυπώσεις των ιδιοτήτων των μαθηματικών αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Δηλαδή, οι εννοιολογικές απαιτούν την ύπαρξη και της ρεαλιστικής γνώσης ως βάση για την εμφάνισή τους και τη χρήση της γλώσσας, η οποία - αποσυνδεμένη από τις ενέργειες - εκφράζει τα αντικείμενα, τις ιδιότητές τους και τις σχέσεις τους, και η οποία είναι απαραίτητη για την παραγωγή τους. Με άλλα λόγια, οι ρεαλιστικές είναι βασισμένες στη δράση- επενέργεια, ενώ η χρήση μιας λειτουργικής γλώσσας (functional language), η οποία περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και έναν συμβολισμό, και η ύπαρξη μιας διανοητικής εμπειρίας (mental experience), όπου οι επενέργειες- οι δράσεις είναι εσωτερικοποιημένες, χαρακτηρίζουν τη μετάβαση στις εννοιολογικές. Η κατηγορία των εννοιολογικών αιτιολογιών περιλαμβάνει δύο τύπους αιτιολογιών:

  i. *Πείραμα σκέψης (thought experiment)*: Η αιτιολόγηση στηρίζεται σε εσωτερικοποιημένες ενέργειες και όχι στα συγκεκριμένα εξεταζόμενα παραδείγματα.

  ii. *Συμβολικοί υπολογισμοί ή συμβολικές εκτιμήσεις (symbolic calculations)*: Η αιτιολόγηση βασίζεται στη χρήση και το μετασχηματισμό των τυποποιημένων συμβολικών εκφράσεων της πρότασης.

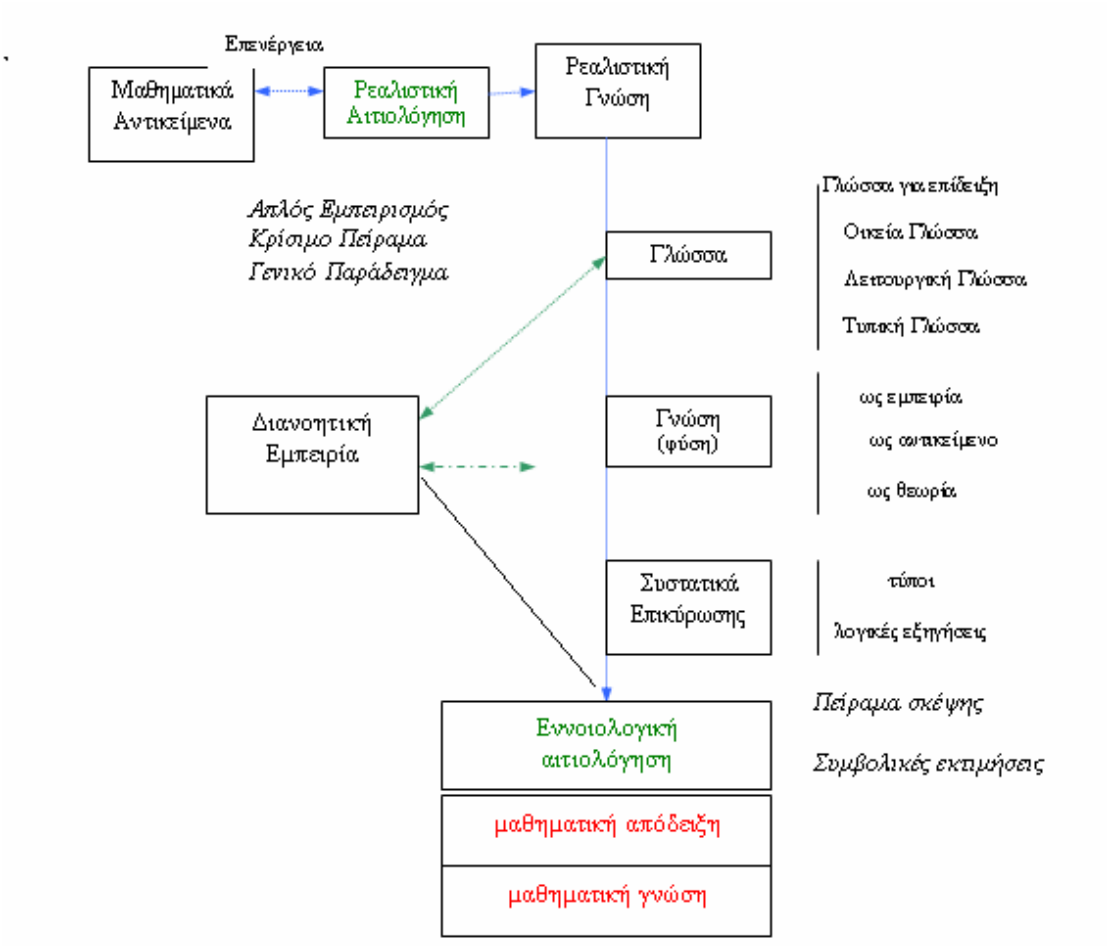
Η μετάβαση από τις ρεαλιστικές στις εννοιολογικές- διανοητικές αιτιολογήσεις, οι οποίες καταλήγουν στη μαθηματική απόδειξη, περιλαμβάνει τρία συστατικά:

♦ Γνώση (knowledge) ή επίπεδα συνιστώσας δράσης (levels- of- action component): Η φύση της γνώσης είναι γνώση από την άποψη των εμπειριών, αντικειμενική γνώση (knowledge as object) και θεωρητική γνώση.

♦ Γλώσσα (language) ή συνιστώσα διατύπωση (formulation component): γλώσσα για επίδειξη, οικεία γλώσσα (familiar language), λειτουργική γλώσσα, τυπική γλώσσα (formal language).

♦ *Συστατικό επικύρωσης (validation component)*: Οι τύποι ή οι λογικές επεξηγήσεις που κρύβονται κάτω από τις παραγόμενες αιτιολογήσεις, τις ρεαλιστικές, τις εννοιολογικές, τις μαθηματικές. Μαθηματική αιτιολόγηση είναι μια αιτιολόγηση που γίνεται αποδεκτή από τους μαθηματικούς (Balacheff, 1988,αναφορά στο Jones, 2000).

Η ανάπτυξη μιας λειτουργικής γλώσσας περιλαμβάνει τις διαδικασίες του «detemporalization» και του «decontextualization». Δηλαδή πρέπει να είναι μια γλώσσα για τα μαθηματικά και γλώσσα για την επικοινωνία των ιδεών των σχετικών με αυτά, ανεξάρτητα από την κατάσταση, του σχολικού πλαισίου, ή από τα πρόσωπα με τα οποία η επικοινωνία πραγματοποιείται (π.χ. ο δάσκαλος). Η ανάπτυξη μιας λειτουργικής γλώσσας απαραίτητης για τη μετάβαση από την ρεαλιστική στην εννοιολογική αιτιολόγηση είναι δύσκολη (Sanchez & Sacristan, 2003).



Σχήμα 5.8: Ενδεικτικό σχεδιάγραμμα μετάβασης από τα Μαθηματικά Αντικείμενα μέσω δύο τύπων αιτιολόγησης στη Μαθηματική Απόδειξη του Balacheff.

Οι Harel & Sowder ερεύνησαν τα σχέδια απόδειξης μαθητών κολεγίων και προσδιόρισαν επτά σημαντικούς τύπους σχεδίων απόδειξης τους οποίους κατέταξαν σε τρεις κατηγορίες: *εξωτερικής πεποίθησης (external conviction proof scheme), εμπειρικά και αναλυτικά (empirical ή analytical proof scheme)* (Σχήμα 5.9). Ορίζουν ως *σχέδιο απόδειξης* (*proof scheme*) τα επιχειρήματα που υιοθετούνται από ένα πρόσωπο, προκειμένου να πειστεί ο ίδιος ή να πείσει τους άλλους για την αλήθεια ή το ψέμα μιας μαθηματικής πρότασης. Η λέξη «απόδειξη» στο σχέδιο απόδειξης

χρησιμοποιείται υπό την ευρεία ψυχολογική έννοια της αιτιολόγησης παρά υπό τη στενότερη έννοια της μαθηματικής απόδειξης.

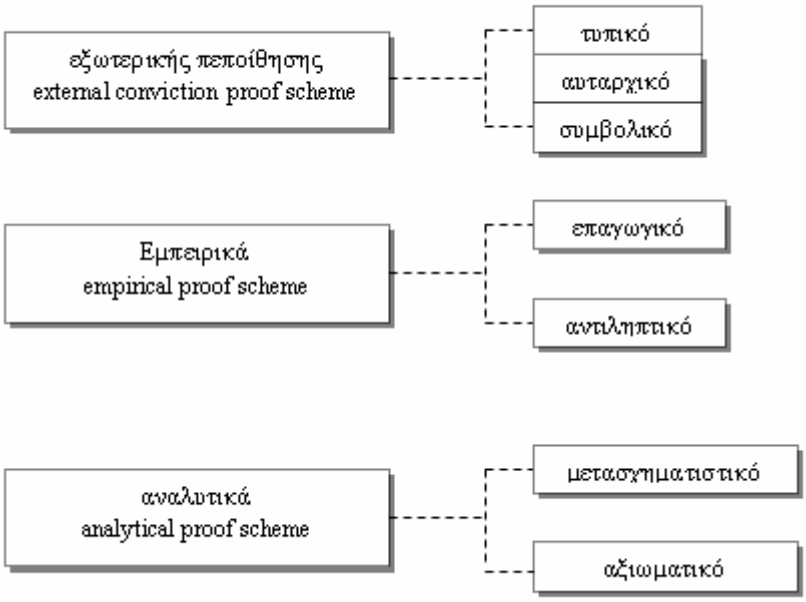
Οι Harel & Sowder ερεύνησαν τα σχέδια απόδειξης μαθητών κολεγίων και προσδιόρισαν επτά σημαντικούς τύπους σχεδίων απόδειξης τους οποίους κατέταξαν σε τρεις κατηγορίες: *εξωτερικής πεποίθησης (external conviction proof scheme), εμπειρικά και αναλυτικά (empirical ή analytical proof scheme)* (Σχήμα 5.9).

♦ *Εξωτερικής πεποίθησης*. Υπάρχουν τρεις τύποι σχεδίων απόδειξης εξωτερικής πεποίθησης: *τελετουργικό* (*ritual), αυθεντίας ή αρχής (authoritarian), συμβολικό (symbolic)* σχέδιο και στον καθένα οι μαθητές πείθονται οι ίδιοι ή πείθουν τους άλλους χρησιμοποιώντας κάτι εξωτερικό σε αυτούς. Στο *τελετουργικό* η πειθώ οφείλεται στη μορφή της απόδειξης και όχι στο περιεχόμενό της. Στο *αυθεντίας ή αρχής* η πειθώ οφείλεται στο γεγονός το οποίο ο δάσκαλος ή το βιβλίο ή κάποια άλλη αρχή είπαν ότι ήταν έτσι. Στο *συμβολικό* η πειθώ προέρχεται από το συμβολικό χειρισμό, πίσω από τον οποίο ίσως να υπάρχει ή όχι σημασία.

♦ *Εμπειρικά*. Τα εμπειρικά σχέδια απόδειξης μπορεί να είναι είτε *επαγωγικά (inductive)* είτε *αντιληπτικά- αισθητά (perceptual*) επιχειρήματα, πειράματα και παραδείγματα. Ένας μαθητής με ένα επαγωγικό σχέδιο απόδειξης θεωρεί ένα ή περισσότερα παραδείγματα ως πειστικά στοιχεία της αλήθειας μιας γενικής περίπτωσης. Σε ένα αντιληπτικό σχέδιο απόδειξης, ο μαθητής βγάζει συμπεράσματα βασισμένα σε στοιχειώδεις διανοητικές εικόνες, τα οποία δεν υποστηρίζονται πλήρως από την αφαίρεση και τα οποία θεωρούνται πειστικά για τον ίδιο ή για τους άλλους.

♦ *Αναλυτικά.* Τα αναλυτικά σχέδια απόδειξης, αποδεκτά από τους μαθηματικούς, μπορεί να είναι *μετασχηματιστικά (transformational)* και *αξιωματικά (axiomatic)* σχέδια απόδειξης. Σε ένα *μετασχηματιστικό* σχέδιο απόδειξης, ο μαθητής

πείθει τους άλλους ή πείθεται ο ίδιος από μια παραγωγική εργασία στην οποία εξετάζει γενικές πτυχές, εφαρμόζει στόχους προσανατολισμένους σε συγκεκριμένες διανοητικές διαδικασίες και μετασχηματίζει τις εικόνες. Ένα *αξιωματικό* σχέδιο απόδειξης υπερβαίνει το μετασχηματιστικό, δεδομένου ότι ο μαθητής αναγνωρίζει επίσης ότι τα μαθηματικά συστήματα στηρίζονται στις, ενδεχομένως αυθαίρετες, προτάσεις οι οποίες γίνονται αποδεκτές χωρίς απόδειξη, και κατά συνέπεια οι παραγωγικές αλυσίδες βασίζονται στα στοιχεία του αξιωματικού συστήματος.



Σχήμα 5.9: Κατηγορίες Σχεδίων Απόδειξης κατά τους Harel & Sowder (1998)

Κατά τον Reid (2000) οι μαθητές θα μπορούσαν να καθοδηγηθούν από τις εξωτερικές αποδείξεις, τις υποκείμενες σε άμεση αίσθηση (από λέξεις), στις εμπειρικές (πειράματα και παραδείγματα) και στη συνέχεια στις αναλυτικές, στις αποδεκτές από τους μαθηματικούς. Ένα πρόβλημα με αυτή την άποψη είναι ότι για

τα μαθηματικά μόνο ορισμένοι τρόποι γίνονται αποδεκτοί ως παρουσίαση αποδείξεων. Η παροχή κινήτρου για αναλυτικές αποδείξεις γίνεται δύσκολη, εάν η παρουσίαση αποδείξεων χαρακτηρίζεται ως επαλήθευση (Villiers, 1999).

Οι Marrades & Gutierrez (2000) αναφερόμενοι στις κατηγοριοποιήσεις των επιχειρημάτων των Bell , Balacheff, Sowder και Harel, παρατηρούν ότι όλες οι κατηγορίες περιγράφουν τα επιχειρήματα των μαθητών και δεν εξετάζουν τη διαδικασία παραγωγής τους. Επίσης, η εστίαση της κάθε μελέτης είναι διαφορετική και μερική. Ο Bell ανέλυσε το σύνολο των χρησιμοποιούμενων παραδειγμάτων από τους μαθητές. Ο Balacheff εστίασε στις αιτιολογίες των μαθητών για την επιλογή των παραδειγμάτων και στον τρόπο με τον οποίο τα χρησιμοποίησαν. Οι Harel & Sowder έκαναν διάκριση ανάμεσα στις αιτιολογίες τις βασισμένες μόνο στην όραση ή στη διαίσθηση (perception). Επίσης, μεταξύ των κατηγοριών παραγωγικές - εννοιολογικές - αναλυτικές, εκείνες που ορίζονται από τον Bell διαφέρουν στη μαθηματική ποιότητα των παραγωγικών δεσμών. Οι Harel και Sowder περιγράφουν δυο τύπους αναλυτικών αιτιολογήσεων, ο ένας βασίζεται στο μετασχηματισμό των δεδομένων του προβλήματος και ο άλλος στη χρήση των στοιχείων ενός αξιωματικού συστήματος. Ο Balacheff προσδιόρισε δυο τύπους εννοιολογικών, στον ένα λαμβάνονται υπόψη τα συγκεκριμένα παραδείγματα, αλλά οι αιτιολογίες δενβασίζονται σε αυτά, και στον άλλο οι αιτιολογίες βασίζονται στους συμβολικούς υπολογισμούς.

Οι Marrades & Gutierrez (2000) επεκτείνουν και ενσωματώνουν τα προηγούμενα πλαίσια αιτιολογιών των μαθητών σε ένα πιο αναλυτικό, στο οποίο εξετάζεται όλη η ενεργητικότητα του μαθητή – η παραγωγή μιας υπόθεσης (αν απαιτείται), η επινόηση μιας αιτιολόγησης και αυτή καθ' αυτή η ίδια η αιτιολόγηση. Το σχέδιο ταξινόμησης των αιτιολογιών – επιχειρημάτων είναι ένας συγκερασμός

των προτεινόμενων επιχειρημάτων από τους *Bell*, Balacheff, Sowder και Harel. Υποστηρίζουν ότι το σχέδιο ταξινόμησης που προτείνουν, εκτός από την ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών, είναι χρήσιμο για να αξιολογηθεί η βελτίωση των δεξιοτήτων αιτιολόγησης ενός μαθητή σε μια περίοδο εκμάθησης. Αρχικά γίνεται διάκριση μεταξύ δυο κύριων αιτιολογιών, *εμπειρικών* και *παραγωγικών*, ανάλογα με το εάν η αιτιολόγηση συνίσταται από έλεγχο ή όχι παραδειγμάτων (*βλέπε συγκριτικός πίνακας*).

1. *Εμπειρικές* αιτιολογίες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη χρήση κυρίως παραδειγμάτων ως βασικό στοιχείο της βεβαιότητας. Οι μαθητές, παρατηρώντας σχέσεις σε ένα ή περισσότερα παραδείγματα, διατυπώνουν υποθέσεις και χρησιμοποιούν τα παραδείγματα ή τις σχέσεις σε αυτά για να δικαιολογήσουν την αλήθεια της υπόθεσής τους. Αν η υπόθεση περιλαμβάνεται στη διατύπωση του προβλήματος, τότε οι μαθητές κατασκευάζουν παραδείγματα για να ελέγξουν την υπόθεση και να τη δικαιολογήσουν. Οι εμπειρικές χωρίζονται σε τρεις υποκατηγορίες, που εξαρτώνται από τους τρόπους που οι μαθητές χρησιμοποιούν τα επιλεγμένα παραδείγματα, και κάθε υποκατηγορία έχει διαφορετικούς τύπους που αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους τρόπους με τους οποίους τα επιλεγμένα παραδείγματα χρησιμοποιούνται.

Συγκεκριμένα:

♦ *Απλός εμπειρισμός (naive empiricism)*, όταν δικαιολογείται η υπόθεση με το να δειχθεί ότι είναι αληθής σε ένα ή περισσότερα παραδείγματα, τα οποία επιλέγονται συνήθως χωρίς ένα ειδικό κριτήριο. Ο έλεγχος μπορεί να περιλάβει την οπτική ή χειροπιαστή διαίσθηση για τα παραδείγματα μόνο, *αντιληπτικός* τύπος, ή μπορεί επίσης να περιλάβει τα μαθηματικά στοιχεία ή τις σχέσεις που βρίσκονται στα παραδείγματα , *επαγωγικός* τύπος.

♦ *Κρίσιμο πείραμα*, όταν δικαιολογείται η υπόθεση αποδεικνυόμενη ότι είναι αληθής σε έναν συγκεκριμένο, προσεκτικά επιλεγμένο, παράδειγμα. Διακρίνονται διάφοροι τύποι αιτιολόγησης από το κρίσιμο πείραμα, ανάλογα με το πώς το κρίσιμο παράδειγμα χρησιμοποιείται:

i. *example- based*, όταν η αιτιολόγηση παρουσιάζει μόνο την ύπαρξη ενός παραδείγματος ή την έλλειψη αντιπαραδειγμάτων,

ii. constructive, στο οποίο η αιτιολόγηση εστιάζεται στον τρόπο με τον οποίον παίρνεται το παράδειγμα,

iii. *αναλυτικό*, στο οποίο η αιτιολόγηση είναι βασισμένη στις ιδιότητες που παρατηρούνται εμπειρικά στο παράδειγμα ή στα βοηθητικά στοιχεία,

iv. *διανοητικό*, όταν η αιτιολόγηση βασίζεται στην εμπειρική παρατήρηση του παραδείγματος, αλλά χρησιμοποιεί κυρίως τις αποδεκτές ιδιότητες ή τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του παραδείγματος.

♦ *Γενικό παράδειγμα*, όταν η αιτιολόγηση βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, το οποίο θεωρείται ως χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος της κατηγορίας του, και περιλαμβάνει την παραγωγή συγκεκριμένων αφηρημένων λόγων για την αλήθεια μιας υπόθεσης με τη βοήθεια των διαδικασιών ή των μετασχηματισμών στο παράδειγμα. Η αιτιολόγηση αναφέρεται στις αφηρημένες ιδιότητες και τα στοιχεία μιας οικογένειας, αλλά είναι σαφώς βασισμένη στο παράδειγμα. Οι τέσσερις τύποι δικαιολογιών (*example- based*, constructive, αναλυτικών και διανοητικών) που καθορίζονται για το κρίσιμο πείραμα βρίσκονται εδώ επίσης, στις περιγραφές για το πώς το γενικό παράδειγμα χρησιμοποιείται στην αιτιολόγηση.

● *Αποτυχημένη* απάντηση, όταν χρησιμοποιούν οι σπουδαστές τις εμπειρικές

στρατηγικές για να λύσουν ένα πρόβλημα απόδειξης, αλλά δεν πετυχαίνουν στη διαμόρφωση μιας σωστής υπόθεσης, ή δηλώνουν μια σωστή υπόθεση αλλά δεν πετυχαίνουν την εξασφάλιση-παροχής οποιασδήποτε αιτιολόγησης.

2. Οι *Παραγωγικές* αιτιολογίες χωρίζονται σε δυο υποκατηγορίες, ανάλογα με το εάν οι μαθητές επιλέγουν ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ή όχι για να βοηθηθούν να οργανώσουν την αιτιολόγησή τους, και κάθε υποκατηγορία διαιρείται σε δυο τύπους ανάλογα με τις μορφές της αφαίρεσης που γίνονται για την οργάνωση των αιτιολογιών. Οι παραγωγικές αιτιολογίες, που χαρακτηρίζονται από το decontextualization των χρησιμοποιούμενων επιχειρημάτων, είναι βασισμένες στις γενικές πτυχές του προβλήματος, των διανοητικών διαδικασιών και των λογικών αφαιρέσεων, οι οποίες στοχεύουν να επικυρώσουν την υπόθεση με ένα γενικό τρόπο. Τα παραδείγματα, όταν χρησιμοποιούνται, είναι μια βοήθεια για να οργανωθούν τα επιχειρήματα, αλλά τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος δεν εξετάζονται στην αιτιολόγηση. Μέσα στις παραγωγικές δικαιολογίες διακρίνουμε τρεις κατηγορίες:

♦ *Πείραμα σκέψης*, όταν χρησιμοποιείται ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να βοηθήσει στην οργάνωση της αιτιολόγησης. Αναδεικνύονται δύο τύποι πειραμάτων σκέψης, ανάλογα με το ύφος της αιτιολόγησης:

i. *Μετασχηματιστικές* αιτιολογίες, οι οποίες είναι βασισμένες στις διανοητικές διαδικασίες που παράγουν ένα μετασχηματισμό από το αρχικό πρόβλημα σε έναν άλλο ισοδύναμό του. Ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι να βοηθήσουν στην πρόβλεψη ποιοι μετασχηματισμοί είναι κατάλληλοι. Οι μετασχηματισμοί μπορούν να βασιστούν στις χωρικές διανοητικές εικόνες, στους συμβολικούς χειρισμούς ή την κατασκευή των αντικειμένων.

ii. *Δομικές* αιτιολογίες, οι οποίες είναι ακολουθίες λογικών αφαιρέσεων που προέρχονται από τα στοιχεία του προβλήματος και των αξιωμάτων, των ορισμών ή των αποδεκτών θεωρημάτων. Ο ρόλος των παραδειγμάτων συνίσταται στη βοήθεια της οργάνωσης των βημάτων στις αφαιρέσεις.

♦ *Τυπική αφαίρεση*, όταν η αιτιολόγηση βασίζεται στις διανοητικές διαδικασίες χωρίς τη βοήθεια των συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Σε μια τυπική αφαίρεση μόνο οι γενικές πτυχές του συζητημένου προβλήματος αναφέρονται. Είναι επομένως το είδος της τυπικής μαθηματικής απόδειξης που βρίσκεται στον κόσμο των ερευνητών μαθηματικών. Οι δύο τύποι αιτιολογιών (μετασχηματιστικών και δομικών) που καθορίζονται στο πείραμα σκέψης βρίσκονται εδώ επίσης.

♦ *Αποτυχημένες*, όταν οι σπουδαστές χρησιμοποιούν τις παραγωγικές στρατηγικές για να λύσουν τα προβλήματα απόδειξης αλλά δεν πετυχαίνουν στη διαμόρφωση μιας σωστής υπόθεσης ή διαμορφώνουν μια σωστή υπόθεση αλλά αποτυγχάνουν στην παροχή μιας αιτιολόγησης.

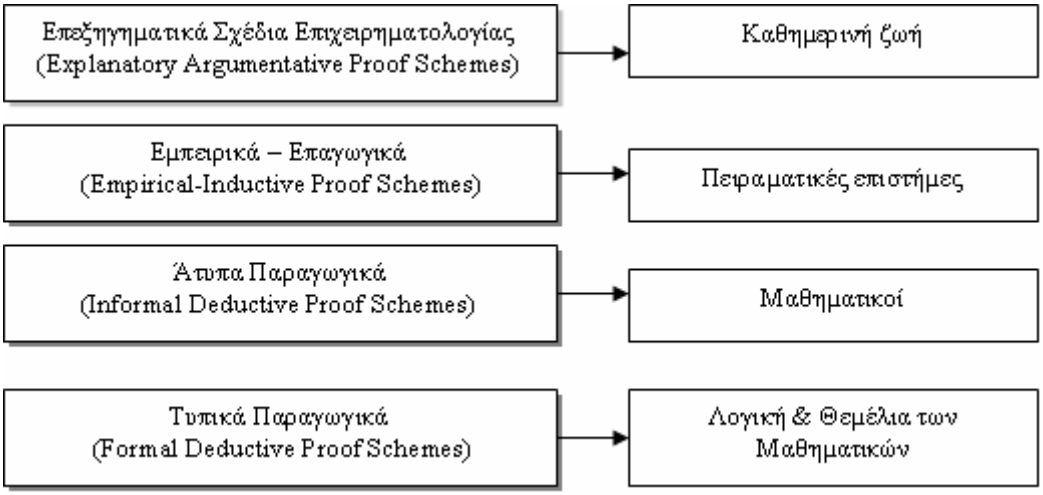
Οι Recio & Godino (2001) υιοθετούν την άποψη ότι η μαθηματική γνώση είναι κοινωνικοπολιτισμικό προϊόν, το οποίο αναπτύσσεται μέσα στα εκπαιδευτικά ιδρύματα, και τα άτομα ως μέλη τέτοιων ιδρυμάτων μοιράζονται με συλλογικούς τρόπους τη σκέψη και το συλλογισμό τους, η δε εμπειρία τους ρυθμίζεται από το θεσμικό πλαίσιο, τη γλώσσα και τον τύπο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Υποστηρίζουν ότι μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα των σχεδίων απόδειξης των μαθητών και σπουδαστών μπορούν να σχετίζονται με τις έννοιες της απόδειξης στα διάφορα καθιερωμένα πλαίσια και ότι τέτοιες καθιερωμένες έννοιες θα μπορούσαν να προσφέρουν εξηγήσεις των προσωπικών σχεδίων απόδειξης.

Οι Recio & Godino (2001) καλούν *προσωπικά σχέδια απόδειξης* τα επιχειρήματα που οι μαθητές υιοθετούν όταν λύνουν προβλήματα άλγεβρας ή γεωμετρίας και τα ταξινομούν σε τέσσερις κατηγορίες: *επεξηγηματικά επιχειρηματολογικά, εμπειρικά – επαγωγικά, άτυπα παραγωγικά και τυπικά παραγωγικά* σχέδια απόδειξης (Σχήμα 5.10).

- *Επεξηγηματικά σχέδια επιχειρηματολογίας (explanatory argumentative proof schemes*). Τα επεξηγηματικά σχέδια επιχειρηματολογίας θεωρούν ότι μπορούν να αντιστοιχηθούν με τις άτυπες επιχειρηματολογίες που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν στην καθημερινή ζωή τους, που είναι περιστασιακές ανάλογα με το πλαίσιο και τη συναισθηματική τους κατάσταση. Αυτός ο τύπος επιχειρηματολογίας δεν παράγει απαραίτητα την αλήθεια, δεδομένου ότι βασίζεται σε περιστασιακές εκτιμήσεις, οι οποίες στερούνται των αντικειμενικών χαρακτηριστικών της απόδειξης.
- *Εμπειρικά –επαγωγικά σχέδια (empirical-inductive proof schemes).* Τα εμπειρικά –επαγωγικά σχέδια θα μπορούσαν να αφορούν την έννοια της μαθηματικής απόδειξης στις πειραματικές επιστήμες. Η επιστημονική επιχειρηματολογία διακρίνεται από την επιχειρηματολογία της καθημερινής ζωής από την ανάγκη για επικύρωση, για πειραματική απόδειξη και η οποία οδηγεί στην παραγωγή επιστημονικής γνώσης, δηλαδή λογικής και αντικειμενικής γνώση. Αυτά τα σχέδια βασίζονται στην προσωπική πεποίθηση και εμφανίζονται με τη διαδικασία επαλήθευσης μιας πρότασης.
- *Άτυπα παραγωγικά σχέδια (informal deductive proof schemes).* Τα άτυπα παραγωγικά σχέδια θα μπορούσαν να αφορούν τις όχι περίπλοκες μορφές μαθηματικών αποδείξεων που οι δάσκαλοι των μαθηματικών χρησιμοποιούν συχνά στην τάξη. Είναι επιχειρηματολογίες με ένα ισχυρό διαισθητικό συστατικό,

συμπεριλαμβανομένης της οπτικοποίησης (για παράδειγμα, αποδείξεις βασισμένες σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ή σε ένα δυναμικό γεωμετρικό σχήμα).

- *Τυπικά παραγωγικά σχέδια (formal deductive proof schemes).* Τα τυπικά παραγωγικά σχέδια θα μπορούσαν να αφορούν τους συνηθισμένους τρόπους που οι μαθηματικοί και οι δάσκαλοι των μαθηματικών χρησιμοποιούν για αποδείξεις με έναν αυστηρό, φορμαλιστικό τρόπο.



Σχήμα 5.10: Προσωπικά σχέδια απόδειξης των Recio & Godino (2001)

Υποστηρίζεται ότι η κατανόηση και η κατοχή της παραγωγικής επιχειρηματολογίας από τους μαθητές και σπουδαστές απαιτούν την ανάπτυξη μιας ορθολογιστικής ικανότητας και ένα συγκεκριμένο επίπεδο γνώσης (Recio & Godino, 2001). Τα άτυπα σχέδια απόδειξης δεν πρέπει να θεωρούνται ως ανακριβή, μπερδεμένα ή ανεπαρκή, αλλά μάλλον ως απαραίτητες εκφράσεις του μαθηματικού συλλογισμού για να επιτύχουν και να κυριαρχήσουν μαθηματικές αποδεικτικές πρακτικές. Τα αναλυτικά επιχειρήματα, που είναι χαρακτηριστικά των μαθηματικών αποδείξεων, δεν είναι οι μόνες πρακτικές επιχειρηματολογίας που οι μαθηματικοί

χρησιμοποιούν για να πείσουν για την αλήθεια των υποθέσεών τους. Αυτές οι διαδικασίες συλλογισμού είναι συχνά άκαρπες ή ακόμα και ένα εμπόδιο στη δημιουργία και την ανακάλυψη στα στάδια των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος.

Αίτια Δυσκολιών της Απόδειξης

Η αναζήτηση των αιτίων, τα οποία κάνουν τους μαθητές να δυσκολεύονται με την κατανόηση και την παραγωγή της μαθηματικής απόδειξης, έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές έχουν να κάνουν τόσο με τις αντιλήψεις των μαθητών που σχετίζονται με τη φύση της απόδειξης όσο και με εξωγενείς αλλά και ενδογενείς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση και την βελτίωση των αποδεικτικών διαδικασιών.

Αντιλήψεις των Μαθητών για την Απόδειξη

Για τους ερευνητές που εξετάζουν την εκμάθηση της απόδειξης από μια κουνστρουκτιβιστική άποψη, μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι τι καταλαβαίνουν οι μαθητές από τις λέξεις «απόδειξη» και «αποδεικνύω» (Reid, 2002).

Στα σχολικά μαθηματικά ο στόχος της διαδικασίας απόδειξης είναι να πειστούν οι ίδιοι οι μαθητές για την καθολική αλήθεια των μαθηματικών θεωρημάτων και να πείσουν το δάσκαλο ότι είναι ικανοί να πραγματοποιούν και να κατανοούν τις μαθηματικές αποδείξεις, Αλλά ο συλλογισμός που οι μαθητές χρησιμοποιούν ποικίλλει και έχει σχέση με τις προσωπικές έννοιες της απόδειξης (Godino & Recio, 1997).

Ο Reid (2002), από τις ερμηνείες που έδωσαν οι μαθητές για τις έννοιες «απόδειξη» και «αποδεικνύω» σε ένα ερωτηματολόγιο, χωρίς η πλειοψηφία τους να γνωρίζει τι σημαίνουν αυτές οι έννοιες για τα μαθηματικά, καταλήγει στο

συμπέρασμα ότι οι μαθητές δίνουν ερμηνείες που είναι συγκρίσιμες με τις έννοιες της «απόδειξης» και «αποδεικνύω» στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Κοινό στοιχείο των ορισμών των μαθητών για την έννοια της απόδειξης ήταν ο χαρακτηρισμός της ως επαλήθευση, έλεγχος, αιτιολόγηση, πειθώ, καθιέρωση κτλ., χαρακτηρισμοί πολύ κοινοί και στην καθημερινή ομιλία και στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές τρεις ανάγκες αναγνώρισαν στη χρήση της λέξης «αποδεικνύω»: για επαλήθευση, για επεξήγηση του *γιατί* και για επεξήγηση του *πώς*.

Οι αντιλήψεις των μαθητών για το τι αποτελεί μια απόδειξη σχετίζονται και με τη δυνατότητα κατασκευής έγκυρης μαθηματικής απόδειξης. Μια περιεκτική ταξινόμηση αυτών των αντιλήψεων των μαθητών, αλλά και των σπουδαστών, δίνεται από τους Harel και Sowder (1998). Μια απόδειξη είναι:

- Ένα επιχείρημα σύμφωνο με μια συγκεκριμένη μαθηματική σύμβαση, εφόσον ακολουθεί ένα παραδοσιακό ή τελετουργικό σχήμα, όπως οι αποδείξεις δυο στηλών (δεδομένα – ζητούμενα) που διδάσκονται στη γεωμετρία.
- Ένα επιχείρημα που εγκρίνεται από μια αρχή, όπως ο δάσκαλος ή ένας επιστήμονας των μαθηματικών.
- Ο έλεγχος ότι μια πρόταση – ένα θεώρημα - ισχύει για ένα παράδειγμα ή ίσως και για διάφορα παραδείγματα.
- Η οπτική ένδειξη ότι μια ορισμένη ιδιότητα διατηρείται.

Κοινωνικομαθηματικά Πρότυπα (Sociomathematical norms)

Ο όρος κοινωνικομαθηματικά πρότυπα αναφέρεται στις περιβαλλοντικές επιρροές, οι οποίες καθορίζουν τις μαθηματικές αντιλήψεις και τις αναμενόμενες συμπεριφορές των μαθητών, όπως τα μαθητικά εγχειρίδια, τα παρεχόμενα εργαλεία,

τα σχόλια και οι παρατηρήσεις των δασκάλων καθώς και οι ανατροφοδοτήσεις τους (Yackel & Cobb, 1996 ·αναφορά στο Weber, 2003).

Οι διαφορετικές βαθμίδες εκπαίδευσης απαιτούν διαφορετικούς τύπους αιτιολόγησης από το μαθητή, χωρίς να εξηγείται συνήθως ποιος τύπος απαιτείται, με αποτέλεσμα πολύ συχνά ο μαθητής να λαμβάνει διαφορετικά και μικτά μηνύματα (Weber, 2003). Πολλά σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν μια διαισθητική επεξήγηση μιας πρότασης ή ένα παράδειγμα για να δικαιολογήσουν μια άλλη, παράλληλα με μια αυστηρή (τυπική) απόδειξη, χωρίς όμως η μετάβαση της σκέψης από τη διαισθητική και την εμπειρική εμπειρική στην τυπική να εξηγείται ρητά. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι αυτό μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να αποκτήσουν ανεπιθύμητες αντιλήψεις για τη μαθηματική αυστηρότητα, την επεξήγηση και την απόδειξη. Παράλληλα, μπορεί αυτό μερικώς να εξηγήσει γιατί οι μαθητές διατυπώνουν άτυπα επιχειρήματα ως αποδείξεις ακόμα και σε ανώτερα επίπεδα εκπαίδευσης (Raman, 2000).

Ανεπαρκής Εννοιολογική Κατανόηση

Η έρευνα έχει αποκαλύψει ότι η μη κατανόηση ενός θεωρήματος ή μιας έννοιας οδηγεί τους μαθητές στο να εκτελούν ασύνδετες διαδικασίες, όπως χειρισμούς τύπων χωρίς να σκέφτονται λογικά για το τι τα σύμβολα αντιπροσωπεύουν.

Κατά τον Weber (2003, 2001), ακόμα και αν φαίνεται ότι οι μαθητές – και οι σπουδαστές - είναι «λογικά» ικανοί, δηλαδή ξέρουν τι αποτελεί μια απόδειξη και μπορούν να σκέφτονται αφαιρετικά, να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν τους ορισμούς, τις έννοιες, τα θεωρήματα μιας μαθηματικής περιοχής και να χειρίζονται τα λογικά συμπεράσματα, αυτό δεν αποτελεί εγγύηση ότι μπορούν να κατασκευάσουν και αποδείξεις πέρα από τις πολύ τετριμμένες. Συχνά αποτυγχάνουν

επειδή φτάνουν σε αδιέξοδο, όπου απλά δεν ξέρουν τι να κάνουν. Κατά το γράψιμο μιας απόδειξης υπάρχουν πολλά έγκυρα συμπεράσματα που κάποιος μπορεί να ανασύρει από τη μνήμη του για μια μαθηματική περιοχή, όμως δεν είναι σίγουρο ότι θα είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει εκείνη τη γνώση κατάλληλα για να κατασκευάσει αποδείξεις σ' εκείνη την περιοχή. Η γνώση του ορισμού μιας έννοιας δεν εξασφαλίζει ότι οι μαθητές μπορεί να σκεφτούν λογικά για εκείνη την έννοια (More, 1994· αναφορά στο Weber, 2003). Ερευνητικά αποτελέσματα, τα οποία βασίζονται στην ανάλυση των αποδείξεων των μαθητών, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η γνώση των εννοιών και των θεωρημάτων δεν είναι ικανοποιητική για την εκτέλεση μαθηματικών αποδείξεων (Reiss, Klieme & Heinze, 2001).Οι μαθητές έχουν ανάγκη συχνά από μια διαισθητική κατανόηση της έννοιας ότι αυτή λειτουργεί, πριν μπορέσουν να κατασκευάσουν αποδείξεις που τη χρησιμοποιούν (Weber, 2003).

Σε μια μελέτη του ο Weber (2001) παρατήρησε ότι η κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης και η ύπαρξη συντακτικής γνώσης δεν είναι αρκετές για την κατασκευή μιας επιτυχημένης απόδειξης από προπτυχιακούς φοιτητές. Σαφώς, είναι απίθανο κάποιος να κατασκευάσει μια απόδειξη με παραγωγή συμπερασμάτων κατά τρόπο τυχαίο. Οι μαθητές χρειάζονται στρατηγικές και ευρετικές οι οποίες θα τους βοηθήσουν να αντιμετωπίσουν μια μαθηματική κατάσταση.

Ατελέσφορες Στρατηγικές της Απόδειξης

Η έκφραση ή η αναδιατύπωση των εννοιών με διαφορετικούς τρόπους (με εικόνες, με σύμβολα, ή με λέξεις διαφορετικές από τον ορισμό τους), η εύρεση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μιας έννοιας (παραγωγή ενός ή περισσότερων παραδειγμάτων σχετικών με την έννοια) ή μιας πρότασης, η χρησιμοποίηση των παραδειγμάτων για την ανάπτυξη υποθέσεων και τον έλεγχο της ισχύος τους (χρήση

αντιπαραδείγματος) είναι τρεις στρατηγικές της απόδειξης κατά τους Housman & Porter (2003). Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι αυτές οι στρατηγικές της απόδειξης βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση, η δε χρήση τους από ένα μαθητή μπορεί να αφορά και την επιλογή εκείνων των επιχειρημάτων που κρίνονται απαραίτητα από τον ίδιο, προκειμένου να αποδειχθούν ή να ανασκευαστούν οι υποθέσεις. Οι Housman & Porter (2003), αναλύοντας τα αποτελέσματα μιας έρευνας με σπουδαστές, κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα.

- Η προγενέστερη εμπειρία απόδειξης βοηθά στην υιοθέτηση πετυχημένων στρατηγικών απόδειξης.
- Σπουδαστές με ελλιπή ενασχόληση με στρατηγικές απόδειξης στηρίζονται περισσότερο στις εξωτερικές πηγές για να πειστούν οι ίδιοι και να πείσουν για την ισχύ των υποθέσεών τους.
- Η καθοδήγηση των σπουδαστών στη χρήση της στρατηγικής της παραγωγής παραδείγματος ή αντιπαραδείγματος μπορεί να τους βοηθήσει στην κίνηση από ένα σχέδιο εξωτερικής πεποίθησης προς ένα εμπειρικό σχέδιο απόδειξης, η δε καθοδήγησή τους στη χρήση και των τριών στρατηγικών απόδειξης θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν ένα αναλυτικό σχέδιο απόδειξης.

Ελλιπής Στρατηγική και Μεθοδολογική Γνώση

Κατά τον Weber (2001), είναι απαραίτητο οι σπουδαστές να κατέχουν τη στρατηγική γνώση. Προσδιόρισε τέσσερις τύπους στρατηγικής γνώσης: γνώση των τεχνικών απόδειξης της συγκεκριμένης περιοχής, γνώση εκείνων των θεωρημάτων που είναι σημαντικά και θα τους είναι χρήσιμα, γνώση του πότε θα χρησιμοποιηθεί η συντακτική στρατηγική και γνώση του πότε να μη χρησιμοποιηθεί. Ορίζει τη συντακτική στρατηγική ως την απόδειξη που αποτελείται εξ' ολοκλήρου από το

χειρισμό συμβόλων ή την απόδειξη όπου μόνο η διαδικαστική, σε αντιδιαστολή με την εννοιολογική ή τη σημασιολογική γνώση απαιτείται.

Οι Heinze A. και Reiss K. (2002) εισάγουν τον όρο μεθοδολογική γνώση και ισχυρίζονται ότι αυτή η γνώση είναι απαραίτητο συστατικό της ικανότητας απόδειξης. Η μεθοδολογική γνώση αποτελείται από τρεις πτυχές: σχέδιο απόδειξης (proof scheme), δομή απόδειξης (proof structure) και λογική αλυσίδα (logical chain). Αυτές οι τρεις πτυχές, ναι μεν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη, αλλά συνδέονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν ένας σπουδαστής χρησιμοποιεί ένα κυκλικό επιχείρημα (circular argument), έρχεται σε αντίθεση με τη δεύτερη πτυχή (δομή απόδειξης), αλλά όχι απαραίτητα με την πρώτη και τρίτη (σχέδιο απόδειξης, λογική αλυσίδα)

- Σχέδιο απόδειξης (proof scheme): Μια απόδειξη είναι ένα σχέδιο συλλογισμού που αποτελείται από παραγωγικά επιχειρήματα. Άλλα είδη επιχειρημάτων, όπως εμπειρικά, επαγωγικά, διαισθητικά ή αναφοράς σε μια αρχή δεν είναι συνήθως επαρκή για μια μαθηματική απόδειξη,
- Δομή απόδειξης (proof structure): Η απόδειξη αρχίζει από τις δεδομένες προκείμενες και τελειώνει σε ένα συγκεκριμένο ισχυρισμό,
- Λογική αλυσίδα (logical chain): Κάθε βήμα μιας απόδειξης μπορεί να συμπεραίνεται από το προηγούμενο βήμα.

Συγκριτικός πίνακας των παραγόμενων αιτιολογιών και επιχειρημάτων από τους μαθητές κατά τις διάφορες φάσεις απόδειξης των Bell, Balacheff, Sowder &Hrel, Recio & Godino, Marrades & Gutierrez

Bell	Balacheff		Sowder & Harel		Recio & Godino	Marrades & Gutierrez		
εμπειρικές	ρεαλιστικές	αφελείς	εξωτερικές	τελετουργικές	επεξηγηματικές	εμπειρικές	αποτυχημένες	
				αυθεντίας ή αρχής			αφελείς	αντιληπτικές
				συμβολικές				επαγωγικές
		κρίσιμο πείραμα	εμπειρικές	επαγωγικές	εμπειρικές ή επαγωγικές		κρίσιμο πείραμα	βασισμένες σε ένα παράδειγμα
								constructive
								αναλυτικές
								διαισθητικό
		γενικό παράδειγμα		αντιληπτικές			γενικό παράδειγμα	βασισμένες σε ένα παράδειγμα
								constructive
								αναλυτικές
								διαισθητικό
παραγωγικές	εννοιολογικές	Πείραμα σκέψης	αναλυτικές	μετασχηματιστικές	άτυπες παραγωγικές	παραγωγικές	αποτυχημένες	
							Πείραμα σκέψης	μετασχηματιστικές
								δομικές
		συμβολικές		αξιωματικές	τυπικές παραγωγικές		τυπικής αφαίρεσης	μετασχηματιστικές
								δομικές

Συγκριτικός Πίνακας Αιτιολογιών και Επιχειρημάτων των Bell, Balacheff, Sowder & Harel, Recio & Godino, Marrades & Gutierrez

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τα «Ανοιχτά» Γεωμετρικά Προβλήματα

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε φαίνεται να προκύπτει ότι η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να παρέχει ευκαιρίες για να βελτιωθεί η διδασκαλία και η εκμάθηση της μαθηματικής απόδειξης μέσα στο πλαίσιο της σχολικής γεωμετρίας. Το γεγονός όμως ότι σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές μπορούν να πειστούν για την ισχύ μιας πρότασης άμεσα με τη χρήση του συρσίματος, μέσω του οποίου παράγονται πολλές περιπτώσεις της ίδιας γεωμετρικής κατάστασης, απαιτεί από τους δασκάλους των μαθηματικών να βρουν εκείνους τους τρόπους με τους οποίους η γεωμετρική απόδειξη να εμφανίζει στη σχολική πρακτική και άλλες λειτουργίες (επεξήγηση, διερεύνηση, διανοητική πρόκληση, συστηματοποίηση και επικοινωνία) παράλληλα με εκείνες της αιτιολόγησης και της επαλήθευσης (de Villiers, 2003· Hoyles & Jones, 1998). Συνεπώς, ο στόχος είναι να βρεθούν και να τεθούν προβλήματα ή δραστηριότητες, στα οποία η όποια απόδειξη να είναι μέσο παροχής ενόρασης και έμπνευσης στο γιατί ένα αποτέλεσμα που «φαίνεται» στην οθόνη του υπολογιστή μπορεί να είναι αληθές. Η ενόραση και η κατανόηση θα μπορούσαν να αναπτυχθούν μέσω ανοιχτής διερεύνησης και πειραματισμού (Leung & Lopez-Real, 2002). Για αυτό το σκοπό προτείνουμε τα ανοιχτά προβλήματα ως μια εναλλακτική προσέγγιση για τη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης και για την εισαγωγή των μαθητών στη γεωμετρική θεωρία και τη γεωμετρική σκέψη.

Η έννοια των ανοιχτών προβλημάτων στα μαθηματικά πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Arsac et al., (1988) για να χαρακτηρίσουν μια δραστηριότητα διδασκαλίας

και εκμάθησης που επιτρέπει στους μαθητές να «κάνουν» μαθηματικά (αναφορά στο Mogetta et al., 1999). Τα ανοιχτά προβλήματα φαίνεται να προωθούν τη μετάβαση της ευθύνης από το δάσκαλο στους μαθητές, ακόμα και αν οι μαθητές συμμετέχουν στις «συλλογικές συζητήσεις» τάξεων (Gerulli & Mariotti, 2003· Furinghetti, 2003).

Η δομή των ανοιχτών προβλημάτων έχει τα εξής χαρακτηριστικά (Mogetta et al., 1999· Furinghtti, 2003):

- Η πρόταση του προβλήματος είναι σύντομη και αποτελείται συνήθως από μια απλή περιγραφή μιας κατάστασης και ένα γενικό αίτημα για τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ή των ιδιοτήτων της κατάστασης.
- Η πρόταση του προβλήματος δεν προτείνει τη μέθοδο λύσης, ούτε την ίδια τη λύση, αλλά δημιουργεί μια κατάσταση που υποκινεί την παραγωγή των υποθέσεων.
- Οι ερωτήσεις είναι διατυπωμένες με τη μορφή «ποια σχέση μπορεί να βρείτε μεταξύ…..;», «ποιο είδος σχήματος μπορεί να (προκύψει ή έχει την ιδιότητα….)……αν …..:», ή «πώς η μορφή (αλλάζει)…υποθέτοντας ότι…..».

Το πρόβλημα τίθεται σε με εννοιολογική περιοχή με την οποία οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι, κάτι που τους διευκολύνει να αναμιχθούν άμεσα σε προσπάθειες παραγωγής μιας υπόθεσης σε ένα λογικό χρόνο.

Ο Στόχος των Ανοιχτών Προβλημάτων στο Πλαίσιο της Απόδειξης

Ένα πρόβλημα που παρουσιάζεται σε μια ανοιχτή μορφή δεν μπορεί να περιοριστεί στην εφαρμογή μιας διαδικασίας που πρέπει να αναφερθεί με αποστήθιση. Αλλά, οι ίδιοι οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν για την επιλογή μιας πορείας λύσης. Συνεπώς, τίθενται αντιμέτωποι με μια κατάσταση στην οποία πρέπει να *ανακαλύψουν* ένα αποτέλεσμα, το οποίο μπορεί και να μην είναι το μοναδικό. Ένα

ανοιχτό πρόβλημα επιτρέπει την ελευθερία στην παραγωγή των υποθέσεων. Απαιτεί από τους μαθητές να θέσουν οι ίδιοι ερωτήματα και όχι να απαντήσουν στα προκαθορισμένα. Για να λυθεί ένα ανοιχτό πρόβλημα οι μαθητές πρέπει να υποβληθούν στην ακόλουθη διαδικασία: να αναπαραστήσουν σχηματικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα (αλλαγή πλαισίου), να διερευνήσουν τη γεωμετρική κατάσταση του προβλήματος, να κάνουν υποθέσεις, να επικυρώσουν τις υποθέσεις και στο τέλος να παρουσιάσουν μια γραπτή απόδειξη του προβλήματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η προσοχή να στρέφεται όχι μόνο στην «παραγωγή της λύσης» αλλά στη «διαδικασία» που την παράγει. Από αυτή την άποψη, τα ανοιχτά προβλήματα φαίνονται να είναι κατάλληλα να υποκινήσουν τη σκέψη σε παραγωγικές διαδικασίες (Mogetta et al., 1999).

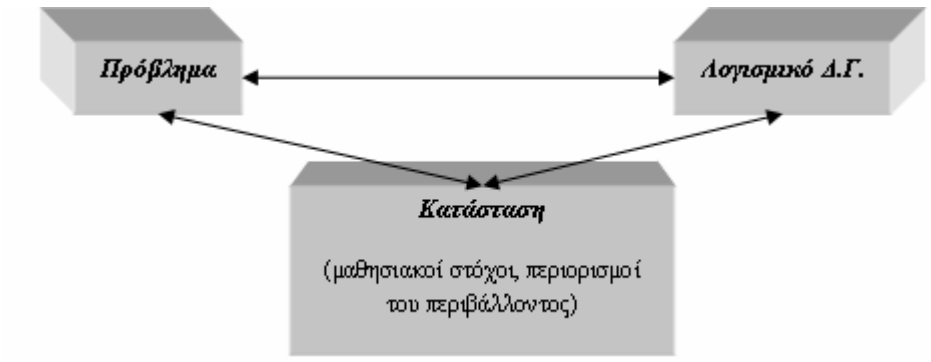
Από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (πχ. Arzarello et al., 2002) τονίζεται ότι παρέχοντας στους μαθητές στόχους που δηλώνουν «αποδείξτε ότι…» μπορεί να εμποδίσει τη βελτίωση των αποδεικτικών δεξιοτήτων των μαθητών. Αντίθετα, οι ανοιχτοί στόχοι οι οποίοι ευνοούν και τη δυναμική πειραματική διερεύνηση μιας πρότασης και το μετασχηματιστικό συλλογισμό (Simon, 1996) μπορεί να επιτρέψουν στους μαθητές να ανοικοδομήσουν, από την άποψη των ιδιοτήτων και των σχέσεων, όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για μια απόδειξη (Mogetta et al., 1999).

Ο Στόχος των Ανοιχτών Προβλημάτων στο Πλαίσιο της Απόδειξης με τη Δυναμική Γεωμετρία

Ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας παρέχει νέα εργαλεία και είναι ένα νέο σύστημα μεσολάβησης για τη λύση των γεωμετρικών προβλημάτων. Αυτό απαιτεί ένα προσεκτικό σχέδιο δραστηριοτήτων, οι οποίες θα πρέπει να λαμβάνουν

υπόψη την αλληλεπίδραση τριών στοιχείων: το *δυναμικό λογισμικό*, ως περιβάλλον, το *πρόβλημα* και μια *κατάσταση*, μέσω της οποίας πραγματοποιείται η μεταβίβαση του προβλήματος (Mogetta et al., 1999). Το πρόβλημα θα πρέπει να παρουσιαστεί μέσα σε μια κατάσταση η οποία καθορίζεται από το πλαίσιο των μαθησιακών στόχων και υπακούει στους ιδιαίτερους περιορισμούς του περιβάλλοντος (Σχήμα 6.1).

Οι Mogetta et al., (1999) επισημαίνουν ότι η διατύπωση του γεωμετρικού προβλήματος σε ένα τέτοιο πλαίσιο είναι ένα σημαντικό θέμα συζήτησης και την ευθύνη φέρει ο εκπαιδευτικός, ο οποίος πρέπει με τη διατύπωση του προβλήματος να θέσει στόχους που ενθαρρύνουν την παραγωγική σκέψη και αποκαλύπτουν πτυχές μιας μαθηματικής δραστηριότητας, οι οποίες στα σχολικά μαθηματικά δεν είναι συνηθισμένες.



Σχήμα 6.1: Σχηματική απεικόνιση του Πλαισίου στήριξης μιας Δραστηριότητας Επίλυσης προβλήματος σε Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, όπως ήδη έχει αναφερθεί, φαίνεται να δίνει έμφαση στις διερευνητικές και επεξηγηματικές λειτουργίες της απόδειξης (de Villiers, 2003· Hadas et al., 2000), οι οποίες είναι ένα σημαντικό στοιχείο στην

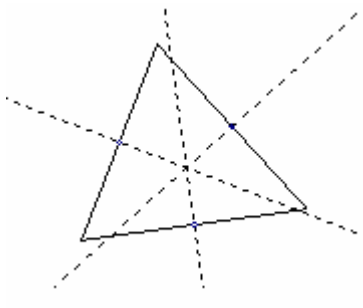
εισαγωγή των μαθητών στα «θεωρήματα» -όπου ένα θεώρημα είναι μια «γνωστική ενότητα» μιας πρότασης, της απόδειξής της και μιας θεωρίας αναφοράς (Mariotti, 2000). Η εισαγωγή των μαθητών στο «παιχνίδι» της παραγωγής των θεωρημάτων σημαίνει και την εισαγωγή τους στους «κανόνες» του, οι οποίοι ορίζουν ότι τα επιχειρήματα θα πρέπει να είναι συλλογισμοί που θα στηρίζονται σε κοινά αποδεκτές αλήθειες και στα όσα μέχρι τώρα ήδη έχουν ληφθεί μέσω των λογικών συλλογισμών (Gravina, 2000).

Το Πρόβλημα

Στα μαθηματικά προβλήματα ή ασκήσεις, που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας, οι ερωτήσεις είναι εκφράσεις κλειστού τύπου, όπως «αποδείξτε ότι…». Τα προβλήματα αυτά περιγράφουν μια κατάσταση, η οποία οδηγεί στο σχηματισμό ενός γεωμετρικού σχήματος και ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν κάποιες ιδιότητες που αναφέρονται στο συγκεκριμένο σχεδιασμό. Η διατύπωση του προβλήματος δεν αφήνει περιθώρια στους μαθητές για δημιουργική εργασία (πειραματισμός, διερεύνηση, ανακάλυψη, διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων), η οποία θα καταλήγει φυσιολογικά στην απόδειξη μιας πρότασης. Το αποτέλεσμα είναι προκαθορισμένο να είναι αληθές και απλώς οι μαθητές είναι αναγκασμένοι να το αποδείξουν, χωρίς να τους προσφέρεται κανένα κίνητρο (Jones, 2000).

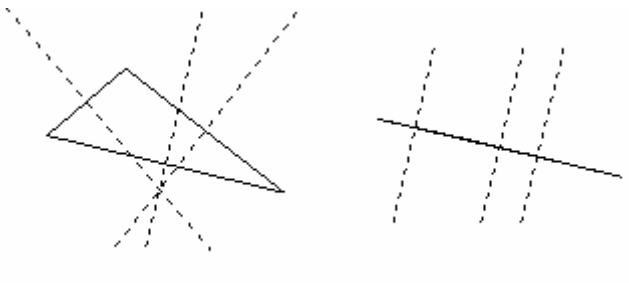
Η εξέταση της σχολικής πρακτικής αποκαλύπτει ότι όταν οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν τις ευθείες του τριγώνου (ύψη, διάμεσοι, μεσοκάθετοι) σε περιβάλλον με χαρτί και μολύβι, οι απαντήσεις στο ερώτημα «*τι παρατηρούν»* δεν είναι οι αναμενόμενες. Τα προβλήματα ξεκινούν με το σχεδιασμό των ευθειών του τριγώνου, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις του ορθογώνιου ή του αμβλυγώνιου τριγώνου.

Ακόμα και αν ο σχεδιασμός των ευθειών είναι επιτυχής, μπορεί να μην αναγνωριστεί ότι και οι τρεις ευθείες του τριγώνου (π.χ οι μεσοκάθετοι) διέρχονται από το ίδιο σημείο, ή, και αν εντοπιστεί το σημείο τομής των, συνήθως δε δίνεται έμφαση στην *εξάρτηση του σημείου τομής από την ιδιότητα της σύγκλισης των ευθειών*, ειδικά στις περιπτώσεις που το σχέδιο κατευθύνει την προσοχή των μαθητών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σημείου τομής των μεσοκαθέτων, το σχέδιο μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι «*οι μεσοκάθετοι συναντιούνται κάπου στη μέση*» και όχι ότι «*οι μεσοκάθετοι πάντα τέμνονται (συντρέχουν) σε ένα σημείο*». (Σχήμα 6.2)



Σχήμα 6.2

Η χρήση ενός λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας στη σχολική τάξη σε ανάλογες δραστηριότητες επιτρέπει να ξεπεραστούν οι δυσκολίες σχεδιασμού των ευθειών του τριγώνου, αλλά δεν είναι σίγουρο ότι θα προκαλέσει παρατηρήσεις διαφορετικές από εκείνες σε περιβάλλον με χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα, το σύρσιμο των κορυφών ενός δυναμικού τριγώνου μπορεί να οδηγήσει σε παρατηρήσεις όπως ότι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών είναι έξω ή μέσα στο τρίγωνο, ή οι μεσοκάθετοι γίνονται παράλληλοι, όταν το τρίγωνο καταρρέει σε τμήμα (Σχήμα 6.3) και όχι ότι οι «*μεσοκάθετοι* των πλευρών του τριγώνου *πάντα συντρέχουν*».



Σχήμα 6.3

Μια εύλογη εξήγηση αυτής της συμπεριφοράς, ότι δηλαδή οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις συντρέχουσες ευθείες του τριγώνου ως κάτι το ιδιαίτερο για το τρίγωνο, είναι ότι στερούνται της γνώσης για τη συχνότητα εμφάνισης αυτής της ιδιότητας και στα άλλα πολύγωνα. Τίθεται το ερώτημα με ποιον τρόπο, για παράδειγμα στην περίπτωση των μεσοκαθέτων, θα μπορούσαν να δημιουργηθούν ευκαιρίες οι οποίες πιθανόν να οδηγήσουν σε σημαντικές δραστηριότητες. Επειδή ακριβώς αναζητείται η σύγκλιση των ευθειών του τριγώνου να αναγνωρίζεται ως κάτι το ιδιαίτερο για τα τρίγωνα, προτείνεται το ακόλουθο πρόβλημα των μεσοκαθέτων, ως παράδειγμα με χαρακτηριστικά των ανοιχτών προβλημάτων όπου μια τέτοια ιδιότητα δεν μπορεί να ληφθεί ως δεδομένη.

Δραστηριότητα των «Μεσοκαθέτων

Όταν ανοιχτά προβλήματα τίθενται για να λυθούν μέσα σε ένα δυναμικό περιβάλλον, οι διαδικασίες που εκτελούνται, λόγω της μεσολάβησης του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, διαφέρουν πολύ από τις καθιερωμένες στο περιβάλλον με χαρτί και μολύβι. Εκτιμούμε ότι το πρόβλημα αυτό, ή και παρόμοιά του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έναυσμα για την εισαγωγή των μαθητών στις διάφορες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας (παρατήρηση, διερεύνηση, διατύπωση και έλεγχος εικασίας, αιτιολόγηση) και στις λειτουργίες της απόδειξης (επαλήθευση, επεξήγηση,

ανακάλυψη και συστηματοποίηση). Η λειτουργία της διανοητικής πρόκλησης είναι παρούσα σε όλες τις φάσεις της διερεύνησης. Η λειτουργικότητα των εργαλείων κατασκευής, των μετρήσεων και το σύρσιμο γίνεται αισθητή και αποκαλύπτεται κρίσιμη στις διάφορες φάσεις της διερεύνησης. Οι επεμβάσεις του δασκάλου, για να υποδείξει τη λειτουργία και τη χρήση εργαλείων - που μπορεί να χρειαστούν, για να καθοδηγήσει την αναζήτηση στοιχείων, για να υποδείξει στρατηγικές επίλυσης και για να συντονίσει τις συζητήσεις για την ανακεφαλαίωση των συμπερασμάτων και τον προσδιορισμό νέων στόχων, είναι απαραίτητες για μια επιτυχημένη αποδεικτική διαδικασία.

Πρόβλημα: Να διερευνήσετε αν υπάρχει ένα σημείο το οποίο να ισαπέχει από τις κορυφές ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

Ο Σκοπός του προβλήματος είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι:

- η ιδιότητα της σύγκλισης των μεσοκαθέτων των πλευρών στα πολύγωνα δεν μπορεί να ληφθεί ως δεδομένη, παρά μόνο στα τρίγωνα,
- η ύπαρξη του σημείου τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών πολυγώνου συνδέεται με την ύπαρξη ή μη του περιγεγραμμένου κύκλου,
- το κριτήριο της σύγκλισης των μεσοκαθέτων των πλευρών τετράπλευρου είναι η παραπληρωματικότητα των απέναντι γωνιών του.

Προσδοκούμε οι μαθητές να δοκιμάσουν έκπληξη όταν θα ανακαλύψουν ότι πάντοτε οι μεσοκάθετοι σε ένα τρίγωνο, ανεξάρτητα από τη μορφή του, συντρέχουν και όχι πάντοτε στα τετράπλευρα. Αυτή η έκπληξη ελπίζουμε ότι μπορεί να τους κάνει να αισθανθούν την ανάγκη να αναζητήσουν και να γενικεύσουν τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες οι μεσοκάθετοι θα μπορούσαν να συντρέχουν σε ένα σημείο σε τυχαίο τετράπλευρο, αλλά και στα ήδη γνωστά τους τετράπλευρα.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να τεθεί σε μαθητές οι οποίοι γνωρίζουν ήδη τις έννοιες τις σχετικές με τα βασικά γεωμετρικά σχήματα και τα σχετικά θεωρήματα, τα συνδεόμενα με αυτές. Συγκριμένα, πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της μεσοκαθέτου (ως της κάθετης στο μέσο ευθυγράμμου τμήματος, αλλά και ως άξονα συμμετρίας του ευθυγράμμου τμήματος)· την έννοια του κύκλου (ως του σχήματος του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από ένα σταθερό σημείο - το κέντρο του - σταθερή απόσταση, ίση με την ακτίνα του), την έννοια της ισότητας δυο τριγώνων αλλά και τα κριτήρια ισότητας, τα οποία και να μπορούν να χρησιμοποιούν σε απλές εφαρμογές. Επίσης, πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν την ύπαρξη ή μη άξονα ή κέντρου συμμετρίας στα γνωστά τους πολύγωνα.

Οι διδακτικοί στόχοι: Το πρόβλημα θα χρησιμοποιηθεί ώστε οι μαθητές

να ανακαλύψουν και να επεξηγήσουν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος,

- να ανακαλύψουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών οποιουδήποτε τριγώνου πάντοτε συντρέχουν, να δώσουν μια επεξήγηση της σύγκλισης και να διερευνήσουν τη θέση του σημείου σύγκλισης για τις διάφορες μορφές του τριγώνου,
- να εισαχθούν στην έννοια του περιγεγραμμένου κύκλου και του περίκεντρου του τριγώνου (ως του σημείου τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του), αλλά και στην έννοια του εγγεγραμμένου σε κύκλο τριγώνου ή πολυγώνου,
- να ανακαλύψουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών οποιουδήποτε τετράπλευρου δε συντρέχουν και συνεπώς δεν υπάρχει περιγεγραμμένος

κύκλος σε ένα τετράπλευρο και δεν είναι κάθε τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο, σε αντίθεση με το τρίγωνο.

Η ανάπτυξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος προτείνεται να ολοκληρωθεί στις ακόλουθες φάσεις. Η πρώτη φάση θα ολοκληρωθεί με την ανακάλυψη των ιδιοτήτων της μεσοκαθέτου και την αναδιατύπωση του αρχικού προβλήματος ως: *«ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τυχαίου τετράπλευρου να διέρχονται από το ίδιο σημείο»*. Η δεύτερη φάση θα ολοκληρωθεί με την ανακάλυψη της ιδιότητας της σύγκλισης των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου, την εισαγωγή της έννοιας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τη διατύπωση και επεξήγηση του ισχυρισμού : «*ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο εάν και μόνο εάν οι μεσοκάθετοί του συντρέχουν»*.

Περιγραφή της Διδακτικής Προσέγγισης

Ακολούθως θα περιγράψουμε τις διάφορες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας που ακολουθούνται και στα τρία μέρη της διδακτικής μας προσέγγισης για την ύπαρξη ή μη σημείου τομής που να ισαπέχει από τις κορυφές τυχαίου τετράπλευρου. Οι φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας κάθε μέρους έχουν παρόμοιο πλαίσιο και εμφανίζουν παρόμοιες λειτουργίες και στρατηγικές επίλυσης. Για το λόγο αυτό η περιγραφή αναλύεται συνολικά και για τα τρία μέρη.

Οι υποθέσεις μας είναι ότι: Η λειτουργία της οπτικοποίησης υποστηρίζεται από την αντίληψη για τη γεωμετρική κατάσταση του προβλήματος, η οποία ενισχύεται από τα σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή. Ο απαιτούμενος συλλογισμός είναι και στα μέρη της προτεινόμενης προσέγγισης ίδιου τύπου, ευρετικός και επαγωγικός, ο οποίος υποστηρίζεται από τις μετρήσεις, τις κατασκευές

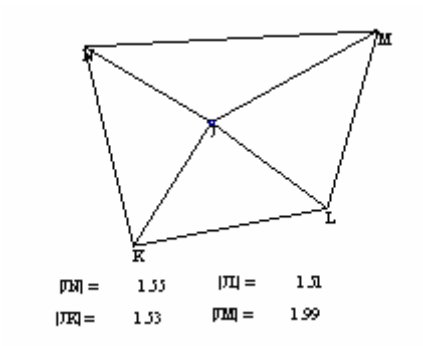
και το σύρσιμο. Εκτιμούμε ότι η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας βοηθά στο να αναπτυχθούν μετασχηματιστικές διαδικασίες συλλογισμού, οι οποίες θα ενισχύονται στις διάφορες φάσεις της διαδικασίας επίλυσης (ιδιαίτερα της διερεύνησης,) και οι οποίες θα οδηγήσουν στην παραγωγή θεωρημάτων. Πιστεύουμε ότι η αίσθηση και η ανάγκη για επικύρωση των διατυπωμένων υποθέσεων θα προκύψει από την αβεβαιότητα για την αλήθεια των υποθέσεων, μέσα από την ύπαρξη αντιπαραδειγμάτων, η οποία μπορεί να προκαλέσει αναζήτηση κινήτρων και να αρχίσει μια διαδικασία επιχειρηματολογίας.

- *Φάση της κατανόησης:* Στη φάση αυτή πρέπει να γίνει κατανοητή η διατύπωση του προβλήματος, να αποσαφηνιστούν τα κύρια μέρη του (δεδομένα, ζητούμενα, συνθήκη), ώστε να κατανοηθεί και να οικειοποιηθεί η κατάσταση που περιγράφεται και να εντυπωθεί ο σκοπός . Στη φάση αυτή ο μαθητής μπορεί εργαστεί σε περιβάλλον με χαρτί και μολύβι για να σχεδιάσει και να δείξει πάνω στο σχέδιο τα δεδομένα και τα ζητούμενα, να χρησιμοποιήσει τον κατάλληλο συμβολισμό για να δώσει ονόματα και να ερευνήσει τα στοιχεία (σύγκριση αποστάσεων) για τα οποία πρέπει να επιλέξει και κατάλληλα σύμβολα (π.χ το σύμβολο της ισότητας - μαθηματικοποίηση της συνθήκης). Η κατανόηση του προβλήματος υποστηρίζει την αρχική φάση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Αυτή η φάση επαναλαμβάνεται στις περιπτώσεις που απαιτείται να τεθεί προς διερεύνηση κάθε νέα γεωμετρική κατάσταση, που προκύπτει όταν επιλέγεται η στρατηγική ενός απλούστερου προβλήματος, ή όταν επαναπροσδιορίζεται το αρχικό πρόβλημα, σύμφωνα με τα νέα συμπληρωματικά στοιχεία που μπορεί να προκύψουν από τη φάση της διερεύνησης του προβλήματος.

- *Φάση της κατασκευής*: Η αναπαράσταση (κατασκευή) του προβλήματος με μορφή δυναμικού γεωμετρικού μοντέλου απαιτεί την επιλογή των κατάλληλων εργαλείων για σχεδίαση και συμβολισμό. Τα παρεχόμενα εργαλεία από το λογισμικό μπορούν να διευκολύνουν τους μαθητές στην κατασκευή του δυναμικού γεωμετρικού μοντέλου. Η επιλογή των εργαλείων προϋποθέτει την εννοιολογική κατανόηση των κύριων μερών του προβλήματος (φάση κατανόησης), καθώς επίσης και του τρόπου που αυτά μπορούν να αντιπροσωπευθούν με τη βοήθεια των διαθέσιμων εντολών (εσωτερικοποίηση των εργαλείων). Ο σχεδιασμός ενός γεωμετρικού σχήματος και η προσεκτική εξέτασή του με το σύρσιμο μπορούν να δώσουν το έναυσμα για μετασχηματιστικές διαδικασίες συλλογισμού, για να «συλληφθούν» λογικές συνδέσεις που γίνονται φανερές από το σύρσιμο, για να φανεί το πώς τα συστατικά του σχήματος βρίσκονται σε μια σχέση λειτουργικής εξάρτησης τα ένα με το άλλο και για να ανακαλυφθεί κάτω από ποιες προϋποθέσεις μια ορισμένη μορφή έχει ορισμένες ιδιότητες. Όταν η κατάσταση του προβλήματος το επιβάλει, η επέμβαση του δασκάλου για να υποδείξει τη διαδικασία επιλογής και χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων του λογισμικού θεωρείται επιβεβλημένη.
- *Φάσεις της διερεύνησης – παραγωγής και ελέγχου υποθέσεων:* Οι δραστηριότητες διερεύνησης, οι οποίες υποστηρίζονται από ένα δυναμικό περιβάλλον, έχουν δυο κύριους στόχους (Mogetta et al., 1999), όσον αφορά:
    - το περιεχόμενο, δεδομένου ότι ευνοούν την εμφάνιση των ιδιοτήτων με τη μορφή θεωρημάτων
    - τη μέθοδο, δεδομένου ότι αναγκάζουν το μαθητή να υποβάλει ερωτήσεις και να κάνει υποθέσεις.

Κάθε μέρος της διδακτικής προσέγγισης που προτείνουμε επιβάλλει τη διερεύνηση του αρχικού προβλήματος, ή μιας διατυπωμένης υπόθεσης, με στόχο την επαλήθευση ή την αναζήτηση λογικών συνδέσεων των στοιχείων του σχήματος στην οθόνη του υπολογιστή ή την εύρεση αντιπαραδειγμάτων στις περιπτώσεις που μια υπόθεση δεν μπορεί να επικυρωθεί. Στις φάσεις διερεύνησης των μερών της διδακτικής προσέγγισης, που προτείνουμε για το πρόβλημα των «μεσοκαθέτων», η διαδικασία του μετασχηματιστικού συλλογισμού είναι αυτή που μπορεί να αναπτυχθεί και να οδηγήσει στον προσδιορισμό των λογικών συνδέσεων και στις πιθανές γενικεύσεις των υποθέσεων που έχουν παραχθεί.

Η φάση της διερεύνησης της μορφής του σχήματος είναι κρίσιμη. Το σύρσιμο του ζητούμενου σημείου με τις παράλληλες μεταβολές των μέτρων των αποστάσεων δε φαίνεται να αποκαλύπτει κάτι (Σχήμα 6.4).

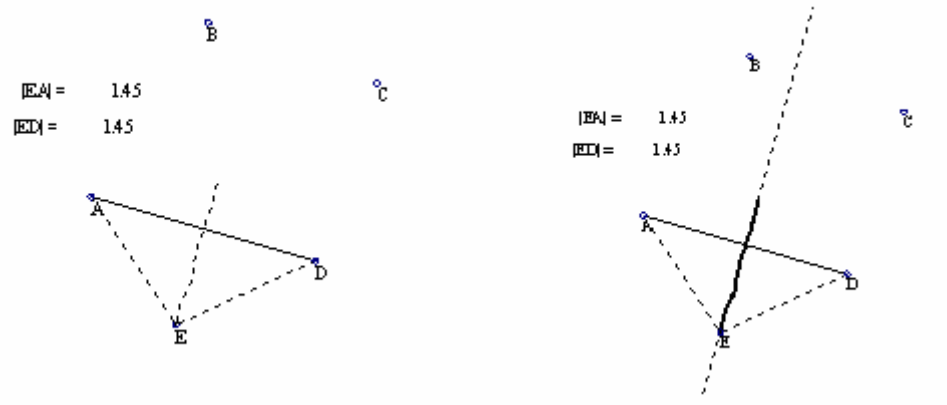


Σχήμα 6.4

Στην επίλυση προβλήματος είναι συχνά χρήσιμο να εξετάζεται μια απλούστερη περίπτωση. Μια απλούστερη περίπτωση θα ήταν να αναζητηθεί ένα σημείο (ή σημεία) που να ισαπέχει/ουν μόνο από δυο κορυφές του τετράπλευρου. Η στρατηγική αυτή μπορεί να επιλεγεί από τους μαθητές. Διαφορετικά η ευθύνη

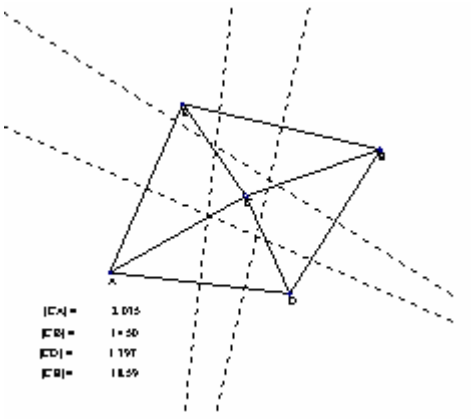
μετατίθεται στο δάσκαλο να τους οδηγήσει να την ανακαλύψουν και να την εφαρμόσουν.

Στη νέα κατάσταση που διαμορφώνεται, η επέμβαση του δασκάλου για να υποδείξει τη διαδικασία επιλογής και χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων του λογισμικού θεωρείται επιβεβλημένη. Ο στόχος της φάσης αυτής είναι να διατυπωθούν εικασίες, οι οποίες θα ελεγχθούν με το σύρσιμο ώστε να αναπτυχθεί η ιδέα ότι η μεσοκάθετος είναι ένα σύνολο σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος (Σχήμα 6.5). Στη συνέχεια μια λογική εξήγηση μπορεί να παραχθεί με εφαρμογή των κριτηρίων ισότητας τριγώνων (αιτιολόγηση 1).



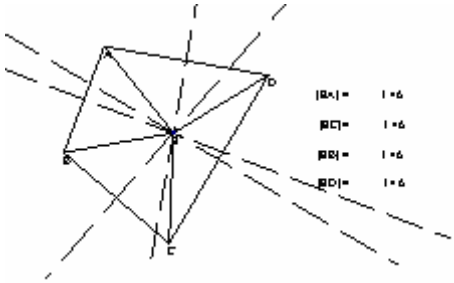
Σχήμα 6.5

Η ανακάλυψη των ιδιοτήτων της μεσοκαθέτου οδηγεί στη συμπλήρωση του σχήματος με τις μεσοκαθέτους των πλευρών του πολυγώνου (σχήμα 6.6).



Σχήμα 6.6

Το σύρσιμο του σημείου σε οριακές θέσεις (θέσεις των σημείων τομής ανά δύο των μεσοκαθέτων) με παράλληλη παρατήρηση των μετρήσεων δε φαίνεται να αποκαλύπτει κάτι ενδιαφέρον. Το σύρσιμο όμως των κορυφών φαίνεται να αποκαλύπτει ότι: οι αποστάσεις του σημείου από τις κορυφές είναι ίσες όταν οι μεσοκάθετοι διέρχονται από το σημείο (σχήμα 6.7).

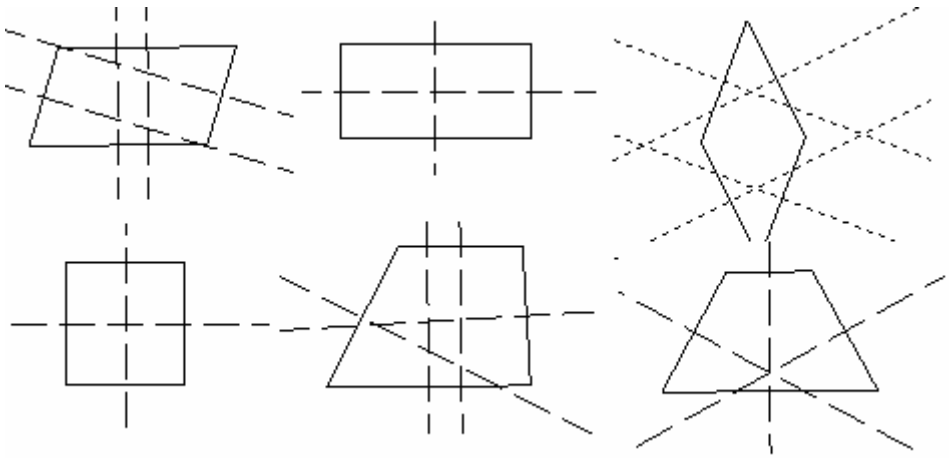


Σχήμα 6.7

Μια πρώτη υπόθεση παράγεται: «*Στο τετράπλευρο υπάρχει ένα σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του*».

Στο σημείο αυτό ο ρόλος του δασκάλου είναι σημαντικός. Προτρέποντας τους μαθητές να δοκιμάσουν να γενικεύσουν το συμπέρασμά τους, πειραματιζόμενοι και με άλλα τετράπλευρα, θα ανακαλύψουν ότι στις περιπτώσεις του ορθογωνίου,

τετραγώνου, ισοσκελούς τραπεζίου η εικασία τους είναι αληθής, και στις άλλες όχι. Συνεπώς η εικασία τους δεν μπορεί να γενικευθεί. Όπως έχει αναφερθεί, η αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων στις περιπτώσεις που η εικασία δεν μπορεί εύκολα να ελεγχθεί είναι μια αποδεκτή στρατηγική, και συνηθίζεται μεταξύ των μαθηματικών (απόδειξη ως επαλήθευση και επιβεβαίωση με τον έλεγχο) (Σχήμα 6.8).

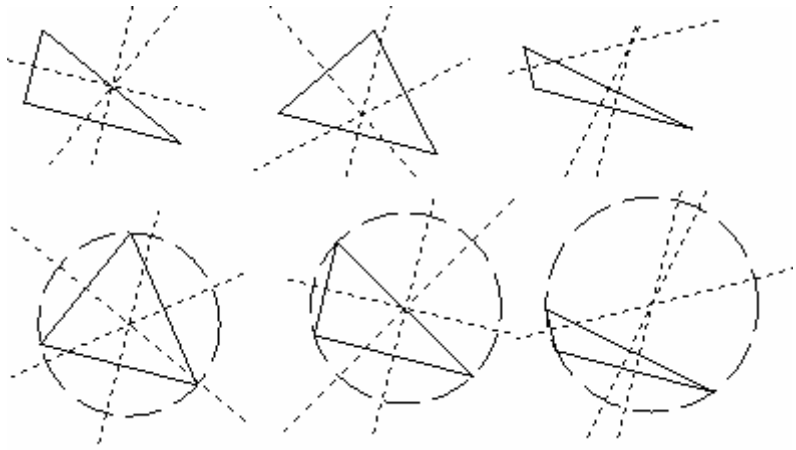


Σχήμα 6.8

Η *γνωστική σύγκρουση* από τη *λάθος* εικασία δημιουργεί ένα αίσθημα αβεβαιότητας, χάρη στην *ανατροφοδότηση* του περιβάλλοντος, και είναι το πλαίσιο που δίνει νόημα στην ανάγκη για αναζήτηση μιας απόδειξης (Laborde, 2000). Μια ανάγκη αναζήτησης γιατί η εικασία δεν είναι αληθής προκύπτει. Φαίνεται ότι απαιτείται μια αναδιάρθρωση του προβλήματος σύμφωνα με τα νέα στοιχεία που προέκυψαν (φάση επινόησης νέου σχεδίου). Η επέμβαση του δασκάλου στο συντονισμό της συζήτησης για τον προσδιορισμό του νέου στόχου είναι απαραίτητη.

Αναδιάρθρωση του προβλήματος: «*Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τυχαίου τετράπλευρου να διέρχονται από το ίδιο σημείο;*».

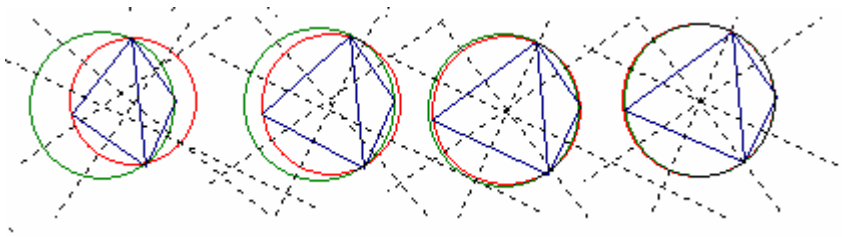
Η στρατηγική της αναζήτησης μιας απλούστερης περίπτωσης μπορεί να επιλεγεί από τους μαθητές (π.χ σε ένα τρίγωνο). Διαφορετικά ο δάσκαλος θα πρέπει να αναλάβει την καθοδήγησή τους, απευθύνοντας κατάλληλα ερωτήματα, για να ανακαλύψουν την πορεία που είναι αναγκαία. Ο στόχος της φάσης αυτής είναι να διατυπωθούν εικασίες, οι οποίες θα ελεγχθούν με το σύρσιμο ώστε να αναπτυχθεί η ιδέα ότι οι μεσοκάθετοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, ανεξάρτητα από τη μορφή του τριγώνου (Σχήμα 6.9). *Μια παραγωγική εξήγηση μπορεί να παραχθεί, ως απάντηση στην ερώτηση από το δάσκαλο γιατί συμβαίνει αυτό* (αιτιολόγηση 2). Η ανακάλυψη της ιδιότητας σύγκλισης των μεσοκαθέτων των πλευρών τριγώνου θα χρησιμοποιηθεί για να εισαχθεί η έννοια του περιγεγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο και η σχετική με αυτήν έννοια του εγγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο (Σχήμα 6.10).



Σχήμα 6.9 – Σχήμα 6.10

Προτρέποντας τους μαθητές να συνδυάσουν την ιδιότητα της σύγκλισης των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου με την έννοια του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, μπορεί να οδηγηθούν στην υπόθεση: *αν το τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο*

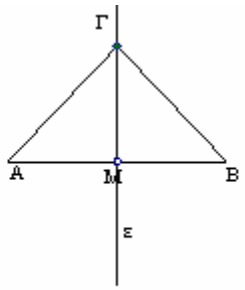
σημείο (γενίκευση). Η προσπάθεια προσέγγισης της επαλήθευσης της διατυπωμένης εικασίας οπτικά θα ακολουθούσε πιθανώς τις παρακάτω φάσεις (Σχήμα 6.11):



Σχήμα 6.11

Το γεγονός ότι, καθώς τα αντικείμενα μπορούν με το σύρσιμο να υποβάλλονται σε συνεχή μετασχηματισμό στην οθόνη του υπολογιστή, παρέχει τη βεβαιότητα ότι η υπόθεση είναι αληθής (Villiers, 2002), αυτό δεν παρέχει καμιά ικανοποιητική εξήγηση για το πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό. Η ανάγκη για να γίνει φανερό το *πώς* και το *γιατί* η υπόθεση είναι αληθής πρέπει να επισημανθεί και να τονιστεί από το δάσκαλο (αιτιολόγηση 3). Την κατάσταση αυτή πρέπει ο δάσκαλος να εκμεταλλευθεί ώστε να αναζητηθούν εκείνες οι ιδιότητες (εκτός της σύγκλισης των μεσοκαθέτων) που κάνουν τα γνωστά τους τετράπλευρα εγγεγραμμένα (ύπαρξη άξονα συμμετρίας η κοινή μεσοκάθετος δύο τουλάχιστον απέναντι παράλληλων πλευρών).

♦ *Φάση αιτιολόγησης:* Αρχικά, θα πρέπει να δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να δοκιμάσουν να αναπτύξουν επιχειρήματα, για να εξηγήσουν τα αποτελέσματα πριν από την παραγωγή μιας γραπτής απόδειξης. Τα επιχειρήματα αυτά στη συνέχεια θα πρέπει να τα οργανώσουν σε μια παραγωγική αλυσίδα μέσα στα πλαίσια της θεωρίας που ήδη έχουν μάθει. Η σύγκλιση των μεσοκαθέτων των πλευρών τριγώνου και η ύπαρξη του περίκεντρου αποδεικνύονται και με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, αλλά και με απλές συνεπαγωγές ισότητας τμημάτων.

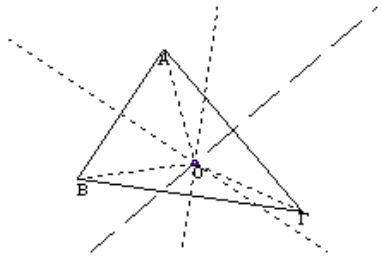


Σχήμα 6.12

Αν ε η μεσοκάθετος του ΑΜ, τότε ΑΜ=ΜΒ, ΓΜ=ΓΜ, γων ΑΜΓ=γων ΒΜΓ, άρα τριγ ΑΜΓ=τριγ ΒΜΓ, επομένως ΓΑ=ΓΒ.

Αντιστρόφως αν ΓΑ= ΓΜ και Μ μέσο ΑΒ, τότε τριγ ΑΜΓ=τριγ ΒΜΓ (αφού ΜΑ=ΜΒ, ΜΓ=ΜΓ και ΓΑ=ΓΜ), επομένως γων ΑΜΓ=γων ΒΜΓ=90^0, άρα ΓΜ μεσοκάθετος στο ΑΒ.

Αιτιολόγηση 1



Αν Ο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των δυο πλευρών ΑΒ, ΒΓ.

Το Ο βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ, άρα ΟΒ=ΟΓ.

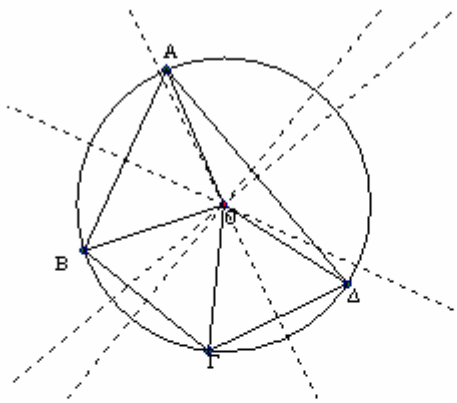
Το Ο βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, άρα ΟΒ=ΟΑ.

Οπότε και ΟΓ=ΟΑ.

Άρα το Ο ισαπέχει από τα Α και Γ, οπότε θα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο της ΑΓ

Συνεπώς οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου συντρέχουν.

Αιτιολόγηση 2



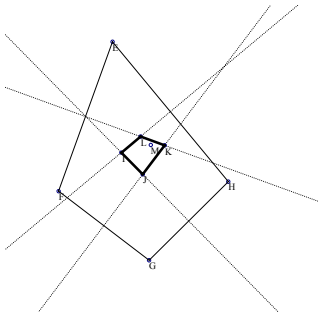
Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Ο το περίκεντρο, τότε ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ. Όμως η μεσοκάθετος κάθε πλευράς έχει την ιδιότητα κάθε σημείο της να ισαπέχει από τα άκρα (κορυφές) της πλευράς, επομένως το Ο θα πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο κάθε πλευράς, συνεπώς οι μεσοκάθετοι των πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο τετράπλευρου συντρέχουν..

Αιτιολόγηση 3

Περισσότερη Διερεύνηση: Το πλαίσιο που διαμορφώνεται από το γεγονός ότι η σύγκλιση των μεσοκαθέτων των πλευρών τετράπλευρου δε μπορεί να γενικευτεί για κάθε τετράπλευρο- συνεπώς και η ιδιότητα της εγγραψιμμότητας- μπορεί να παράσχει το κίνητρο για την αναζήτηση της ύπαρξης κριτηρίου για την εγγραψιμμότητα τυχαίου τετράπλευρου (γενίκευση). Αυτό βέβαια προϋποθέτει οι μαθητές να γνωρίζουν τις έννοιες εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία, και τη μεταξύ τους σχέση.

Το αρχικό πρόβλημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν αφετηρία για διερευνηθούν και να ανακαλυφθούν και νέα θεωρήματα, νέες ιδιότητες ή έννοιες, ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών και τους διδακτικούς στόχους, για παράδειγμα:

1. Διερευνήστε τις ιδιότητες του τετράπλευρου που ορίζουν ανά δύο οι μεσοκάθετοι των διαδοχικών πλευρών του.



2. Κατασκευάστε ένα τετράπλευρο και τις μεσοκαθέτους τριών οποιονδήποτε πλευρών του. Κατασκευάστε το σημείο τομής των δύο από αυτών των μεσοκαθέτων και χρησιμοποιείστε το σημείο αυτό ως κέντρο για να κατασκευάσετε τον κύκλο που διέρχεται από τρεις κορυφές του. Σύρετε τις κορυφές του τετράπλευρου έτσι ώστε και οι τρεις μεσοκάθετοι να συντρέχουν. Τι παρατηρείτε; Ακολούθως, με βάση την παρατήρησή σας, διατυπώστε τον ισχυρισμό σας. Μπορείτε να δώσετε μια λογική εξήγηση γιατί είναι αληθής; Μπορείτε να γενικεύσετε τον ισχυρισμό σας περαιτέρω για το πεντάγωνο, το εξάγωνο κ.ό.κ. (Γενίκευση: αν σε ένα ν-γωνο οι μεσοκάθετοι των ν-1 πλευρών του συντρέχουν, τότε όλες θα συντρέχουν και το ν-γωνο θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Με την εργασία αυτή επιχειρήθηκε μια προσέγγιση του ρόλου της Δυναμικής Γεωμετρίας στην αποδεικτική διαδικασία της γεωμετρικής απόδειξης. Αναζητήθηκαν και παρουσιάστηκαν οι λειτουργίες που υποστηρίζονται από τα δυναμικά λογισμικά και που, ενδεχομένως, μεσολαβούν στην εκμάθηση της γεωμετρικής απόδειξης και της θεωρίας της σχολικής Γεωμετρίας. Συζητήθηκαν οι λειτουργίες της απόδειξης, οι οποίες αναδεικνύονται με τη χρήση των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας και παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο των ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης για τη συμβολή της Δυναμικής Γεωμετρίας στις αποδεικτικές διαδικασίες. Στο πλαίσιο αυτής της προσέγγισης, αναπτύχθηκαν παραδείγματα που σχετίζονται με τη συμβολή της Δυναμικής Γεωμετρίας σε διαδικασίες γεωμετρικής απόδειξης.

Η επαφή, η ενασχόληση και η εφαρμογή από τους μαθητές μοντέλων Δυναμικής Γεωμετρίας φαίνεται ότι μπορεί να τους παράσχει μια βάση πάνω στην οποία μπορούν να οικοδομήσουν παραγωγικές αποδείξεις βοηθώντας τους να διερευνήσουν, να υποθέσουν, να κατασκευάσουν και να εξηγήσουν τις παρατηρούμενες σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων. Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται ότι διευκολύνει μερικούς τύπους γνωστικών διαδικασιών, όπως η οπτικοποίηση και η διερεύνηση, και ενισχύει λειτουργίες τις απόδειξης, όπως η επεξήγηση, η ανακάλυψη, η διανοητική πρόκληση και η συστηματοποίηση. Η χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στη διερεύνηση εννοιών φαίνεται ότι μπορεί να οδηγήσει στη βελτίωση της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές· ότι μπορεί να επηρεάσει τη μορφή των επιχειρημάτων που οι μαθητές δίνουν κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας· ότι μπορεί να τους βοηθήσει να αισθανθούν την ανάγκη να παρέχουν αναλυτικά

επιχειρήματα και τυπικές αποδείξεις, αφού προηγουμένως έχουν απολέσει τη βεβαιότητα του αυταπόδεικτου και της δεδομένης αλήθειας των γεωμετρικών προτάσεων.

Όμως, αναπτύσσονται προβληματισμοί που αφορούν τους τρόπους με τους οποίους οι δάσκαλοι των μαθηματικών μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας για την επιτυχία των διδακτικών στόχων, το κατά πόσο η γνώση που οικοδομείται με τη χρήση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας ταιριάζει με τις μαθηματικές δομές των διδακτικών στόχων, και δε συνδέεται αποκλειστικά με το συγκεκριμένο περιβάλλον στο οποίο αυτή η γνώση αναπτύχθηκε. Αυτός ο προβληματισμός ενισχύεται και από την άποψη που πολύ συχνά επικρατεί για το ρόλο των νέων τεχνολογιών στις μαθησιακές διαδικασίες, ότι δηλαδή, εάν η χρησιμοποιούμενη τεχνολογία είναι καλή, τότε η διδακτική βεβαίως θα βελτιωθεί. Αυτή η υπόθεση δε φαίνεται να λαμβάνει υπόψη της ότι ένα βασισμένο σε υπολογιστή μαθησιακό περιβάλλον μπορεί να είναι πολύ σύνθετο, και ότι πρέπει να χρησιμοποιείται ωφέλιμα (και από το δάσκαλο και από τους σπουδαστές), σύμφωνα με συνολικούς στόχους εκμάθησης. Το να καταστεί ένα λογισμικό απλά διαθέσιμο δεν σημαίνει ότι οι άνθρωποι λίγο πολύ αυτόματα θα εκμεταλλευθούν τις ευκαιρίες που τους παρέχει (Laborde, 2000).

Απαιτείται, λοιπόν, επαναπροσδιορισμός του περιεχομένου διδασκαλίας, των μεθόδων διδασκαλίας, του χρόνου της διδασκαλίας και του ρόλου του δασκάλου.

♦ Φυσικά δεν υποστηρίζεται ότι απαιτείται η αλλαγή του περιεχομένου διδασκαλίας, το οποίο άλλωστε ανταποκρίνεται σε αντίστοιχες νοητικές και μαθηματικές δομές της σκέψης των μαθητών, αλλά διαφορετικός σχεδιασμός και οπτική, με βάση τις δυνατότητες που παρέχει το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας.

Αν ένα λογισμικό δε χρησιμοποιείται ενσωματωμένο έξυπνα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, παρά μόνο ως εργαλείο για επαλήθευση, δεν μπορεί να παράσχει καμιά σημαντική διαφορά στην εκμάθηση της απόδειξης και –αντίθετα-μπορεί να επιτείνει τις δυσκολίες που ήδη έχουν οι μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία. Οι λειτουργίες του δυναμικού λογισμικού μεσολαβούν στην πρόσβαση των μαθητών στον κόσμο των γεωμετρικών θεωρημάτων, αλλά απαιτούνται προσεκτικά σχεδιασμένοι στόχοι, έμπειροι δάσκαλοι μαθηματικών, και ένα περιβάλλον το οποίο να ενθαρρύνει την παραγωγή υποθέσεων και τη διατύπωση μαθηματικών εξηγήσεων.

♦ Η προσέγγιση των διδακτικών στόχων –όπως καθορίζονται στο αναλυτικό πρόγραμμα- δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί πλήρως από τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, αφού αυτές αποκλείουν τον πειραματισμό, τη διερεύνηση και την ευχαρίστηση της ανακάλυψης (μαθησιακές προσδοκίες) και αποκόβουν το μαθητή από την παραγωγή γνώσης.

Ο μαθητής σ’ ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας γίνεται ενεργό μέλος της μαθησιακής διαδικασίας. Η ίδια η γεωμετρία σ’ ένα δυναμικό περιβάλλον γίνεται πειραματική επιστήμη, η οποία απαιτεί την έρευνα για τα γεωμετρικά αντικείμενα και τις γεωμετρικές καταστάσεις. Ο ρόλος του μαθητή είναι ο ρόλος του επιστήμονα που μέσα από την κατασκευή, την παρατήρηση, την καταγραφή, την πρόβλεψη, τη διατύπωσης υπόθεσης και το έλεγχό της, οδηγείται σε συμπεράσματα που μπορούν να δομήσουν μια θεωρία.

♦ Χρόνος της διδασκαλίας και εκμάθησης της απόδειξης σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας σημαίνει να ληφθούν σοβαρά υπόψη παράγοντες όπως η κατακτημένη γνώση από τους μαθητές, η εξοικείωση ή μη με υπολογιστικά περιβάλλοντα, το

πολιτιστικό και πολιτισμικό περιβάλλον των μαθητών, η συνοχή, η ομοιομορφία και η ομοιογένεια της τάξης.

Όσο πιο νωρίς ο μαθητής έρχεται σε επαφή με ένα υπολογιστικό περιβάλλον, τόσο πιο γρήγορα και στέρεα 'μαθηματικοποιείται' η σκέψη του, της οποίας χαρακτηριστικά είναι η ικανότητα να γίνονται αντιληπτές οι σχέσεις, οι εικόνες να μετασχηματίζονται σε έννοιες, να εσωτερικοποιούνται οι ενέργειες ώστε να μπορούν να διατυπώνονται ερωτήματα «τι θα μπορούσε να συμβεί εάν…».Αυτό δε σημαίνει την ανάπτυξη αναλυτικών επιχειρημάτων και την παρουσίαση αυστηρών αποδείξεων, αλλά την εξοικείωση με τη γλώσσα για την «επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών», την ανάπτυξη της περιγραφικής γλώσσας που χρησιμοποιεί μαθηματικούς όρους και έννοιες και χρησιμοποιείται στην παραγωγή λογικών εξηγήσεων. Σε οποιαδήποτε ηλικία πάντως, η διδασκαλία σε δυναμικό περιβάλλον δεν πρέπει να αγνοεί την εμπειρία των μαθητών συνολικά.

♦ Ο νέος ρόλος του δασκάλου που χρησιμοποιεί περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας για τη διδασκαλία της λειτουργίας της απόδειξης είναι διπλός: να διαμορφώσει ο ίδιος μια νέα σχέση με τη μαθηματική γνώση, η οποία φαίνεται να μεταβάλλεται από την παρουσία του λογισμικού και να επαναπροσδιορίσει το ρόλο του ως μεσολαβητή, λαμβάνοντας υπόψη τα νέα στοιχεία που αυτό προσφέρει.

Στη νέα αυτή σχέση με τη μαθηματική γνώση ο δάσκαλος καλείται να αντιμετωπίσει εδραιωμένες αντιλήψεις για την ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία γενικότερα και τους δικούς του φόβους: την αμφισβήτηση ή κατάρρευση της 'αυθεντίας' του, την απεξάρτηση των μαθητών από την πηγή της γνώσης, τη συμμετοχή των μαθητών στην παραγωγή της και επομένως στην αποδυνάμωση του ρόλου του.

Από την άλλη πλευρά, η υπερεκτίμηση για τις δυνατότητες που προσφέρει η χρήση δυναμικών λογισμικών στη διδασκαλία, μπορεί να οδηγήσει το δάσκαλο στον εφησυχασμό και στην αντίληψη ότι αυτή η χρήση μπορεί αυτομάτως να βελτιώσει τη διδακτική προσέγγιση.

Ο επαναπροσδιορισμός του ρόλου του δασκάλου είναι καθοριστικός, αφού είναι υπεύθυνος και για τον προσδιορισμό των διδακτικών στόχων και για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων μάθησης και για την επιλογή των μέσων-εργαλείων, που υπηρετούν αυτούς τους στόχους.

Το γεγονός ότι το λογισμικό το ίδιο δε χορηγεί τη μετάβαση από το αντιληπτικό στο θεωρητικό επίπεδο, καθιστά το ρόλο του δασκάλου ως μεσολαβητή και καθοδηγητή ιδιαίτερα σημαντικό και σύνθετο, αφού καλείται να αξιοποιήσει και να ενσωματώσει τη δυναμική γεωμετρία σε άλλες δραστηριότητες μάθησης (δραστηριότητες διατύπωσης), που ικανοποιούν τον κοινωνικό στόχο της απόδειξη.

Σημειώσεις

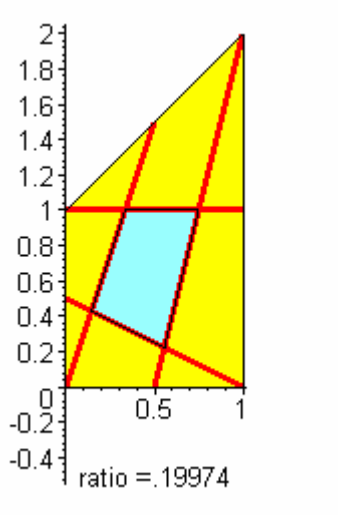
Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας: Ο όρος Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας (Dynamic Geometry Software-DGS) χρησιμοποιείται ως γενικός όρος για να περιγράψει ένα ορισμένο τύπο λογισμικού που συνήθως χρησιμοποιείται για την κατασκευή και την ανάλυση των θεμάτων και προβλημάτων της σχολικής Γεωμετρίας. Το πρώτο δείγμα λογισμικού αυτού του τύπου (Cabri-Geometre) παρουσιάστηκε στην 6η ICME διάσκεψη στη Βουδαπέστη το 1988. Από τότε μια μεγάλη ποικιλία λογισμικών ανάλογου τύπου, όπως GEOLOG, Geometry Inventor, Geometer's Sketchpad, Thalis και το ελληνικό EucliDraw) παρουσιάστηκαν στην αγορά και έχουν εισαχθεί και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε όλο τον κόσμο (υπάρχουν εκδόσεις τους στα γαλλικά, γερμανικά, ιαπωνικά, ισπανικά, σουηδικά και ελληνικά). Οι απόψεις πολλών ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης συγκλίνουν στο ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να είναι από τα καλύτερα, αν όχι τα καλύτερα, λογισμικά που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην έρευνα για τη διδασκαλία και την εκμάθηση της θεωρίας της γεωμετρίας. Εφόσον τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπουν το μετασχηματισμό των γεωμετρικών αντικειμένων σε υπολογιστικά αντικείμενα, η γεωμετρία πλέον αλλάζει αφού πλέον είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα με ενσωματωμένη χρήση γεωμετρικών εργαλείων (για παράδειγμα Jones, 2000·, Mariotti, 2000· Sträßer, 2001 κ.ά.).

Μεσοδιαγώνιο τετράπλευρο: Με τον όρο μεσοδιαγώνιο τετράπλευρο (midvexogram) στη βιβλιογραφία (Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad, 2004 και Geometry Turned On, 1997) αποκαλείται το εσωτερικό τετράπλευρο που για κορυφές του έχει τα

σημεία τομής των τμημάτων που ορίζονται από κάθε κορυφή ενός κυρτού τετράπλευρου και το αντίστοιχο μέσο της απέναντί της πλευράς κινούμενα δεξιόστροφα, αλλά και αυτό που ορίζεται με ανάλογο τρόπο κινούμενα αριστερόστροφα. Τα δυο αυτά μεσοδιαγώνια τετράπλευρα αυτά εμφανίζουν ιδιαιτερότητες όταν προκύπτουν από τυχαία κυρτά τετράπλευρα. Συγκεκριμένα δεν είναι ισεμβαδικά και συνεπώς δεν έχουν το ίδιο λόγο εμβαδών ως προς το εξωτερικό τετράπλευρο. Η διερεύνηση του σχήματος με ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, για παράδειγμα το Geometers Sketchpad, οδηγεί στη διατύπωση μιας υπόθεσης ότι, το εμβαδόν του εξωτερικού τετράπλευρου είναι τουλάχιστον πέντε φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν του καθενός από τα εσωτερικά τετράπλευρα. Αυτή η υπόθεση δεν έχει γεωμετρική λύση, αλλά μπορεί να δεχθεί μια αναλυτική λύση. Μια τέτοια λύση παρουσιάζεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://www.ms.uky.edu/~carl/coleman/coleman2.html.

Χωρίς να κινδυνεύει να χαθεί η γενίκευση το τετράπλευρο τοποθετείται σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων υποθέτοντας ότι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες (0,1), (0,0), (1,0) και η τέταρτη (α,β) με την παραδοχή ότι α+β>1, και α,β θετικοί. Μπορούμε να αναχθούμε στο σχήμα που προκύπτει από αυτήν την τοποθέτηση, χωρίς να χάνεται η αναλογία. Ο λόγος του εμβαδού του εσωτερικού προς το εμβαδόν του εξωτερικού μετασχηματίζεται σε μια συνάρτηση δυο μεταβλητών η οποία δεν παραγοντοποιείται. Με τη χρήση για παράδειγμα του Maple, παραγοντοποιείται οπότε υπολογίζεται το κάτω φράγμα και όμοια το άνω. Αυτή η προσέγγιση προϋποθέτει μια καλή εξοικείωση με την άλγεβρα και με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, αλλά και με

υπολογιστικά εργαλεία. Συμπερασματικά, η απάντηση στην παραπάνω υπόθεση μπορεί να δοθεί αλγεβρικά και με τη βοήθεια ενός υπολογιστικού εργαλείου και όχι γεωμετρικά.



http://www.ms.uky.edu/~carl/coleman/coleman2.html

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM, 34* (3), 66-72.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *Proceedings of the ICM*, 3 (1-3), 907-920. http://arxiv.org/abs/math/0305021

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (1999). Semiotic mediation: from history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, *19* (2), 27-25.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti, M.A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the20th Conference of the PME,* Valencia, Spain. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96a.html

Boero, P., Garutii, R. & Mariotti, M.A. (1996). Some Dynamic Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjectures. *Proceedings of the 20th Conference of the PME, 2,* 121-128. Valencia, Spain. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero96.html

Cerulli, M. & Mariotti, A. M. (2003). Building theories: working in a microworld and writing the mathematical notebook. *Proceedings of the 27th Conference of the PME*, 2, 181- 188. Honolulu, Hawaii. http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_cerulli.pdf 05/20/04.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in*

Science and Technology, *35* (5), 703-724.
http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf

De Villiers, M. (2004). Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press.

De Villiers M. (2003). The Value of Experimentation in Mathematics. *Proceedings of 9th National Congress of AMESA,. 174-185, 30 June-4 July, 2003,* Cape Town. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/experiment.pdf.

De Villiers M. (2002). Developing Understanding for Different Roles of Proof in Dynamic Geometry. *Proceedings at* ProfMat 2002, 2-4 October, Visue, Portugal. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat.pdf.

De Villiers M. (2000). Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals. *Proceedings of the ICME9 TSG 12*. Tokyo/Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/.

De Villiers M. (2000). Learners' needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. Pythagoras, 52, 20-23, *AMESA,* August 2000. http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf.

De Villiers, M.(1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking Proof with Sketchpad,* Key Curriculum Press. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic in dynamic geometry. In R. Lehrer and D. Chazan (eds.). Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, 369-394. Hillsdale, NJ: Lawrence Elbaum Associates. http://www.atm.org.uk/journals/micromath/articles/geometry/proof/introduction.html.

De Villiers, M.(1996). The Future of Secondary School Geometry. *Proceedings of the SOSI Geometry Imperfect Conference* 1996, October 2-4 1996, UNISA, Pretoria. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/future.pdf.

Douek, N. & Pichat, M. (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. *Proceedings of the 27th Conference of the PME, 2,* 341-348. Honolulu, Hawaii.

Fujita, T., Jones, K. & Yamamoto, S. (2004). Geometrical Intuition and the learning and teaching of Geometry. *Proceedings of the ICME10 TSG 10*. Copenhagen, Danmark. http://eprints.soton.ac.uk/14687/

Furinghetti, F. & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study. *Proceedings of the 27th Conference of the PME, 2,* 397-404. *Honolulu, Hawaii.* http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_furinghetti.pdf 05/20/04.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th Conference of the PME, 2,* 345-352. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Garuti/Garuti98.html.

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *ZDM, 34* (3), 85-92.

Gawlick, T. (2002). Restructuring Dynamic Constructions. Activities to stimulate the development of Higher Level. *Proceedings of the ICME10 TSG 10*. Copenhagen, Danmark. descartes.ajusco.upn.mx/varios/tsg10/articulos/Gawlick_48_revised_paper.doc

Godino, J. D. & Recio, A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Proceedings of the 21th Conference of PME, 2,* 313-320. Lathi, Finland. http://www.lettredelapreuve.it/.

Gravina, M. A. (2000). The proof in geometry: essays in a dynamical environment. *Proceedings of the ICME9 TSG 12*, Tokyo/Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html.

Hadas, N. & Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as explanatory and convincing tool. *Proceedings of the 22th Conference of PME, 3,* 25-32. Stellenbosch, South Africa. http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Haddas/Haddas98/Haddas98.html

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2000). The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44,* (1-2), 127-150.

Hadas,N. & Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. *Proceedings of the 23th Conference of the PME, 3,* 57-64. Haifa, Israel. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Haddas/Haddas99/Haddas99.html.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44* (1-2), 5-23.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of the 20th Conference of the PME*, *1*, 21-34. Valencia, Spain. http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/970506.html.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21 (1), 6-13.

Hanna, C. & Janke, H. N.(2002). Another Approach to Proof: Arguments from Physics. *ZDM, 34* (1), 1-8. http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm021a1.pdf

Harada, K.,·Gallou-Dumiel, E. & Nohda, N. (2000). The Role of Figures in Geometrical Proof-Problem Solving**.** *Proceedings of the ICME9 TSG 12*. Tokyo/ Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In Schoenfeld, A., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education,* 3, 234-283. Providece, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. *Proceedings of Proceedings of the 21th Conference of PME, 3, 59-66.* Valencia, Spain.

Healy, L. (2000). Connections between the empirical and the theoretical? Some considerations of students' interactions with examples in the proving process. *Proceedings of the ICME9 TSG 12*, Tokyo/Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html.

Healy, L. & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6* (3), 235-256.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics, Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK.

Research Report Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.
http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Healy/Healy98.html.

Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: methodological knowledge as a component of proof competence. *Proceedings of the* CERME 3 *Conference of the Working Group 4*, European Research in Mathematics Education III. http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf

Hölzl, R. (2001).Using dynamic geometry software to add Contrast to Geometric Situations - A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (1), 63-86.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1* (6), 169-187.

Housman, D. & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above – average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics, 53* (2), 139-158.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villiani (eds). Perspectives on the teaching of Geometry for the 21th Century. An ICMI Study, 121-128.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-2), 55-85.

King, J. & Schattschneider, D. (1997). Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research. Washington: Mathematical Association of America (MAA).

Laborde, C. (2003). The design of curriculum with technology: lessons from projects based on dynamic geometry environments. *Proceedings of CAME Symposium*, Reims, June 23-24, 2003.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), 283-317.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-2), 151-161.

Laborde, C. (1992). Solving Problems in Computer Based Geometry EnvironmentsQ The Influence of the Features of the Software. ZDM, 24 (4), 128-135.

Leung, A. & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: a case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7* (1), 145-165.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6 (1), 257-281.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-2), 25-53.

Mariotti, M. A. (1998). Intuition and Proof: Reflecting on Fischbein's paper. *International Newsletter on the Teaching and learning of mathematical Proof.*

November/December 1998.
http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeUK.html

Mariotti, M. A. (1997). Justifying and Proving in Geometry: the Mediation of a Microworld. Preuve Proof Prueda Web Newsletter. November/December 1997. *http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html*

Mariotti, M. A. & Bartilini Bussi, M. G. (1998). From drawing to construction: teachers' mediation within the in Cabri environment. *Proceedings of the 22th Conference of the PME, 1,* 180-195. Stellenbosh..

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garutti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: *Proceedings of the 21th Conference of the International group for the PME, 1, 180-195. Lathi.*
http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/prueba/Resumes/Mariotti/Mariotti97.html

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secontary school students learning geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-2), 151-161.

Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999). Providing the Motivation to Prove in a Dynamic Geometry Environment.
http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip19-2/BSRLM-IP-19-2-16.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Commission on Standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM. http://www.maa.org/

Olive, J. (2000). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. *Paper for Conference on Teaching and Learning Problems in*

Geometry. Fundao, Portugal, May 6-9, 2000. http://jwilson.coe.uga.edu/olive/Portugal/Portugal_paper.html

Olivero, F. (2003). Cabri as a shared workspace within the proving process. *Proceedings of the 27th Conference of the PME,* 3, 429-436. Honolulu, Hawaii. http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_olivero.pdf 05/20/04.

Olivero, F. (2000). Exploring, constructing, talking and writing during the proving process within a dynamic geometry environment: what continuity(ies)?. *Proceedings of the ICME9 TSG 12*. Tokyo / Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html

Olivero, F. (2000). Exploring, constructing, talking and writing during the proving process within a dynamic geometry environment: what continuity(ies)?. *Proceedings of the ICME9 TSG 12*. Tokyo/Makuhari, Japan. http://www.lettredelapreuve.it/ICME9TG12/index.html.

Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching,* University of Plymouth, UK. http://www.bristol.ac.uk/education/people/academicStaff/edfo/conferences.

Olivero, F. & Robutti, O. (2002). An exploratory study of students' measurement activity in dynamic geometry environment. *Proceedings of CERME 2,* Marianske Lazne, CZ, 1, 215-226. http://www.bristol.ac.uk/education/people/academicStaff/edfo/conferences.

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. *Proceedings of the 25th Conference of PME, 4*, 9-16. Utrecht, Netherlands. http://www.bristol.ac.uk/education/people/academicStaff/edfo/conferences.

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meaning of proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48* (1), 83-99.

Reid, D.(2002). What is proof?. *La Lettre de la Preuve: International newsletter on the teaching and learning of proof*, Summer 2002. http://www-leibniz.imag.fr/DIDACTIQUE/preuve/Newsletter/02Ete

Reid, D. (2001). Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof. Short Oral presentation. *Proceedings of the 25th Conference of the PME, I*, 360. Utrecht, Netherlands. http://ace.acadiau.ca/~dreid/publications/proof/proof.html.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: the idea of heuristic examples. *ZDM, 34* (1), 29-35. http://www.fiz karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm021a4.pdf

Reiss, K.· Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in geometry classroom. *Proceedings of the 25th Conference of the PME*, *4,* 97-104. Utrecht, Netherlands.

Sanchez, E. & Sacristan, A. (2003). Influential aspects of dynamic geometry activities in the construction of proofs. *Proceedings of the 25th Conference of the PME,* 4, 111-118. Honolulu, Hawaii. http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_sanchez.pdf 05/20/04

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. UK: Kluwer Academic Publishers

Simon M. A. (1996) Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathemati*cs 30 (2), 197-210. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., Formerly Kluwer Academic Publishers B.V

Sinclair, M. (2003). The provision of accurate images with Dynamic Geometry. *Proceedings of the 27th Conference of the PME,* 4, 191-198. Honolulu, Hawaii. http:/onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_sinclair_M.pdf 05/20/04

Sinclair, N. (2002). The Kissing Triangles: the Aesthetics of mathematical discovery. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7* (1), 45-63.

Sinclair, N. (2003). From cognitive science to school practice: building the bridge. *Proceedings of the 27th Conference of the PME,* 4, 191-198. Honolulu, Hawaii. http:/onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_sinclair_N.pdf 05/20/04.

Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Lee Stiff (editor). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 270-285. http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/reason.html.

Sträesser, R. (2001). Cabri- Geometre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching an Learning? *International Journal of Computers for the Mathematical Learning* 6 (3), 319-333.

Stylianou, D. & Blanton, M. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 27th Conference of the PME,*

2, 113- 120. Honolulu, Hawaii,

http:/onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_blanton.pdf 05/20/04

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 128, 28-32.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *Proceedings of* the Conference for the Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, December 1995, 27-38. http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/970506.html.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 48 (1), 101-119

Weber, K. (2002a). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, *22* (3), 14-17.

Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In Selden, A. & J. (Eds.) *Research Sampler 8:* The Mathematical Association of America Online. http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). Η Μαθηματική Εμπειρία. Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

Donalson, M. (1978). Η Σκέψη των Παιδιών. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2001.

Polya, G. (1954). Πώς να το λύσω, Εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάκης, Σ. & Σιδέρης, Π.(2004). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Ο.Ε.Δ.Β., Δ΄, Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα.

Κωσταρίδου- Ευκλείδη, Α. (1992). Γνωστική Ψυχολογία. Εκδόσεις Art of Text, Θεσσαλονίκη.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2004-2005). Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Ενιαίο Λύκειο. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.