ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Γεωμετρικές Αναπαραστάσεις και εννοιολογικές διασυνδέσεις συνδεδεμένες με τη μελέτη και χρήση της συνάρτησης στον Απειροστικό Λογισμό»

ΜΑΡΙΟΣ ΣΠΑΘΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής : ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ..... - 5 -
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ..... - 7 -
1. ΟΙ ΑΠΑΡΧΕΣ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ..... - 9 -
2. ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ..... - 15 -
2.1. ΔΙΑΙΣΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΑ – ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ..... - 15 -
2.2. ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΈΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΈΝΝΟΙΑΣ – ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ ..... - 20 -
2.3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ..... - 29 -
2.4. ΕΙΚΟΝΟΠΟΙΗΣΗ: ΑΡΩΓΟΣ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑ; – Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ KRUTETSKII ..... - 33 -
3. ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΈΡΕΥΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ..... - 39 -
4. Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ ..... - 51 -
4.1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ ..... - 51 -
4.2. Ο ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ ..... - 53 -
4.3. ΟΙ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΟΧΟΙ – Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ & ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΠΟΡΡΕΟΥΝ ..... - 59 -
4.3.1. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ – ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ XL ..... - 59 -
4.3.1.1. Η ερώτηση 1 ..... - 59 -
4.3.1.2. Η ερώτηση 2 ..... - 61 -
4.3.1.3. Η ερώτηση 3 ..... - 64 -
4.3.1.4. Η ερώτηση 4 ..... - 66 -
4.3.1.5. Η ερώτηση 5 ..... - 69 -
4.3.1.6. Η ερώτηση 6 ..... - 71 -
4.3.1.7. Η ερώτηση 7 ..... - 77 -
4.3.1.8. Η ερώτηση 8 ..... - 82 -
4.3.2. Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ R. GRAS ..... - 86 -
4.3.2.1. Σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα ..... - 86 -
4.3.2.2. Σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στα έργα. ..... - 89 -
4.4. ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ..... - 94 -
4.4.1. Η 1η Συνέντευξη ..... - 94 -
4.4.2. Η 2η Συνέντευξη ..... - 96 -
4.4.3. Η 3η Συνέντευξη ..... - 99 -
5. ΚΑΠΟΙΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ ..... - 103 -
ΕΠΙΛΟΓΟΣ ..... - 111 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ..... - 117 -
Α. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ..... - 117 -
Β. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ XL ..... - 129 -
Γ. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ GRAS ..... - 135 -

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία στα πλαίσια του διαπανεπιστημιακού μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών: Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.

Αφορμή για την ύπαρξή της αποτέλεσε ένα πρόβλημα λίγο – πολύ γνωστό σε όλους μας. Οι μαθητές τελειώνουν το Λύκειο και οι φωνές γύρω πληθαίνουν δηλώνοντας κάθε φορά πως η γνώση τους είναι υποβαθμισμένη, πως δεν καταλαβαίνουν στοιχειώδεις έννοιες και άλλα τέτοια συναφή.

Είναι γενικώς αποδεκτό ότι η γνώση δομείται με καθαρά προσωπικές διαδικασίες. Πολλές φορές αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως αληθές, δεν συμφωνεί κατ' ανάγκη με αυτό που γενικά είναι αποδεκτό ως σωστό και αληθές. Οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου στη χώρα μας έρχονται αντιμέτωποι, ίσως για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια των μαθητικών σπουδών τους, με μαθηματικές έννοιες που απαιτούν εμβάθυνση, αναπτυγμένη κρίση, διαίσθηση και οξυδέρκεια. Η παρούσα εργασία στοχεύει να ερευνήσει την κατανόηση από τη μεριά των μαθητών κάποιων εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο ενυπάρχουν στους μαθητές γεωμετρικές αναπαραστάσεις στη σκέψη τους και κατά πόσο μπορούν να εκμεταλλευτούν και αποκωδικοποιήσουν τις διάφορες πληροφορίες που τους παρουσιάζονται μέσα από τις γραφικές παραστάσεις. Θέλουμε επίσης να ελέγξουμε τι είδους εννοιολογικές διασυνδέσεις σχηματίζουν, μέσα από τις δικές τους αναπαραστάσεις. Η έρευνα έγινε με τη βοήθεια ερωτηματολογίου, σε δείγμα 85 μαθητών της Γ΄ Λυκείου, θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, τη σχολική χρονιά 2004 – 2005.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου καθώς και τους δύο άλλους καθηγητές συμμετέχοντες στην τριμελή μου επιτροπή κ.κ. Αθανάσιο Γαγάτση και Ευστάθιο Γιαννακούλια για την βοήθειά τους κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής και τις χρησιμότατες συμβουλές και παρατηρήσεις τους.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το φροντιστήριο Ι.Π.Α.Σ., το οποίο προσέφερε όλον τον οργανωτικό μηχανισμό του για τη διεξαγωγή του ερωτηματολογίου υπό τη μορφή διαγνωστικού τεστ, ώστε να εξασφαλιστεί το αδιάβλητο της εξέτασης και κατά συνέπεια η εγκυρότητα των συμπερασμάτων.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές μαθηματικών του 3^{ου} Λυκείου Αιγάλεω για την προθυμία τους να διεξάγουν το τεστ στα τμήματά τους και ειδικότερα τον κ. Μηνά Κ. Κωνσταντίνου, ο οποίος ανέλαβε και την ευθύνη για την όλη διανομή, επιτήρηση κατά την εξέταση και συλλογή των γραπτών.

Λίγο πριν το τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους υπόλοιπους συναδέλφους, με ιδιαίτερη αναφορά στον κ. Χαράλαμπο Κ. Κωνσταντίνου, που βοήθησαν αγόγγυστα στη διακίνηση και συλλογή των γραπτών του ερωτηματολογίου σε διάφορους άλλους μαθητές.

Θα ήταν μεγάλη παράληψη από μέρους μου αν δεν εξέφραζα και τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου. Ευχαριστώ τη γυναίκα μου και τα παιδιά μου για την αγόγγυστη υπομονή και την αμέριστη συμπαράσταση που έδειξαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Τους ευχαριστώ για την υποστήριξή τους στις δύσκολες στιγμές που παρουσιάστηκαν, οι οποίες δεν ήταν λίγες. Και είναι ακριβώς σ' αυτούς που θέλω να αφιερώσω αυτή την προσπάθεια.

*Σε κάθε χτίσιμο μπαίνουν πολλοί μαστόροι. Ο καθένας βάζει το δικό του λιθαράκι μέχρι να τελειώσει το έργο. Χωρίς τη βοήθεια **όλων** των παραπάνω η παρούσα εργασία δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί. Ξανά λοιπόν ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους.*

Μάριος Σπάθης

Αθήνα, Οκτώβριος 2005

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην τελευταία τάξη του Λυκείου οι μαθητές, στα σχολεία της Ελλάδας, εισάγονται στον Απειροστικό Λογισμό. Οι εξετάσεις που θα δώσουν στο τέλος της χρονιάς αυτής είναι καθοριστικές για την εισαγωγή τους στα Ανώτατα και Ανώτερα (Τεχνολογικά) Εκπαιδευτικά ιδρύματα της χώρας μας (Α.Ε.Ι. και Τ.Ε.Ι.).

Κατά γενική ομολογία τα θέματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν σε αυτές τις τελικές εξετάσεις είναι θέματα που απαιτούν ένα αναπτυγμένο μαθηματικό υπόβαθρο για την αξιοπρεπή αντιμετώπισή τους. Απαιτούν, θα λέγαμε, έναν καθαρό μαθηματικό τρόπο σκέψης, τρόπο όμως που όπως εκτιμά ο γράφων αλλά και οι περισσότεροι καθηγητές της Μέσης Εκπαίδευσης, δεν έχουν αποκομίσει από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στα προηγούμενα χρόνια.

Επιπροσθέτως κατά την εισαγωγή τους σε κάποιο Α.Ε.Ι. ή Τ.Ε.Ι. θα διδαχτούν πάλι, από το πρώτο κιόλας έτος σπουδών τους, με εξαίρεση τις σχολές των θεωρητικών κατευθύνσεων, Απειροστικό Λογισμό, ο οποίος μπορεί, ανάλογα με τη σχολή, να φέρει κι άλλα ονόματα, όπως: Ανάλυση ή Μαθηματικά και το επίπεδο διδασκαλίας του να είναι διαφορετικό σε κάθε σχολή, σίγουρα όμως πιο αναβαθμισμένο από το Λύκειο, σε κάποιες σχολές στο επίπεδο της αυστηρής μαθηματικής θεμελίωσης και σε κάποιες άλλες στο επίπεδο της εφαρμογής.

Με την παρούσα έρευνα δε θέλουμε να κατατάξουμε τους μαθητές σε καλούς ή κακούς, σε έτοιμους ή ανέτοιμους για τις τελικές εξετάσεις, αλλά θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο κάποιες έννοιες και κάποια εργαλεία του Απειροστικού Λογισμού έχουν κατανοηθεί και σε ποιο βαθμό από τους υποψηφίους των ανωτέρων και ανωτάτων σχολών.

Θέλουμε να δούμε αν υπάρχουν γεωμετρικές διασυνδέσεις, αν ένα λεκτικό πρόβλημα μπορεί να μπερδέψει τους υποψηφίους κι αν μπορούν να δώσουν μια ΄΄φυσική΄΄ ερμηνεία στα αποτελέσματά τους και αν ακόμα υπάρχει ή όχι η δυνατότητα χειρισμού γραφικών παραστάσεων ως ένα εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων ή αν η παρουσία αυτών δημιουργεί κάποιο εμπόδιο.

Δεν θα πρέπει να παραγνωρίσουμε ότι αρκετά νωρίτερα προτού οι μαθητές εισαχθούν στις παραγώγους από τα μαθήματα της κατεύθυνσης έχουν ήδη διδαχτεί μια στοιχειώδη σειρά μαθημάτων Απειροστικού Λογισμού από τα μαθηματικά γενικής παιδείας. Τα μαθήματα προσφέρονται για το σύνολο των μαθητών, δηλαδή

συμπεριλαμβανομένων και αυτών της θεωρητικής κατεύθυνσης, κατά συνέπεια δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη θεωρία, αλλά ακολουθείται μια διδασκαλική πρακτική που στοχεύει περισσότερο στο χειρισμό και τη λειτουργικότητα των εννοιών και των συμβόλων. Να σημειώσουμε ακόμη ότι η αντίστοιχη εφαρμογή του σχολικού βιβλίου που προσπαθεί και κατά τη γνώμη μας το καταφέρνει με αρκετή επιτυχία, να συνδέσει την έννοια της μέσης ταχύτητας, της στιγμιαίας ταχύτητας, της παραγώγου και της εφαπτομένης της καμπύλης, αποφεύγεται να διδάσκεται από μεγάλη μερίδα των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έτσι λοιπόν το σύνολο των μαθητών εισάγεται στον Απειροστικό Λογισμό έχοντας περισσότερο μια σιωπηρή ιδέα για τις έννοιές του, παρά μια σαφή κατανόηση αυτών, έχοντας διδαχτεί – εκπαιδευτεί στις λειτουργικές διαδικασίες και στη μετάφραση αυτών, αποφεύγοντας όμως την περαιτέρω εντρύφηση.

Επίσης σε πολλές χώρες, θέση που θα αναπτύξουμε και αργότερα, η διδασκαλία του Απειροστικού που πραγματοποιείται στο τελευταίο ή στα δύο τελευταία έτη σπουδών στο Λύκειο στηρίζεται περισσότερο σε διαδικασίες και λιγότερο σε έννοιες.

Οι καθηγητές των πανεπιστημίων από την άλλη μεριά, διαμαρτύρονται συνεχώς για την έλλειψη κατανόησης από τους φοιτητές τους και για την προσκόλλησή τους σε καταστάσεις απλών διαδικασιών.

Στη συνέχεια της εργασίας μας θα προσπαθήσουμε να δούμε κάποιες πτυχές από αυτό το πολυσύνθετο θέμα που ονομάζεται γνωστικό οικοδόμημα του μαθητή.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εργασία μας χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος (Κεφάλαια 1, 2, 3) παρουσιάζουμε εν συντομία την ανάπτυξη και εξέλιξη της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού. Παρουσιάζουμε επίσης αυτό που συνηθίζουμε να ονομάζουμε θεωρητικό υπόβαθρο. Στηριχτήκαμε στη θεωρία των διαισθήσεων και των σχημάτων, στο γνωστικό μοντέλο των Tall & Vinner για τη συσχέτιση της εικόνας μιας έννοιας και του αντίστοιχου ορισμού της, καθώς και στη θεωρία των αναπαραστάσεων. Το κομμάτι αυτό τελειώνει με αναφορές σε κάποιες επιλεγμένες έρευνες από την Ελληνική και ξένη βιβλιογραφία.

Το δεύτερο μέρος (Κεφάλαια 4, 5) αποτελεί το βασικό κομμάτι της εργασίας μας, όπου εκεί παρουσιάζονται αναλυτικά η έρευνά μας και τα συμπεράσματα που απορρέουν από αυτή.

Τέλος στο παράρτημα επισυνάπτονται το ερωτηματολόγιο και οι στατιστικοί πίνακες που προέκυψαν.

1. ΟΙ ΑΠΑΡΧΕΣ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Στα μαθηματικά, ένα εκπληκτικό φαινόμενο συμβαίνει ξανά και ξανά. Κάποιος θέτει ένα ερώτημα, που φαίνεται τόσο απλό, που από την απάντηση του οποίου φαίνεται πως δε μπορεί να προκύψει κανένα χρήσιμο, υπό την έννοια του γενικεύσιμου, αποτέλεσμα. Κι όμως, η απάντηση του ερωτήματος μπορεί να ανοίξει την πόρτα σε κάθε ενδιαφέρουσα εξέλιξη και εφοδιάζει με μεγάλη δύναμη όποιον την κατανοεί πλήρως.

Ο Απειροστικός Λογισμός στηρίζεται σε ένα απλούστατο ερώτημα: «*Τι είναι ταχύτητα και πως μπορούμε να την υπολογίσουμε;*». Το πρόβλημα αυτό γεννήθηκε, πολύ φυσικά θα έλεγε κανείς, γύρω στο 1600, όταν μελετήθηκαν κάθε είδους κινούμενα αντικείμενα, από τους πλανήτες ως το εκκρεμές. Κάποιος ίσως θα περίμενε ότι η μελέτη της ταχύτητας θα είχε πολύ περιορισμένες εφαρμογές – στις μηχανές, στην πτώση αντικειμένων, στις κινήσεις ουρανίων σωμάτων. Αλλά δεν ήταν καθόλου έτσι. Πρακτικά, κάθε ανάπτυξη, στην επιστήμη γενικότερα και στα μαθηματικά ειδικότερα, από το 1600 έως το 1900 μ.Χ., συνδέθηκε με τον Απειροστικό Λογισμό. Από αυτή τη φαινομενικά απλή ρίζα της αρχικής ερώτησης, με τον πιο απρόσμενο τρόπο, η γνώση εκτείνεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Εφαρμογές του Απειροστικού Λογισμού μπορεί να βρει κανείς στη θεωρία της βαρύτητας, της θερμότητας, του φωτός, του ήχου, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού. Είναι ο Απειροστικός Λογισμός που επέτρεψε στον Maxwell να επινοήσει το ραδιόφωνο είκοσι χρόνια προτού οι φυσικοί μπορέσουν να το κατασκευάσουν! Επίσης, ο Απειροστικός Λογισμός παίζει ζωτικής σημασίας ρόλο στη θεωρία του Einstein καθώς και στις νέες ατομικές θεωρίες του 19^{ου} και του 20^{ου} αιώνα. Εκτός των φυσικών επιστημών, ο Απειροστικός Λογισμός βρήκε εφαρμογή σε πλήθος άλλων επιστημών, σε σημείο που δε μπορούμε να βρούμε επιστήμη εκτός ίσως κάποιων καθαρά θεωρητικών – φιλολογικών που να μην απαιτούν τουλάχιστον κάποιες στοιχειώδεις έννοιες από αυτόν.

Στο παρελθόν, ο Απειροστικός Λογισμός θεωρείτο υπερβολικά δύσκολο θέμα. Τότε, ειδικά στην Αγγλία, οι δάσκαλοι άρχισαν να αντιλαμβάνονται ότι πολλά πράγματα μπορούσαν να γίνουν με τη βοήθειά του και μάλιστα με απλούστερο τρόπο και με περισσότερο ενδιαφέρον από οτιδήποτε άλλο στην άλγεβρα.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στα αγγλικά λύκεια ένας μαθητής μπορεί να μελετά Απειροστικό Λογισμό για δύο ή και τρία χρόνια. Δεδομένου του ότι αρκετοί από τους εκεί καθηγητές διαφωνούν με τη διδασκαλία με αυτόν τον τρόπο και υποστηρίζουν ότι ο Απειροστικός Λογισμός είναι πιο πολύπλοκος και απαιτεί τη διδασκαλία από εξειδικευμένους μαθηματικούς, ο W. W. Sawyer (1993) αντιπαραθέτει ένα φαινομενικά απλό παράδειγμα, το οποίο αναφέρουμε και θα το σχολιάσουμε ευθύς αμέσως μετά.

΄΄Μια ηλικιωμένη κυρία που ζει σε ένα μικρό χωριό, πηγαίνει κάθε Κυριακή στην εκκλησία με το αυτοκίνητό της. Την ρωτάει κάποιος αν είναι εύκολο γι' αυτή να οδηγεί το αυτοκίνητο. «Φυσικά», απαντά αυτή. «Δεν έχω καμία γνώση μηχανικής, αλλά βρίσκω αρκετά εύκολη την οδήγηση».Ίσως επίσης αυτή η κυρία να θεωρεί αρκετά απλό να οδηγήσει το αυτοκίνητό της, είτε σε έναν πολυσύχναστο δρόμο, είτε σε έναν αγροτικό χωματόδρομο. Αν κάποτε μάλιστα έπεφτε σε μεγάλη κυκλοφοριακή κίνηση, η εμπειρία της να οδηγεί αυτοκίνητο θα μπορούσε να της φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Η κυρία δεν θα ήταν αβοήθητη, όπως κάποιος που δεν είχε οδηγήσει ποτέ. ΄΄

Μ' αυτό το παράδειγμα, θέλει βέβαια ο συγγραφέας να τονίσει τη σημασία κατ' αρχήν της χρηστικότητας ενός αντικειμένου και της λειτουργικότητάς του σε απλές καταστάσεις, δηλώνοντας έτσι ότι δε χρειάζεται μια αυστηρή εισαγωγή στις έννοιες του Απειροστικού, αλλά μάλλον μια προσέγγιση περισσότερο ΄΄λειτουργική΄΄, θέλοντας να μιλήσει για αυτό που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε, αν είναι δόκιμος ένας τέτοιος όρος, *στοιχειώδη* Απειροστικό Λογισμό, άποψη που δεν είναι του παρόντος να σχολιαστεί.

Εδώ, θα θέλαμε από τη μεριά μας να τονίσουμε ότι, ασχέτως των οδηγιών για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού, όπως αυτές αναφέρονται στο αναλυτικό μας πρόγραμμα σπουδών, ένα μεγάλο μέρος των μαθητών προσκολλάται σε αυτό ακριβώς το σημείο, στη χρηστικότητα δηλαδή του αντικειμένου, αλλά για να πάμε και παραπέρα, αυτή η χρηστικότητα δε γίνεται αντιληπτή ως εργαλείο καθημερινής ζωής – άλλωστε από την ίδια την πρακτική της καθημερινής διδασκαλίας δεν ορίζεται άμεσα ως κάτι τέτοιο – , αλλά περιορίζεται στη χρησιμοποίηση των συμβόλων, σε μια μάλλον ρουτινιάρικη επαναληπτική εργασία, στερούμενη αρκετές φορές νοήματος. Βέβαια, το να αναφέρουμε απλά στους μαθητές τις ποικίλες εφαρμογές του Απειροστικού, θα δημιουργούσε μάλλον μια ασαφή εικόνα στη σφαίρα της φαντασίας του καθενός, σύμφωνα με την οποία κάποια στιγμή, κάποιος θα μπορούσε να κάνει κάτι με αυτό το εργαλείο.

Ποιος όμως τρόπος μπορεί να θεωρηθεί ως καταλληλότερος για μια πρώτη προσέγγιση και για τη διδασκαλία γενικότερα του Απειροστικού; Ποιοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι σκέψης που αναπτύχθηκαν ταυτόχρονα με την εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού; Ιδέες και έννοιες που χρησιμοποιούμε από την καθημερινή ζωή (κινούμενα αντικείμενα, ταχύτητα, επιτάχυνση, κλίση, εμβαδόν κ.α.) για να ορίσουμε άλλες έννοιες του Απειροστικού, δεν ορίζονται αυστηρά αλλά στηριζόμαστε στη θέση ότι λίγο – πολύ όλοι καταλαβαίνουν αυτά τα πράγματα χωρίς περισσότερη αποσαφήνιση.

Η προσέγγιση αυτή είναι αυτή πού ονομάζουμε *διαισθητική* προσέγγιση. Στην καθημερινή μας ζωή, η σκέψη μας είναι σχεδόν πάντοτε διαισθητική. Ίσως ελάχιστοι από εμάς να μπορούν να δώσουν τον ακριβή ορισμό της λέξης «σκύλος» κι όμως όλοι μπορούν να αναγνωρίσουν αν ένα ζώο είναι σκύλος ή όχι. Δεν θέλουμε να επεκταθούμε σε μια τέτοιου είδους κουβέντα. Με τέτοιο τρόπο σκέψης τα καταφέρνουμε αρκετά καλά στην πράξη, επομένως σίγουρα κάτι σωστό υπάρχει σ' αυτόν.

Ας θυμηθούμε ότι τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα οι μαθηματικοί συγκεντρώθηκαν στα επιστημονικά προβλήματα του καθορισμού της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο και του υπολογισμού της μεταβολής της ταχύτητάς της καθώς αυτή περιστρέφεται. Όντας βέβαιοι ότι η Γη έχει κάποια ταχύτητα, δεν άφηναν περιθώρια για φιλοσοφική συζήτηση όσον αφορά στην ταχύτητα και απλά αναζητούσαν έναν τύπο γι' αυτήν. Οι αναζητήσεις τους λοιπόν ήταν επί του πρακτέου, θεωρώντας δεδομένο αυτό που μάλλον διαισθητικά αντιλαμβάνονταν.

Ο W. W. Sawyer (1993) διακρίνει τρία στάδια ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού, που συμπίπτουν με τις αλλαγές των αιώνων.

1) 1600 – 1800: Το στάδιο της ξένοιαστης επιτυχίας. Δίνεται έμφαση στους τύπους και στα αποτελέσματα.

2) 1800 – 1900: Η ανάλυση ή το έψιλον – δέλτα στάδιο.

3) 1900 – σήμερα: Το στάδιο των αφηρημένων εννοιών και της ακραίας γενίκευσης.

Περνώντας λοιπόν από το ένα στάδιο στο άλλο, είναι σαφές ότι θα πρέπει να γνωρίσουμε νέες ιδέες και νέο τρόπο σκέψης. Ο μαθητής, όμως, ίσως περάσει κάποια κρίση όταν αρχίσει να μελετά Απειροστικό Λογισμό.

Πριν από το 1900, πίστευαν γενικά ότι ο Απειροστικός Λογισμός ήταν πολύ δύσκολο να διδαχθεί σε νέους μαθηματικούς. Πολλά αποτελέσματα που προκύπτουν

εύκολα με τη χρήση του Απειροστικού, χρειαζόταν επίπονη εργασία με την Άλγεβρα. Αυτή η διαδικασία ήταν γνωστή ως «τέχνασμα του Απειροστικού Λογισμού». Γύρω στο 1900, ο John Perry και άλλοι μαθηματικοί στην Αγγλία συμφώνησαν ότι οι βασικές ιδέες και μέθοδοι του Απειροστικού είναι απλές, επομένως ήταν δυνατόν να διδαχθούν στα σχολεία. Ο E. H. Moore, καθηγητής των μαθηματικών στο Σικάγο και πατέρας των σύγχρονων αμερικάνικων μαθηματικών, συγκατατέθηκε[1] κι ένας μαθητής του, ο F. L. Griffin, εισήγαγε τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού σε φοιτητές του πρώτου έτους του κολεγίου. Αυτή η ενέργεια θεωρήθηκε τολμηρή. Ο Griffin, στο περίφημο βιβλίο του *Εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση*, δείχνει πώς το κατάφερε.

Η φράση «Απειροστικός Λογισμός» δεν έγινε τίτλος του βιβλίου **για να μην τρομοκρατηθούν οι μαθητές!** Το βιβλίο πραγματεύεται την τριγωνομετρία και τον απειροστικό λογισμό, δίνοντας έμφαση στη σχέση του απειροστικού με τη μηχανική. Μπορεί, μάλιστα, να χαρακτηριστεί ως εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό.

Σύμφωνα πάντα με τον Sawyer (1993), τα παλαιότερα μαθηματικά είχαν ως επί το πλείστον συγκεκριμένο αντικείμενο. Έπρεπε κάποιος να λύσει μια συγκεκριμένη εξίσωση ή να αποδείξει ένα θεώρημα για ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα ή να μελετήσεις τις δονήσεις ειδικών μηχανικών συστημάτων. Με την πάροδο του χρόνου, συγκεντρώθηκαν όλο και περισσότερα ειδικά θέματα και οι μαθηματικοί άρχισαν να αναζητούν έναν τρόπο για να κάνουν πιο συστηματική τη μελέτη τους. Τότε, άρχισαν να παρατηρούν ότι, συχνά, οι λεπτομέρειες αυτές έριχναν σκιά στην ουσία. Από όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες για κάποιο αντικείμενο μελέτης ίσως μόνον ελάχιστες να ήταν απαραίτητες για τη λύση του προβλήματος. Οι υπόλοιπες απλώς αποσπούσαν την προσοχή.

Στη σχολική πρακτική τα πράγματα ακολουθούσαν ανάλογη πορεία. Ο Απειροστικός κατέβηκε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δειλά στη αρχή και σε πιο αυστηρό επίπεδο στη συνέχεια, για να καταλήξει με τη σύμφωνη γνώμη σχεδόν όλων των εμπλεκόμενων σε μια εισαγωγή που στηρίζεται κατά κύριο λόγο στην εποπτεία και στη μελέτη ιδιοτήτων των συναρτήσεων κατ' αρχήν μέσω των γραφικών παραστάσεων.

Αναφερόμενοι στη δική μας πραγματικότητα θα θυμηθούμε ότι πριν από μερικές δεκαετίες οι πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού τμήματος εισέρχονταν στο πρώτο

[1] Βλέπε την πρώτη επετηρίδα (National Council of Teachers of Mathematics, USA) του Αμερικάνικου Συμβουλίου των Μαθηματικών.

έτος σπουδών τους έχοντας γνώση μέχρι και τη θεωρία των λογαρίθμων. Αργότερα όταν ο Απειροστικός Λογισμός μπήκε στα λύκεια, στα πρώτα βήματα της διδασκαλίας του έφτανε μέχρι απλούς υπολογισμούς ορίων. Και ήταν γύρω στο 1968 όταν εμφανίστηκαν τα πρώτα βιβλία που είχαν ως βάση τις ακολουθίες και τους έψιλον – δέλτα ορισμούς Η. Ντζιώρας, Β. Στάικος). Η περίοδος αυτή χαρακτηρίστηκε στη χώρα μας ως η ΄΄**περίοδος των μοντέρνων μαθηματικών**΄΄. Λίγα χρόνια πιο μετά υπήρχαν στην εξεταστέα ύλη προβλήματα μεγιστοποίησης – ελαχιστοποίησης, τα οποία όμως δε διδάσκονταν κατά κανόνα στα σχολεία και δεν ζητιόνταν στις εξετάσεις. Έκτοτε βέβαια αρκετά πράγματα έχουν αλλάξει, για να φτάσουμε στη σημερινή κατάσταση, όπου, όπως όλοι γνωρίζουμε, ένας στοιχειώδης Απειροστικός Λογισμός με έκταση έως και απλές εφαρμογές των παραγώγων, διδάσκεται πλέον ως ένα τμήμα των μαθηματικών Γενικής παιδείας.

2. ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

2.1. ΔΙΑΙΣΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΑ – ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Όταν πρόκειται να διδάξει κανείς ένα κεφάλαιο στα Μαθηματικά (ή και σε άλλες επιστήμες), συνήθως ανακαλύπτει πως ό,τι έχει ήδη γίνει σαφές και κατανοητό σ' αυτόν – μετά από μακρά περίοδο πανεπιστημιακών σπουδών – εξακολουθεί να εμπεριέχει γνωστικά εμπόδια στην κατανόηση από τους μαθητές. Ως καθηγητές αισθανόμαστε ότι ο μαθητής – συχνά έτοιμος να αποστηθίσει ότι του διδάσκεται – στην πραγματικότητα δεν αντιλαμβάνεται τι του διδάσκεται και απλά αποστηθίζει την αντίστοιχη ΄΄γνώση΄΄. Η διαισθητική του αντίληψη για ένα φαινόμενο είναι συχνά διαφορετική από την επιστημονική ερμηνεία.

Όπως παρατήρησε ο Fischbein (1978), υπάρχει ποικιλία περιγραφών για την έννοια της διαίσθησης. Ο Bruner (1966) αντιπαραθέτει τη διαίσθηση με την αναλυτική σκέψη. Ο Poincare (1913) αντιπαραθέτει τη διαίσθηση με τη λογική και το ίδιο και ο Hadamard (1945) διαφοροποιούμενος από τον Poincare σε κάποιες σημαντικές λεπτομέρειες. Ο Skemp (1971) αντιπαραθέτει τη διαισθητική με τη συνεπαγωγική σκέψη ως δύο διαφορετικές μεθόδους της νοητικής δραστηριότητας και της επακόλουθης εργασίας, διαφοροποιούμενος αρκετά σημαντικά από την περιγραφή του Poincare. Εν τω μεταξύ, ο Fischbein (1978) περιγράφει τη διαίσθηση ως ΄΄άμεση γνώση΄΄ που χαρακτηρίζεται από της ιδιότητες του αυταπόδεικτου, του καταναγκαστικού νοήματος, της ικανότητας extrapolative και της γενικότητας.

Όπως αναφέρει ο Fischbein (1999) οι διαισθήσεις γενικά αποτελούν στιγμές, φάσεις μετάφρασης διανοητικών σχημάτων (τα οποία είναι από τη φύση τους ακολουθιακές διαδικασίες) σε προσαρμοστικές αντιδράσεις. Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι η ακολουθιακή φύση των σχημάτων αναφέρεται σε σχήματα που έχουν ήδη κτισθεί και όχι στη διαδικασία παραγωγής σχημάτων, η οποία δεν είναι ακολουθιακή αλλά σύνθετη και διστακτική. Η στιγμή της μετάφρασης συντηρεί και εκφράζει την κτήση που έχει αποθηκευτεί σε συναφή σχήματα. Επιπροσθέτως, κατέχει τις ιδιότητες του ξαφνικού, της ολότητας, της υπέρ-προσθετικότητας[2] (υπό την έννοια της αέναης αύξησης, της αέναης συμπλήρωσης στοιχείων) που είναι

[2] Με τη φράση υπέρ-προσθετικότητα, προσπαθήσαμε να αποδώσουμε όσο πιο πιστά εκτιμούσαμε κατά τη γνώμη μας την αντίστοιχη αγγλική λέξη extrapolativeness)

άμεση απαίτηση, της επάρκειας για τις συμπεριφοριστικά προσαρμοσμένες αντιδράσεις. Το να εξηγήσουμε μια διαίσθηση θα απαιτούσε, πρώτα απ' όλα, τη δυνατότητα να αναγνωρίσουμε τη σχηματική δομή πάνω στην οποία βασίζεται η αντίστοιχη διαίσθηση και επιπροσθέτως, τις έννοιες με τις οποίες μια ακολουθιακή οργάνωση ενός σχήματος μετατρέπεται σε μια προφανή συνολικότητα, σε μια προφανώς αυταπόδεικτη γνώση, που οδηγεί και ελέγχει την αντίστοιχη προσαρμοστική αντίδραση.

Πάντα κατά τον ίδιο, υπάρχουν οι *διαβεβαιωτικές* και οι *προβλεπτικές* διαισθήσεις. Όταν προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα του οποίου η λύση δεν είναι άμεση, η προσπάθεια εύρεσης αυτής περνά από τα εξής στάδια:

i. Κατ' αρχήν κάποιος προσπαθεί να αρπαχτεί νοηματικά, κατευθύνοντας την ερώτηση, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρατίθενται στο κείμενο του προβλήματος. Ο λύτης πρέπει να καταλάβει σαφώς και να διακρίνει τα δεδομένα από τα ζητούμενα.

ii. Δευτερευόντως, ο λύτης πρέπει να κινητοποιήσει διάφορες πληροφορίες και συσχετισμούς που έχει αποκτήσει από προηγούμενα, κατά τρόπο ώστε να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ δεδομένων και ζητούμενων. Τέτοια νοητική προσπάθεια είναι κάποιες φορές υπονοούμενη και κάποιες συνειδητή και ακριβής.

iii. Όταν αυτή η προσπάθεια φτάσει σε ένα καλά δομημένο τέλος, τότε ο λύτης αισθάνεται ότι έχει φτάσει στην απάντηση.

Εν συντομία μιλώντας, αυτά που χαρακτηρίζουν τις προβλεπτικές διαισθήσεις είναι τα ακόλουθα:

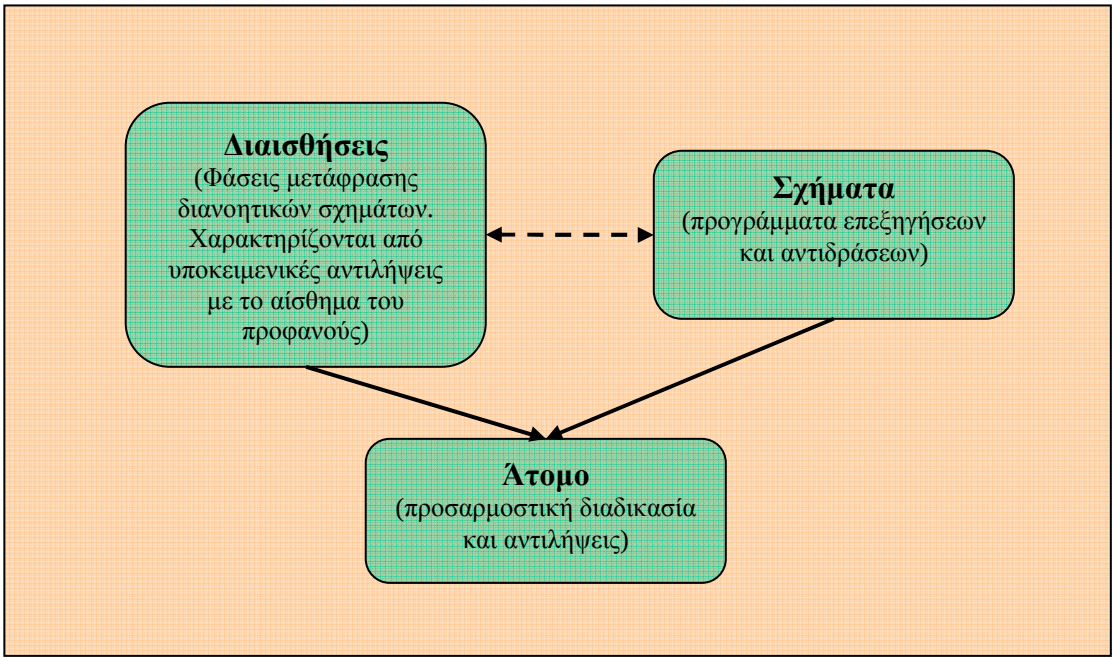
i. Εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μιας προσπάθειας λύσης, συνήθως ξαφνικά, μετά από μια φάση εντατικού ψαξίματος.

ii. Παρουσιάζουν έναν συνολικό χαρακτήρα.

iii. Σε αντίθεση με μια συνηθισμένη μαντεψιά ή υπόθεση, αυτές οι διαισθήσεις σχετίζονται με ένα αίσθημα βεβαιότητας, αν και η λεπτομερής δικαιολόγηση δεν έχει ακόμη βρεθεί.

Οι διαισθήσεις και τα σχήματα είναι δύο διαφορετικοί τύποι γνωστικών κατηγοριών. Οι διαισθήσεις είναι αντιλήψεις που χαρακτηρίζονται κυρίως από γενικότητα και από το υποκειμενικό αίσθημα του προφανούς. Τα σχήματα είναι προγράμματα επεξηγήσεων και αντιδράσεων. Το κοινό στις δύο αυτές κατηγορίες είναι ο βασικός τους ρόλος στην προσαρμοστική διαδικασία και οι βαθυστόχαστες συνδέσεις τους με τις αντιλήψεις του ατόμου.

Σχηματικά θα μπορούσαμε να περιγράψουμε την παραπάνω διαδικασία ως ακολούθως:



Δομεί λοιπόν το άτομο σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τις αντιλήψεις του και τον τρόπο στάσης του απέναντι σε διάφορες (ομοειδείς, κατά κύριο λόγο) καταστάσεις, μ' άλλα λόγια δομεί τη ΄΄γνώση΄΄ του για κάτι συγκεκριμένο. Ένα πρώτο ερώτημα φαίνεται να εγείρεται άμεσα: «*Τι θα χαρακτηρίσουμε ως γνώση;*» .

Σύμφωνα με τον Dubinsky (1991) η γνώση της έννοιας είναι η κλίση και η τάση του ατόμου να ανακαλεί ένα (νοητικό) σχήμα ώστε να μπορεί να χειριστεί, οργανώσει και δώσει νόημα σε μια προβληματική κατάσταση. Είναι δύσκολο να κρατήσουμε τη μαθηματική γνώση ξέχωρα από τη μαθηματική δομή. Μια προσπάθεια για να επιτευχθεί αυτό οδηγεί στην παρατήρηση των ατόμων όταν λύνουν προβλήματα. Οι τρόποι που ακολουθούν μπορεί να μην αποκαλύψουν ακριβώς τα αντικείμενα – στόχους, τις διαδικασίες και τα σχήματα, αλλά μπορούν να υποδείξουν πως δημιουργείται η γνώση. Ένα άτομο μπορεί να αποκρίνεται με τον ίδιο τρόπο κάθε φορά που αντιμετωπίζει ένα είδος προβλημάτων. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με σχήματα. Αν το άτομο πετύχει στη λύση, τότε τα προβλήματα έχουν αφομοιωθεί σε ένα σχήμα. Αν όχι, τότε το υπάρχον σχήμα θα πρέπει να συμμορφωθεί – τροποποιηθεί ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει τη νέα κατάσταση. Ή επίσης μπορεί να μη συμβεί τίποτε.

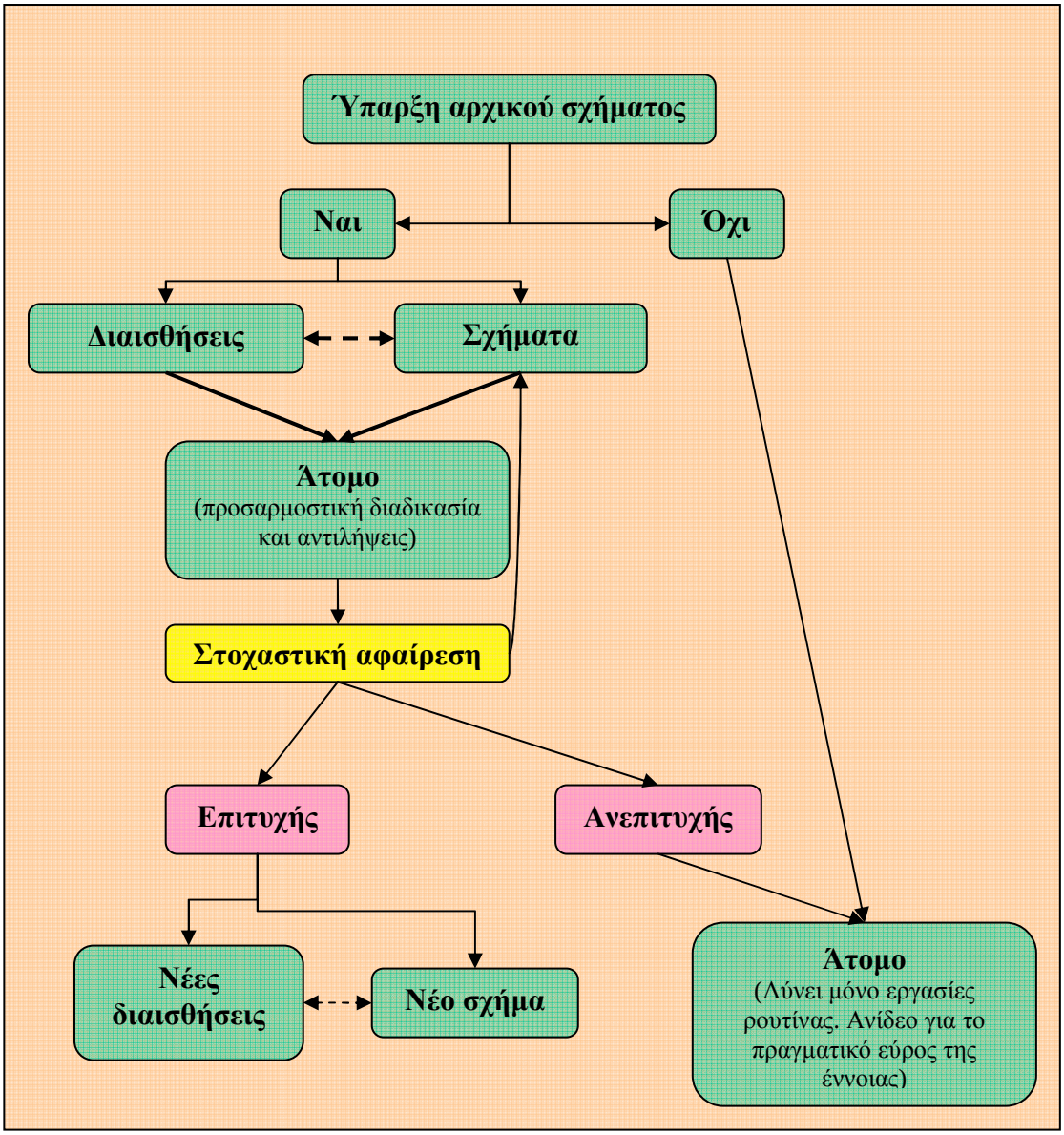
Ένα μέρος της μάθησης, σύμφωνα πάντα με τον Dubinsky (1991), είναι η εφαρμογή της αναστοχαστικής αφαίρεσης στα υπάρχοντα σχήματα, ώστε να δημιουργηθούν νέα που θα προσδώσουν μια κατανόηση των εννοιών που υπάρχουν στην ερώτηση ή στο πρόβλημα. Αυτό υπαινίσσεται ότι η μάθηση δε μπορεί να λάβει χώρα, εκτός εάν αρχικά δημιουργηθούν σχήματα, τουλάχιστον πολύ απλουστευτικά. Αλλιώς το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ότι οι μαθητές θα ξέρουν να λύνουν μόνο εργασίες ρουτίνας και θα είναι ανίδεοι για το πραγματικό εύρος της έννοιας. Μπορούν επίσης να δημιουργούν ασύνδετα και λανθασμένα σχήματα.

Εδώ θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι, κατά την άποψή μας, η ύπαρξη λανθασμένων σχημάτων στο νου του μαθητή ή η αποτυχία της αναστοχαστικής αφαίρεσης που θα προσπαθήσει να κάνει σε ένα ήδη υπάρχον σχήμα, έχουν το ίδιο αποτέλεσμα κι αυτό δεν είναι άλλο από το να στραφεί πάλι ο μαθητής σε εργασίες ρουτίνας, βλέποντας την αδυναμία του να συλλάβει και να επεξεργαστεί συνθετότερες καταστάσεις.

Βέβαια, οι περίοδοι της σύγχυσης και της αβεβαιότητας, της γνωστικής σύγκρουσης γενικότερα, είναι αναγκαίες όταν η νέα γνώση προσπαθεί να συνεργαστεί με την υπάρχουσα και είναι μέρος της μαθησιακής διαδικασίας (Cornu, 1991). Είναι αυτή ακριβώς η σύγχυση που θα δημιουργήσει στους μαθητές την ανάγκη για τακτοποίηση κι έτσι αυτοί αρχίζουν να προσαρμόζουν τα σχήματά τους.

Αν τώρα θελήσουμε να επικεντρωθούμε στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών θα πρέπει να ανατρέξουμε στους James Hilbert και Thomas P. Carpenter (1992) οι οποίοι ορίζουν την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας να είναι κάτι που το άτομο έχει καταφέρει όταν μπορεί να χειριστεί την έννοια ως μέρος μιας νοητικής εργασίας. Ο βαθμός κατανόησης αποφασίζεται, σύμφωνα με τους ίδιους, από τη δύναμη των συνδέσεων στο πλέγμα καθώς επίσης και από τον αριθμό των συνδέσεων.

Έτσι λοιπόν μπορούμε σχηματικά να έχουμε τώρα την ακόλουθη μορφή:


Ύπαρξη αρχικού σχήματος
Ναι
Όχι
Διαισθήσεις
Σχήματα
Άτομο
(προσαρμοστική διαδικασία και αντιλήψεις)
Στοχαστική αφαίρεση
Επιτυχής
Ανεπιτυχής
Νέες διαισθήσεις
Νέο σχήμα
Άτομο
(Λύνει μόνο εργασίες ρουτίνας. Ανίδεο για το πραγματικό εύρος της έννοιας)

2.2. ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΈΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΈΝΝΟΙΑΣ – ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ

Όπως είδαμε, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός αρχικού νοητικού σχήματος, έστω και υπέρ-απλουστευμένου, για να μπορέσουμε με αφετηρία αυτό, να δομήσουμε – αν καταφέρουμε να δομήσουμε – μια ευρεία και όσο γίνεται ολοκληρωμένη αντίληψη για μια έννοια, για μια κατάσταση. *Πώς όμως δομείται ένα πρωτόλειο σχήμα; Πώς αυτό επεκτείνεται; Πώς γενικεύεται και πώς εφαρμόζεται;* Αυτό είναι ένα σύνθετο ερώτημα που θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στη συνέχεια.

Νομίζουμε ότι δεν θα βρούμε διαφωνούντες, αν ισχυριστούμε ότι τα μαθηματικά συγκρινόμενα με άλλους τομείς της ανθρώπινης προσπάθειας, θεωρούνται ως το κομμάτι με τη μεγαλύτερη ακρίβεια όπου οι έννοιες ορίζονται επακριβώς και με αυστηρότητα για να προσδώσουν μια σταθερή βάση στη μαθηματική θεωρία.

Η ανθρώπινη πραγματικότητα, η από την ψυχολογική πλευρά εννοούμενη πραγματικότητα, είναι όμως κάπως διαφορετική. Αρκετά στοιχεία που συναντάμε στα μαθηματικά τα έχουμε ήδη συναντήσει νωρίτερα και για να πάμε πάρα πέρα το θέμα, και αρκετά στοιχεία, για να μην πούμε τα περισσότερα, που συναντάμε κάποια στιγμή με τον αυστηρό τους ορισμό και την αυστηρή τους σημασία στα μαθηματικά, τα έχουμε διδαχτεί σε κάποιες προηγούμενες φάσεις των σπουδών μας με έναν τρόπο όχι αυστηρό, με μια εισαγωγή που έχει ως στόχο να μας φέρει σε κάποια πρώτη επαφή με τις αντίστοιχες έννοιες. Τα στοιχεία λοιπόν αυτά έχουν καταγραφεί μέσα μας με τον άλφα ή βήτα τρόπο προτού οριστούν τυπικά κι έτσι ένα σύνθετο γνωστικό κατασκεύασμα υπάρχει στο μυαλό του κάθε ατόμου, αποδίδοντας μια ποικιλία διανοητικών εικόνων όταν μια έννοια έρθει στην επιφάνεια.

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981), ο ανθρώπινος εγκέφαλος δεν είναι μια ξεκάθαρα λογική οντότητα. Ο σύνθετος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί έρχεται συχνά σε διάσταση με τη λογική των μαθηματικών. Και δεν είναι πάντα η καθαρή λογική που θα μας δώσει τη διορατικότητα, ούτε είναι η τύχη που μας κάνει και κάνουμε λάθη. Για να καταλάβουμε πως εμφανίζονται αυτές οι διαδικασίες, την ίδια στιγμή επιτυχείς όσο και ανεπιτυχείς θα πρέπει να τυποποιήσουμε μια διάκριση ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες όπως αυτές ορίζονται τυπικά και στη γνωστική διαδικασία με την οποία αυτές προσλαμβάνονται από το άτομο.

Ας προσέξουμε ότι υπάρχουν πολλές έννοιες και διαδικασίες στον καθένα μας, τις οποίες χρησιμοποιούμε απροβλημάτιστα και οι οποίες δεν έχουν οριστεί καθόλου. Τις αναγνωρίζουμε διαμέσου της εμπειρίας μας και της χρήσης τους σε ανάλογα πλαίσια και εργαζόμαστε με αυτές αρκούντως ικανοποιητικά. Ίσως αργότερα επέλθει η κατανόηση αυτών των εννοιών, με αποσαφήνιση αρκετών λεπτομερειών και με ή χωρίς την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Συνήθως σ' αυτή τη διαδικασία δίνουμε στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα το οποίο την καθιστά ικανή να επικοινωνεί με τον περίγυρό της και βοηθά στο διανοητικό χειρισμό της. Θα πρέπει να σημειώσουμε βέβαια ότι η ανάκληση την οποία εισπράττουμε από το σύμβολο ή το όνομα που έχουμε δώσει, δε μπορεί να αντιπροσωπεύει το ολικό γνωστικό οικοδόμημα το οποίο χρωματίζει τη σημασία της έννοιας και είναι ως εκ τούτου, κατά πολύ μεγαλύτερο. Είναι μάλιστα αυτό το γνωστικό οικοδόμημα πολύ περισσότερο από οποιαδήποτε νοητική – νοηματική εικόνα. Είναι ένα εικονογράφημα είτε με συμβολικό τρόπο είτε με άλλον τρόπο. Κατά τη διάρκεια της διανοητικής διαδικασίας της ανάκλησης και του χειρισμού μιας έννοιας, πολλές συσχετιζόμενες διαδικασίες μπαίνουν στο παιχνίδι, είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα, επηρεάζοντας τόσο τη σημασία όσο και τη χρήση της έννοιας.

Καθώς το άτομο έρχεται σε επαφή με μια καινούργια έννοια και καθώς κατά τη διάρκεια του χρόνου, δουλεύει μ' αυτήν, τη χειρίζεται, την εφαρμόζει σε διάφορες καταστάσεις και προσλαμβάνει νέα στοιχεία και ιδιότητες σχετικά με αυτήν, χτίζει – όχι χωρίς κόπο – το δικό του γνωστικό οικοδόμημα για αυτή την έννοια. Μέσα σε όλη αυτή την πορεία, περνά από αντιφάσεις, συγκρούσεις, συμπληρώματα και αναδιοργανώσεις της σκέψης του. Κατά κύριο λόγο, αυτό που συμβαίνει σε όλη αυτή την πορεία συγκρότησης και ανασυγκρότησης είναι το φαινόμενο της γνωστικής σύγκρουσης. Το άτομο στοχάζεται, εφαρμόζει, αφαιρεί και γενικεύει μέχρι να μπορέσει – αν μπορέσει – να έρθει σε εσωτερική ισορροπία.

Η αναστοχαστική αφαίρεση (Dubinsky, 1991) έχει να κάνει με τα νοητικά αντικείμενα και τις ενέργειες επάνω σ' αυτά. Αυτές οι ενέργειες γίνονται διαδικασίες μέσω της εσωτερικοποίησης. Τα αντικείμενα – στόχοι δημιουργούνται με την ενθυλάκωση των διαδικασιών. Μια έννοια μπορεί να θεωρηθεί τόσο ως στόχος – αντικείμενο όσο και ως μια διαδικασία, ανάλογα με το υπάρχον πλαίσιο. Τα σχήματα υπερκαλύπτονται και σχηματίζουν έναν μεγάλο σύνθετο ιστό.

Γνωστικά, υπάρχουν διάφορα είδη γενικεύσεων που μπορούμε να κάνουμε. Ο Tall περιγράφει τρία από αυτά. Η *επεκτατική γενίκευση*, όταν οι υπάρχουσες νοητικές

αναπαραστάσεις παραμένουν αναλλοίωτες και η νέα γνώση επικολλάται ως συμπλήρωμα. Η *αναδομιστική γενίκευση*, όταν η υπάρχουσα νοητική αναπαράσταση πρέπει να αλλάξει ώστε να δίνει νόημα. Η *διαζευκτική γενίκευση* όπου το άτομο μαθαίνει κυκλοτροπικά κομμάτια που θα έπρεπε να μάθει και απλά τα προσθέτει σε ότι ήδη έχει στο νου του. Καμία σύνθεση δε λαμβάνει χώρα. Είναι αδύνατο να έχουμε μια κοντινή επισκόπηση της αντίληψης.

Σημαντικό ρόλο φαίνεται να παίζουν σε αυτές τις γενικεύσεις και οι αναπαραστάσεις, τις οποίες θα αναλύσουμε εκτενέστερα στην επόμενη ενότητα. Προς το παρόν μας αρκεί να γνωρίζουμε ότι όταν παρατηρείται μια διαδικασία ή ένα αντικείμενο, αναφερόμαστε σε αυτό με τη νοητική του αναπαράσταση (Dreyfus, 1991). Μερικοί μαθητές προτιμούν την οπτική θεώρηση και έχουν εικόνες στις νοητικές τους αναπαραστάσεις, ενώ άλλοι έχουν σύμβολα ή παραδείγματα ώστε να είναι ικανοί να σκέφτονται τις ιδέες. Μια έννοια μπορεί να αναπαριστάνεται με περισσότερους του ενός τρόπους και επίσης μπορεί να υπάρχουν συγκρουόμενες αναπαραστάσεις που προξενούνται σε διαφορετικές στιγμές, ανάλογα με το πλαίσιο εργασίας. Αν οι αναπαραστάσεις δεν αντιφάσκουν, τότε μπορούν να συγχωνευτούν σε μια, αν το άτομο μπορεί να δει τις υπάρχουσες συνδέσεις. Το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ένας συντονισμός ή μια σύνθεση. Αν οι αναπαραστάσεις είναι ασταθείς, τότε μπορεί να εμφανιστεί μια γνωστική σύγκρουση.

Είναι προφανές και θεωρείται από όλους ως τέτοιο, ότι όσο περισσότερες συνδέσεις υπάρχουν ανάμεσα στις νοητικές αναπαραστάσεις, τόσο καλύτερα κατανοεί το άτομο την εκάστοτε έννοια. Τότε μπορεί να μεταβεί αβίαστα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, ανάλογα με τις απαιτήσεις της εργασίας του.

Ο Piaget εισήγαγε και καθιέρωσε τους όρους *αφομοίωση* (assimilation) και *προσαρμογή – συμμόρφωση* (accommodation) για να περιγράψει τα ακόλουθα:

- *Αφομοίωση* είναι η διαδικασία απόκτησης νέων δεδομένων.
- *Προσαρμογή – συμμόρφωση* είναι η διαδικασία επαναδιευθέτησης παλαιών δεδομένων ώστε να ενοποιηθούν με τα νέα (δεδομένα).

Αυτές οι δύο έννοιες είναι συμπληρωματικές. Αν η συμμόρφωση δεν εκτελεστεί ικανοποιητικά μπορεί τα νέα δεδομένα να έρθουν σε σύγκρουση με τα παλιά, αλλά και οι δύο κατηγορίες αναπαραστάσεων (παλιές και νέες) μπορεί να είναι συγχρόνως παρούσες.

Οι Tall & Vinner (1981) έδωσαν τη δικιά τους (πολύ καλή, κατά τη γνώμη μας) εξήγηση για την εμφάνιση της γνωστικής σύγκρουσης εισάγοντας τον όρο ***εικόνα της έννοιας*** (*concept image*) σε αντιπαράθεση ή και συμπλήρωση του ***ορισμού της έννοιας*** (*concept definition*).

Οι ορισμοί που εισήγαγαν (και που κάποιους θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία μας) είναι οι ακόλουθοι:

- Εικόνα της έννοιας (concept image): Είναι το όλο γνωστικό οικοδόμημα που σχετίζεται με την έννοια και το οποίο περιέχει όλες τις διανοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Έχει χτιστεί κατά τη διάρκεια των χρόνων, διαμέσου εμπειριών οποιουδήποτε είδους, αλλάζοντας καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάνσεις.
- Προκληθείσα εικόνα της έννοιας (evoked concept image): Είναι το μέρος της εικόνας που ενεργοποιείται μια συγκεκριμένη στιγμή (μόνο όταν οι αντιμαχόμενες θεωρήσεις προκληθούν ταυτόχρονα θα δημιουργηθεί η αίσθηση της αντιπαράθεσης ή της σύγχυσης)
- (Τυπικός) Ορισμός της έννοιας (concept definition): Είναι ένας τύπος από λέξεις που χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν αυτή την έννοια (μπορεί να μαθευτεί είτε απομνημονεύοντάς τον είτε κατανοώντας τον).
- Προσωπική έννοια του ορισμού: Είναι η προσωπική ανακατασκευή του ορισμού, ώστε αυτός να ταιριάζει στην εικόνα της έννοιας που έχει το άτομο και σαφώς μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό.
- Εικόνα του ορισμού της έννοιας (concept definition image): είναι η εικόνα που γεννά σε κάθε άτομο ο ορισμός της έννοιας .
- Ενδεχόμενος παράγοντας σύγκρουσης (potential conflict factor): Είναι ένα μέρος της εικόνας ή του ορισμού της έννοιας, που μπορεί να συγκρούεται με κάποιο άλλο. Ένας σοβαρότερος τύπος του ενδεχόμενου παράγοντα σύγκρουσης είναι εκείνος στην εικόνα της έννοιας ο οποίος έρχεται σε διάσταση όχι με ένα άλλο μέρος της εικόνας, αλλά με τον τυπικό ορισμό της έννοιας
- Γνωστικός παράγοντας σύγκρουσης (cognitive conflict factor): Είναι ένας ενδεχόμενος παράγοντας σύγκρουσης ο οποίος έχει προκληθεί μια συγκεκριμένη στιγμή (δεν είναι απαραίτητο ότι θα προκαλείται πάντα σε αντίστοιχο περιβάλλον) και δημιουργεί πραγματική γνωστική σύγκρουση.

Θα εξηγήσουμε αναλυτικότερα τους ανωτέρω όρους στη συνέχεια, δανειζόμενοι κάποια στοιχεία από το αντίστοιχο άρθρο των Tall & Vinner (1981).

Ο όρος *εικόνα της έννοιας (concept image)* είναι όπως προαναφέραμε, το όλο γνωστικό οικοδόμημα που σχετίζεται με την έννοια και το οποίο περιέχει όλες τις διανοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Κατά κανόνα, το κάθε άτομο χτίζει τη δική του εικόνα, διαμέσου των εμπειριών του κατά τη διάρκεια των χρόνων. Είναι λοιπόν ένα καθαρά γνωστικό, εξατομικευμένο οικοδόμημα το οποίο μπορεί να είναι μια οπτικοποίηση της έννοιας ή εμπειρίες που απορρέουν από αυτή ή και τα δύο. Η εικόνα αυτή δεν παραμένει σταθερά αναλλοίωτη, αλλά μεταβάλλεται καθώς το άτομο συναντά νέες εμπειρίες και ερεθίσματα.

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την έννοια της αφαίρεσης, η οποία κατά αρχήν ορίζεται ως μια διαδικασία ανάμεσα σε θετικούς ακεραίους, όπου από τον μεγαλύτερο αφαιρούμε τον μικρότερο και έχουμε πάντα ως αποτέλεσμα έναν θετικό ακέραιο, μικρότερο από τον αφαιρετέο. Για κάποιο παιδί αυτή η παρατήρηση είναι μέρος της εικόνας της έννοιας που έχει σχηματίσει και αργότερα μπορεί να προκαλέσει προβλήματα, όταν η έννοια της αφαίρεσης επεκταθεί κατ' αρχήν σε όλους τους ακεραίους. Γι' αυτό το λόγο όλες οι νοητικές αποδόσεις που σχετίζονται με την έννοια, είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα, θα πρέπει να συμπεριληφθούν στην εικόνα της έννοιας και θα πρέπει να θεωρηθούν ως φυτώρια ενδεχόμενων μελλοντικών συγκρούσεων.

Καθώς η έννοια αναπτύσσεται, δε χρειάζεται να είναι λογική και σταθερή κάθε φορά. Ο εγκέφαλός μας δε δουλεύει πάντα έτσι. Οι αισθητήρες εισόδου διεγείρουν συγκεκριμένα νευρωνικά μονοπάτια και παρεμποδίζουν άλλα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, διαφορετικά ερεθίσματα μπορούν να ενεργοποιήσουν διαφορετικά μέρη της εικόνας της έννοιας, αναπτύσσοντάς τα κατά τρόπο που δε χρειάζεται να είναι καθόλου λογικός.

Το μέρος της εικόνας της έννοιας που ενεργοποιείται κάποια συγκεκριμένη στιγμή, είναι αυτό που θα ονομάζεται *προκληθείσα έννοια της εικόνας (evoked concept image)*. Εικόνες που μπορεί να φαίνεται ότι συγκρούονται μεταξύ τους, μπορεί να προκληθούν σε διαφορετικές στιγμές. Παρεμπιπτόντως το άτομο μπορεί να μην ενοχλείται καθόλου από αυτές τις αντιφάσεις. Μόνο όταν οι αντιμαχόμενες θεωρήσεις προκληθούν ταυτόχρονα θα δημιουργηθεί η αίσθηση της αντιπαράθεσης και της σύγχυσης, αυτή που θα οδηγήσει στη γνωστική σύγκρουση. Ο Fischbein (1978) παρατηρεί ότι ΄΄δύο αντίθετες ερμηνείες μπορούν να συνυπάρχουν για μεγάλο

διάστημα, χωρίς το υποκείμενο να φοβάται την αντιπαράθεση΄΄. Τα παιδιά που κάνουν μαθηματικά συνήθως χρησιμοποιούν διαφορετικές διαδικασίες, σύμφωνα με το πλαίσιο στο οποίο εργάζονται και κάνουν διαφορετικά λάθη, που βασίζονται στη θεώρηση του συγκεκριμένου προβλήματος το οποίο αντιμετωπίζουν. Για παράδειγμα, η πρόσθεση $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ μπορεί να γίνει επιτυχώς, αλλά όταν έρθει σε αντιπαράθεση με την πρόσθεση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, είναι πιθανό να εμφανιστεί μια λανθασμένη μέθοδος αντιμετώπισης. Ένα τέτοιο παιδί δε βλέπει καμιά σύγκρουση στις δύο διαφορετικές μεθόδους, απλά χρησιμοποιεί τη μέθοδο που του φαίνεται ότι ταιριάζει με την κάθε περίπτωση.

Ο *ορισμός της έννοιας*, αν υπάρχει τέτοιος, είναι κάτι διαφορετικό. Είναι όπως προαναφέραμε, ένας τύπος από λέξεις που χρησιμοποιείται για να καθορίσει πλήρως την έννοια, που μαθαίνεται ατομικά είτε με αποστήθιση, κατά κάποιον τρόπο παπαγαλία, είτε συνδεόμενος νοηματικά και συσχετιζόμενος με έναν μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια ως μια ολότητα. Επίσης μπορεί να υπάρξει προσωπική ανακατασκευή του ορισμού από τον μαθητή. Τότε ο μαθητής χρησιμοποιεί αυτόν τον τύπο των λέξεων που βλέπει, για να δώσει τη δικιά του εξήγηση για την (προκληθείσα) εικόνα της έννοιας που έχει. Είτε ο ορισμός του έχει δοθεί είτε έχει κατασκευαστεί από τον ίδιο, ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να τον διαφοροποιεί από καιρό σε καιρό. Κατ' αυτόν τον τρόπο μια *προσωπική* έννοια του ορισμού μπορεί να διαφέρει από τον *τυπικό* ορισμό της έννοιας που είναι αποδεκτός από σύνολο της μαθηματικής κοινότητας.

Για κάθε άτομο ο ορισμός της έννοιας γεννά την αντίστοιχη δικιά του εικόνα της έννοιας, η οποία θα μπορούσε να λεχθεί, ως *εικόνα του ορισμού της έννοιας*. Αυτό φυσικά είναι μέρος της εικόνας της έννοιας.. Σε κάποια άτομα μπορεί να είναι κενό ή κατ' ουσία μη υπαρκτό, ανενεργό. Σε άλλα άτομα μπορεί να είναι ή να μην είναι λογικά συνδεδεμένο με άλλα μέρη της εικόνας της έννοιας. Για παράδειγμα ο ορισμός της συνάρτησης μπορεί να ληφθεί ως ΄΄μια σχέση μεταξύ δύο συνόλων Α και Β, στην οποία κάθε στοιχείο του Α σχετίζεται με ακριβώς ένα στοιχείο του Β.΄΄ Αλλά τα άτομα που έχουν μελετήσει συναρτήσεις μπορεί να θυμηθούν ή όχι τον ορισμό της έννοιας σε κάποιο πρόβλημα, όπως επίσης και η εικόνα του της έννοιας μπορεί να περιέχει κι άλλες παραδοχές όπως το ότι η συνάρτηση δίνεται μέσω ενός κανόνα ή ενός τύπου ή ίσως ότι διαφορετικοί τύποι μπορούν να εφαρμοστούν σε διαφορετικά

τμήματα του πεδίου ορισμού Α. Ίσως ακόμη να υπάρχουν κι άλλες παρατηρήσεις όπως το ότι μια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια ενέργεια που απεικονίζει το α από το Α στο f(α) από το Β, ή ως ένα γράφημα ή ως ένας πίνακας τιμών. Όλες ή και καμία από αυτές τις παραδοχές μπορεί να αποτελούν την εικόνα την έννοιας που έχει σχηματίσει το άτομο. Ο δάσκαλος από την άλλη μεριά, μπορεί να δώσει τον τυπικό ορισμό και να δουλέψει για λίγο με γενικές αντιλήψεις, περνώντας στη συνέχεια σε μια μακρά περίοδο όπου όλα τα παραδείγματα θα δίνονται μέσω τύπων. Σε μια τέτοια περίπτωση η εικόνα της έννοιας μπορεί να αναπτυχθεί σε μια πιο περιοριστική αντίληψη, που θα περιέχει μόνο τύπους, ενώ ο ορισμός της έννοιας είναι σε μεγάλο βαθμό ανενεργός στο γνωστικό οικοδόμημα. Αρχικά ο μαθητής ο ευρισκόμενος σε αυτή τη θέση μπορεί να λειτουργήσει χωρίς ιδιαίτερους προβληματισμούς με την περιορισμένη αντίληψή του μέσα στο περιορισμένο πλαίσιό του. Ίσως ακόμη να έχει διδαχτεί να ανταποκρίνεται με το σωστό τυπικό ορισμό, ενώ έχει μια αταίριαστη εικόνα της έννοιας. Αργότερα όταν θα συναντήσει συναρτήσεις που θα ορίζονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο ίσως είναι ανίκανος να τα βγάλει πέρα.

Το τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας το οποίο μπορεί να συγκρούεται με ένα μέρος της εικόνας ή του ορισμού της έννοιας, θα ονομάζεται *ενδεχόμενος παράγοντας σύγκρουσης (potential conflict factor)*. Τέτοιοι παράγοντες δε χρειάζεται να προκαλούνται σε περιπτώσεις που προκαλούν γνωστική σύγκρουση, αλλά αν γίνει κάτι τέτοιο, τότε αυτοί θα ονομάζονται *γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης (cognitive conflict factors)*. Για παράδειγμα ο ορισμός ενός μιγαδικού $x+iy$ ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) και η ταύτιση $x+i0=(x,0)$ ως πραγματικού αριθμού είναι ένας ενδεχόμενος παράγοντας σύγκρουσης στο πλαίσιο των μιγαδικών αριθμών κι αυτό διότι περιέχει μια ενδεχόμενη γνωστική σύγκρουση με τη συνολοθεωρητική αντίληψη, όπου βέβαια το στοιχείο x είναι διακεκριμένο από το διατεταγμένο ζεύγος (x, 0). Η θεώρηση του $\sqrt{2}$ ως πραγματικού και του $\sqrt{2}+i0$ ως μιγαδικού, είναι κάτι το οποίο δε φαίνεται να δημιουργεί πρόβλημα στους χειρισμούς των μαθητών, αντίθετα μάλιστα οι δύο προηγούμενες παραστάσεις θεωρούνται, πολύ βολικά, ως διακεκριμένες οντότητες του ιδίου, εμφανιζόμενες και βασιζόμενες στις περιστάσεις, χωρίς να δημιουργείται καμία γνωστική διαμάχη. Γίνονται γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης μόνο όταν προκαλούνται ταυτόχρονα.

Οι γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης μπορεί να προκληθούν υποσυνείδητα σε συγκεκριμένες καταστάσεις με τη σύγκρουση να εκδηλώνεται μέσω μιας ασαφούς έννοιας του ΄΄μη εύκολου΄΄. Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) αυτή φαίνεται να είναι και η αιτία για τέτοιου είδους αισθήματα που παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της λύσης ενός προβλήματος, όταν το άτομο αισθάνεται κάπου, κάτι λανθασμένο.

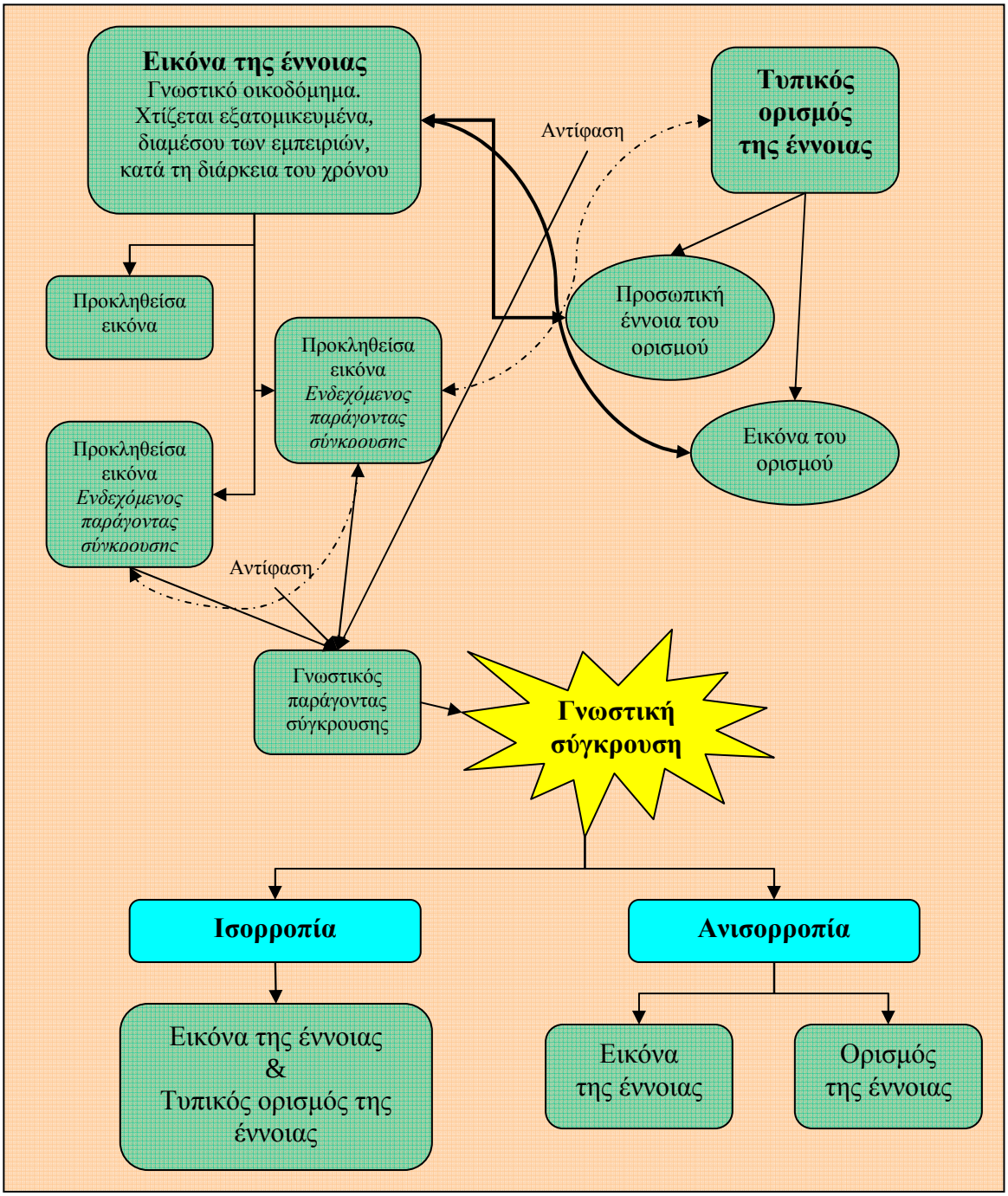
Ένας σοβαρότερος τύπος του ενδεχόμενου παράγοντα σύγκρουσης είναι εκείνος στην εικόνα της έννοιας ο οποίος δεν έρχεται σε αντίφαση με ένα άλλο μέρος της εικόνας της έννοιας, αλλά με τον ίδιο τον ορισμό. Τέτοιοι παράγοντες μπορούν να δυσχεράνουν σοβαρά τη μάθηση της τυπικής θεωρίας διότι μπορούν να γίνουν γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης όταν ο τυπικός ορισμός της έννοιας αναπτύξει με τη σειρά του μια εικόνα της έννοιας. Οι μαθητές που έχουν έναν τέτοιο παράγοντα σύγκρουσης στην εικόνα της έννοιας που έχουν, μπορεί να αισθάνονται ασφαλείς στις δικές τους ερμηνείες και απλά να θεωρούν την τυπική θεωρία ως μη λειτουργική και περιττή.

Ο Tall (1991) δηλώνει ότι υπάρχουν πολλά είδη μυαλών. Μάλιστα χρειάζονται διαφορετικά είδη μυαλών για την ανάπτυξη των μαθηματικών και κανένα δεν υπερτερεί πάντοτε του άλλου. Εδώ μάλλον θα πρέπει να κάνουμε και έναν παραλληλισμό με τη διάκριση των σταδίων ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού, όπως αναφέρονται από τον W. W. Sawyer. Σύμφωνα πάντα με τον Tall, ένας τρόπος για να διακρίνουμε αυτά τα διαφορετικά μυαλά είναι να κοιτάξουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται για μια έννοια και τον τυπικό ορισμό της.

Από τη μεριά του, ο Vinner (1989) περιγράφει ένα γνωστικό μοντέλο που απαρτίζεται από δυο ΄΄*κελιά*΄΄. Το ένα περιέχει τον (ή τους) ορισμό της έννοιας και το άλλο την εικόνα της. Το κελί που περιέχει την εικόνα της έννοιας συνήθως απαρτίζεται από διάφορα *υπο – κελιά*. Εάν ένας ορισμός έχει αποθηκευτεί χωρίς κανένα νόημα, τότε το αντίστοιχο κελί της εικόνας είναι άδειο. Μια έννοια μπορεί να έχει αρκετές εικόνες που προξενούνται σε διαφορετικές σε διαφορετικές στιγμές και είναι αυτές που θα δημιουργήσουν τα διαφορετικά υπο – κελιά. Είναι δυνατόν, μετά από κάποιο καιρό, δύο ή περισσότερα κελιά (υπο – κελιά) εικόνας να συγχωνευθούν όταν ο μαθητής καταλάβει τη σχέση μεταξύ των αναπαραστάσεων που αυτές οι εικόνες μεταφέρουν. Είναι όμως επίσης δυνατόν ο χρόνος να φέρει το αντίθετο αποτέλεσμα. Ο μαθητής προσκολλάται στην εικόνα της έννοιας και ξεχνά όλα τα υπόλοιπα ή έχει πρόσβαση μόνο σε μερικές εικόνες σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι το άτομο πρώτα προσλαμβάνει την εικόνα και μετά

τον ορισμό για να λύσει το πρόβλημα ή ακόμη μπορεί να οφείλεται στο ότι γίνονται αρκετές αλλαγές στα κελιά. Μια άλλη εκδοχή είναι ότι μπορεί να προσλαμβάνεται ένα μόνο κελί. Αν αυτό το μοναδικό κελί είναι το κελί της εικόνας, αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι το άτομο παραπλανιέται από τις εμπειρίες της καθημερινής ζωής του. Τότε είναι η έλλειψη του τυπικού ορισμού που μπορεί να είναι η αιτία για την αποτυχία.

Θα μπορούσαμε να αποδώσουμε σχηματικά τα παραπάνω, ως ακολούθως:



2.3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η εικόνα της έννοιας είναι ένα εξατομικευμένο γνωστικό οικοδόμημα, που το άτομο το χτίζει διαμέσου των εμπειριών του κατά την διάρκεια του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι, με κάποιον τρόπο, το άτομο έχει δημιουργήσει τη δική του άποψη για μια συγκεκριμένη έννοια ή και για μια συγκεκριμένη διαδικασία.

Θα δώσουμε τον ακόλουθο, δικό μας ορισμό για την αναπαράσταση:

Εκτιμούμε ότι η δημιουργία αυτής της άποψης, αυτής της *΄΄εικόνας΄΄*, σύμφωνα με τους Tall & Vinner, δε μπορεί να πραγματοποιηθεί με άλλον τρόπο, παρά μόνο μέσω των ατομικών εμπειριών, είτε αυτές είναι επίκτητες είτε εγγενείς, και των εσωτερικεύσεών τους μέσω μιας διαδικασίας το αποτέλεσμα της οποίας ονομάζουμε ***αναπαράσταση***.

Είναι σαφές, εκτιμούμε, ότι δε μπορεί κανείς να γνωρίζει το σύνολο των αναπαραστάσεων που δημιουργούνται στο μυαλό ενός άλλου ατόμου. Μάλιστα κάποιες φορές αδυνατεί κανείς να γνωρίζει και το σύνολο των δικών του αναπαραστάσεων, όταν αυτές έχουν δημιουργηθεί ασυνείδητα.

Μας ενδιαφέρει στην παρούσα φάση η έννοια των *μαθηματικών αναπαραστάσεων*. Οι Confrey & Smith (1991) έδωσαν τον ακόλουθο ορισμό:

> «*Με τον όρο **αναπαράσταση** εννοούμε μια νοητική δομή η οποία αποτελείται από διάφορα εργαλεία, όπως πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις και τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και εννοιών*».

Είναι βασική θεώρηση του συνόλου της μαθηματικής κοινότητας ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συναρτήσεων διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Το National Council of Teachers of Mathematics τονίζει ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να μεταφράζουν μεταξύ της συμβολικής, της γραφικής και της αναπαράστασης σε πίνακα μιας συνάρτησης (NCTM, 1989, p.154).

Η σημασία του ρόλου των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία σημαντικών εννοιών των μαθηματικών είναι καταλυτική. Οι μαθητές μπορούν να έχουν σημαντικά οφέλη όταν οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν κατάλληλες και πολλαπλές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία τους. Οι αναπαραστάσεις πρέπει να αντιμετωπίζονται ως εποικοδομητικά εργαλεία για τη δόμηση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και της δεξιότητας της επικοινωνίας και μάθησης (Greeno & Hall, 1997). Όταν η

διδασκαλία εννοιών γίνεται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι μαθητές χρησιμοποιούν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων και έτσι μπορούν να κατανοήσουν και να διακρίνουν μεταξύ τους τις μαθηματικές έννοιες (Gagatsis & Christou, 2002). Επίσης μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να οργανώσουν τις ιδέες τους και να αναδομήσουν εποικοδομητικά τις δικές τους αναπαραστάσεις (Yerushalmy & Schwartz, 1993).

Ο ρόλος που διαδραματίζουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών, οδήγησε τους ερευνητές τις διδακτικής των μαθηματικών να θεωρήσουν τις αναπαραστάσεις αυτές ως μια από τις «*μεγάλες ιδέες*» στην άλγεβρα (Lacampagne, Blair & Kaput, 1995). Σύμφωνα μάλιστα με το National Council of Teachers of Mathematics (1997, 2000) η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των συναρτήσεων πρέπει να γίνει πιο ουσιαστική και αποτελεσματική. Η εισαγωγή των αλγεβρικών και γραφικών – γεωμετρικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων είναι ένα κομβικό σημείο της διδασκαλίας των μαθηματικών και αποτελεί ένα πρώιμο στάδιο στο οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα συμβολικό σύστημα για να αναπτύξουν και να κατανοήσουν κάποιο άλλο (Zaslavsky & Stein, 1990). Μέσα όμως από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, δεν αναπτύσσονται σε ικανοποιητικό βαθμό οι μεταφράσεις αυτές, με αποτέλεσμα οι μαθητές να ολοκληρώνουν τις σπουδές τους στο Λύκειο με σημαντικές ελλείψεις στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Schoenfeld et al., 1993).

Οι μαθηματικοί έχουν συνηθίσει από την εκπαίδευσή τους σε έναν εντελώς παραγωγικό τρόπο σκέψης, που παράγει το ειδικό από το γενικό κι αυτό φαίνεται συχνά. Ο Tall et al. (2000), αναφέρει ότι η πανεπιστημιακή εκπαίδευση προχωρά από τους ορισμούς στα αντικείμενα, τα αντικείμενα συγκροτούνται μέσα στους ορισμούς, ***ενώ*** στη μέση εκπαίδευση το αντικείμενο εμφανίζεται πρώτα στην εποπτεία και μετά αποδίδεται με ορισμούς. (Σπύρου, 2004).

Τα μαθηματικά όμως δεν αναπτύχθηκαν με τον παραγωγικό τρόπο. Ακολούθησαν τον επαγωγικό τρόπο και από το μέρος πήγαν στο όλο. Σ' αυτό το σημείο βέβαια σημαντικό ρόλο έπαιξε η διαίσθηση και κατά σειρά το νοητικό σχήμα, ο εμπλουτισμός του μέσω διαφόρων αναπαραστάσεων, η δημιουργία νέων σχημάτων γενικότερων του αρχικού και τέλος η δημιουργία ενός υπέρ-σχήματος με τη διαδικασία της αφαίρεσης. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση ακολουθεί, ή τουλάχιστον προσπαθεί να

ακολουθήσει, σε μεγάλο βαθμό τον επαγωγικό τρόπο σκέψης. Παρ' όλα αυτά δε μπορούμε να παραγνωρίσουμε το φαινόμενο ότι ο κύριος όγκος των μαθητών τείνει να παραγνωρίζει αυτόν τον τρόπο και να εργάζεται συμπεριφοριστικά και περιοριστικά όσον αφορά στο ευρύτερο πλαίσιο της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης και των εφαρμογών της, τείνοντας να αναγάγει σε μείζον θέμα τη διαδικασία απόκτησης δεξιοτήτων και ενός τουλάχιστον στοιχειωδώς καλού χειρισμού των εργαλείων του Απειροστικού σε θέματα κατά κύριο λόγο τετριμμένα.

Όπως λέχθηκε από τους Schwartz & Dreyfus (1995):

΄΄Το να μαθαίνεις στα μαθηματικά, περιορίζεται στο να απεικονίζεις μεταξύ αρκετών σημειογραφικών συστημάτων, υποδηλώνοντας το ίδιο αφηρημένο αντικείμενο.΄΄

Στο ίδιο άρθρο οι συγγραφείς καταδεικνύουν το γεγονός ότι η έρευνα σχετικά με τη μάθηση συναρτήσεων και γραφημάτων δείχνει επίμονες δυσκολίες στη σύνδεση αυτών των διαφορετικών σημειογραφικών συστημάτων. Τονίζουν ότι οι μαθητές δεν πετυχαίνουν σε εργασίες που συνδέουν πληροφορίες από διαφορετικά σκηνικά (από τύπο σε γράφημα ή από γράφημα σε γράφημα). Η γνώση τους είναι ΄΄αποσπασματικά διανοητικοποιημένη΄΄ (compartmentalized). Καθώς έχουν μεγάλες δυσκολίες στην κατασκευή γραφημάτων, πινάκων ή τύπων από μόνοι τους, οι καθηγητές συνήθως τους βάζουν να δουλέψουν σε δεδομένα σημειογραφικά συστήματα και αποφεύγουν εργασίες που αφορούν στην κατασκευή. Όπως επισημαίνεται από τους ίδιους (τους συγγραφείς) υπάρχει ασάφεια (αοριστία) σε όλες τις αναπαραστάσεις (γραφικές, αλγεβρικές, πίνακες τιμών) των συναρτήσεων και αυτή η ασάφεια συχνά δεν καταδεικνύεται σαφώς από τη διδασκαλία. Μόνο οι αλγεβρικές ασάφειες αντιμετωπίζονται διότι είναι στη φύση της αλγεβρικής δουλειάς να διαπιστώσει αν δύο τύποι παριστάνουν την ίδια συνάρτηση ή όχι. Αλλά ο χειρισμός των ασαφειών των σχετικών με γραφήματα ή πίνακες τιμών εξαρτάται από εξωτερικούς παράγοντες, όπως οι στόχοι του εκπαιδευτικού συστήματος, το επίπεδο της βαθμίδας ή ακόμη και οι ιδιαιτερότητες του προβλήματος καθεαυτού. Αυτές οι ασάφειες χειρίζονται σα να ανήκαν στο διδακτικό συμβόλαιο. Για παράδειγμα, ανάλογα με το πλαίσιο, θεωρείται προφανές ή όχι ότι ένας πίνακας (κάποιοι αριθμοί και οι εικόνες τους) είναι μια αναπαράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης ή ότι κάποιο γράφημα θα μπορούσε να αποτελέσει το γράφημα μιας τετραγωνικής συνάρτησης.

Την ίδια περίοδο με τους Schwartz & Dreyfus, ο Duval (1993, 1996) μελέτησε την ανολοκληρωσιμότητα και την ασάφεια των αναπαραστάσεων. Κάθε αναπαράσταση

είναι μέρος αυτού που αντιπροσωπεύει και εν μέρει οδηγεί στην ασάφεια. Περιλαμβάνει αυτά που πρέπει να θεωρούμε ως αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων ενός μαθηματικού αντικειμένου, ως απολύτως αναγκαία συστατικά για να δομηθεί η έννοια.

Αλλά ενώ ΄΄η απεικόνιση μεταξύ διαφόρων σημειογραφικών συστημάτων υποδηλώνοντας το ίδιο αφηρημένο αντικείμενο΄΄ είναι αναγκαία για την κατασκευή της έννοιας της συνάρτησης, οι δυσκολίες των μαθητών σ' αυτό το σημείο δεν διευκολύνουν καθόλου την οργάνωση της δουλειάς διαμέσου διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης, ώστε να μπορούν να συνδεθούν οι διαφορετικές θεωρήσεις. Δοθέντων δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων, πώς θα μπορούσε κανείς να είναι σίγουρος ότι υποδηλώνουν το ίδιο πράγμα για τους μαθητές ή ακόμα ότι απλά υποδηλώνουν κάτι; Αυτός βεβαίως ο προβληματισμός θα πρέπει να συσχετισθεί άμεσα με αυτό που όρισαν οι Tall & Vinner ως ΄΄εικόνα της έννοιας΄΄, καθώς επίσης και με τα ΄΄κελιά΄΄ που όρισε ο Vinner.

Στην κλασσική διδακτική προσέγγιση των συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους χρησιμοποιούνται τα γραφήματα διότι θεωρούνται ως ένας εύκολος τρόπος για να παρουσιάσουμε τη συνάρτηση, γλιτώνοντας χρόνο και αποφεύγοντας την ανιαρότητα – ίσως και την κούραση – των υπολογισμών. Ανατρέχοντας στα σχολικά μας βιβλία (αυτά που αφορούν στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού στη Γ΄ Λυκείου) θα παρατηρήσουμε τη διαισθητική εισαγωγή της έννοιας του ορίου καθώς και της έννοιας της συνέχειας μέσω των γραφικών παραστάσεων επιλεγμένων συναρτήσεων. Αναμένεται γενικά ότι οι μαθητές θα μπορούν έτσι να δουν τις συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους μέσω των γραφημάτων τους. Παρ' όλα αυτά έχει διαπιστωθεί ότι ο συνήθης χειρισμός των γραφημάτων δε δείχνει ο κατάλληλος για τους επιδιωκόμενους στόχους.

2.4. ΕΙΚΟΝΟΠΟΙΗΣΗ: ΑΡΩΓΟΣ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑ; – Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ KRUTETSKII

Μας φαίνεται ειλικρινά δύσκολο το να φανταστούμε οποιοδήποτε είδος αναπαράστασης, χωρίς την ύπαρξη εικόνας. Ακόμη και καθαρά συμβολική να είναι η αναπαράσταση, εκτιμούμε ότι το άτομο οπτικοποιεί εκείνη τη στιγμή το σύμβολο. Και βέβαια το κλασσικό παράδειγμα οπτικοποίησης για τη συνάρτηση, αποτελεί η γραφική της παράσταση, όταν και εφόσον μπορεί να γίνει.

Όπως αναφέρει η Leslie Aspinwall (1997) είναι πολλές οι φωνές για αλλαγές στις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού (Douglas, 1986, Tucker, 1988, Steen, 1989, Vinner, 1989, Tall, 1991, Zimmermann, 1991) συζητώντας για τον αυξανόμενο ρόλο που θα πρέπει να παίξει η οπτική σκέψη στο αναλυτικό πρόγραμμα, παρουσιάζοντας μια πειστική θέση ότι η μαθηματική οπτικοποίηση είναι το κεντρικό κομμάτι γι’ αυτή την ανανεωτική κίνηση.

Εννοιολογικά, ο ρόλος της οπτικής σκέψης είναι τόσο θεμελιώδης στην κατανόηση του Απειροστικού Λογισμού, ώστε είναι δύσκολο να φανταστούμε μια επιτυχημένη σειρά μαθημάτων που δε θα δίνει έμφαση στην οπτική σκέψη του αντικειμένου. Αυτό είναι ιδιαίτερα αληθές αν η εν λόγω σειρά μαθημάτων επιχειρεί να δώσει έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, το οποίο ευρέως αναγνωρίζεται ότι διαφεύγει από πολλές σειρές μαθημάτων που διδάσκονται.

Αν και η οπτικοποίηση θεωρείται ουσιώδης στην κατανόηση, μελέτες (Tall, 1991, Vinner, 1989) έχουν σταθερά δείξει ότι η κατανόηση των μαθητών είναι τυπικά αλγεβρική και όχι οπτική. Πολλοί είναι οι λόγοι που θα μπορούσε να επικαλεστεί κάποιος γι’ αυτό, αλλά σίγουρα μέσα σ’ αυτούς περιλαμβάνονται και οι ακόλουθοι:

1. Η πεποίθηση ότι μια οπτική απόδειξη δεν είναι ΄΄πραγματική΄΄ απόδειξη (Eisenberg & Dreyfus, 1991).
2. Η αλγεβρική μέθοδος, σε αντίθεση με το γράφημα ή μια οπτική μέθοδο, χρησιμοποιείται συχνότερα όταν λύνουμε προβλήματα ρουτίνας που είναι τυπικά σχεδόν σε κάθε τεστ Απειροστικού Λογισμού (Vinner, 1989).
3. Οι πεποιθήσεις μαθητών και καθηγητών ότι το να κάνουμε Απειροστικό Λογισμό είναι να χειριζόμαστε επιδέξια σύμβολα και αριθμούς (Hallet, 1991).

Δεν ξέρουμε αν πρέπει να ενστερνιστούμε πλήρως τα λόγια του συγγραφέα:

΄΄To know is nothing, to imagine is everything΄΄

Anatole France

Το σίγουρο είναι ότι αρκετές φορές ΄΄απαιτούμε΄΄, ως διδάσκοντες, από τους μαθητές και επικαλούμαστε τη διαισθητική τους ικανότητα και την εικονοποίηση από αυτούς διαφόρων καταστάσεων, για να κατανοήσουν καλύτερα – κατά την άποψη των διδασκόντων, τουλάχιστον – τις όποιες έννοιες προσπαθούμε να τους διδάξουμε.

Η αντίληψη ότι η εικόνα του ατόμου, ιδιαίτερα μια εικόνα σταθερού τύπου, δηλαδή μια εικόνα μη ευμετάβλητη, μπορεί να είναι αποφασιστική σε συγκεκριμένες εργασίες, δεν είναι καινούργια. Ήταν πίσω στο 1880, όταν ο Galton έγραφε:

> *΄΄Μια υπερβολική επιθυμία ώστε να λάβουμε μια καθαρή νοητική εικόνα είναι ανταγωνιστική της απόκτησης των συνηθειών της υψηλής γενίκευσης και της αναστοχαστικής αφαίρεσης και, αν και η ικανότητα να παράγει κανείς τέτοιες (γενικεύσεις και αφαιρέσεις) ήταν ανέκαθεν κτήμα των ανθρώπων με δυνατή σκέψη, είναι πολύ επιρρεπής στο να χαθεί από την αχρησία. Οι περισσότερο νοήμονες άνθρωποι είναι πιθανόν εκείνοι που δεν έχουν χάσει αυτή την ικανότητα, αλλά παραμένει σ' αυτούς υφιστάμενη και έτοιμη για χρήση σε κατάλληλες περιπτώσεις.΄΄* (Presmeg, 1986, p.42)

Η διεισδυτικότητα της οπτικής διαδικασίας έχει σημειωθεί από πολλούς ερευνητές, όπως ο Ian MacFarlane Smith (1964), ο οποίος έδειξε πως η μαθηματική συζήτηση συνήθως συνοδεύεται από τη βοήθεια του μαυροπίνακα, με συχνές αναφορές στα διαγράμματα. Έγραψε μεταξύ άλλων:

> *΄΄Λέγεται ότι οι πιο ικανοί μαθηματικοί μπορούν να σκεφτούν εξ ολοκλήρου με αφαίρεση και δε χρειάζονται τις διαγραμματικές υποστηρίξεις. Αυτό μπορεί να γίνεται διότι αυτά τα χαρισματικά άτομα έχουν τους δικούς εσωτερικούς ΄΄μαυροπίνακες΄΄ και μπορούν να οπτικοποιούν περίπλοκες δομές, χωρίς να συνειδητοποιούν ότι κάνουν κάτι τέτοιο.΄΄* (MacFarlane Smith, 1964, p.132)

Είτε είναι έτσι είτε όχι, η μελέτη του Krutetskii (1976) για τη δομή των μαθηματικών ικανοτήτων, επιβεβαιώνει ότι οι επιδεξιότητες με χωρικές έννοιες και που αφορούν στην οπτικοποίηση αφηρημένων μαθηματικών σχέσεων και εξαρτήσεων δεν είναι απαραίτητα συστατικά αυτών των ικανοτήτων, αν και μπορεί

να είναι χρήσιμες. Η θεωρία του Krutetskii προσδίδει βαρύτητα στα συμπεράσματα ερευνητών όπως ο Hollenberg, που δηλώνουν ότι ΄΄τα παιδιά που επιτυγχάνουν υψηλές αποδόσεις στα τεστ ικανότητας να φαντάζονται, μπορεί να έχουν μεγαλύτερη δυσκολία σε κάποια είδη εννοιολογικής μάθησης σε σύγκριση με αυτά (τα παιδιά) που πετυχαίνουν χαμηλές αποδόσεις΄΄ (Mandler, 1976, p.888). Παρόμοια, ο Radatz (1979) έγραψε ότι οι εικονικές, δηλαδή οι οπτικές, αναπαραστάσεις μπορούν να προκαλέσουν γνωστικές δυσκολίες και ότι ΄΄η αντιληπτική ανάλυση και σύνθεση πληροφοριών που παρουσιάζονται σιωπηρά σε ένα γράφημα, συχνά έχει μεγαλύτερες απαιτήσεις από έναν μαθητή, από οποιαδήποτε άλλη όψη ενός προβλήματος (Lean & Clements, 1981, p.277). Οι Lean & Clements ισχυρίζονται ότι ένα άτομο με προτιμήσεις στις οπτικές διαδικασίες, δηλαδή με προτίμηση στο να σκέφτεται με νοητικές εικόνες, θα έρεπε στο να διατηρεί, ως μέρος της σκέψης του, περιττές συγκεκριμένες λεπτομέρειες (p.295).

Μ’ αυτές τις αντικρουόμενες απόψεις για τα οφέλη της οπτικοποίησης στη βιβλιογραφία, ένα πράγμα είναι βέβαιο. Υπερβολική ποικιλία υπάρχει όχι μόνο στην ικανότητα ενός ατόμου να σχηματίζει εικόνες (Barlett, 1977, Kosslyn, 1980), αλλά επίσης και στη χρήση των οπτικών εικόνων που γίνεται όταν διάφορα άτομα κάνουν μαθηματικά (Presmeg, 1985).

Μια όψη αυτών των ατομικών διαφορών είναι η ελεγξιμότητα των εικόνων που χρησιμοποιούν τα άτομα. Ο Richardson (1969) πρότεινε το ότι για να είναι μια εικόνα χρήσιμη για τη λύση ενός προβλήματος, πρέπει να είναι ελέγξιμη. Η Presmeg (1992) περιέγραψε αρκετές περιπτώσεις όπου έντονες, ζωηρές εικόνες δε βοηθούσαν αλλά αποτελούσαν εμπόδιο όταν οι μαθητές έλυναν προβλήματα. Τέτοιες εικόνες είναι ανεξέλεγκτες τόσο υπό την έννοια του ότι φαίνεται να ξεπετάγονται αυτόβουλες, όσο και για την αντοχή τους, ακόμη κι όταν αντιμετωπίζουν αντίθετα συμπεράσματα. Μια ανεξέλεγκτη εικόνα είναι πάντα πέρα από τη βούληση της ατομικής γνώση.

Μια πολύ ΄΄φυσική ερώτηση΄΄ ετέθη από τον Krutetskii (1976) ως ακολούθως:

> *΄΄Αν η ικανότητα και η ανάγκη να γενικεύουμε το μαθηματικό υλικό, μια γενικευμένη θύμηση, είναι στη φύση των μαθηματικά ικανών μαθητών, τότε άραγε μπορεί να είναι εμπόδιο για αναπαραστάσεις των ΄΄μυαλών΄΄ γεωμετρικού τύπου, να είναι ΄΄προσηλωμένοι΄΄ σε οπτικό – εικονογραφημένα σχήματα, να τείνουν να σκέφτονται χρησιμοποιώντας οπτικό – εικονογραφημένα σχέδια;΄΄* (p.325)

Ο γεωμετρικός τύπος μυαλού που αναφέρθηκε πιο πάνω είναι ένας από τους τρεις τύπους λυτών μαθηματικών προβλημάτων στο μοντέλο του Krutetskii.

Η διαίρεση των μαθητών σε τύπους με βάση τις μαθηματικές τους ικανότητες προχρονολογείται των ερευνών του Krutetskii στη Ρωσία για δύο χρόνια, με τη μέθοδο της *μελέτης περίπτωσης*. Οπωσδήποτε, η σημασία της έρευνάς του έγκειται στη διάκριση μεταξύ *επιπέδων* μαθηματικών ικανοτήτων που καθορίζονται κυρίως από τα γλωσσικό – λογικά συστατικά της σκέψης και τύπων που καθορίζονται από τα οπτικό – εικονογραφημένα συστατικά. Στην περίπτωση των οπτικό – εικονογραφημένων συστατικών, δεν είναι μόνο η ικανότητα να τα χρησιμοποιεί κάποιος, αλλά και η προτίμηση που δείχνει στη χρήση τους, το οποίο χαρακτηρίζει και τον τύπο του ατόμου.

Οι τρεις τύποι (μυαλών) σύμφωνα με την παραπάνω κατηγοριοποίηση είναι:

I. Ο Αναλυτικός: Πολύ δυνατά γλωσσικό – λογικά συστατικά που υπερισχύουν έναντι των αδύναμων οπτικό – εικονογραφημένων συστατικών. Χωρικά στοιχεία αδύναμα. Δε μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων και δεν αισθάνεται την ανάγκη να χρησιμοποιήσει τέτοια οπτική υποστήριξη.

II. Ο Γεωμετρικός: Πολύ δυνατά οπτικό – εικονογραφημένα συστατικά, που υπερτερούν έναντι των γλωσσικό – λογικών συστατικών, μολονότι αυτά είναι πάνω από το μέσο όρο. Χωρικά στοιχεία πολύ καλά. Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά υποστηρίγματα στην επίλυση προβλημάτων και αισθάνεται την ανάγκη να κάνει έτσι.

III. Ο Αρμονικός: Δυνατά γλωσσικό – λογικά και δυνατά οπτικό-εικονογραφημένα συστατικά σε ισορροπία. Χωρικές έννοιες καλές.

a) Υποτύπος (α) **Αφηρημένος αρμονικός:** Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων, αλλά δεν το προτιμά.

b) Υποτύπος (β) **Εικονογραφημένος αρμονικός:** Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων και προτιμά αυτόν τον τρόπο εργασίας.

Θα πρέπει να προσέξουμε ότι σε όλους τους παραπάνω τύπους τα γλωσσικό – λογικά συστατικά ενυπάρχουν και είναι τουλάχιστον πάνω από το μέσο όρο.

Ο Krutetskii (1969) πρότεινε παρ’ όλα αυτά, ότι η κατηγοριοποίησή του θα έπρεπε να επεκταθεί σε όλα τα επίπεδα δυνατοτήτων με τη δύναμη των γλωσσικό – λογικών

συστατικών να καθορίζει το επίπεδο. Να σημειώσουμε εδώ ότι αυτή η πρόταση επιβεβαιώθηκε στην έρευνα της Presmeg (1985).

3. ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΈΡΕΥΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Είναι γενικώς αποδεκτό ότι η ίδια η πρωταρχική έννοια της συνάρτησης γεννά αρκετές δυσκολίες στους μαθητές. Ιστορικά κοιτώντας θα δούμε ότι χρειάστηκαν αρκετοί αιώνες για να απεγκλωβιστεί η ανεξάρτητη μεταβλητή x από τη θεώρησή της ως χρονική μεταβλητή και δεν ήταν παρά μετά τον Hausdorff (1914) που έδωσε τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους και αργότερα με τον Kuratowski που έδωσε πιο αυστηρό ορισμό για το διατεταγμένο ζεύγος απαλλάσσοντάς τον από την όποια χρονική διάταξη του πρώτου στοιχείου από το δεύτερο $\left((\alpha,\beta)=\{\alpha,\{\alpha,\beta\}\}\right)$, όταν ορισμός της συνάρτησης κατάφερε να πάρει τη σημερινή συνολοθεωρητική μορφή του που όλοι γνωρίζουμε.

Όπως αναφέρεται από τους Σπύρου και Γαγάτση (Η συνάρτηση και η διδασκαλία της, 2004):

> ΄΄Η *συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα μέσα στην επιστήμη. Πρόκειται για μια σύνοψη και ενοποίηση πολλών εν πρώτοις διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν. Η λιτότητα του σημερινού συνολοθεωρητικού ορισμού, όπως τον ξέρουμε, δεν αποτελεί για τους μαθητές απλά ένα ξυράφι του Ochkam αλλά την έρημη ψυχρή κορυφή ενός παγόβουνου που κρύβει βαθιά την ιστορική πρακτική και εμπειρία που την διαμόρφωσε.*΄΄

Κατά την άποψή μας, μέρος αυτών των προβλημάτων κληροδοτείται και σε αυτό που η συνάρτηση ΄΄παράγει΄΄ δηλαδή στην παράγωγό της, όπου εκτιμούμε ότι η αντιμετώπισή της από τους μαθητές περιστρέφεται γύρω από τη χρήση της ως εργαλείο με διαδικασίες που αφορούν στη χρηστικότητά της. Εννοούμε μ' αυτό, ότι αφού η έννοια της συνάρτησης είναι τόσο προβληματική για τον μαθητή είναι κατά τη γνώμη μας φυσικό να μην προσπαθήσει καν να εμβαθύνει σε οποιαδήποτε παραγόμενη από αυτήν έννοια. Ή ακόμη, αν έχει συνηθίσει να βλέπει τη συνάρτηση μόνο μέσω του τύπου της, με τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις της ιδωμένες ως απλές

ετικέτες, τότε πολύ φυσιολογικά θα συνεχίσει να βλέπει έτσι και την παράγωγό της και μάλιστα θα περιμένει να του εμφανίζεται έτσι.

Ο περιορισμός αυτός του πλαισίου εργασίας δεν είναι, κατά τη γνώμη μας, κατ' ανάγκην κακός. Μπορούμε να διακρίνουμε τη γνώση, σε γνώση που απλά χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί μια ιδιότητα και σε γνώση που είναι αναγκαία για την κατανόηση και επιπλέον για την παραγωγή μιας απόδειξης. Θα λέγαμε λοιπόν ότι είναι (ο περιορισμός) απλά και σαφώς ελλιπής. Αυτό που φαίνεται να είναι κακό, είναι η «*αφαίρεση*» που κάνουν οι μαθητές και στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη ενότητα. Να σημειώσουμε ακόμη ότι στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου στα σχολεία μας και ειδικότερα στον Απειροστικό Λογισμό, που είναι το θέμα που μας αφορά, είναι απαιτητοί και οι δύο τύποι των γνώσεων που προαναφέραμε, καθώς επίσης και η μετάβαση από τη μία γνώση στην άλλη.

Αρκετές είναι οι έρευνες που αφορούν στο πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται και χειρίζονται γραφικές παραστάσεις και στο πως αυτοί (οι μαθητές) κατανοούν έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε κάποιες από αυτές στη συνέχεια.

Όπως αναφέρει η I. Block σε αρκετές χώρες τα πρώτα στοιχεία του Απειροστικού Λογισμού διδάσκονται ξεκομμένα από προβλήματα και χωρίς όλα τα εργαλεία της τυποποίησης. Μια τυπική εισαγωγή στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου απαρτίζεται από παρατήρηση μερικών παραδειγμάτων συναρτήσεων, παρατηρώντας τις ιδιότητές τους και συμπερασματικά καταλήγοντας σε μια γενίκευση με κάποιους ΄΄εννοούμενους΄΄ τρόπους. Αυτό υποτίθεται ότι είναι αρκετό για μια πρώτη προσέγγιση στα στοιχεία της Ανάλυσης, υποθέτοντας ότι αργότερα στο Πανεπιστήμιο, οι μαθητές θα μάθουν να αποδεικνύουν και να τεκμηριώνουν τις ιδιότητες που παρουσιάζονται στα συγκεκριμένα σημεία.

Στην Ελληνική πραγματικότητα θα λέγαμε ότι τα πράγματα είναι λιγάκι πιο διαφορετικά. Στα Μαθηματικά της Γενικής Παιδείας, όπου τα πράγματα είναι πιο ΄΄χαλαρά΄΄, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στα όρια, παρουσιάζεται η παράγωγος συνάρτηση ως το κύριο εργαλείο για την εύρεση της εφαπτομένης μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο της καθώς και για την εύρεση της μονοτονίας της συνάρτησης και δίνεται και κάποια σχετική έμφαση στα προβλήματα. Επίσης στις ερωτήσεις

κατανόησης υπάρχουν αρκετές πους προσπαθούν να συνδέσουν τη συνάρτηση με την παράγωγό της μέσω γραφημάτων. Απουσιάζουν θεωρήματα όπως του Rolle, του Fermat κ.α. και η όλη προσπάθεια στρέφεται στον καλό χειρισμό της παραγώγου ως εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη συνάρτηση και στην εφαρμογή της σε σχετικά απλά προβλήματα. Στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης τα πράγματα είναι σαφώς πιο αυστηρά θεμελιωμένα και η ύλη της Ανάλυσης εμπλουτίζεται με διάφορα θεωρήματα όπως αυτά που προαναφέραμε. Η ύπαρξη μιας αυστηρής και τεκμηριωμένης απόδειξης είναι σαφώς απαιτητή.

Είτε όμως με μια παρουσίαση στοιχείων της Ανάλυσης ΄΄εξ απαλών ονύχων΄΄ είτε με μια αυστηρότερη παρουσίαση, τα πράγματα στα Πανεπιστήμια φαίνεται να είναι τα ίδια. Οι καθηγητές συχνά διαμαρτύρονται ότι οι φοιτητές δε δείχνουν τις κατάλληλες ικανότητες για απόδειξη και ότι χρησιμοποιούν τα γραφήματα και τις εξισώσεις σα να ήταν κάποιο είδος ΄΄ετικέτας΄΄ για τις συναρτήσεις, παρά σαν ένα νοηματικό υλικό για να εκφράσουν έννοιες και σαν εργαλείο απόδειξης.

Οι Ν. Μουσουλίδης & Α. Γαγάτσης (2003) ασχολήθηκαν με τη γεωμετρική και αλγεβρική προσέγγιση επίλυσης σε αναπαραστάσεις συναρτήσεων. Επίσης διερεύνησαν, χρησιμοποιώντας ένα υπό – δείγμα του αρχικού, την επίδραση της χρήσης εκπαιδευτικού λογισμικού στην ικανότητα των φοιτητών να επιλύουν με γεωμετρικό τρόπο προβλήματα συναρτήσεων. Το αρχικό τους δείγμα, του οποίου τα αποτελέσματα που εξήχθησαν αφορούν και στην εργασία μας, αποτελείτο από 95 δευτεροετείς φοιτητές του τμήματος Επιστημών της Αγωγής, του Πανεπιστημίου της Κύπρου, οι οποίοι είχαν παρακολουθήσει σειρά μαθημάτων για την έννοια της συνάρτησης και τις γραφικές παραστάσεις τόσο σε λυκειακό όσο και σε πανεπιστημιακό επίπεδο.

Με την ανάλυση της συνεπαγωγής που πραγματοποίησαν οι ερευνητές, διακρίνονται με εντελώς σαφή τρόπο δύο κατηγορίες φοιτητών : (α) Οι φοιτητές που σκέφτονται και δρουν στα διάφορα έργα αλγεβρικά και (β) οι φοιτητές που σκέφτονται και δρουν στα διάφορα έργα γεωμετρικά. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι φοιτητές διατηρούν τον τρόπο (αλγεβρικό ή γεωμετρικό) με τον οποίο προσπαθούν να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή να επιλύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα, ανεξάρτητα από τα δεδομένα του προβλήματος ή το είδος της συνάρτησης. Ο αλγεβρικός τρόπος επίλυσης των διαφόρων έργων προτιμάται έναντι του γεωμετρικού τρόπου, από σημαντικά υψηλότερο ποσοστό φοιτητών (60%

αλγεβρικά). Φάνηκε επίσης, ότι οι φοιτητές που χρησιμοποιούν γεωμετρική προσέγγιση επίλυσης έχουν καλύτερη επίδοση στα ερωτήματα μετάφρασης που υπήρχαν στα δοκίμια της εξέτασης.

Η Isabelle Bloch (2003) ερεύνησε τη διδασκαλία συναρτήσεων σε ένα γραφικό περιβάλλον. Σύμφωνα με την ταξινόμησή της τα σκηνικά που εμφανίζονται όταν δουλεύουμε με συναρτήσεις είναι τα ακόλουθα:

- Αριθμητικά: πίνακες τιμών
- Αλγεβρικά: τύποι εξισώσεις
- Γεωμετρικά: διάφορα γεωμετρικά μεγέθη
- Γραφικά: ευθείες, καμπύλες, άξονες συντεταγμένων
- Τυπικά: σύμβολα όπως $f,\ f^{-1}, f \circ g$ κ.τ.λ.
- Αναλυτικά: με σύμβολα όπως το ∞ ή άλλα που σχετίζονται με διατάξεις μεγεθών. Χρησιμοποιούνται για ευρετικούς σκοπούς, αλλ' όχι για την εγκυρότητα, στις ανώτερες τάξεις του Λυκείου.

Όπως αναφέρει η συγγραφέας, τα παραπάνω σκηνικά έχουν διαφορετικές ιδιότητες για τη μαθηματική δουλειά με συναρτήσεις. Δύο αναπαραστάσεις σε μερικά σκηνικά δεν εμφανίζουν την ίδια εγκυρότητα για τα ίδια προβλήματα και δεν παρουσιάζουν τις ιδιότητες συναρτήσεων. Είναι σημαντικό πρώτα να γνωρίζουμε τις ιδιότητες κάθε σκηνικού, με ποιον δηλαδή τρόπο είναι τμήματα από τα αντικείμενα που αναπαριστούν και κατόπιν να γίνει σχεδιασμός και οργάνωση των έργων που θα δοθούν στους μαθητές.

Μια τέτοια οργάνωση αποτελεί πρόβλημα είτε για την τελευταία τάξη του Λυκείου, είτε για το πρώτο έτος του Πανεπιστημίου, δεδομένου ότι οι μαθητές – φοιτητές δεν έχουν θεωρητικό υπόβαθρο για να κατασκευάζουν αποδείξεις. Η Bloch χρησιμοποιώντας τη *΄΄θεωρία των καταστάσεων΄΄*, όπως αυτή προτάθηκε από τον Brousseau (1977), αναπτύσσει μια θεωρητική προσέγγιση μέσα σ' ένα γραφικό περιβάλλον για 17χρονους μαθητές.

Σύμφωνα με τον Brousseau (1997, p.30) ΄΄ο μαθητής μαθαίνει προσαρμόζοντας τον εαυτό του σε ένα περιβάλλον το οποίο γεννά αντιφάσεις, δυσκολίες και ανισορροπίες΄΄.

Η Bloch στήριξε το σχεδιασμό του εγχειρήματός της, δανειζόμενη την προσέγγιση του Pedro Alson ο οποίος διδάσκει μαθηματικά στο Central University της

Βενεζουέλας. Ο ανωτέρω καθηγητής, διαπιστώνοντας ότι οι φοιτητές του είχαν πολύ φτωχές ικανότητες στην άλγεβρα, προσπάθησε να βρει έναν άλλο τρόπο προσέγγισης ώστε να γίνει αντιληπτή από αυτούς η έννοια της συνάρτησης και επιπλέον να αντιληφθούν πως μπορούν να δουλεύουν με τις συναρτήσεις χωρίς να έχουν κατ' ανάγκην τον τύπο τους. Η διδασκαλία του προσαρμόστηκε κατάλληλα από την Bloch σε περιβάλλον για 17χρονους μαθητές, ΄΄θετικής΄΄ – σύμφωνα με τη δική μας ορολογία – κατεύθυνσης και διδάχτηκε σε μια ολόκληρη τάξη (35 μαθητές) για έναν χρόνο, το 1998.

Στο τέλος της χρονιάς, δόθηκε ένα τεστ σε τέσσερις τάξεις (140 μαθητές το σύνολο) της ίδιας κατεύθυνσης. Εν συντομία περιγράφοντας, το τεστ περιείχε: (α) ερωτήσεις που αφορούσαν στην αναγνώριση συνάρτησης από σημεία ή στην εύρεση σημείων σε δοσμένη γραφική παράσταση, αναγνώριση ασύμπτωτων, (β) τρεις ερωτήσεις που αφορούσαν στην αναγνώριση ριζών συνάρτησης και στη μεταβολή συνάρτησης, (γ) τρεις ερωτήσεις που αφορούσαν στα όρια και στις παραγώγους μέσα από γραφική παράσταση, οι οποίες ξέφευγαν από την έννοια του κλασσικού, και (δ) έξη κλασσικές ερωτήσεις και έξη μη κλασσικές ερωτήσεις όπου παρουσιάζονταν οι διφορούμενες έννοιες, οι συναρτήσεις ως αντικείμενα και οι συνδέσεις μεταξύ διαφόρων σκηνικών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πειραματική ομάδα είχε καλύτερη κατανόηση και χειρισμό με αφηρημένες συναρτήσεις και συνδέσεις μεταξύ διαφόρων σκηνικών και γραφημάτων. Μπορούσαν να μεταβούν από το γράφημα στην εξίσωση, να συνδέουν κομμάτια από διάφορες αναπαραστάσεις και να αναγνωρίζουν μια συνάρτηση, ενώ οι λοιποί μαθητές εύκολα αποσυντονίζονταν σε τέτοιου είδους θέματα. Επίσης οι μαθητές της πειραματικής ομάδας μπορούσαν εύκολα να περάσουν από το μερικό στο ολικό μέρος θέασης, μιλώντας για το ίδιο αντικείμενο για ένα σημείο της γραφικής παράστασης και την αντίστοιχη συνάρτηση με γραφικούς ή αλγεβρικούς όρους. Πλεονέκτημα της πειραματικής προσέγγισης, σε κάθε περίπτωση, ήταν ότι επέτρεπε στους μαθητές να προσμετρήσουν πάρα πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις σε μεγαλύτερη ποικιλία συναρτήσεων απ' ότι συνήθως γίνεται με την κλασσική οργάνωση.

Μια σημαντικότερη παρατήρηση ήταν ότι οι μαθητές της πειραματικής τάξης έδειξαν περισσότερη ακανόνιστη επιτυχία, αλλά προσπάθησαν να λύσουν περισσότερες ερωτήσεις. Φάνηκε ότι η γνώση σ' αυτή την τάξη ήταν περισσότερο

διάχυτη, συμπέρασμα το οποίο επιβεβαιώθηκε από το γεγονός ότι στις μη πειραματικές τάξεις μπορούσε κανείς να διακρίνει τα γραπτά των μαθητών που συνήθως επιτυγχάνουν καλά στα μαθηματικά, απ' τα υπόλοιπα γραπτά, πράγμα το οποίο δεν ήταν δυνατόν να γίνει στην πειραματική τάξη, διότι όλοι οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μία ευρετική εργασία, που σημαίνει ότι όλοι προσπαθούσαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις με διάφορους τρόπους και ενδεχόμενα να έκαναν κάποια λάθη, αλλά κανείς τους δεν αισθάνθηκε αβοήθητος και ανίκανος να απαντήσει.

Εν κατακλείδι, τα συμπεράσματα θα μπορούσαν να συνοψιστούν στα ακόλουθα:

1. Οι μαθητές της πειραματικής τάξης ΄΄τυποποίησαν΄΄ περισσότερη μαθηματική γνώση και ήταν ικανοί να συζητήσουν τη σχετική γνώση, επικοινωνώντας την με τις πρέπουσες αποδείξεις.
2. Οι απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο έδειξαν ότι οι μαθητές της πειραματικής τάξης είχαν περισσότερο ποικίλους και συσχετισμένους τρόπους έρευνας για τα προβλήματα και είχαν περισσότερη πρωτοβουλία.
3. Όπως και να 'χει, οι καλοί μαθητές από οποιαδήποτε τάξη θα μπορούσαν να πιστωθούν με τις ίδιες ικανότητες. Η διαφοροποίηση που προαναφέρθηκε, ήταν εξ αιτίας τους μέσου όρου. Έτσι θα μπορούσε κάποιος να πει ότι οι καλοί μαθητές επιτυγχάνουν την επιθυμητή γνώση χωρίς ιδιαίτερη εκπαίδευση και επιτυγχάνουν με οποιαδήποτε διδακτική προσέγγιση.
4. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει η δυνατότητα να διευρυνθεί ο ρόλος των γραφικών σκηνικών (αναλογιζόμενοι πάντα του τι θα χρειαστεί αργότερα) στην επίλυση προβλημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Τα όρια θεωρούνται ο ακρογωνιαίος λίθος της Ανάλυσης. Αν και δεν αποτελούν άμεσο στόχο της έρευνάς μας, εν τούτοις θεωρούμε ότι θα πρέπει να αναφερθούμε έστω και εν συντομία στα προβλήματα που έχει παρατηρηθεί ότι δημιουργούν, θεωρώντας – όπως και με τη βασική έννοια της συνάρτησης – ότι κάποια από αυτά (τα προβλήματα) μπορεί να κληροδοτούνται στις έννοιες που έπονται των ορίων

Η Kristina Juter, όπως και αρκετοί άλλοι, ερεύνησε το χειρισμό των ορίων από τους μαθητές. Η έρευνά της πραγματοποιήθηκε σε πανεπιστήμιο της Σουηδίας. Οι φοιτητές ήταν περίπου εκατό (με το ένα τέταρτο απ' αυτούς γυναίκες), ηλικίας 19 ετών και άνω, οι οποίοι και παρακολουθούσαν την πρώτη σειρά μαθημάτων στα μαθηματικά. Στο άρθρο της: *Limits of functions – How do students handle them?*

παρουσιάζει τέσσερις περιπτώσεις από αυτό το σύνολο, οι οποίες ήταν κατά τη γνώμη της, αντιπροσωπευτικές. Οι περιπτώσεις αυτές επιλέχθηκαν από το σύνολο των εμπλεκομένων υποκειμένων. Όλοι οι φοιτητές παρακολούθησαν μια σειρά μαθημάτων η οποία αποτελείτο από δύο υπό – σειρές, συνολικής διάρκειας είκοσι (20) εβδομάδων, από τρεις 45λεπτες διαλέξεις κάθε εβδομάδα. Η έννοια των ορίων παρουσιάστηκε στην πρώτη σειρά, πριν από τις παραγώγους και ξαναδιδάχτηκε στη δεύτερη σειρά σε διαφορετικά σκηνικά, όπως τα ολοκληρώματα και οι σειρές.

Τα βασικά ερωτήματα της έρευνάς της είναι: (α) Πώς οι μαθητές δημιουργούν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις για τα όρια συναρτήσεων; (β) Αλλάζουν αυτές οι αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια των σπουδών τους; (γ) Τι αλλάζει, αν αλλάζει κάτι; (δ) Διαφέρουν οι αναπαραστάσεις αυτών που τα καταφέρνουν πολύ καλά απ' των υπολοίπων;

Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αποδεικνύονται πολύ ΄΄πραγματιστές΄΄ όταν μαθαίνουν τα όρια. Εστιάζονται στην επίλυση των προβλημάτων κι όχι τόσο στη θεωρία. Μετά τη σειρά των μαθημάτων, όλοι πλην ενός ήταν ανήμποροι να εξηγήσουν το νόημα του τυπικού ορισμού των ορίων. Παρ' όλα αυτά, όλοι είναι πεπεισμένοι για την ικανότητά τους να αδράξουν την έννοια. Αυτή η έλλειψη επίγνωσης μπορεί ίσως να τους καταστεί σαφής, μόνο αν εμπλακούν σε προκλήσεις και ερευνητικές καταστάσεις περισσότερο συχνά. Οι αναπαραστάσεις που σχηματίζουν οι μαθητές αλλάζουν κατά τη διάρκεια της σειράς των μαθημάτων. Κάποιες αλλαγές επαναδιευθετούν ολόκληρα μέρη της εικόνας της έννοιας. Κάποιες αλλαγές είναι απλά μικρότερες τροποποιήσεις ή επικολλήσεις στις εικόνες της έννοιας. Επίσης υπάρχουν τμήματα που αν και είναι λανθασμένα, αφήνονται αναλλοίωτα. Η περισσότερη και ουσιαστικότερη αλλαγή έγινε στη μαθήτρια (από τους τέσσερις μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα) που ήταν υψηλών επιδόσεων.

Οι Lucia Grugnetti & Angela Rizza ερεύνησαν την επιρροή της φυσικής γλώσσας στην κατανόηση της έννοιας του ορίου. Ξεχώρισαν τα εμπόδια που είναι ικανά να παρεμποδίσουν τη διαδικασία της κατασκευής του ορίου, σε:

- Επιστημολογικής φύσης, βασιζόμενα σε εσωτερικές αιτίες των ίδιων των μαθηματικών (Brousseau, 1998, Sierpinska, 1985).

- Διδακτικής φύσης, βασιζόμενα στις μεθόδους διδασκαλίας, οι οποίες δεν είναι πάντα αποτελεσματικές (Brousseau, 1998, CREM, 1995, Groupe AHA, 1999, Artigue, 1998).
- Γνωστικής φύσης, βασιζόμενα στις διαδικασίες της αφαίρεσης και της εννοιολογικοποίησης που εμπλέκονται (Cornu, 1991, Dubinsky, 1991, Sfard, 1992, Tall & Vinner, 1981, Tall, 1996).
- Μεταγνωστικής φύσης, βασιζόμενα στη συνολική συμπεριφορά, σύμφωνα με την οποία η μαθητές ρέπουν να προσεγγίζουν τα μαθηματικά (Zan 2001, 2002).

Η αρχική υπόθεση των συγγραφέων είναι ότι η φυσική γλώσσα δεν είναι χρήσιμη στη ΄΄μαθηματική καταχώρηση΄΄ στην περίπτωση του ορίου. Η έρευνα που διεξήγαγαν αφορούσε στη ΄΄γλωσσολογική΄΄ ερμηνεία που δίνεται στους όρους ΄΄όριο΄΄ και ΄΄άπειρο΄΄ και επιπροσθέτως στη χρήση μερικών συχνά χρησιμοποιούμενων εκφράσεων, όπως ΄΄εντός ορίων΄΄ κ.τ.λ. Βασικό χαρακτηριστικό της έρευνας είναι ότι διεξήχθη σε διάφορα ηλικιακά στάδια (6 – 10, 11 – 13, 14 – 19 και >19, σε ποσοστό 10%).

Παρουσιάστηκαν οι εξής δυσκολίες:

- Δυσκολία στο να συσχετισθεί το όριο με την ιδέα μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας (και ως εκ τούτου με μια διαδικασία που συνεχίζεται έπ’ άπειρον.
- Δυσκολία στην αποδοχή της δυνατότητας ενός άπειρου ορίου.

Ως ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι εμφανίστηκε η παρουσία ενός είδους αντίθεσης μεταξύ της ιδέας του ορίου και του απείρου, όταν η απάντηση που δόθηκε στην ερώτηση ΄΄Εξηγείστε τι σημαίνει για σας η λέξη «άπειρο»΄΄, ήταν ‘’Είναι κάτι που δεν έχει όρια’’.

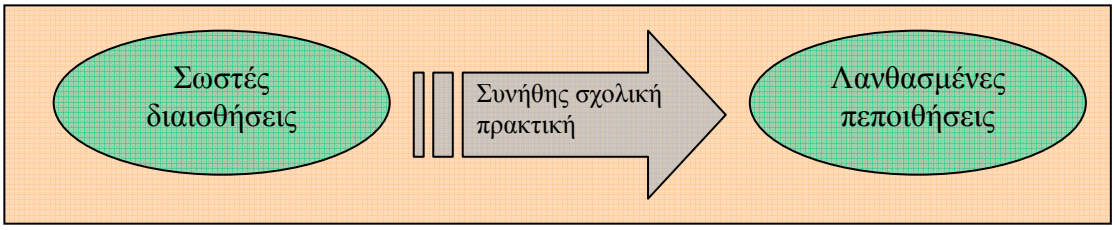
Ο Fischbein (1973) έγραψε: *΄΄Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διδασκαλία ενός θέματος, για να είναι αποτελεσματική, θα έπρεπε να προηγείται αυτής μια εξερεύνηση στη διαισθητική γνώση των μαθητών΄΄*.

Με αφετηρία τις απόψεις και τα αποτελέσματα του Fischbein, οι συγγραφείς προσπάθησαν να αναλύσουν την επιρροή των συνήθων σχολικών πρακτικών πάνω στις διαισθήσεις των μαθητών.

Αναλύοντας τις εργασίες των μαθητών, φάνηκε ότι όντως οι διαισθήσεις που υπάρχουν για το άπειρο, υπάρχουν σε οποιοδήποτε σχολικό επίπεδο, ιδίως στο δημοτικό. Δεν παρατηρήθηκε όμως κάποια εξέλιξη αυτών των ιδεών, ούτε με ποσοτικό τρόπο ούτε με ποιοτικό τρόπο. Αν και το δείγμα της έρευνας δεν θεωρείται

αντιπροσωπευτικό, φαίνεται να επιβεβαιώνεται η υπόθεση των συγγραφέων, ότι αυτές οι διαισθήσεις, στη διδακτική πρακτική δεν έχουν την ευκαιρία να αναπτυχθούν και να παγιωθούν. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν επίσης ότι μια διδασκαλία υπερβολικά βασισμένη στον αυτοματισμό μπορεί να παρεμποδίσει την παραγωγή ΄΄φυσικών΄΄ και καλών διαισθήσεων.

Φαίνεται λοιπόν για τους συγγραφείς ότι σχηματικά έχουμε μια μορφή ως ακολούθως:



Οι Θ. Ζαχαριάδης, Ε. Μπιζά & Α. Σογιούλ (2004) εξέτασαν την έννοια της εφαπτομένης στους πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Οι ερευνητές στηρίχτηκαν στη θεωρία της *εννοιολογικής αλλαγής*. Η θεωρία αυτή μελετάει τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης και ειδικότερα όταν η προϋπάρχουσα γνώση δεν είναι συμβατή με τη νέα. Στην περίπτωση αυτή, συχνά παρατηρούνται λάθη που οφείλονται σε συστηματικές παρανοήσεις (Vosniadou, 1994). Αρκετές μελέτες έχουν ασχοληθεί με την εννοιολογική αλλαγή στην περίπτωση των μαθηματικών εννοιών (Merenluoto & Lehtinen, 2002, Vamvakoussi & Vosniadou, 2002). Είναι γνωστή η εννοιολογική αλλαγή που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, όταν από την πρωταρχική έννοια της εφαπτομένης του κύκλου, περνούν σταδιακά στην εφαπτομένη καμπύλης κωνικής τομής, για να καταλήξουν στη Γ΄ Λυκείου να λάβουν τον ορισμό της εφαπτομένης μέσω παραγώγων και να είναι ουσιαστικά αναγκασμένοι να ΄΄αναιρέσουν΄΄ πολλά από τα τμήματα των εικόνων που έχουν σχηματίσει για την έννοια της εφαπτομένης.

Με τους όρους της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής που προτείνει η Βοσνιάδου (1994), οι ερευνητές ισχυρίζονται ότι οι εικόνες που συνδέονται με την έννοια της εφαπτομένης του κύκλου είναι *προϋποθέσεις*, που λειτουργούν ως εμπόδιο στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης της καμπύλης. Συχνά οι μαθητές δημιουργούν συνθετικά μοντέλα, στην προσπάθειά τους να προσαρμόσουν

τη νέα γνώση, που αφορά στην εφαπτομένη της καμπύλης, στις προηγούμενες γνώσεις τους για τον κύκλο και τις κωνικές τομές.

Η έρευνα διεξήχθη σε 19 φοιτητές, οι οποίοι είχαν διδαχτεί ένα εισαγωγικό μάθημα Απειροστικού Λογισμού στο Λύκειο, αλλά δεν είχαν ακόμη παρακολουθήσει αντίστοιχο μάθημα στο Πανεπιστήμιο. Οι φοιτητές απάντησαν σε ένα ερωτηματολόγιο αποτελούμενο από έξη ερωτήσεις και στη συνέχεια συμμετείχαν σε προσωπικές συνεντεύξεις, όπου συζητήθηκαν οι απαντήσεις τους. Οι έξη αυτές ερωτήσεις παρουσίαζαν γραφικές παραστάσεις και σχεδιασμένες ευθείες και οι φοιτητές καλούνταν να απαντήσουν ποια ευθεία ήταν εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Με βάση με τις απαντήσεις τους οι φοιτητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες, ανάλογα με το βαθμό που οι ιδιότητες του ΄΄ακριβώς ενός κοινού σημείου΄΄ και της ΄΄διατήρησης στο ίδιο ημιεπίπεδο΄΄ επηρεάζουν την εικόνα τους για την έννοια της εφαπτομένης. Στην α΄ ομάδα ανήκουν 5 άτομα όπου η εικόνα του ΄΄ακριβώς ενός κοινού σημείου΄΄ αποτελεί το κύριο κριτήριό τους, για να αναγνωρίσουν αν μια ευθεία είναι εφαπτομένη ή όχι. Στη β΄ ομάδα ανήκουν 7 φοιτητές με συνθετότερα κριτήρια για την ύπαρξη εφαπτομένης, εξετάζοντας τοπικά την ισχύ ή όχι και των δύο προαναφερθέντων ιδιοτήτων. Γι’ αυτούς τους φοιτητές η έννοια της εφαπτομένης έχει συνδεθεί τοπικά άμεσα με την έννοια της εφαπτομένης του κύκλου. Τέλος στη γ΄ ομάδα οι φοιτητές έχουν δομήσει σωστά την έννοια της εφαπτομένης σε οποιαδήποτε καμπύλη.

Τα συμπεράσματα που απορρέουν, παρ’ όλο που η παραπάνω έρευνα είναι πιλοτική, είναι ότι υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι η μετάβαση από την εφαπτομένη του κύκλου και των κωνικών τομών στην εφαπτομένη καμπύλης, εντάσσεται στις περιπτώσεις που ερμηνεύονται με τη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής.

Οι Leslie Aspinwall, Kenneth L. Shaw & Norma C. Presmeg (1997) ερεύνησαν τις γραφικές συνδέσεις μεταξύ μιας συνάρτησης και της παραγώγου της και τις δυσκολίες που μπορούν να παρουσιαστούν από ανεξέλεγκτες νοητικές εικόνες. Ακολούθησαν τη μεθοδολογία της μελέτης περίπτωσης με υποκείμενο έναν φοιτητή ο οποίος είχε ήδη συμπληρώσει ένα έτος σπουδών στοιχειώδους απειροστικού Λογισμού που αποτελείτο από δύο σειρές μαθημάτων και χρειαζόταν μόνο μια τρίτη και τελευταία σειρά για να ολοκληρώσει τις σπουδές του στο αντικείμενο αυτό. Ο εν

λόγω φοιτητής ήταν την περίοδο της έρευνας 28 χρονών και παρακολουθούσε το τμήμα μηχανικών συστημάτων.

Συνολικά φτιάχτηκαν είκοσι έργα για να παρακολουθήσουν την κατανόηση του φοιτητή σε ότι αφορά την παράγωγο της συνάρτησης. Τα τέσσερα πρώτα φτιάχτηκαν βασιζόμενα στην ύλη των μαθημάτων και τα υπόλοιπα αναλύοντας τις συνεντεύξεις από τα προηγούμενα έργα του φοιτητή. Τα περισσότερα από αυτά περιείχαν μη – κλασσικά προβλήματα.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο φοιτητής μπορούσε εν γένει να ανταποκριθεί ικανοποιητικά σε απλές ασκήσεις αλγεβρικού τύπου, κάνοντας κάποιες φορές κάποια λάθη, τα οποία όμως εύκολα αναγνώριζε ως τέτοια όταν του εξηγούνταν, αλλά παρουσιάστηκε σημαντικότατο πρόβλημα όταν του παρουσιάστηκε μέσω γραφήματος μια παραβολή (και μάλιστα της απλούστατης μορφής $y = x^2$) και του ζητήθηκε το γράφημα της παραγώγου της, όπου εκεί παρουσίασε ως απάντηση το γράφημα μιας κυβικής συνάρτησης. Αυτό που φάνηκε να τον μπερδεύει ιδιαίτερα ήταν η εντύπωση που του έδινε το γράφημα της παραβολής και το οποίο κατά τη γνώμη του φαινόταν σα να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Βέβαια και το γράφημα που παρουσίαζε ως γράφημα παραγώγου δε μπορούσε να δικαιολογήσει αυτόν τον ισχυρισμό του. Η εικόνα αυτή παρέμεινε για πολύ καιρό ενεργή και αντιμαχόμενη των οποιωνδήποτε άλλων λογικών συμπερασμάτων που έβγαζε ο φοιτητής, είτε μόνος του, είτε με την βοήθεια των ερευνητών, όπως ας πούμε ότι δε μπορούσε να βρει κάποιο σημείο όπου εκεί κοντά η συνάρτηση θα απειριζόταν. Όταν του παρουσιάστηκε η εναλλακτική άποψη, ότι δηλαδή το γράφημα που του παρουσιαζόταν ήταν το γράφημα της παραβολής, αμέσως έδωσε τη σωστή απάντηση, ότι δηλαδή η παράγωγος είναι μια ευθεία γραμμή, τονίζοντας μάλιστα ότι «*έπρεπε να έχει σκεφτεί από την αρχή αλγεβρικά*». Και πάλι όμως υπαναχώρησε στις αρχικές του σκέψεις περί κατακόρυφης ασύμπτωτης της παραβολής μη μπορώντας να συνταιριάξει τα, δεδομένα πλέον γι' αυτόν, συμπεράσματα που πηγάζουν από τη θεωρία, με τις εικόνες που αυτός με κάποιον τρόπο έχει σχηματίσει. Δυσκολίες αυτής της φύσης έχουν ονομαστεί, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, από τους Tall & Vinner, ως *γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης*. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, σ' αυτήν την περίπτωση ίσως είναι η *εικόνα της έννοιας του απείρου* που μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό της αντίστοιχης έννοιας. Η εικόνα της έννοιας όπως την κατέχει ο εν λόγω φοιτητής είναι το όλο γνωστικό οικοδόμημά του, που

σχετίζεται με την έννοια του απείρου και το οποίο περιέχει όλες τις νοητικές εικόνες και έννοιες των σχετικών ιδιοτήτων και διαδικασιών. Δόμησε αυτήν την κατασκευή διαμέσου εμπειριών χρόνων. Η εικόνα του μπορεί να του προκαλεί σύγχυση καθώς προσπαθεί να την συνταιριάξει με την τυπική θεωρία. Αυτά τα δεδομένα σαφώς υποδεικνύουν ότι η εικόνα του φοιτητή για το άπειρο παρακινώντας του την αντίληψη ότι οι μεγάλοι αριθμοί είναι ένας ΄΄τρόπος πρόσβασης στο άπειρο΄΄.

Όταν τελικά ο φοιτητής κατάφερε να συνταιριάξει τις εικόνες του με τη θεωρία, έφτασε δηλαδή στο στάδιο της *΄΄συμμόρφωσης΄΄* φάνηκε να καταλαβαίνει και την αιτία που του δημιούργησε αυτό το πρόβλημα, ότι ήταν δηλαδή μια εικόνα που δεν μπορούσε να ελέγξει. Την αποκάλεσε μάλιστα «οπτική παραίσθηση».

Ο φοιτητής είχε παραπλανηθεί διότι νόμιζε ότι ήξερε γι’ αυτό που έβλεπε (Lakoff, 1987, Wheatly, 1991).

Οι συγγραφείς με αυτό το άρθρο έδειξαν την ανάγκη περισσότερης προσοχής σε τέτοιου είδους προβλήματα που μπορεί να δημιουργηθούν από τη χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων. Και αν και όλες οι σύγχρονες οδηγίες και εγχειρίδια προτείνουν περισσότερες γραφικές παραστάσεις στις οδηγίες του Απειροστικού, πηγάζοντας από την άποψη ότι οι εννοιολογική αντίληψη των μαθητών αυξάνει όποτε χρησιμοποιούνται γραφικές παραστάσεις και προκαλούνται συνοδεύουσες εικόνες, φαίνεται ότι αυτή η άποψη, ότι δηλαδή μόνο οφέλη προκαλούν, τελικά δεν είναι πανάκεια.

4. Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

4.1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ

Θεωρούμε ότι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου είναι στο σύνολο τους αντιμέτωποι με μια σχεδόν πρωτόγνωρη γι' αυτούς κατάσταση στα μαθηματικά. Οι απαιτήσεις της τάξης αυτής είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από τις απαιτήσεις των προηγούμενων τάξεων. Επιπροσθέτως, μιας και ο βαθμός της Γ΄ Λυκείου ήταν μέχρι πρότινος ο κύριος και αποφασιστικός παράγοντας για την επιτυχία ενός μαθητή και από τον τελευταίο χρόνο είναι ο μοναδικός παράγοντας, θα πρέπει να προσμετρήσουμε στην όλη προσπάθεια των μαθητών και το άγχος που στην τελευταία τάξη φαίνεται να βαραίνει πολύ τα πόδια τους.

Παρ' όλα αυτά εκτιμούμε ότι ένα μεγάλο μέρος της μαθητικής νεολαίας καταβάλλει φιλότιμες προσπάθειες για να ανταποκριθεί με συνέπεια στα καθήκοντά του. Έχουμε αναφέρει ήδη πως υπάρχουν πολλές διαμαρτυρίες από τους Πανεπιστημιακούς καθηγητές για την ποιότητα των φοιτητών που έρχονται στο πρώτο έτος σπουδών τους και για να χρησιμοποιήσουμε και βαρύτερα λόγια, για την άγνοιά τους.

Εκτιμούμε συγχρόνως, ότι οι μαθητές κάνουν «*αφαιρέσεις*». Όχι με την έννοια της αναστοχαστικής αφαίρεσης, αλλά με την έννοια της «*έκπτωσης*». Έχοντας εκπαιδευτεί τα προηγούμενα χρόνια σε διαδικασίες ρουτίνας και έχοντας συνηθίσει σε έργα που δε χρειάζονται ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη, αφαιρούν πολλά, ή έστω κάποια, περιττά κατά τη γνώμη τους στοιχεία από την ύλη που θα εξεταστούν. Αυτή η πρακτική δεν είναι καινούργια. Εκτιμούμε ότι ανέκαθεν γινόταν. Η διαφοροποίηση που νομίζουμε ότι υπάρχει, είναι ότι σε παλαιότερα χρόνια υπήρχε επίγνωση του κόστους που θα μπορούσε να αποφέρει μια τέτοια επιλογή και γινόταν συνειδητά, ενώ τώρα δεν υπάρχει τέτοια επίγνωση. Κατά συνέπεια, οι *εκπτώσεις* που αποφασίζουν να κάνουν οι μαθητές, μπορούν να γίνουν με ΄΄ελαφρά τη καρδία΄΄, μη γνωρίζοντας ουσιαστικά τι είναι αυτό που αποφασίζουν να παρατήσουν στην άκρη.

Έχοντας ως βασική θεώρηση ότι οι πολλών ειδών αναπαραστάσεις σε κάποιο αντικείμενο συμβάλλουν σαφώς στην πληρέστερη κατανόησή του, θελήσαμε να δούμε τι συμβαίνει στους μαθητές σε κάποια κομμάτια από την ύλη του

Απειροστικού Λογισμού. Περιοριστήκαμε κατά κύριο λόγο, στις γεωμετρικές αναπαραστάσεις, διότι εκτιμούμε ότι οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις και κατ' επέκταση οι γραφικές αναπαραστάσεις, με ότι κρυφά νοήματα και διασυνδέσεις μπορεί αυτές να μεταφέρουν, είναι ένα απαραίτητο συστατικό από τις αναπαραστάσεις εν γένει, που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και για τη διδασκαλία αλλά και για την κατανόηση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού.

Ήδη αναφέραμε προηγούμενα στην παρούσα εργασία μας έρευνες (Leslie Aspinwall et al., 1997) που έχουν δείξει ότι η οπτικοποίηση μπορεί κάποιες φορές να αποτελέσει σοβαρό εμπόδιο, εκτιμούμε όμως ότι η υπερπήδηση αυτού του εμποδίου συμβάλλει ουσιαστικότατα στην κατανόηση και αποσαφήνιση των εννοιών από τη μεριά του μαθητή.

Λόγω της ιδιαιτερότητας που έχει η Γ΄ Λυκείου, το ερωτηματολόγιό μας προσανατολίστηκε σε θέματα που βασανίζουν άμεσα τους μαθητές και είναι απαραίτητα κατά τη γνώμη μας συστατικά εν όψει των επικείμενων εξετάσεών τους.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα θα μπορούσαν να συνοψισθούν στα ακόλουθα:

1. Τι είδους γεωμετρικές διασυνδέσεις παρουσιάζουν οι μαθητές σχετικά με την εφαπτομένη καμπύλης.
2. Τι είδους διαισθητικές αντιλήψεις έχουν (π.χ., όταν πρόκειται να αναγνωρίσουν ή όχι μια εφαπτομένη).
3. Σε ποιο βαθμό προσέχουν και κατανοούν τη θεωρία σε απλά βασικά θέματα όπως αυτό της μονοτονίας μιας συνάρτησης ή στην περίπτωση των ακροτάτων.
4. Πώς μπορούν να συλλέξουν αλγεβρικές πληροφορίες από ένα γράφημα.
5. Πώς μπορούν να χειριστούν ένα απλό, αλλά ρεαλιστικό πρόβλημα και τι ερμηνεία μπορούν να δώσουν στα αποτελέσματά τους.
6. Πως μπορούν να χειριστούν τις γραφικές παραστάσεις όταν από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης τους ζητηθεί η γραφική παράσταση της παραγώγου αλλά και αντίστροφα.
7. Αν μπορούν να διαβάσουν, να αναγνωρίσουν δηλαδή, τις αλγεβρικές πληροφορίες που τους δίνονται συμβολικά, σε ένα γράφημα.
8. Τα ερωτήματα 4, 6 και 7 μπορούν να συντεθούν σε ένα γενικότερο: Τι είδους γεωμετρικές αναπαραστάσεις και εννοιολογικές διασυνδέσεις και σε τι βαθμό, μπορούν να αναπτύξουν σε ανάλογα έργα

4.2. Ο ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνά μας έγινε κατά κύριο λόγο, μέσω ερωτηματολογίου, το οποίο παρατίθεται στο παράρτημα. Κάποιοι από τους μαθητές συμμετείχαν και σε προσωπικές συνεντεύξεις, κάποιες από τις οποίες θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Τα υποκείμενά μας ήταν 85 μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ Λυκείου, τη σχολική χρονιά 2004 – 2005 θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης. Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε υπό τον τίτλο και τη μορφή διαγνωστικού τεστ. Ο λόγος που επιλέχτηκε να γίνει κάτι τέτοιο ήταν καθαρά για να δώσουν οι μαθητές όλη την απαιτούμενη προσοχή και σοβαρότητα και να μην απαντήσουν επιπόλαια. Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε στους μαθητές, όταν όλοι είχαν τελειώσει τη διδασκαλία και του 2ου κεφάλαιου της Ανάλυσης.

Από τους 85 μαθητές, οι 44 ήταν μαθητές σε ένα συγκεκριμένο φροντιστήριο, οι οποίοι και έγραψαν το τεστ κάτω από αυστηρή επιτήρηση με μέγιστη χρονική διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. 25 ήταν μαθητές (και μάλιστα ήταν το σύνολο των μαθητών της θετικής και της τεχνολογικής κατεύθυνσης) από ένα συγκεκριμένο Λύκειο όπου και εκεί έγραψαν κάτω από την επιτήρηση των καθηγητών τους για δύο διδακτικές ώρες συν το διάλειμμα. Οι υπόλοιποι 16 μαθητές ήταν από άλλο Λύκειο. Αυτοί οι τελευταίοι έγραψαν το τεστ στο σπίτι τους, άρα δε μπορούμε να έχουμε στοιχεία για τον ακριβή χρόνο τους.

Όλα τα γραπτά διορθώθηκαν από δυο φορές, σημειώθηκαν τα λάθη και κοινοποιήθηκαν στους μαθητές που έλαβαν μέρος στην εξέταση, υπό μορφή έγγραφων σχολίων σχετικά με το τι πρέπει να προσέξουν περισσότερο και να βελτιώσουν ενδεχομένως. Στους μαθητές που έγραψαν το τεστ στο σπίτι τους, η κοινοποίηση των όποιων παρατηρήσεων έγινε μέσω τον καθηγητών τους. Με κάποιους από τους μαθητές του φροντιστηρίου, προχωρήσαμε σε προσωπικές συνεντεύξεις, τις χαρακτηριστικότερες των οποίων αναφέρω, μετά την παράθεση των στατιστικών στοιχείων και αποτελεσμάτων.

Τα λάθη κωδικοποιήθηκαν δύο φορές. Πρώτα συντάχτηκε ένας πίνακας λαθών, ο οποίος είχε στόχο να βοηθήσει στην καταγραφή των λαθών του εκάστοτε μαθητή και στα κατάλληλα από τη μεριά μας, ως διορθωτές, σχόλια. Να σημειώσουμε εδώ ότι τα σχόλια τα οποία δόθηκαν στους μαθητές, δεν είχαν τη μορφή του ξερού – τηλεγραφικού τύπου που μπορεί να δει κανείς στην τελευταία στήλη, αλλά είχαν τη

μορφή νύξεων και παροτρύνσεων του στυλ: «πρόσεχε τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου» ή «ξαναδιάβασε το χαρακτηρισμό ολικών και τοπικών ακροτάτων» κ.τ.λ.

Ο πίνακας αυτός είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας Ι : Ταξινόμηση λαθών

Θέμα	Ερώτημα	Απάντηση	Σχόλιο – πιθανές αιτίες
1ο	i.	Λανθασμένο	Μη κατανόηση του προβλήματος ή / και της συνάρτησης
	ii.	Δεν απαντά ή απαντά λανθασμένα	Έλλειψη γεωμετρικής ερμηνείας
	iii.	Λανθασμένο	Χρησιμοποίησε την εφαπτομένη
2ο		Λάθος εφαπτομένη	Αδυναμία αναγνώρισης ή απουσία διαισθητικής αναγνώρισης
		Περισσότερες από μία εφαπτομένες	Δε γνωρίζει το μονοσήμαντο
		Εφαπτομένη σε γωνιακό σημείο	Δε γνωρίζει τι γίνεται στο γωνιακό σημείο
		Δεν αναφέρει τον x΄x	Ή δεν βλέπει τον άξονα ως εφαπτομένη ή μπερδεύεται με το σημείο τομής
		Μη αναγνώριση εφαπτομένης	Μπερδεύεται με τα περισσότερα σημεία τομής
		Μη αναγνώριση ύπαρξης	Απουσία διαισθητικής αναγνώρισης ή δε γνωρίζει τι γίνεται στο σημείο καμπής
3ο	Π.Ο.	Λανθασμένο	Πρόβλημα στις πράξεις και στους περιορισμούς
	Μον.	Λανθασμένο	Λανθασμένες πράξεις.
			Μη γνώση της y=1/x
	1-1	Λανθασμένο	Έλλειψη θεωρίας
			Μη γνώση της y=1/x
4ο		Λανθασμένα σημεία ακροτάτων	Έχει διαβάσει λάθος γράφημα, δηλαδή νομίζει ότι έχει τη συνάρτηση κι όχι την παράγωγό της
			Εμφανίζει ακρότατα αναφερόμενος στον y΄y
			Δεν ξέρει τη θεωρία. Δίνει ακρότατο και στο άπειρο
		Λανθασμένος χαρακτηρισμός	Δεν ξεχωρίζει τα ολικά από τα τοπικά
			Έχει διαβάσει το γράφημα λανθασμένα, δηλαδή δίνει μέγιστο στο ελάχιστο και ανάποδα
5ο		Μη αντιμετώπιση	Αδυναμία σύλληψης του προβλήματος

Θέμα	Ερώτημα	Απάντηση	Σχόλιο – πιθανές αιτίες
		Λανθασμένη ή ελλιπής αντιμετώπιση	Αδυναμία κατάρτισης ή / και χειρισμού της εξίσωσης
		Λανθασμένο Π.Ο.	Δεν προσέχει τα δεδομένα
		Λανθασμένες πράξεις	
		Δε δίνει σωστή ή ολοκληρωμένη απάντηση	Αδυναμία φυσιολογικής ερμηνείας
6ο		Δεν απαντά σε κανένα γράφημα	Δεν υπάρχει επαφή με τις γραφικές παραστάσεις
		Απαντά στα 4 πρώτα γραφήματα	Υπάρχουν αλγοριθμικές διαδικασίες, αλλά όχι γεωμετρικές διασυνδέσεις
		Απαντά ημιτελώς στα 4 πρώτα	Υπάρχουν αλγοριθμικές διαδικασίες, όχι ικανές να οδηγήσουν σε περάτωση
		Απαντά και στα έξη με λάθη	Τα λάθη είναι επιπόλαια
			Δεν μπορεί να συνδέσει την καμπύλη με την παράγωγο καμπύλη
7ο		Δεν απαντά σε κανένα γράφημα	Δεν υπάρχει επαφή με τις γραφικές παραστάσεις
		Απαντά ημιτελώς σε κάποια γραφήματα	Υπάρχουν αλγοριθμικές διαδικασίες, όχι ικανές να οδηγήσουν σε περάτωση
		Απαντά λανθασμένα στα ακρότατα	Διαβάζει το γράφημα της f΄ σα να ήταν το γράφημα της f
			Δεν ξεχωρίζει τα ολικά από τα τοπικά ή / και τα μέγιστα από τα ελάχιστα
8ο		Δεν απαντά	Δε γνωρίζει πώς να εφαρμόζει τα συμπεράσματα που απορρέουν από τις παραγώγους
		Δίνει άλλα γραφήματα ως απάντηση	Δε γνωρίζει τα συμπεράσματα που απορρέουν από τη χρήση των παραγώγων
		Δίνει ένα μόνο από τα δύο γραφήματα	Έλλειψη προσοχής
		Δίνει ένα μόνο από τα δύο γραφήματα καθώς και κάποιο άλλο	Συνδυασμός των ανωτέρω

Στη συνέχεια, τα λάθη κωδικοποιήθηκαν εκ νέου για να μπορέσουν να υποστούν στατιστική επεξεργασία. Στην κωδικοποίηση αυτή δεν έλαβε μέρος η ερώτηση 3iii, που αφορούσε στις 1 – 1 συναρτήσεις, διότι τελικά εκτιμήθηκε ως μη κατάλληλη. Η κωδικοποίηση αυτή αναφέρεται στη συνέχεια.

Πίνακας Ι Ι :Εξήγηση των κωδικών στις ερωτήσεις και στα λάθη

Ερώτημα	Υποερώτημα	Κωδικός λάθους	Επεξήγηση
1.	GA1		
	GA2	Er1	Απαντά λανθασμένα κάνοντας χρήση της υπάρχουσας εφαπτομένης
		Er2	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GA3	Er1	Απαντά λανθασμένα
		Er2	Δεν απαντά
2.	GT1	Er1	Δίνει την ε1
		Er2	Απαντά: Δεν είναι καμία ή δεν υπάρχει
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GT2	Er1	Δίνει δύο εφαπτόμενες
		Er2	Απαντά: Δεν υπάρχει
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GT3	Er1	Δίνει κάποια ή και τις δύο από τις ε1, ε2
		Er2	Απαντά: Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GT4	Er1	Απαντά: Δεν υπάρχει
		Er2	Απαντά: Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GT5	Er1	Απαντά: Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται
		Er2	Απαντά: Δεν υπάρχει
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GT6	Er1	Απαντά: Δεν υπάρχει
		Er2	Δίνει την ε1
		Er3	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
3. [3]	A1-6, m	Er1	Απαντά λανθασμένα στη μονοτονία
		Er2	Δεν απαντά
	A1-6, d	Er1	Απαντά λανθασμένα στο πεδίο ορισμού
		Er2	Δεν απαντά
4.	VGa1	Er1	Δίνει ακρότατο της συνάρτησης στο $+\infty$
		Er2	Απαντά λανθασμένα είτε διαβάζοντας το γράφημα σα να ήταν γράφημα συνάρτησης κι όχι παραγώγου είτε δίνοντας ανάποδους χαρακτηρισμούς
		Er3	Δίνει το σημείο ακρότατου στον y΄y
		Er4	Δεν απαντά

[3] Το ερώτημα για τις ΄΄1 – 1΄΄ συναρτήσεις δεν συμπεριλήφθηκε τελικά στη διόρθωση

Ερώτημα	Υποερώτημα	Κωδικός λάθους	Επεξήγηση
	VGa2	Er1	Απαντά λανθασμένα (όπως στο Er2 πριν)
		Er2	Δίνει το σημείο ακρότατου στον y΄y
		Er3	Δεν απαντά
	VGa3	Er1	Απαντά λανθασμένα
		Er2	Δεν απαντά
5.	P	Er1	Λανθασμένη ή ελλιπής ερμηνεία
		Er2	Λανθασμένο Π. Ο.
		Er3	Λανθασμένες πράξεις
		Er4	Αδυναμία κατάστρωσης της εξίσωσης
		Er5	Άλλα λάθη ή δεν απαντά[4]
6.	GDg1	Er1	Απαντά λανθασμένα
		Er2	Δεν απαντά
	GDg2	Er1	Απαντά λανθασμένα
		Er2	Δεν απαντά
	GDg3	Er1	Απαντά λανθασμένα με ασυμφωνία στα σημεία μηδενισμού της f΄ και στο πρόσημό της με τα ακρότατα και τη μονοτονία της f
		Er2	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GDg4	Er1	Απαντά λανθασμένα με ασυμφωνία στα σημεία μηδενισμού της f΄ και στο πρόσημό της με τα ακρότατα και τη μονοτονία της f
		Er2	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GDg5	Er1[5]	Απαντά λανθασμένα με ασυμφωνία στα σημεία μηδενισμού της f΄ και στο πρόσημό της με τα ακρότατα και τη μονοτονία της f
		Er2	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
	GDg6	Er1	Απαντά λανθασμένα με ασυμφωνία στα σημεία μηδενισμού της f΄ και στο πρόσημό της με τα ακρότατα και τη μονοτονία της f
		Er2	Άλλα λάθη ή δεν απαντά
7.	Dga1 – e1	Er1	Λανθασμένα σημεία
		Er2	Δεν απαντά
	Dga2 – e2	Er1	Λανθασμένος χαρακτηρισμός
		Er2	Δεν απαντά

[4] Στο αρχείο με τα στατιστικά στοιχεία, όπου υπάρχει το Er5 μαζί με άλλους χαρακτηρισμούς λαθών δίνεται η ερμηνεία ότι ο μαθητής έχει κάνει άλλα λάθη. Όπου υπάρχει μόνο του σημαίνει ότι ο μαθητής δεν έχει απαντήσει.

[5] Από το αρχείο με τα στατιστικά στοιχεία που διαθέτουμε, μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι παρουσιάστηκαν 8 συνολικά; Μαθητές, οι οποίοι έδωσαν για απάντηση ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα που κατά τ' άλλα συμφωνούσαν με σημεία μηδενισμού, πρόσημα κ.τ.λ.

Ερώτημα	**Υποερώτημα**	**Κωδικός λάθους**	**Επεξήγηση**
	Dgafg – efg	Er1	Λανθασμένο γράφημα
		Er2	Δεν απαντά
8.	IG	Er1	Δίνει μόνο ένα από τα δύο σωστά γραφήματα
		Er2	Δίνει κάποιο άλλο γράφημα
		Er3	Δεν απαντά

Κάθε ερώτηση έπαιρνε σ’ αυτή την κωδικοποίηση την ένδειξη 1 αν είχε απαντηθεί σωστά ή 0 αν είχε απαντηθεί λανθασμένα, οπότε και σημειωνόταν αντίστοιχα στις επόμενες στήλες το λάθος ή τα λάθη που είχαν γίνει.

Εξαίρεση αποτελεί η βασική στήλη της ερώτησης 5 (του προβλήματος) όπου εκεί χρησιμοποιήθηκε και η ένδειξη 0,5 για κάποιους που κατάφεραν να δώσουν την απάντηση έχοντας αρκετές ελλείψεις στην πορεία προς την εύρεσή της. Τα λάθη που έκανε κάποιος μαθητής σε αυτή την ερώτηση σημειώνονται στις διπλανές στήλες κατά το γνωστό τρόπο. Επίσης, εδώ υπάρχει και κάτι που ίσως στην αρχή φανεί παράξενο. Υπάρχουν κάποιοι μαθητές με 1 στη βασική στήλη και επίσης στις διπλανές στήλες είναι σημειωμένα κάποια λάθη που έκαναν. Αυτό δεν έγινε από αβλεψία. Είναι μαθητές που είχαν αρκετά έως πολύ πιο ολοκληρωμένη αντιμετώπιση στο θέμα και που έπρεπε με κάποιον τρόπο να ξεχωριστούν από τους υπόλοιπους που χαρακτηρίστηκαν με 0,5.

4.3. ΟΙ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΟΧΟΙ – Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ & ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΠΟΡΡΕΟΥΝ

Τα αποτελέσματά μας υπέστησαν δύο διαφορετικές στατιστικές επεξεργασίες.

Η πρώτη μέσω XL μας πληροφορεί για τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων σε κάθε ερώτηση, καθώς και για τα συνηθέστερα λάθη. Μέσω αυτών των αποτελεσμάτων γίνεται και μια πρώτη – ποιοτική, θα την χαρακτηρίζαμε – ανάλυση και εξάγονται κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Για κάθε ερώτηση δημιουργήθηκαν τέσσερις πίνακες που αφορούν στην απόδοση των μαθητών του φροντιστηρίου, του Λυκείου, αυτών που συμπλήρωσαν το τεστ στο σπίτι και ένας γενικός πίνακας που συμπεριλαμβάνει τα αποτελέσματα όλων των μαθητών. Στην παρούσα ενότητα θα παραθέσουμε μόνο τους γενικούς πίνακες, εκτός αν υπάρχει μεγάλη διαφορά με τους επιμέρους πίνακες ή υπάρχει ανάγκη σχολιασμού αυτών.

Η δεύτερη επεξεργασία στηρίζεται στην στατιστική ανάλυση του R.Gras και ουσιαστικά αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο είναι οι σχέσεις ομοιότητας, όπου εδώ αναδεικνύονται οι τυχούσες διαφορές ή ομοιότητες που υπάρχουν ανάμεσα στα έργα. Το δεύτερο μέρος είναι η συνεπαγωγική ανάλυση, όπου εδώ αναδεικνύονται οι δεσμοί συνεπαγωγής, ασθενείς ή ισχυροί, ανάμεσα στα έργα.

Όλοι οι πίνακες παρατίθενται αναλυτικά στο παράρτημα. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποιους από αυτούς, σχολιάζοντάς τους συγχρόνως με τους επιμέρους υποσκοπούς που εξυπηρετεί κάθε ερώτηση.

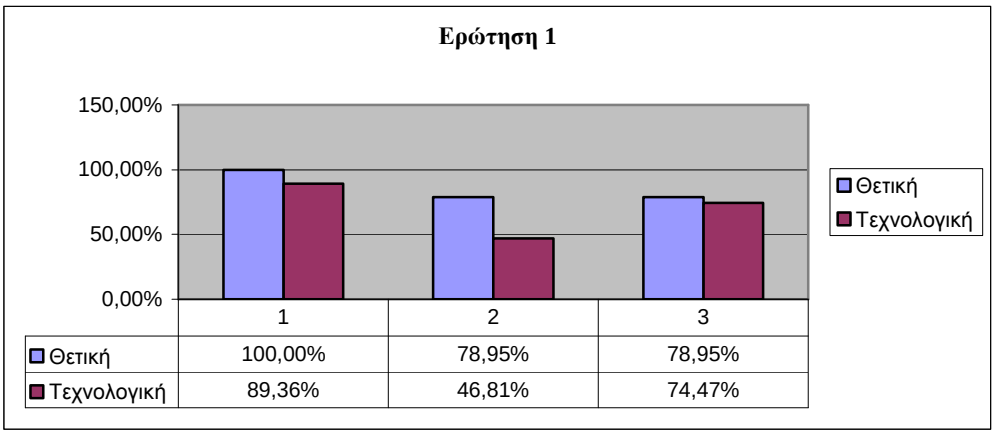
4.3.1. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ – ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ XL

4.3.1.1. Η ερώτηση 1

Οι ερωτήσεις 1 και 2 αναφέρονται στις εφαπτόμενες γραφικής παράστασης σε κάποιο σημείο της. ***Στην ερώτηση 1*** ζητάμε αλγεβρικές πληροφορίες όταν παρουσιάζεται το γράφημα της συνάρτησης. Εδώ απαιτείται βέβαια ο μαθητής να ξέρει τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου, όχι απλά παπαγαλίζοντάς την, αλλά να την έχει κατανοήσει.

..

Το διάγραμμα που αφορά σε όλους τους μαθητές έχει ως ακολούθως:

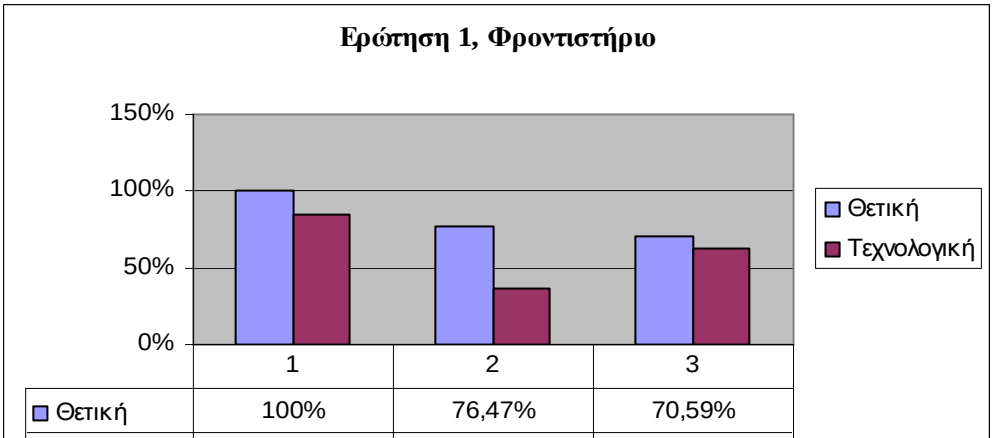


	1	2	3
Θετική	100,00%	78,95%	78,95%
Τεχνολογική	89,36%	46,81%	74,47%

Αυτό που σε πρώτη φάση μας έκανε εντύπωση είναι ότι ακόμη και στην απλούστατη ερώτηση: ΄΄Πόσο είναι το *f(3)*;΄΄, πληροφορία που παρουσιάζεται με δύο τρόπους στην ερώτηση, δηλαδή και γραφικά και λεκτικά (ή συμβολικά, αν προτιμάτε), υπήρξε ποσοστό μαθητών που έκανε λάθος.

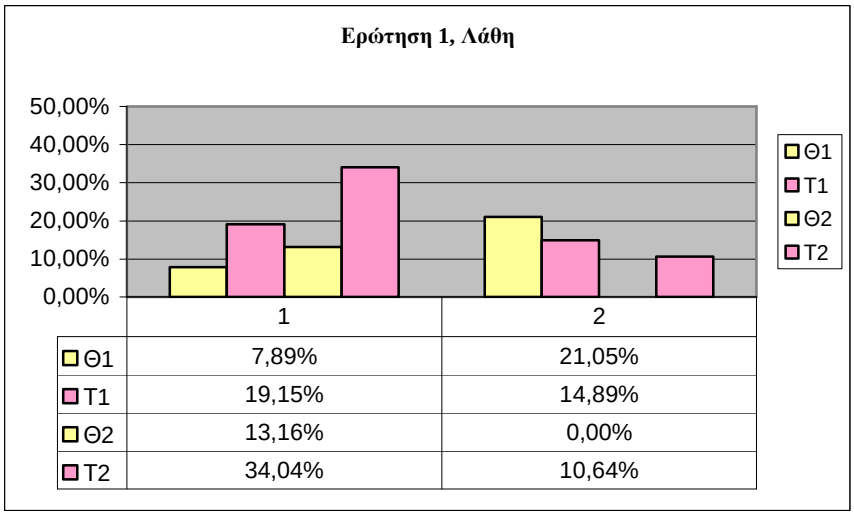
Επίσης βλέπουμε ότι, αν και οι μαθητές είναι σχεδόν πάντα έτοιμοι να απαντήσουν στην ερώτηση τι σημαίνει γεωμετρικά η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, ένα ποσοστό περίπου 21% για τη θετική κατεύθυνση και 25% για την τεχνολογική δε μπόρεσε να το εφαρμόσει σε ένα γράφημα. Τον ισχυρισμό μας ότι οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στην ερώτηση περί γεωμετρικής ερμηνείας της παραγώγου, τον επιβεβαιώσαμε και μέσω των συνεντεύξεων αυτών.

Να σημειώσουμε ακόμη ότι τα ποσοστά αυτά διαφοροποιούνται αυξητικά, αν κάνουμε την ίδια επεξεργασία στο υπό-δείγμα των μαθητών του φροντιστηρίου, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.



	1	2	3
Θετική	100%	76,47%	70,59%
Τεχνολογική	85,19%	37,04%	62,96%

Τα λάθη σε ποσοστιαία έκφραση φαίνονται στον επόμενο πίνακα. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι στήλες 1 και 2 αναφέρονται στα λάθη που έγιναν στα υποερωτήματα 2 και 3, μιας και στο πρώτο ερώτημα το ποσοστό επιτυχούς απάντησης ήταν 100% για τη θετική κατεύθυνση και 89,36 για την τεχνολογική, αλλά η απόκλιση αυτή της τεχνολογικής κατεύθυνσης δε μπορούσε να είναι εκμεταλλεύσιμη για παραπέρα επεξεργασία. Αποδώσαμε αυτό το λάθος σε λόγους απροσεξίας.



	1	2
Θ1	7,89%	21,05%
T1	19,15%	14,89%
Θ2	13,16%	0,00%
T2	34,04%	10,64%

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι από τους μαθητές που έκαναν το δεύτερο λάθος (Er2GA2) στη δεύτερη ερώτηση, αυτή δηλαδή που αφορούσε στη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου, πάνω από τους μισούς απάντησαν ότι $f'(3)=0$, αφού «***η παράγωγος ενός αριθμού είναι ίση με 0***»

4.3.1.2. Η ερώτηση 2

Όσον αφορά στη δεύτερη ερώτηση, εδώ τα πράγματα είναι λίγο συνθετότερα[6].Είναι αληθές ότι η έννοια της εφαπτομένης φαίνεται να είναι αρκετά προβληματική στους μαθητές της Γ' Λυκείου, όπως ορίζεται στα πλαίσια της Ανάλυσης. Η έννοια της εφαπτομένης πρωτοδιδάσκεται στους μαθητές μέσω του κύκλου. Η πρώτη λοιπόν εικόνα που σχηματίζεται είναι αυτή που η εφαπτομένη έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη (τον κύκλο) κι αυτή η εικόνα παραμένει σταθερή και αναλλοίωτη στα γυμνασιακά χρόνια και στην Α΄ Λυκείου. Στη Β΄ Λυκείου και στα μαθηματικά κατεύθυνσης, στο κομμάτι της Αναλυτικής Γεωμετρίας

[6] Μέρος αυτής της ερώτησης το δανειστήκαμε από την έρευνα και το ερωτηματολόγιο των Ζαχαριάδη κ.α.

η εφαπτομένη παρουσιάζεται κάπως πιο σύνθετα. Δεν αρκεί πλέον τώρα να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη (π.χ. παραβολή). Παραμένει όμως σε ισχύ ένα τμήμα της εικόνας που έχει δημιουργηθεί, αυτό που η εφαπτομένη αφήνει από τη μια μεριά ολόκληρη την καμπύλη. Ακόμη και στην περίπτωση της υπερβολής αυτό φαίνεται να είναι αληθές για τους μαθητές, εργαζόμενοι κατά κλάδους. Τα πράγματα διαφοροποιούνται δραματικά στη Γ΄ Λυκείου όπου πλέον η εφαπτομένη μπορεί να έχει και άλλα κοινά σημεία με την καμπύλη ή ακόμη, μπορεί να διαπερνά την καμπύλη στο σημείο επαφής, όπως συμβαίνει με τα σημεία καμπής μιας γραφικής παράστασης. Ο ορισμός ως γνωστόν δίνεται μέσω παραγώγων, παρ' όλα αυτά παραμένει ισχυρή σε αρκετούς μαθητές μια λανθάνουσα *εικόνα της έννοιας* όπως αυτή ορίστηκε από τους Tall & Vinner (1981). Σε σχετική έρευνα που προαναφέραμε (Ζαχαριάδης κ.α.), οι ερευνητές στηρίχτηκαν στη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής. Εμείς από τη μεριά μας θα προτιμούσαμε ως καταλληλότερο τον όρο της *εννοιολογικής προσθήκης*.

Θέλουμε λοιπόν να ελέγξουμε αν έχει τελικά τροποποιηθεί η έννοια της εφαπτομένης στους μαθητές κι ακόμη θέλουμε να δούμε αν μπορούν διαισθητικά να αναγνωρίσουν την ύπαρξη ή όχι της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο

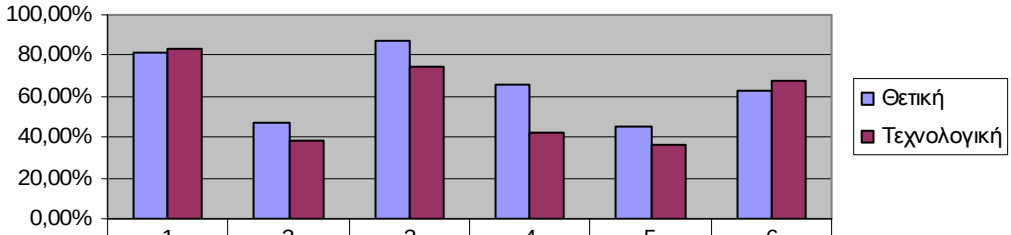
Στη δεύτερη ερώτηση διαπιστώνουμε τη μεγαλύτερη αποτυχία σε δυο ερωτήματα που εν πρώτοις φαίνονται ασύνδετα. Το ένα είναι όταν ζητάμε ποια είναι η εφαπτομένη στην $f(x) = x^2$ στο σημείο Ο(0, 0) (γράφημα 2) και το άλλο είναι αν σε μία τυχαία συνάρτηση η ευθεία που παρουσιάζεται είναι εφαπτομένη (γράφημα 5). Στην πρώτη περίπτωση δεν αναγνωρίστηκε ο άξονας x΄x, ενώ σε άλλο ερώτημα (γράφημα 4), όπου παρουσιαζόταν μόνος του τα ποσοστά επιτυχίας ήταν σαφώς μεγαλύτερα. Στη δεύτερη περίπτωση δε μπορέσαμε να βρούμε κάποια λογικοφανή εξήγηση. Θα μπορούσε να μπερδέψει τους μαθητές ότι η εφαπτομένη τέμνει τη γραφική παράσταση σε κάποιο ή σε κάποια άλλα σημεία, η υπόθεση αυτή όμως δε φαίνεται να επιβεβαιώνεται, δεδομένου ότι ήταν υψηλότερο το ποσοστό με επιτυχείς απαντήσεις στο γράφημα 4, όπου η εφαπτομένη διαπερνούσε κι αυτήν ακόμα τη ίδια τη γραφική παράσταση.

Το μόνο που μας φαίνεται λογικό, και που ίσως στηρίζει τα παραπάνω, είναι ότι οι μαθητές ξέρουν ότι η $f(x) = x^3$ έχει στο Ο(0, 0) εφαπτομένη τον άξονα x΄x αλλά μάλλον το αντιμετωπίζουν ως παράδοξο, που τελικά αναγκάζονται να το δεχτούν.

Δεν θα πρέπει νομίζω να ξεχνάμε ότι οι μαθητές είναι μια ΄΄*περίεργη ράτσα*΄΄ οι οποίοι είναι στο σύνολό τους πρόθυμοι να αποδεχτούν αυτό που λέει ο δάσκαλος.

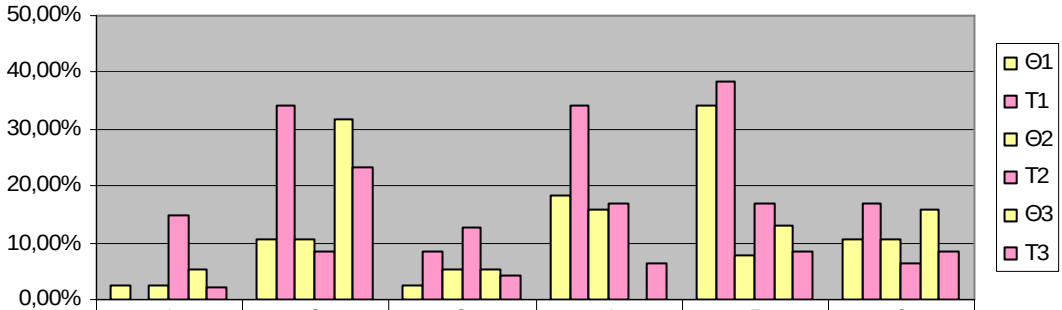
Το να ρίξουμε μια ματιά στον πίνακα επιτυχιών που ακολουθεί, ίσως δε μας βοηθά τόσο, όσο μας βοηθά η ανάγνωση του πίνακα λαθών.

Ερώτηση 2



	1	2	3	4	5	6
Θετική	81,58%	47,37%	86,84%	65,79%	44,74%	63,16%
Τεχνολογική	82,98%	38,30%	74,47%	42,55%	36,17%	68,09%

Ερώτηση 2, Λάθη



	1	2	3	4	5	6
Θ1	2,63%	10,53%	2,63%	18,42%	34,21%	10,53%
Τ1	0,00%	34,04%	8,51%	34,04%	38,30%	17,02%
Θ2	2,63%	10,53%	5,26%	15,79%	7,89%	10,53%
Τ2	14,89%	8,51%	12,77%	17,02%	17,02%	6,38%
Θ3	5,26%	31,58%	5,26%	0,00%	13,16%	15,79%
Τ3	2,13%	23,40%	4,26%	6,38%	8,51%	8,51%

Αναφερόμενοι στο υποερώτημα 2 θα διαπιστώσουμε ότι οι μαθητές της θετικής κατεύθυνσης έδωσαν το μεγαλύτερο ποσοστό τους στο ΄΄λάθος 3΄΄ (Er3GT2), προτίμησαν δηλαδή να μην απαντήσουν σε ποσοστό 31,58%, έναντι του 23,4% της τεχνολογικής κατεύθυνσης. Από τη άλλη μεριά οι μαθητές της τεχνολογικής κατεύθυνσης έδωσαν μεγάλο ποσοστό στο ΄΄λάθος 1΄΄ (Er1GT2), δηλαδή έδωσαν δύο εφαπτομένες. Φαίνεται πως γι' αυτούς τους μαθητές η εφαπτομένη είναι απλά μια έννοια ακόμη μέσα σε όλες που πρέπει να μάθουν. Η γεωμετρική ερμηνεία της

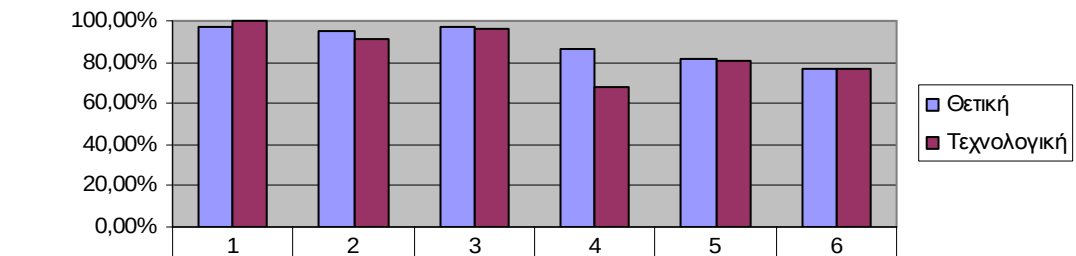
παραγώγου, καθώς και το μονοσήμαντο ενός ορίου, μπορεί να ενυπάρχει σε αυτούς, μπορεί και όχι, πάντως σε αυτό το σημείο δε φαίνεται να την χρησιμοποιούν, Κι εδώ βλέπουμε αυτό που αναφέρεται στην θεωρητική αντιμετώπιση των Tall & Vinner, περί συνύπαρξης διαφόρων εικόνων της έννοιας, χωρίς κατ' ανάγκην να εμφανίζεται γνωστική σύγκρουση. Ο χρόνος του ΄΄διαγνωστικού τεστ΄΄ ήταν περιορισμένος και υπ' αυτήν την έννοια οι μαθητές δεν είχαν το χρόνο να ανακαλέσουν στη μνήμη τους όλα τα γνωστικά σχήματα που μπορεί να είχαν δημιουργήσει και τα οποία ενδεχόμενα να οδηγούσαν στη γνωστική σύγκρουση. Ή από την άλλη μεριά, ίσως δεν είχαν και τη διάθεση να κάνουν κάτι τέτοιο.

Όσον αφορά στο υποερώτημα 5, θετική και τεχνολογική κατεύθυνση προτίμησαν με παραπλήσιο ποσοστό να κάνουν το ΄΄λάθος 1΄΄ (Er1GT5), δηλαδή, ότι δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται. Δεν μπορέσαμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα από τη στατιστική επεξεργασία. Ίσως θα έπρεπε το υποερώτημα αυτό να τεθεί σε αντιπαράθεση με κάποιο άλλο κατάλληλο.

4.3.1.3. Η ερώτηση 3

Η ερώτηση 3 μπήκε στο ερωτηματολόγιο για να ελέγξει την ικανότητα των μαθητών στις αλγοριθμικές διαδικασίες καθώς επίσης και για την προσοχή που αυτοί δίνουν στη θεωρία. Ζητήσαμε να μας απαντήσουν ποιες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες σε όλο το πεδίο ορισμού τους καθώς και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που παρουσιάζονται..

Διαπιστώσαμε μεγάλη επιτυχία στην εύρεση του πεδίου ορισμού.



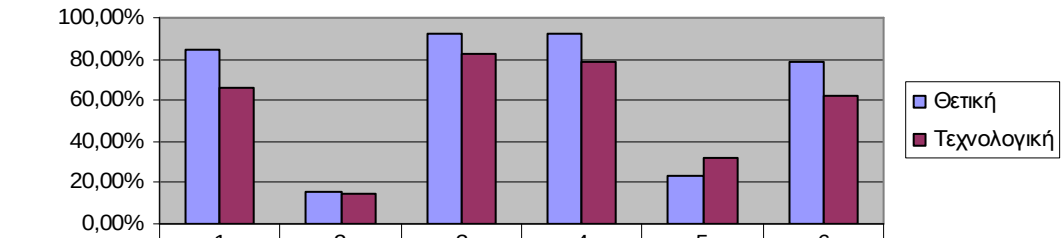
	1	2	3	4	5	6
Θετική	97,37%	94,74%	97,37%	86,84%	81,58%	76,32%
Τεχνολογική	100,00%	91,49%	95,74%	68,09%	80,85%	76,60%

Η τεχνολογική κατεύθυνση υστέρησε λιγάκι στο υποερώτημα 4, όπου εμπλεκόταν και το $\eta\mu x$, δίνοντας, οι περισσότεροι από τους αντίστοιχους μαθητές, ως πεδίο ορισμού το $[-1,1]$. Το θέμα όμως αυτό θα το αντιμετωπίσουμε και πιο μετά στην

εργασία μας, στην ανάλυση της 7ης ερώτησης. Κατά τα άλλα, τα ποσοστά είναι σχεδόν τα ίδια, παρουσιάζοντας ύφεση στα τελευταία ερωτήματα, όπου και φαίνεται να δυσκόλεψαν ελαφρά τους μαθητές ο σύνθετος παρονομαστής και το υπόριζο

Όσον αφορά όμως στη μονοτονία, τα πράγματα αλλάζουν. Ο μηχανιστικός κανόνας: «Αν η παράγωγος είναι θετική, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα κι αν η παράγωγος είναι αρνητική, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα», φαίνεται να παίζει πρωταρχικό ρόλο στις αντιλήψεις των μαθητών. Γι' αυτό και ένα πραγματικά μεγάλο ποσοστό, περίπου 84%, έδωσε την $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, ως συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και λίγο μικρότερο ποσοστό ΄΄κατάφερε΄΄ να βγάλει μονοτονία σε όλο το πεδίο ορισμού της για τη συνάρτηση $s(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

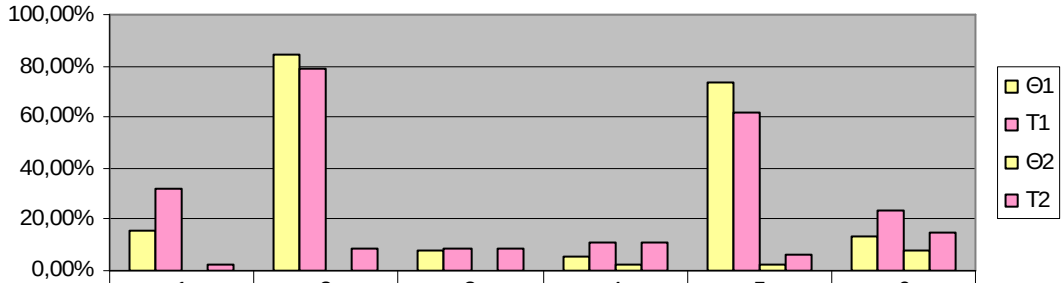
Ερώτηση 3, μονοτονία



	1	2	3	4	5	6
Θετική	84,21%	15,79%	92,11%	92,11%	23,68%	78,95%
Τεχνολογική	65,96%	14,89%	82,98%	78,72%	31,91%	61,70%

Στα συγκεκριμένα υποερωτήματα βλέπουμε την ακόλουθη κατανομή λαθών, πάντα αναφερόμενοι στη μονοτονία της συνάρτησης.

Ερώτηση 3, Μονοτονία, Λάθη



	1	2	3	4	5	6
Θ1	15,79%	84,21%	7,89%	5,26%	73,68%	13,16%
Τ1	31,91%	78,72%	8,51%	10,64%	61,70%	23,40%
Θ2	0,00%	0,00%	0,00%	2,63%	2,63%	7,89%
Τ2	2,13%	8,51%	8,51%	10,64%	6,38%	14,89%

4.3.1.4. Η ερώτηση 4

Παρ' όλο που όλο το ερωτηματολόγιο παρατίθεται στο παράρτημα, κρίνουμε σκόπιμο, για την αναφορά και συζήτηση των συμπερασμάτων που κατ' αρχήν εξήχθησαν, να αναφέρουμε κι εδώ την εκφώνηση της 4ης ερώτησης.

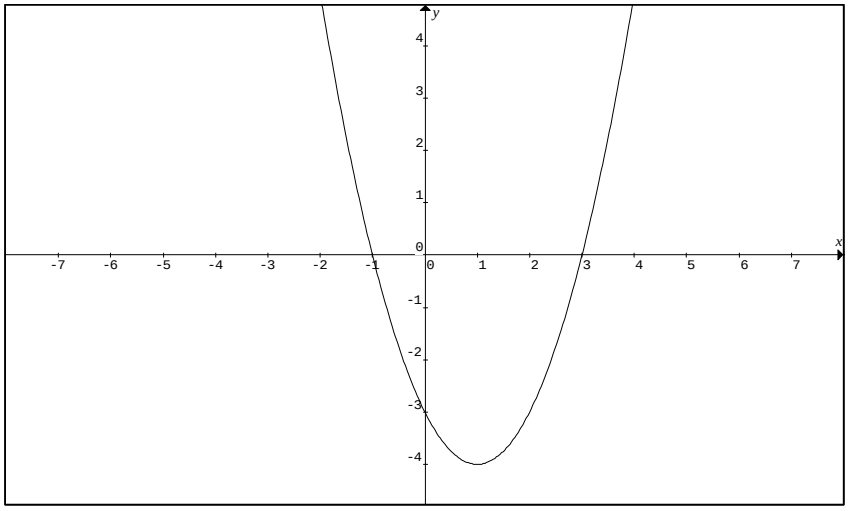
Ερώτηση 4η

Η παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την πρώτη παράγωγο της διαφοράς δύο συναρτήσεων f, g.

i. Σε ποιο σημείο η διαφορά αυτή γίνεται μέγιστη;
……...

ii. Σε ποιο σημείο γίνεται ελάχιστη;
……...

iii. Τα παραπάνω ακρότατα είναι ολικά ή τοπικά;
……...



Η ερώτηση 4 έχει δύο πράματα ως στόχους. Το πρώτο είναι να διερευνήσει αν οι μαθητές διαβάζουν προσεκτικά την εκφώνηση και αν αυτή μπορεί να εκτιμηθεί και να ΄΄αποκωδικοποιηθεί΄΄ κατάλληλα από τους μαθητές. Το δεύτερο είναι, αν οι μαθητές καταφέρουν να ανταποκριθούν ικανοποιητικά στον πρώτο στόχο, να ελέγξουμε αν μπορούν να μεταφέρουν γεωμετρικές πληροφορίες σε αλγεβρικά αποτελέσματα. Η ερώτηση αυτή θα μπορούσε – και ένας από τους λόγους που μπήκε είναι αυτός που τώρα αναφέρουμε – να συνδυαστεί με κάποια ερωτήματα από την 7η ερώτηση, που θα συζητήσουμε αργότερα. Η ερευνητική μας υπόθεση ήταν ότι η εκφώνηση σε συνδυασμό με το σχήμα θα αποτελούσε ένα εμπόδιο στους μαθητές. Θα μπορούσαμε να τονίσουμε την εκφώνηση βάζοντας μεγαλύτερα ή έντονα γράμματα. Προτιμήσαμε την παρουσίασή της όπως τελικά τη δώσαμε, για να μπορέσουμε να ελέγξουμε αυτόν τον ισχυρισμό μας και τα αποτελέσματα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, δικαίωσαν αυτήν την αρχική μας σκέψη και προβληματισμό.

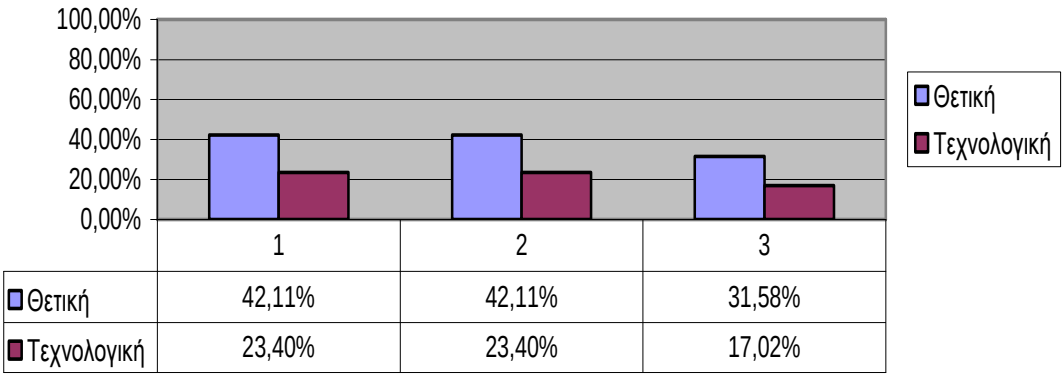
Γενικότερα, χαρακτηρίσαμε αυτήν την ερώτηση ως λεκτικό – γραφική, αφού οι μαθητές θα έπρεπε να δώσουν προσοχή κατ' αρχήν στην εκφώνηση της ερώτησης και μετά να μεταφράσουν τις όποιες πληροφορίες συλλέγουν γραφικά σε αλγεβρική μετάφραση. Κοντολογίς, οι μαθητές εδώ θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι αυτό που τους παρουσιάζεται είναι η παράγωγος της διαφοράς δύο συναρτήσεων, δηλαδή η γραφική παράσταση της $f' - g'$ και μέσω αυτού του γραφήματος να βγάλουν τα συμπεράσματά τους. Ουσιαστικά δηλαδή τους ζητάμε, αφού κατανοήσουν ότι πρόκειται για τη γραφική παράσταση της $f' - g'$, να σχηματίσουν, έστω στο μυαλό τους – δεν είναι ανάγκη να τον παρουσιάσουν – έναν πίνακα της μορφής

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f' - g'$		+	0	–	0	+	
$f - g$							

Κατόπιν θα έπρεπε να συμπληρώσουν την τελευταία σειρά του παραπάνω πίνακα, βγάζοντας τα κατάλληλα συμπεράσματα για τα ακρότατα.

Το ένα και μοναδικό σχήμα που παρουσιάστηκε εδώ (εν αντιθέσει με την 7η ερώτηση), αλλά και η δομή της εκφώνησης που επιλέχτηκε για να ελέγξει την αντίδραση των μαθητών, φάνηκε πολύ ισχυρό, καταφέρνοντας να αποσπάσει την προσοχή πολλών μαθητών από την εκφώνηση του ερωτήματος, ώστε αυτοί τελικά να απαντούν για ακρότατα που βλέπουν στο σχήμα σα να ήταν αυτό το γράφημα της συνάρτησης της οποίας έπρεπε να βρουν τα ακρότατα και όχι το γράφημα της παραγώγου της.

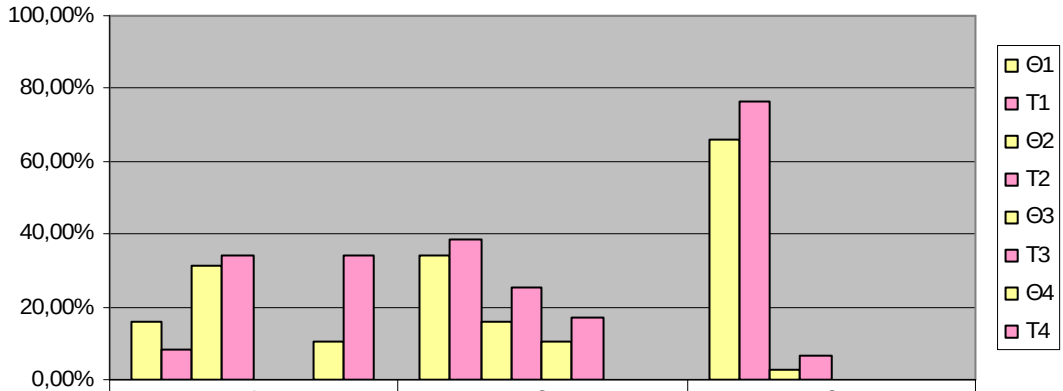
Ο πίνακας επιτυχιών που ακολουθεί είναι χαρακτηριστικός της κατάστασης που παρουσιάστηκε.



	1	2	3
Θετική	42,11%	42,11%	31,58%
Τεχνολογική	23,40%	23,40%	17,02%

Η τεχνολογική κατεύθυνση φαίνεται να υστέρησε σημαντικά σε αυτό το κομμάτι, αφού τα ποσοστά της κυμάνθηκαν περίπου στο μισό ή λίγο πιο πάνω από αυτά της θετικής κατεύθυνσης και βέβαια ένα ποσοστό επιτυχίας της τάξης του 23% δε μπορεί να χαρακτηριστεί ως ικανοποιητική επίδοση.

Ακόμα πιο ενδεικτικός, φαίνεται ο πίνακας των λαθών που έκαναν οι μαθητές.



	1	2	3
Θ1	15,79%	34,21%	65,79%
Τ1	8,51%	38,30%	76,60%
Θ2	31,58%	15,79%	2,63%
Τ2	34,04%	25,53%	6,38%
Θ3	0,00%	10,53%	
Τ3	0,00%	17,02%	
Θ4	10,53%		

Αξίζει να προσέξουμε την ομοιομορφία που παρουσιάζεται και στις δύο κατευθύνσεις στα λάθη Θ2, Τ2 της 1^{ης} στήλης και Θ1, Τ1 της δεύτερης στήλης που είναι τα αντίστοιχα που είναι τα αντίστοιχα Er2VGa1 και Er1VGa2 και που

ουσιαστικά δηλώνουν ότι οι μαθητές απάντησαν διαβάζοντας το γράφημα σα να ήταν το γράφημα της συνάρτησης $f-g$ και όχι το γράφημα της $f'-g'$.

Επίσης ένα όχι ευκαταφρόνητο ποσοστό (15,79%) μαθητών της θετικής κατεύθυνσης δε φάνηκε να έχει κανένα πρόβλημα δίνοντας στο πρώτο υποερώτημα, ακρότατο της συνάρτησης στο ∞. Εδώ βέβαια δε θα σχολιάσουμε τη λανθασμένη ανάγνωση του γραφήματος, η οποία είναι πλέον προφανής σε όλους, αλλά την αντίληψη που δημιουργείται σε αυτή τη μερίδα μαθητών τόσο όσον αφορά στη έννοια του απείρου, όσο και στην έννοια του ακροτάτου μιας συνάρτησης. Αν δεχτούμε ότι η έννοια του ακρότατου διαμορφώνεται ως κάτι συγκεκριμένο στους μαθητές, τότε θα πρέπει να δεχτούμε ότι αυτή η μερίδα των μαθητών προσδίδει στο άπειρο (∞) συγκεκριμένο χαρακτηρισμό και οντότητα. Νομίζουμε όμως ότι η έννοια του απείρου κατέχει μια μάλλον ασαφή θέση στο μυαλό των μαθητών (αλλά και γενικότερα, όλων των ανθρώπων), πράγμα που μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε ότι η έννοια των ακροτάτων, τουλάχιστον από αυτή τη μερίδα των μαθητών που αναφέραμε, δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ακόμη έννοια μέσα στις τόσες που μαθαίνουν, επισυνάπτεται και προσκολλάται στο σύνολο όλων αυτών που έχουν να μάθουν, κενή νοήματος και αναπαραστάσεων.

Ας προσέξουμε επίσης τον εσφαλμένο χαρακτηρισμό των ακροτάτων (ολικά, αντί για το σωστό, τοπικά) και το ποσοστό που αυτός παρουσιάζεται (65,79% για την θετική και 76,6% για την τεχνολογική κατεύθυνση), πράγμα το οποίο όμως εδώ ήταν μάλλον αναμενόμενο, αφού παρουσιάστηκε μεγάλη αστοχία στην ανάγνωση του γραφήματος καθώς επίσης και λόγω της ασαφούς έννοιας των ακροτάτων που παρουσιάζεται σε κάποιους μαθητές, όπως εξηγήσαμε παραπάνω.

Η χρήση των ακροτάτων μιας συνάρτησης, ή για να το θέσουμε σαφέστερα, η υπόθεσή μας (η οποία έχει διαμορφωθεί από τη διδασκαλία μας στην τάξη) ότι τα ακρότατα θα είναι ένα μελανό σημείο στη σκέψη των μαθητών, μαζί με άλλους παράγοντες, μας οδήγησε στο να φτιάξουμε την ερώτηση 5, με την οποία θα ασχοληθούμε αμέσως στη συνέχεια, καθώς και την ερώτηση 7.

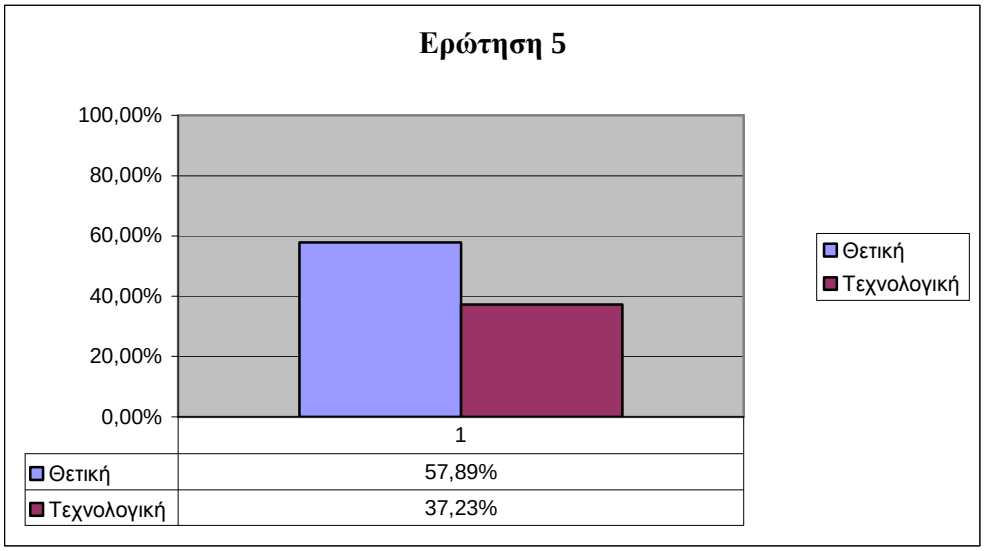
4.3.1.5. Η ερώτηση 5

Η ερώτηση 5 είναι ένα απλό πρόβλημα, ένα **ρεαλιστικό** πρόβλημα. Αντίστοιχο υπάρχει στα μαθηματικά γενικής παιδείας. Διαλέξαμε τα νούμερα έτσι, ώστε η παράγωγος συνάρτηση που θα βγαίνει να προσομοιάζει σχεδόν πλήρως με το

γράφημα που παρουσιάστηκε στην ερώτηση 4. Η ουσιαστική θα λέγαμε διαφοροποίηση, είναι ότι σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το ακρότατο που παρουσιάζεται εδώ είναι ολικό και όχι τοπικό. Θελήσαμε να ελέγξουμε την ικανότητα των μαθητών στο σχηματισμό μιας κατάλληλης για τα δεδομένα του προβλήματος εξίσωσης, όπως επίσης του χειρισμού αυτής, καθώς και της φυσιολογικής ερμηνείας που μπορεί να δώσουν στα αποτελέσματά τους.

Η ερώτηση αυτή βαθμολογήθηκε με 0, αν υπήρχε αστοχία στην αντιμετώπιση, με 0,5, αν ο μαθητής κατάφερνε να δώσει απάντηση έχοντας αρκετές ελλείψεις στην πορεία προς την εύρεσή της και με 1, αν ο μαθητής απαντούσε ολοκληρωμένα ή έκανε κάποια επουσιώδη λάθη. Στις στήλες των λαθών σημειώσαμε τα λάθη που έκανε ο κάθε μαθητής, ασχέτως αν είχε πάρει ακόμη και 1 στη βασική βαθμολόγηση. Αυτό βέβαια έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει συμφωνία στα αθροιστικά ποσοστά της σωστής απάντησης και των λαθών και να εμφανίζεται έτσι ποσοστό μεγαλύτερο του 100%. Αυτό δε μας ενόχλησε ιδιαίτερα στη στατιστική μας επεξεργασία, αφού κύριο μέλημά μας είναι η πληρέστερη και ακριβέστερη αναγνώριση των λαθών.

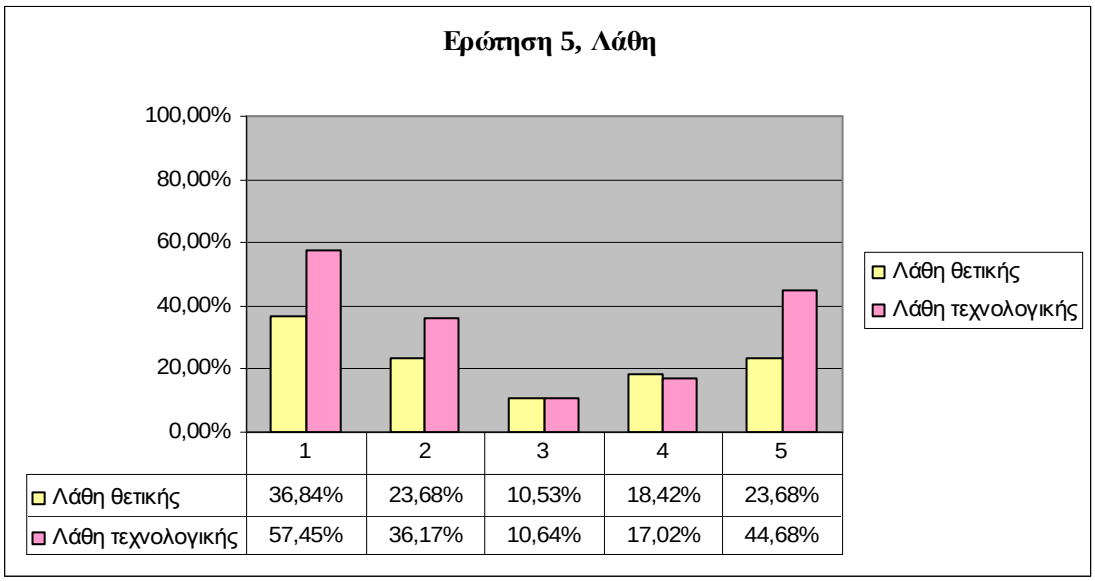
Επειδή οι ελλείψεις που παρουσίασαν οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν με 0,5 δεν ήταν ίδιες σε όλους, συγχωνεύσαμε τις βαθμολογίες τους, θεωρώντας ως σωστή απάντηση, άρα 1 για τη βαθμολόγηση, το αποτέλεσμα που προκύπτει από δύο ημιτελείς απαντήσεις (0,5+0,5). Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:



Όπως βλέπουμε η θετική κατεύθυνση κατάφερε να ΄΄επιπλεύσει΄΄ σ’ αυτή την ερώτηση με ποσοστό λίγο πάνω από το 50%. Αντίθετα η τεχνολογική συρρικνώθηκε κάτω από το 40%. Να υπενθυμίσουμε ότι το πρόβλημα που βάλαμε στην ερώτηση

αυτή είναι πρόβλημα που υπάρχει παρόμοιο στο βιβλίο των μαθηματικών της Γενικής Παιδείας.

Ο πίνακας λαθών είναι πιο διαφωτιστικός σ' αυτή την περίπτωση.



	1	2	3	4	5
Λάθη θετικής	36,84%	23,68%	10,53%	18,42%	23,68%
Λάθη τεχνολογικής	57,45%	36,17%	10,64%	17,02%	44,68%

Τα σημαντικά λάθη είναι τα 1, 5 και 2 (αντίστοιχα των Er1P, Er5P και Er2P) με την τεχνολογική κατεύθυνση να προηγείται με σημαντική διαφορά σε καθένα από αυτά τα λάθη. Ας θυμηθούμε ότι αυτά τα λάθη είναι, με τη σειρά που τα αναφέραμε, τα ακόλουθα:

- *Λάθος 1:* Λανθασμένη ή ελλιπής ερμηνεία
- *Λάθος 5:* Άλλα λάθη ή δεν απαντά
- *Λάθος 2:* Λανθασμένο Π. Ο.

4.3.1.6. Η ερώτηση 6

Στην ερώτηση 6 ζητήσαμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν το γράφημα της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης, όταν τους παρουσιάζεται το γράφημα της συνάρτησης. Στην ουσία θα μπορούσε κανείς να πει ότι ζητάμε την ανάποδη συμπλήρωση ενός πίνακα της παρακάτω μορφής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f'				
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

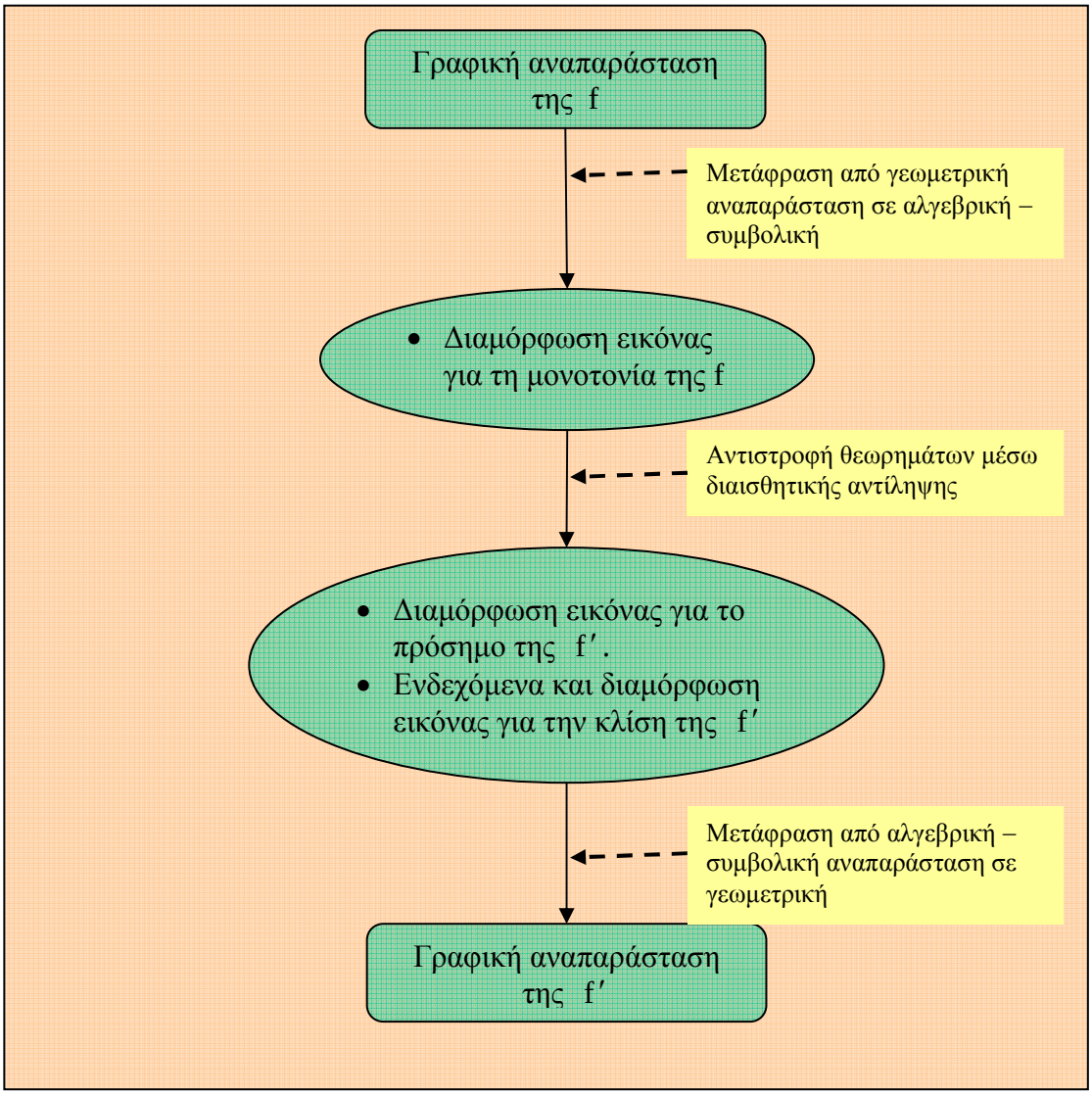
Βέβαια, δεν είναι σε κάθε ερώτημα η ίδια μορφή του πίνακα. Επίσης εδώ θα μπορούσε κάποιος να αντιτάξει ότι ζητάμε την αντιστροφή του αντίστοιχου θεωρήματος. Δεν θα φέρουμε καμία αντίρρηση σε αυτό. Πράγματι αυτό ζητάμε, αν το θέσουμε σε μια απλουστευμένη βάση. Όμως εκτιμούμε ότι θα πρέπει να πάμε λίγο βαθύτερα. Θα πρέπει νομίζω να συμφωνήσουμε στο ότι οι μαθητές δεν έχουν διδαχτεί και ούτε έχουν εκπαιδευτεί στην έννοια της ισοδυναμίας και της συνεπαγωγής. Κατά συνέπεια, με μεγάλη ευκολία, μπορούν να αντιστρέψουν μαθηματικές προτάσεις. Εκτός αυτού, επειδή είναι στη φύση του ανθρώπου η γενίκευση, θεωρούμε ότι μια προφανής, έστω κι αν είναι λανθασμένη, γενίκευση που θα μπορούσε να κάνει κανείς είναι η γενίκευση στο ευθύ και το αντίστροφο μιας πρότασης. Στηριχτήκαμε επάνω σε αυτό και στηριχτήκαμε και στη διαισθητική αντίληψη των μαθητών για να διαμορφώσουμε αυτή την ερώτηση. Επιπλέον, επειδή θέλουμε να διαπιστώσουμε την ύπαρξη ή όχι γεωμετρικών αναπαραστάσεων και διασυνδέσεων σε οποιαδήποτε μορφή κι αν αυτές εμφανίζονται, τα υποερωτήματα 5 και 6 παρουσίασαν μια τροποποιημένη – σε σχέση με την απλή – κυβική συνάρτηση. Τα υποερωτήματα 3 και 4 παρουσίασαν μια παραβολή, και τα 1 και 2 μια ευθεία και τη συνάρτηση – απόλυτο. Να σημειώσουμε ακόμη ότι τα υποερωτήματα 4 και 6 μπορούν να απαντηθούν άμεσα, αν ο μαθητής αναπτύξει γεωμετρικές διαδικασίες και διασυνδέσεις, συνεπικουρούμενες από αλγεβρικές, δεδομένου του ότι οι συναρτήσεις που παρουσιάζονται σ’ αυτά είναι οι αντίθετες των συναρτήσεων που παρουσιάζονται στα υποερωτήματα 3 και 5, άρα, κατά συνέπεια, οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων αυτών των συναρτήσεων (στα υποερωτήματα 4 και 6, δηλαδή) είναι απλά συμμετρικές ως προς x΄x των γραφικών παραστάσεων που προκύπτουν από τα υποερωτήματα 3 και 5. Αν ο μαθητής μπορούσε να το αντιληφθεί αυτό, τότε είχε γλιτώσει πολύτιμο χρόνο επεξεργασίας.

Όμως, θα πρέπει ίσως να σταθούμε σε κάτι βαθύτερο. Αυτό που παρουσιάστηκε στους μαθητές είναι το γράφημα μιας συνάρτησης. Από αυτό θα έπρεπε να αντλήσουν αλγεβρικές πληροφορίες, να κάνουν διαισθητική αντιστροφή των αντίστοιχων θεωρημάτων, να συμπληρώσουν, έστω και νοητά, την πρώτη γραμμή του πίνακα που παρουσιάσαμε στη προηγούμενη σελίδα και κατόπιν να κάνουν γεωμετρική μετάφραση και να παρουσιάσουν το γράφημα μας πρώτης παραγώγου.

Οι μαθητές έχουν λοιπόν σ’ αυτό το ερώτημα, την *΄΄υποχρέωση΄΄* να κινηθούν μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, μεταξύ διαφορετικών σημειογραφικών ενδείξεων, να μεταφράσουν κατάλληλα αυτές και να βγάλουν τα συμπεράσματά τους.

Επειδή οι μαθητές με κανέναν τρόπο δεν έχουν εκπαιδευτεί στην κλίση της παραγώγου σε σχέση με το γράφημα της f, ή το ανάποδο, κάναμε δεκτές όλες τις απαντήσεις που συμφωνούσαν κατά κύριο λόγο στην αλγεβρική αντιμετώπιση του κάθε υποερωτήματος, εννοώντας μ' αυτό ότι κάναμε δεκτές τις υπαινισσόμενες απαντήσεις (υπό την έννοια ότι δεν αναφέρθηκαν ρητά στο γραπτό) όπως π.χ., «η συνάρτηση η παρουσιάζει ακρότατο στο τάδε σημείο, άρα η παράγωγος, εφόσον υπάρχει σε αυτό το σημείο (δηλαδή, δεν έχουμε γωνιακό σημείο), θα πρέπει να είναι ίση με 0» και άρα ο μαθητής σε εκείνο το σημείο εμφανίζει την παράγωγο να τέμνει τον x΄x και δεν απορρίψαμε απαντήσεις που δεν εμφάνιζαν καλά την κλίση μας παραγώγου, εκτός κι αν ήταν υπερβολικά λανθασμένες.

Προτού προχωρήσουμε, είναι χρήσιμο να δούμε αυτή την πορεία που αναμέναμε να ακολουθήσουν οι μαθητές, μέσα από τη σχηματική αναπαράσταση που ακολουθεί.

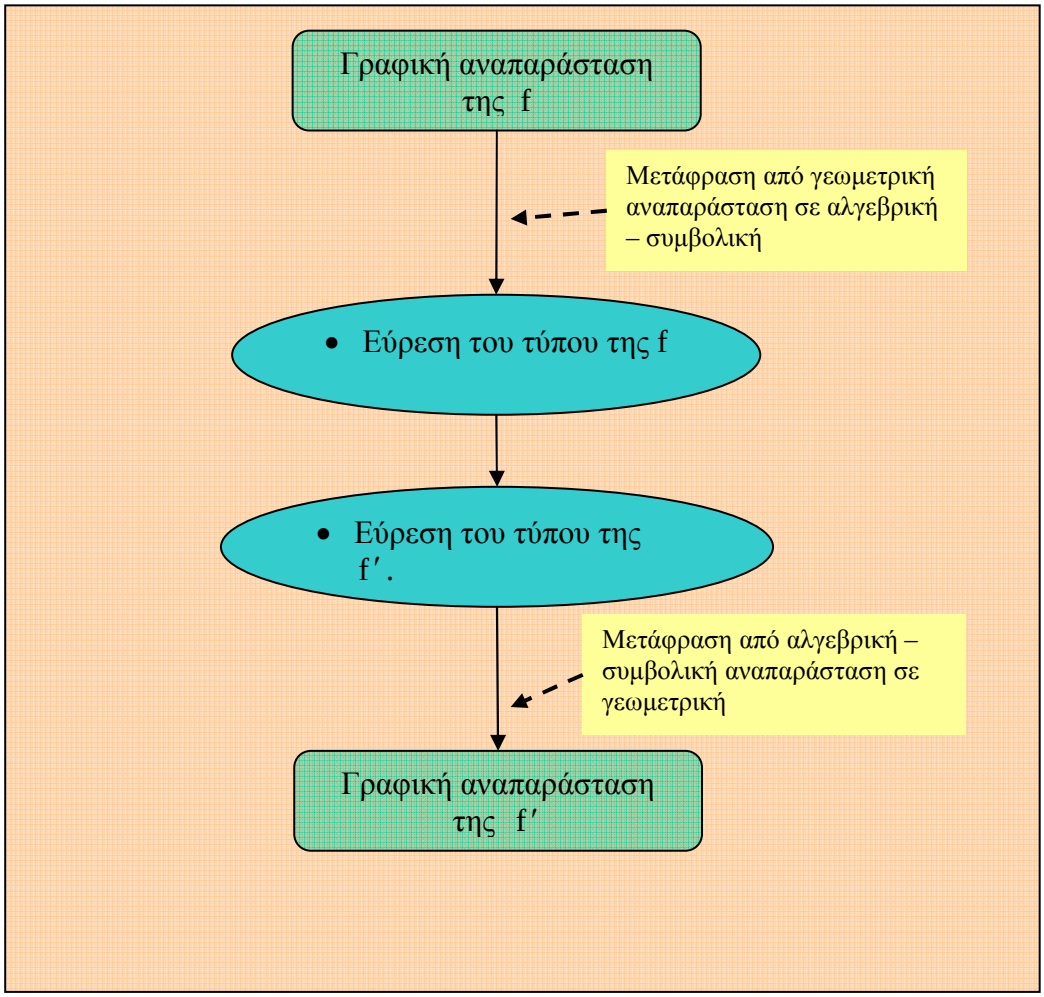


Αυτές είναι οι εκτιμήσεις που κάναμε εμείς για μια κάποια φυσιολογική πορεία των μαθητών. Δεν πάει να πει αυτό όμως ότι θα είναι και τέτοια τα αποτελέσματα που θα πάρουμε. Θα πρέπει να θυμηθούμε σ' αυτό το σημείο, τις έρευνες που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα μας εργασίας μας (αλλά και πόσες όσες άλλες υπάρχουν) οι οποίες αναδεικνύουν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης των μαθητών, με σημαντική μάλιστα υπεροχή σε αρκετές περιπτώσεις, έναντι του γεωμετρικού. Για το λόγο αυτό, τα υποερωτήματα 1 έως και 4 επιλέχτηκαν με τρόπο ώστε να μπορούν να απαντηθούν και αλγεβρικά, εκτός από γεωμετρικά. Και εννοούμε με αυτό ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν οικείες συναρτήσεις, ευθεία και παραβολή, να θεωρήσουν τους γενικούς τύπους αυτών των συναρτήσεων μέσω των γραφημάτων που τους παρουσιάζουμε και στη συνέχεια να βρουν τους αντίστοιχους τύπους, επιλέγοντας κατάλληλα σημεία (κυρίως σημεία ακροτάτων). Τέλος με μια απλά αλγοριθμική έως ρουτινιάρικη εργασία θα βρουν τις παραγώγους τους και θα τις σχεδιάσουν. Τα υποερωτήματα 5 και 6 (ή, έστω μόνο το 5, μιας και όπως προαναφέραμε, το 6 αποτελεί το συμμετρικό του ως προς x΄x) επιλέχτηκαν ώστε να μην μπορούν να αναγνωριστούν ευδιάκριτα σημεία μέσω μας γραφικής παράστασης μας f, ακόμη κι αν ο μαθητής μπορούσε να αναγνωρίσει ότι τα γραφήματα που του παρουσιάζονται είναι μας γενικής μορφής $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Ο μαθητής που θα απαντήσει σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει οπωσδήποτε να αναπτύξει γεωμετρικές διαδικασίες εκτός κι αν είναι υπερβολικά καλός χρήστης των αλγεβρικών διαδικασιών, οι οποίες όμως, κατά την εκτίμησή μας, για να μπορέσουν να δώσουν απάντηση στα υποερωτήματα αυτά θα πρέπει να εμφανιστούν σε ένα υψηλότατο επίπεδο ενεργειών.

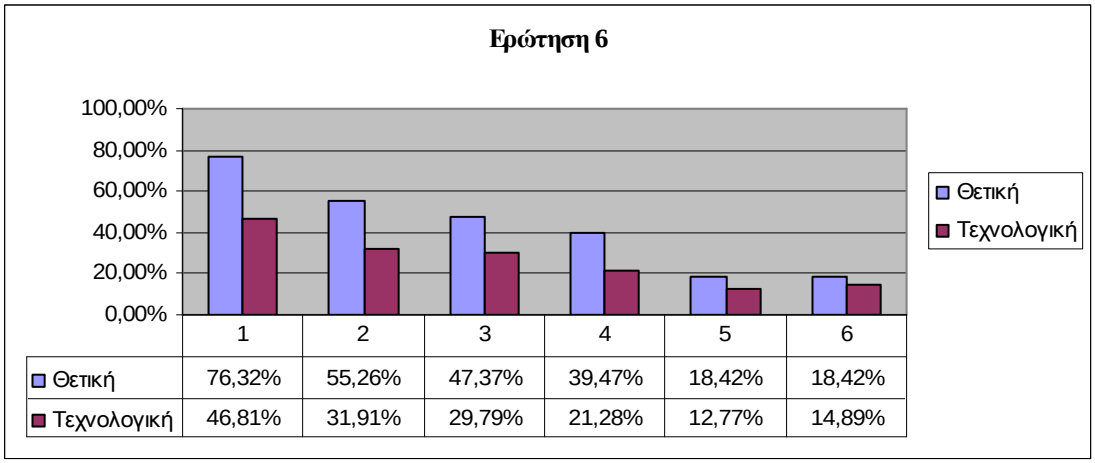
Θεωρούμε ότι αν δώσουμε σε έναν μέσο μαθητή μας Γ΄ Λυκείου τον τύπο μιας συνάρτησης και του ζητήσουμε χωρίς περιστροφές να βρει μονοτονία και ακρότατα, θα τα καταφέρει αρκετά καλά (ιδίως αν πρόκειται για συναρτήσεις όπως αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο ερώτημά μας εδώ). Αυτή είναι μια αλγοριθμική διαδικασία που μπορεί να ενταχθεί μέσα στο γενικό σχήμα περί μονοτονίας συνάρτησης και τρόπων εύρεσής της που έχει δομήσει ο εκάστοτε μαθητής. Ο πίνακας μονοτονίας που παρουσιάσαμε στη σελίδα 71, έστω κι αν απαιτεί αντιστροφή μας κατάστασης για να συμπληρωθεί, είναι μέρος αυτής της διαδικασίας. Η δυσκολία λοιπόν του ερωτήματος δεν είναι, θεωρούμε, στη συμπλήρωση αυτού του πίνακα, αλλά στο ότι πρέπει ο μαθητής να σκεφτεί να δημιουργήσει έναν τέτοιο, όταν οι πληροφορίες που του δίνονται είναι σιωπηρές και υπονοούμενες, όπως αυτές που δίνει ένα γράφημα. Αυτό

μπορεί να γίνει μόνο αν ο μαθητής κατέχει γεωμετρικές διασυνδέσεις και αν έχει ισχυρούς δεσμούς στο πλέγμα του σχήματός του.

Έτσι, αν και τελικά θα πρέπει να είναι αναμενόμενη για τα τέσσερα πρώτα υποερωτήματα μια σειρά ενεργειών όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, τα δύο τελευταία υποερωτήματα θα αναδείξουν, αν υπάρχουν, γεωμετρικές διασυνδέσεις στους μαθητές και η αντιμετώπιση του όλου θέματος, αν υπάρχουν μεταφράσεις.



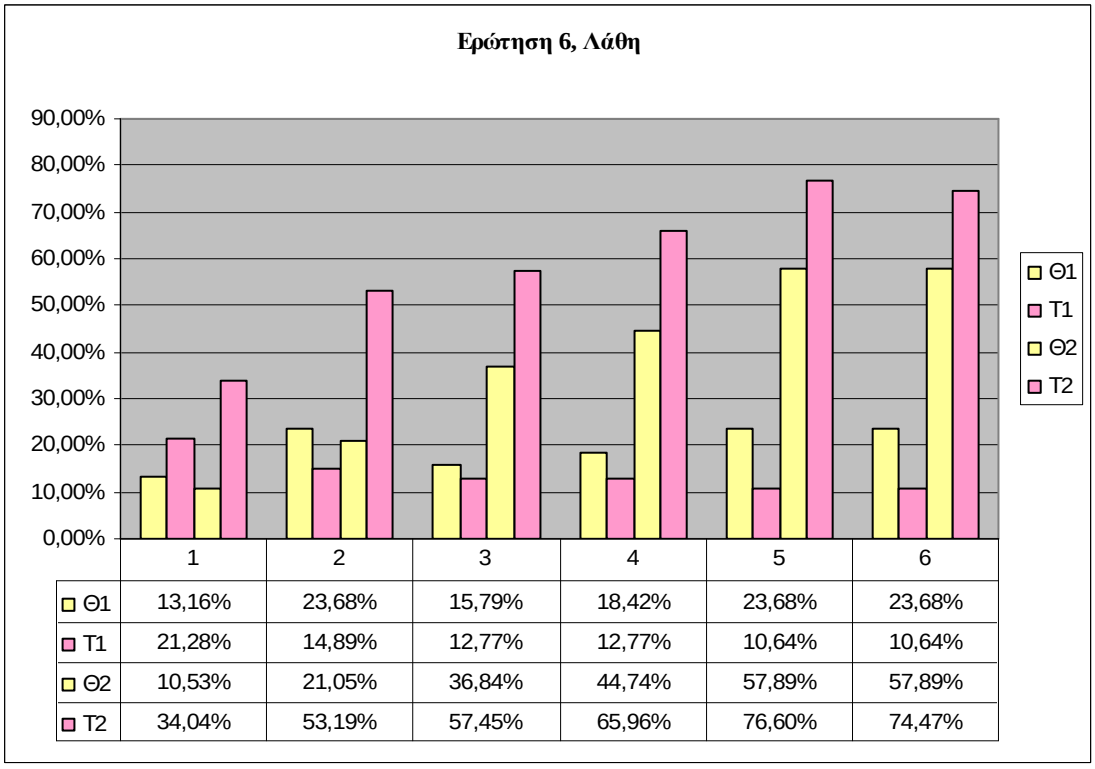
Όπως βλέπουμε στον ακόλουθο πίνακα, υπάρχει φθίνουσα πορεία επιτυχιών από το πρώτο έως το έκτο υποερώτημα με την τεχνολογική κατεύθυνση να υστερεί σημαντικά έναντι της θεωρητικής, ακόμη και στις απλές περιπτώσεις.



	1	2	3	4	5	6
Θετική	76,32%	55,26%	47,37%	39,47%	18,42%	18,42%
Τεχνολογική	46,81%	31,91%	29,79%	21,28%	12,77%	14,89%

Εμφανώς λοιπόν παρουσιάστηκε απουσία γεωμετρικών αναπαραστάσεων και διασυνδέσεων. Μάλλον το όποιο νοητικό σχήμα έχει δομηθεί στο μυαλό του εκάστοτε μαθητή περί συνάρτησης και παραγώγου φαίνεται να είναι ασθενές και να περιορίζεται μόνο σε αλγοριθμικές διαδικασίες μέσω συμβόλων.

Στον πίνακα λαθών βλέπουμε ότι οι μαθητές προτίμησαν κατά κύριο λόγο να μην απαντήσουν στα υποερωτήματα.



	1	2	3	4	5	6
Θ1	13,16%	23,68%	15,79%	18,42%	23,68%	23,68%
Τ1	21,28%	14,89%	12,77%	12,77%	10,64%	10,64%
Θ2	10,53%	21,05%	36,84%	44,74%	57,89%	57,89%
Τ2	34,04%	53,19%	57,45%	65,96%	76,60%	74,47%

Εδώ παρουσιάστηκε κι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον κατά τη γνώμη μας εύρημα. Στο $5^{ο}$ και $6^{ο}$ υποερώτημα (αυτό με την κυβική συνάρτηση) εμφανίστηκαν 8 μαθητές οι οποίοι έδωσαν για γράφημα παραγώγου τμήματα ευθείας! Θα συζητήσουμε αυτό το θέμα στην ενότητα των συνεντεύξεων.

4.3.1.7. Η ερώτηση 7

Στην ερώτηση 7 παρουσιάσαμε τα γραφήματα κάποιων παραγώγων και ζητήσαμε ξεκάθαρα τρία πράγματα:

- Σημεία ακροτάτων
- Χαρακτηρισμό Ακροτάτων
- Γράφημα της f

Εδώ αναμένουμε πλέον ευθέως, ως έναν εύκολο κατά τη γνώμη μας τρόπο αντιμετώπισης του ερωτήματος, τη δημιουργία δηλαδή ενός πίνακα μονοτονίας, της μορφής π.χ.

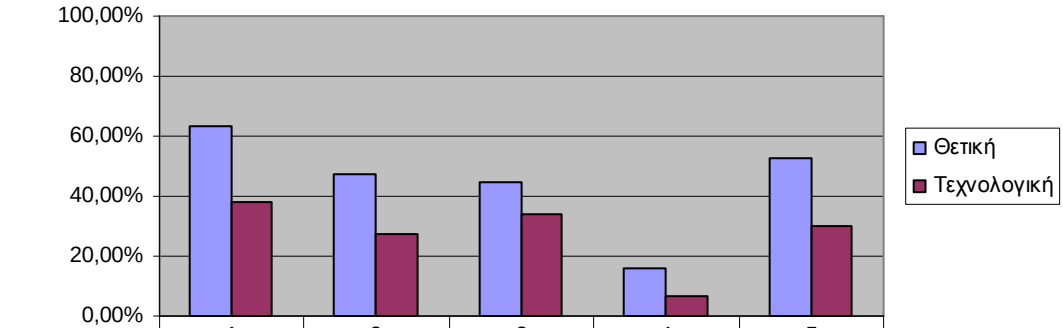
x	$-\infty$					$+\infty$
f′		+	0	–	0	+
f						

Η δυσκολία που υπάρχει είναι ότι στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της f, ουσιαστικά ζητάμε έναν αντιπρόσωπο από το αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Το υποερώτημα 2 παρουσιάζει μια παραβολή, όπως και η 4η ερώτηση προηγουμένως, προσπαθώντας να ελέγξουμε αν επηρεάζει τους μαθητές η εκφώνηση ή αν η παρουσία ενός σχήματος επισκιάζει τον περίγυρο.

Στην εύρεση σημείων ακροτάτων έχουμε τον ακόλουθο πίνακα επιτυχιών:

Ερώτηση 7, Εύρεση σημείων ακροτάτων

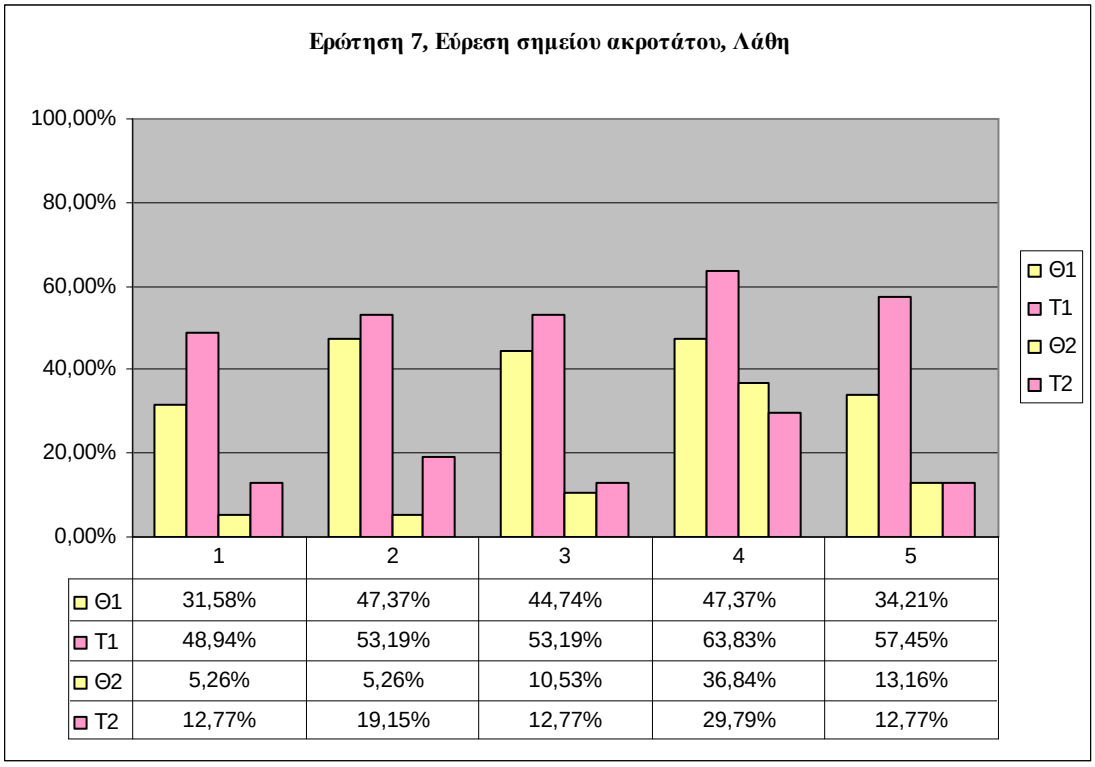


	1	2	3	4	5
Θετική	63,16%	47,37%	44,74%	15,79%	52,63%
Τεχνολογική	38,30%	27,66%	34,04%	6,38%	29,79%

Με προφανή αποτυχία στο 4ο υποερώτημα, το άμεσο που μπορούμε να συνάγουμε είναι ότι οι τριγωνομετρικές και γενικότερα οι περιοδικές συναρτήσεις αποτελούν

σοβαρό εμπόδιο για τους μαθητές, με το κύριο πρόβλημα εστιαζόμενο στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων αυτών, ιδίως των ημιτονοειδών, αφού για τους περισσότερους μαθητές αυτό φαίνεται να είναι το $[-1,1]$. Δεν μπορούμε να μην κάνουμε τον παραλληλισμό με τις αντιλήψεις των Tall & Vinner, σύμφωνα με τις οποίες, διαφορετικές εικόνες για μια έννοια μπορούν να συνυπάρχουν στο μυαλό του ατόμου, χωρίς να δημιουργείται κανένα πρόβλημα στη λειτουργία του σε διάφορες καταστάσεις. Είναι αυτό που οι ανωτέρω συγγραφείς ονόμασαν *ενδεχόμενο παράγοντα σύγκρουσης*. Γιατί πως αλλιώς να ερμηνεύσει κανείς το φαινόμενο να μπορούν να απαντούν εύκολα οι μαθητές στην ερώτηση «πόσο είναι το $\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$;» και από την άλλη μεριά να λένε και να υπερασπίζονται με θέρμη την άποψή τους, ότι το x δεν μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες του -1 και μεγαλύτερες του 1; Τι αλήθεια έχει δημιουργηθεί στο μυαλό τους όταν λένε ότι: «*το ημίτονο παίρνει τιμές από το –1 έως το 1 και όταν λένε ότι το x παίρνει τιμές από το –1 έως το 1*»; Έχουν αντιληφθεί το ημίτονο ως συνάρτηση, το έχουν αντιληφθεί ως αποτέλεσμα, ως τι; Δε μπορούμε να μπούμε στο μυαλό του καθενός. Καταθέτοντας προσωπική εμπειρία, αναφέρουμε ότι τα τελευταία χρόνια, στην ερώτηση που απευθύνουμε (ο γράφων, δηλαδή) στους μαθητές που ξεκινούν τη Γ΄ Λυκείου «*τι είναι το ημίτονο*;» αισθανόμαστε ευτυχείς αν βρεθεί το πολύ ένας να μας απαντήσει ότι είναι συνάρτηση. Δυστυχώς υπάρχουν χρονιές που δεν απαντάει κανείς. Η συνηθέστερη απάντηση που παίρνουμε είναι ότι είναι αριθμός. Αυτός ήταν και ένας από τους λόγους που βάλαμε το συγκεκριμένο υποερώτημα και βέβαια, μάλλον το αποτέλεσμα, σύμφωνα με τα παραπάνω, ήταν αναμενόμενο.

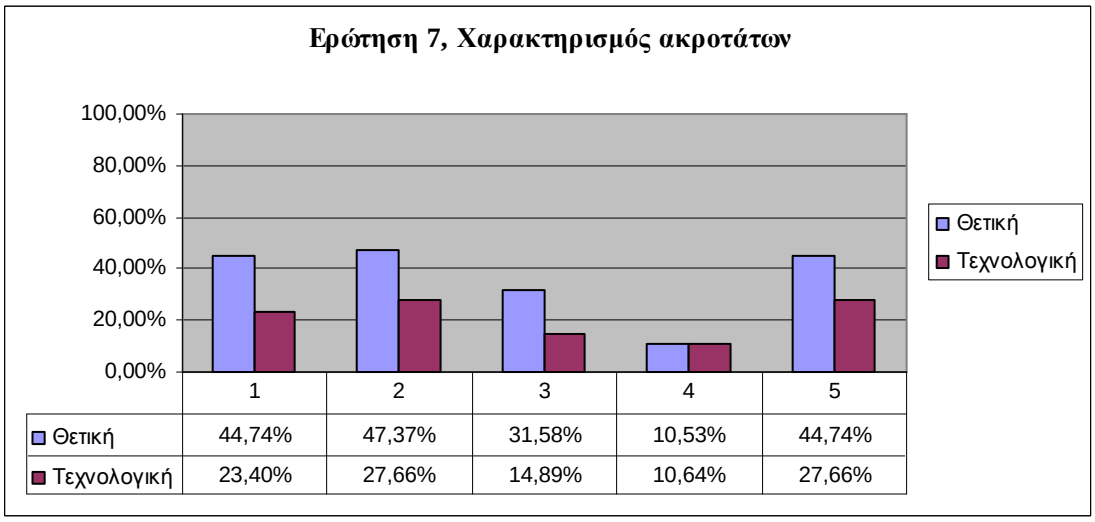
Οι παραπάνω απόψεις φαίνεται να ισχυροποιούνται και από τον πίνακα λαθών για το αντίστοιχο τμήμα της ερώτησης. Και η θετική και η τεχνολογική κατεύθυνση εμφάνισαν το μεγαλύτερο ποσοστό λαθών στο $4^{ο}$ υποερώτημα, κάνοντας το $1^{ο}$ λάθος σύμφωνα με την κωδικοποίησή μας (Er1Dgd1), δίνοντας δηλαδή λανθασμένες τιμές για το x ως σημείο του πεδίου ορισμού που παρουσιάζεται το ακρότατο της συνάρτησης. Επίσης, αρκετό ποσοστό προτίμησε να μην απαντήσει σ΄ αυτό το υποερώτημα.



	1	2	3	4	5
Θ1	31,58%	47,37%	44,74%	47,37%	34,21%
Τ1	48,94%	53,19%	53,19%	63,83%	57,45%
Θ2	5,26%	5,26%	10,53%	36,84%	13,16%
Τ2	12,77%	19,15%	12,77%	29,79%	12,77%

Βλέπουμε ακόμη ότι οι μαθητές έδειξαν στο σύνολό τους προθυμία να απαντήσουν σε όλα τα υποερωτήματα και τα περισσότερα λάθη τους οφείλονται στην εσφαλμένη εύρεση σημείου. Εδώ θα πρέπει να κάνουμε τον παραλληλισμό με τα αποτελέσματα που βγήκαν από την έρευνα της K. Juter[7], σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές ήταν πεπεισμένοι για την ικανότητά τους να αδράξουν την έννοια.

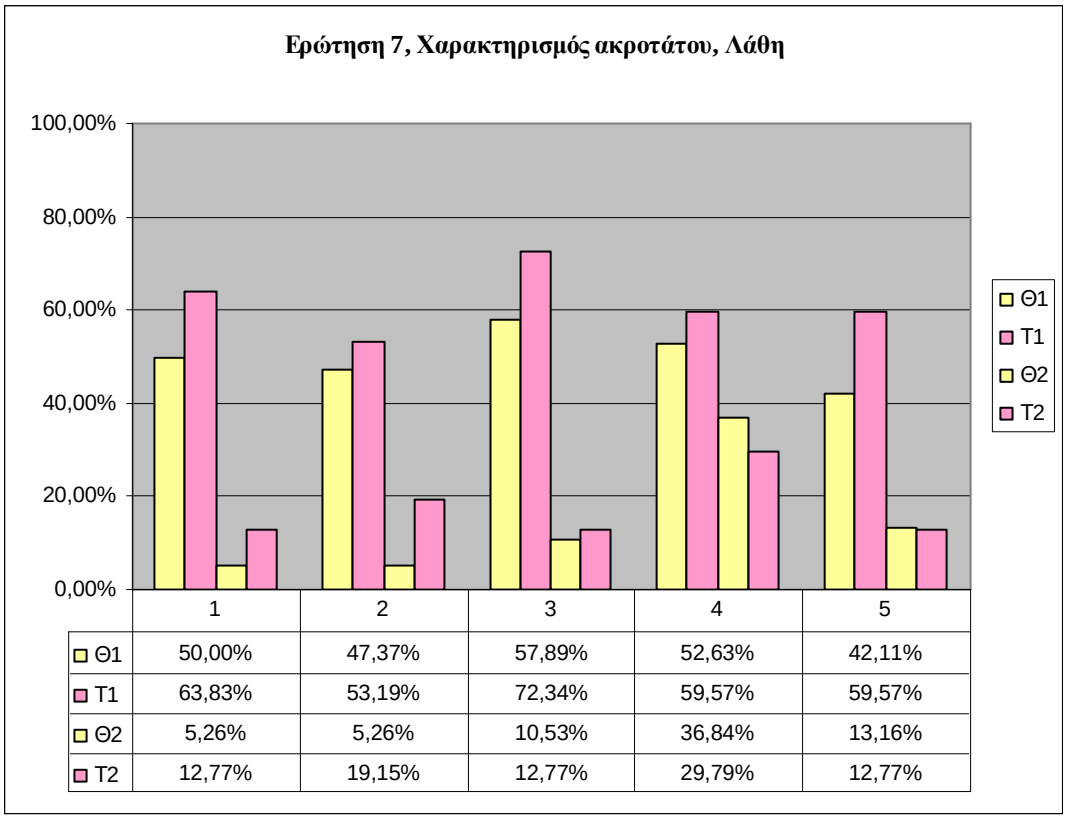
Ο πίνακας επιτυχιών στους χαρακτηρισμούς των ακροτάτων κυμάνθηκε στα ίδια περίπου επίπεδα με ελαφρές αυξομειώσεις.



	1	2	3	4	5
Θετική	44,74%	47,37%	31,58%	10,53%	44,74%
Τεχνολογική	23,40%	27,66%	14,89%	10,64%	27,66%

[7] Βλ. *Ενότητα 3. Συναφείς έρευνες και ανασκόπηση της βιβλιογραφίας*

Ανάλογος είναι και ο πίνακας λαθών.



	1	2	3	4	5
Θ1	50,00%	47,37%	57,89%	52,63%	42,11%
Τ1	63,83%	53,19%	72,34%	59,57%	59,57%
Θ2	5,26%	5,26%	10,53%	36,84%	13,16%
Τ2	12,77%	19,15%	12,77%	29,79%	12,77%

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των επιτυχιών στους παραπάνω πίνακες εύρεσης σημείων ακροτάτων και χαρακτηρισμού ακροτάτων για το δεύτερο γράφημα, όπου παρουσιάζεται παραβολή, με τα αποτελέσματα της 4^{ης} ερώτησης, βλέπουμε τα εξής:

- Στην 7^{η} ερώτηση και οι δύο κατευθύνσεις έδωσαν τα ίδια ακριβώς ποσοστά:

	Εύρεση σημείων	**Χαρακτηρισμός σημείων**
Θετική	47,37%	47,37%
Τεχνολογική	27,66%	27,66%

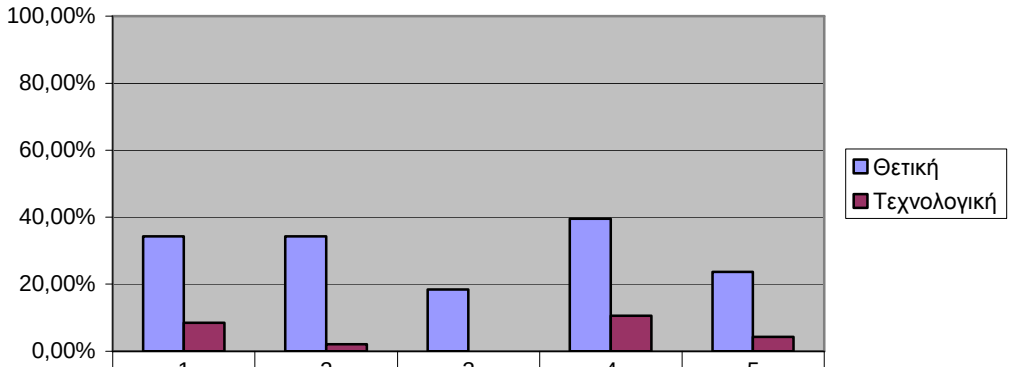
- Στην 4^{η} ερώτηση η διαμόρφωση ενός αντίστοιχου πίνακα έχει ως εξής:

	Εύρεση σημείων	**Χαρακτηρισμός σημείων**
Θετική	42,117%	31,58%
Τεχνολογική	23,40%	17,02%

Εκτιμούμε ότι αυτή η διαφορά που εμφανίζεται οφείλεται και κατά ένα μέρος στη λεκτική διατύπωση που ακολουθήσαμε στην 4η ερώτηση.

Τέλος μένει το ερώτημα που ζητάμε γραφική παράσταση. Υπενθυμίζουμε ότι εδώ το ερώτημα ουσιαστικά ζητάει έναν αντιπρόσωπο από το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αυτό το τονίσαμε στην εκφώνηση αυτού του ερωτήματος, γράφοντας με έντονα γράμματα ότι ζητάμε **μια** πρόχειρη γραφική παράσταση της f. Δεν μπορούμε να ξέρουμε βέβαια σε ποιο βαθμό έγινε αυτό αντιληπτό από τους μαθητές.

Ερώτηση 7, Γράφημα συνάρτησης



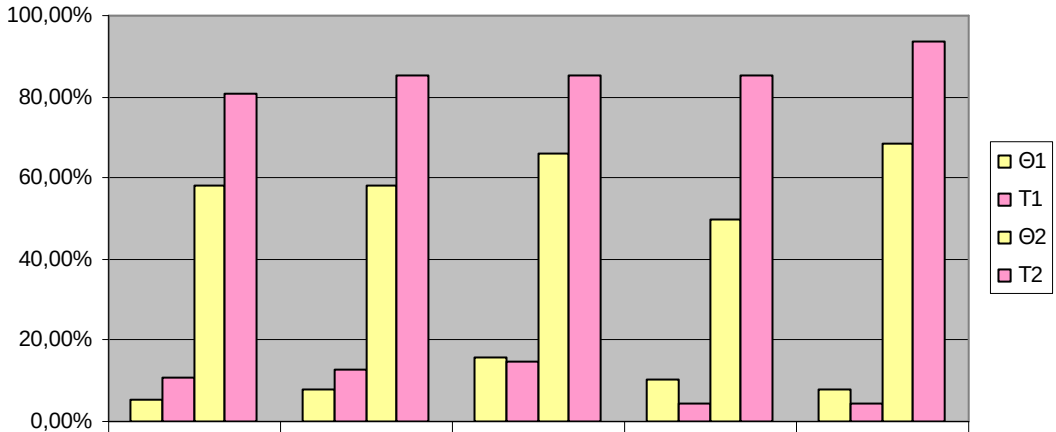
	1	2	3	4	5
Θετική	34,21%	34,21%	18,42%	39,47%	23,68%
Τεχνολογική	8,51%	2,13%	0,00%	10,64%	4,26%

Η θετική κατεύθυνση τα πήγε σαφώς καλύτερα από την τεχνολογική και πάλι όμως δεν κατάφερε να ξεπεράσει ούτε σε ένα ερώτημα το 40%. Η δε τεχνολογική μόλις σε ένα υποερώτημα (το 4ο) κατάφερε να εμφανίσει διψήφιο ποσοστό επιτυχίας (10,64%).

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, δε μπορούμε να γνωρίζουμε αν τελικά μπέρδεψε τους μαθητές η ζήτηση του αόριστου ολοκληρώματος. Εκτιμούμε όμως ότι δεν είναι αυτή η κύρια αιτία της αποτυχίας τους. Μια πιθανότερη αιτία φαίνεται να είναι ότι δε σχημάτισαν – όχι κατ' ανάγκη στο γραπτό τους – έναν πίνακα μονοτονίας. Από τον έλεγχο των γραπτών, διαπιστώσαμε ότι ακόμη και κάποιοι μαθητές που εμφάνισαν γραπτά αυτόν τον πίνακα μονοτονίας, παρ' όλο που δεν τους ζητήθηκε ευθέως, στο τέλος δεν απέφυγαν τα λάθη στη γραφική παράσταση.

Ο πίνακας λαθών θα μας δώσει κάποια επιπλέον χρήσιμα συμπεράσματα.

Ερώτηση 7, Γράφημα συνάρτησης, Λάθη



	1	2	3	4	5
Θ1	5,26%	7,89%	15,79%	10,53%	7,89%
T1	10,64%	12,77%	14,89%	4,26%	4,26%
Θ2	57,89%	57,89%	65,79%	50,00%	68,42%
T2	80,85%	85,11%	85,11%	85,11%	93,62%

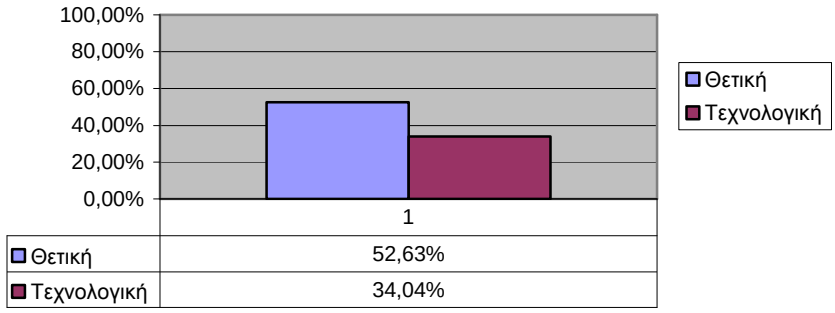
Όπως βλέπουμε το κυριότερο λάθος που έκαναν οι μαθητές και των δύο κατευθύνσεων είναι το 2^{ο} λάθος (Er2Dg(a, b, c, d, e)fg), δηλαδή προτίμησαν να μην απαντήσουν. Φαίνεται λοιπόν και πάλι, με έναν αδιαμφισβήτητο, κατά την άποψή μας, τρόπο, η αποστροφή των μαθητών προς τις γραφικές παραστάσεις.

4.3.1.8. Η ερώτηση 8

Στην ερώτηση 8 δώσαμε αλγεβρικές πληροφορίες στους μαθητές και τους ζητήσαμε να τις αναγνωρίσουν σε κάποια γραφήματα. Δώσαμε τις τιμές της συνάρτησης, της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της σε ένα σημείο και παρουσιάσαμε 6 γραφήματα. Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ποιο ή ποια από τα γραφήματα ικανοποιούσαν και τις τρεις πληροφορίες που τους είχαν δοθεί.

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα επιτυχιών:

Ερώτηση 8

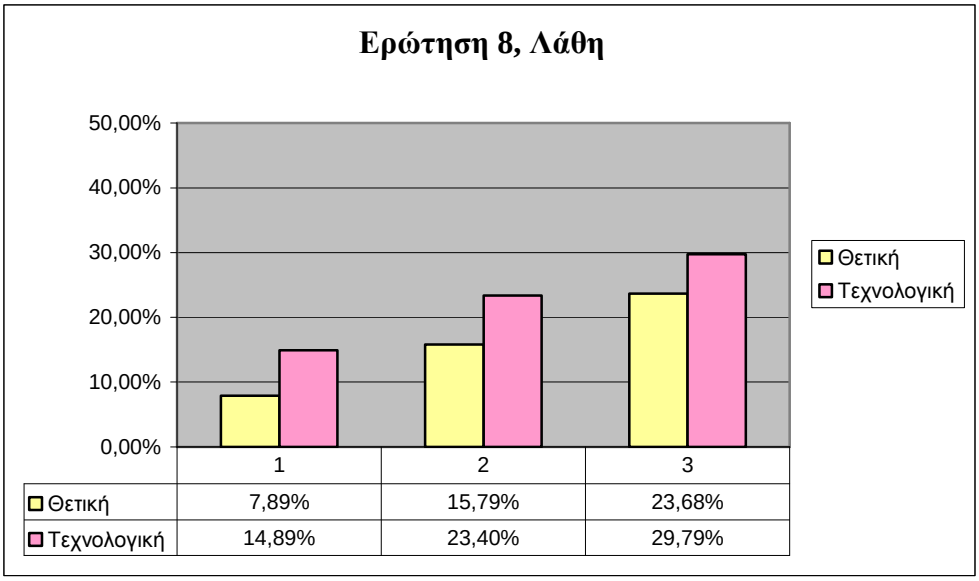


	1
Θετική	52,63%
Τεχνολογική	34,04%

Και εδώ, η απλή κατά τη γνώμη μας μετάφραση, μέσω ανάγνωσης, γραφημάτων, από αλγεβρική σε γεωμετρική αναπαράσταση δε στέφθηκε με ιδιαίτερη επιτυχία. Η θετική κατεύθυνση μόλις που ξεπέρασε το 50%.

Ας προσέξουμε ότι οι μαθητές δεν είχαν να σχεδιάσουν κάποια γραφική παράσταση. Δεν είχαν να αντλήσουν άμεσα πληροφορίες από κάποια γραφική παράσταση, πράγμα το οποίο είναι από τη φύση του δύσκολο, διότι σε κάθε γραφική παράσταση υπάρχει πλήθος πληροφοριών και θα πρέπει κανείς να επικεντρωθεί μόνο σ' αυτές που τον ενδιαφέρουν. Είχαν απλά να αναγνωρίσουν κάποιες συγκεκριμένες πληροφορίες σε συγκεκριμένα γραφήματα. Η λέξη ΄΄απλά΄΄ που χρησιμοποιήσαμε, είναι βέβαια μια δικιά μας εκτίμηση, που τα αποτελέσματα που πήραμε όχι μόνο δεν την ενίσχυσαν, αλλά μάλλον τείνουν να την απορρίψουν. .

Από τον πίνακα λαθών θα πρέπει να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.



	1	2	3
Θετική	7,89%	15,79%	23,68%
Τεχνολογική	14,89%	23,40%	29,79%

Το περισσότερο ποσοστό των μαθητών και εδώ προτίμησε να μην απαντήσει. Τουλάχιστον εδώ είναι κατά πολύ μικρότερο των άλλων αντίστοιχων ποσοστών που εμφανίστηκαν για τη μη απάντηση.

Θα πρέπει ακόμη, νομίζουμε, να δούμε με περισσότερη προσοχή τα ποσοστά (15,79% για την θετική και 23,40 για την τεχνολογική) των μαθητών που έκαναν το 2^{ο} λάθος (Er2IG), που έδωσαν δηλαδή, άλλο γράφημα ως σωστή απάντηση. Πέρα από τη δυσκολία που φάνηκε ότι υπάρχει στη μετάφραση – μεταφορά δεδομένων από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο και πέρα από τη δυσκολία που θα εμφανιστεί

αυξημένη όταν το ένα είδος αναπαράστασης είναι γεωμετρικού – γραφικού τύπου, υπάρχει κάτι ακόμη που πρέπει να δούμε, το οποίο και εξηγούμε ευθύς αμέσως.

Κατά τη γνώμη μας, τα παραπάνω ποσοστά θα πρέπει να συνδεθούν άμεσα με τα αντίστοιχα *κελιά* του Vinner, τα οποία σ' αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι είναι άδεια. Υπάρχουν αρκετά σημεία στην έρευνά μας που οι απαντήσεις των αντίστοιχων ερωτημάτων ή υποερωτημάτων μπορούν να οδηγήσουν σε έναν τέτοιο ισχυρισμό. Λόγω της πολυπλοκότητας των παραμέτρων που μπορεί να παρεμβαίνουν σε άλλα ερωτήματα, αποφύγαμε μέχρι στιγμής έναν τέτοιο σχολιασμό. Εδώ όμως, πάντα κατά την άποψή μας, είναι ένα από τα πλέον εμφανή σημεία της κενότητας του κελιού της εικόνας που έχει σχηματίσει ο μαθητής. Δεν ξέρουμε και δε μπορούμε να το ελέγξουμε από τα στοιχεία που έχουμε στη διάθεσή μας, αν αυτή η αποτυχία οφείλεται στο συνδυασμό των τριών πραγμάτων που έπρεπε να έχει το ζητούμενο γράφημα ή αν οφείλεται μεμονωμένα σε κάποιο από αυτά.

Τελειώνουμε την παράθεση των στατιστικών αποτελεσμάτων μέσω XL με το συγκεντρωτικό πίνακα επιτυχιών των μαθητών εκφρασμένο σε ποσοστά. Η κάθε στήλη αντιστοιχεί σε κλάση πλάτους 10%, αρχής γενομένης από τους μαθητές που έγραψαν κάτω από 10%.

Είναι σημαντικό, νομίζουμε, να προσέξουμε το συνολικό ποσοστό των μαθητών που έγραψε κάτω από 50%. Δυστυχώς ανέρχεται σε 63,53%. Το νούμερο αυτό είναι αρκετά απογοητευτικό, αλλά και ταυτόχρονα χρήσιμο για την εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων, που θα συζητηθούν αργότερα.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σειρά1	0,00	3,53	20,00	18,82	21,18	4,71	12,94	7,06	9,41	2,35

Από τους 2 στους 85 που έγραψαν από 90 έως 100% και οι οποίοι απάρτισαν το ποσοστό της τελευταίας κλάσης του παραπάνω πίνακα, ο ένας ήταν μαθητής, θετικής κατεύθυνσης, του φροντιστηρίου που διεξήχθη το διαγώνισμα, και ο οποίος έγραψε

97,87% κάνοντας το μόνο του λάθος στη μονοτονία σε όλο το πεδίο ορισμού της, στη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ και ο άλλος, επίσης μαθητής θετικής κατεύθυνσης, ήταν από την ομάδα των μαθητών που έγραψαν το τεστ στο σπίτι τους, συγκεντρώνοντας τελικό αποτέλεσμα 91,49%.

Δεν υπήρχε βέβαια καμία σκέψη από τη μεριά μας να προχωρήσουμε σε συνέντευξη με κάποιον από αυτούς, παρ' όλα αυτά ο πρώτος εξ αυτών ήρθε μόνος του για συζήτηση. Τη συζήτηση αυτή καθώς και το σχολιασμό της, θα τη δούμε στην επόμενη παράγραφο.

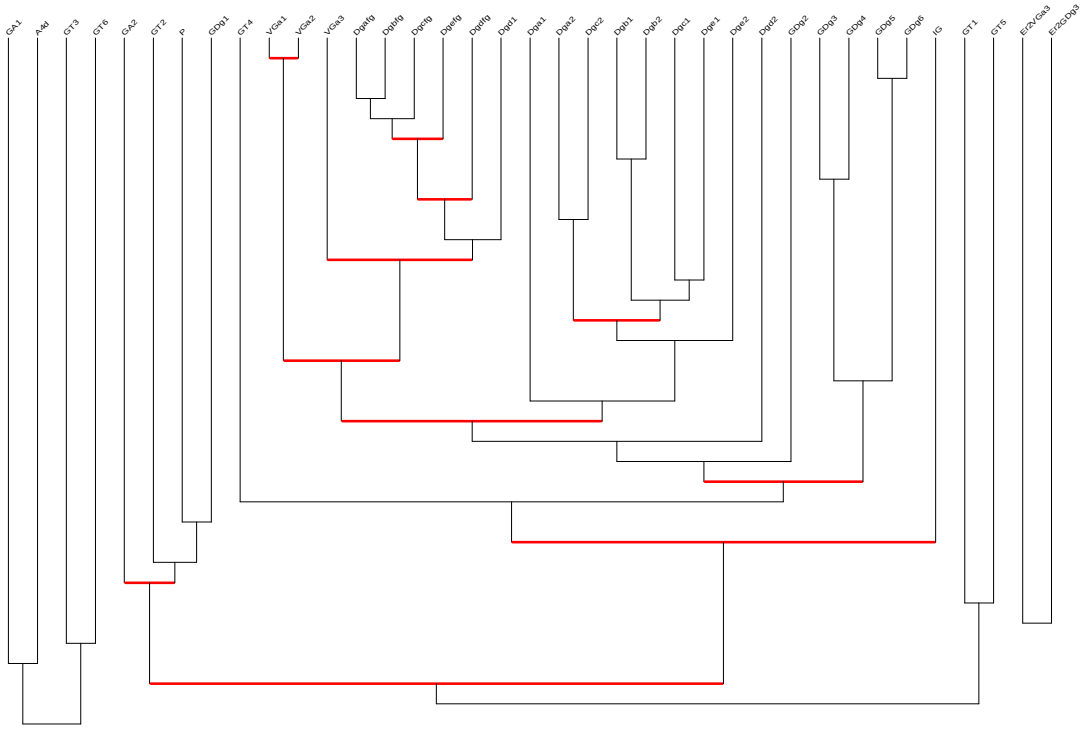
4.3.2. Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ R. GRAS

4.3.2.1. Σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα έργα

Οι παράμετροι που τελικά εμφανίστηκαν ήταν υπερβολικά μεγάλες στον αριθμό. Προβήκαμε στην επεξεργασία των στοιχείων, κάνοντας κατ' αρχήν μια επιλογή – κατηγοριοποίηση αυτών.

Πρώτο διάγραμμα ομοιότητας

Για το πρώτο διάγραμμα ομοιότητας χρησιμοποιήσαμε όλες τις μεταβλητές, (όπως αυτές περιγράφονται στον πίνακα II: Εξήγηση κωδικών στις ερωτήσεις και στα λάθη[8]) εκτός των λαθών και της ερώτησης 3.



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\students-athens\EFAPTIOMENI.tchic32\efaptomeni 1.csv

Από το παραπάνω διάγραμμα, αλλά και από τα αναλυτικά στοιχεία, τα οποία παρατίθενται στο παράρτημα, παρατηρούμε ότι εμφανίζονται αρκετές ομάδες ή υποομάδες με επίπεδο σημαντικότητας 1 ή 0,999999. Αυτές είναι:

i. Οι VGa1, VGa2, δηλαδή οι ερωτήσεις που ζητούν μέγιστο και ελάχιστο στη διαφορά δύο συναρτήσεων, όταν παρουσιάζεται το γράφημα της παραγώγου της διαφοράς τους δίνουν ομοιότητα 1.

[8] Βλ. σελ. 55

ii. Το ίδιο και οι GDg5, GDg6, όπου ζητάμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Οι συναρτήσεις που δίνονται σ' αυτά τα ερωτήματα είναι κυβικής μορφής.

iii. Οι Dgafg, Dgbfg, όπου δίνουμε την παράγωγο, η οποία στο (a) είναι μια απλή κυβική συνάρτηση και στο (b) είναι μια παραβολή και ζητάμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

iv. Η ίδια ομοιότητα παρατηρείται αν επισυνάψουμε και την Dgcfg, που επίσης είναι γράφημα κυβικής συνάρτησης (υπό την έννοια ότι περιέχει τον όρο x^3), συνθετότερης από την προηγούμενη.

v. Επίσης η πρόσθεση μιας δυσκολότερης συνάρτησης, όπως η Dgefg, στην ίδια ομάδα, πάλι δίνει ομοιότητα 1.

vi. Η προσθήκη της Dgdfg , που είναι τριγωνομετρική συνάρτηση, μεταβάλλει ελάχιστα την ομοιότητα σ' αυτή την ομάδα, δίνοντας αποτέλεσμα 0,999999, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πρακτικά παραμένει 1.

vii. Ομοιότητα 1 υπάρχει στα Dgb1 και Dgb2, όπου ζητάμε σημεία ακροτάτων και χαρακτηρισμό αυτών σε μια παραβολή, αν υπάρχουν. Στη συγκεκριμένη συνάρτηση δεν υπάρχουν, άρα μάλλον η ομοιότητα αυτή θα έπρεπε να είναι αναμενόμενη, είτε ο μαθητής απαντάει σωστά είτε λανθασμένα.

viii. Ομοιότητα 0,999999 υπάρχει και στα υποερωτήματα GDg3 και GDg4, στην $6^η$ ερώτηση, όπου δίνουμε τις συναρτήσεις (παραβολές) και ζητάμε τις παραγώγους.

ix. Τέλος, ομοιότητα 0,999999 παρουσιάστηκε στις Dga2 και Dgc2, που δίνουμε δύο κυβικές συναρτήσεις, που είναι τα γραφήματα των παραγώγων, μια απλή και μία συνθετότερη να μας χαρακτηρίσουν αν τα ακρότατα που παρουσιάζουν οι συναρτήσεις είναι τοπικά ή ολικά.

Δεν θα απαριθμήσουμε βέβαια όλες τις υπόλοιπες ομοιότητες που παρουσιάστηκαν. Αναφέρονται αναλυτικά στο αντίστοιχο εδάφιο στο παράρτημα. Ας παρατηρήσουμε όμως ότι οι έξη πρώτες ομάδες δίνουν ομοιότητα 1 (Αφήνουμε έξω την $7^η$, για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω.) Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές συμπεριφέρονται **ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο** στις ασκήσεις αυτές, που είναι κυρίως ασκήσεις γραφικών παραστάσεων παραγώγων.

Δεύτερο διάγραμμα ομοιότητας

Στο δεύτερο διάγραμμα ομοιότητας συμπεριλάβαμε μόνο τις μεταβλητές από τις ερωτήσεις 4, 5, 6, 7, 8, χωρίς πάλι τα λάθη. Δηλαδή συμπεριλάβαμε όλες τις ασκήσεις που αφορούν παραγώγους και γραφικές παραστάσεις, μαζί με το πρόβλημα ($5^η$ ερώτηση). Το διάγραμμα που προκύπτει είναι προφανώς το αντίστοιχο τμήμα του προηγούμενου διαγράμματος γι' αυτό και δεν κρίνουμε σκόπιμο να το παραθέσουμε. Τα δεδομένα και αυτού του διαγράμματος παρατίθενται στο παράρτημα. Αυτό που είναι χρήσιμο να δούμε είναι τα συμπεράσματα που απορρέουν από αυτό το διάγραμμα.

1. Όλες οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με πολύ υψηλό βαθμό ομοιότητας, εκτός μιας εξαίρεσης που θα αναφέρουμε στη συνέχεια. Αυτή η σύνδεση σε τόσο υψηλούς βαθμούς είναι φυσιολογική, αφού, επί της ουσίας, όλες οι ασκήσεις αφορούν παραγώγους.
2. Ειδικά το πρόβλημα P ($5^η$ ερώτηση) και η $8^η$ ερώτηση συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες ασκήσεις.
3. Όμως οι ερωτήσεις 4 και 5, που είναι ακριβώς οι ίδιες, δοσμένες με άλλη εκφώνηση, δε βρίσκονται σε άμεση σύνδεση, όπως ίσως να ανέμενε κάποιος. Τα VGa1, VGa2, VGa3 βρίσκονται σε μικρή σχέση με το P.

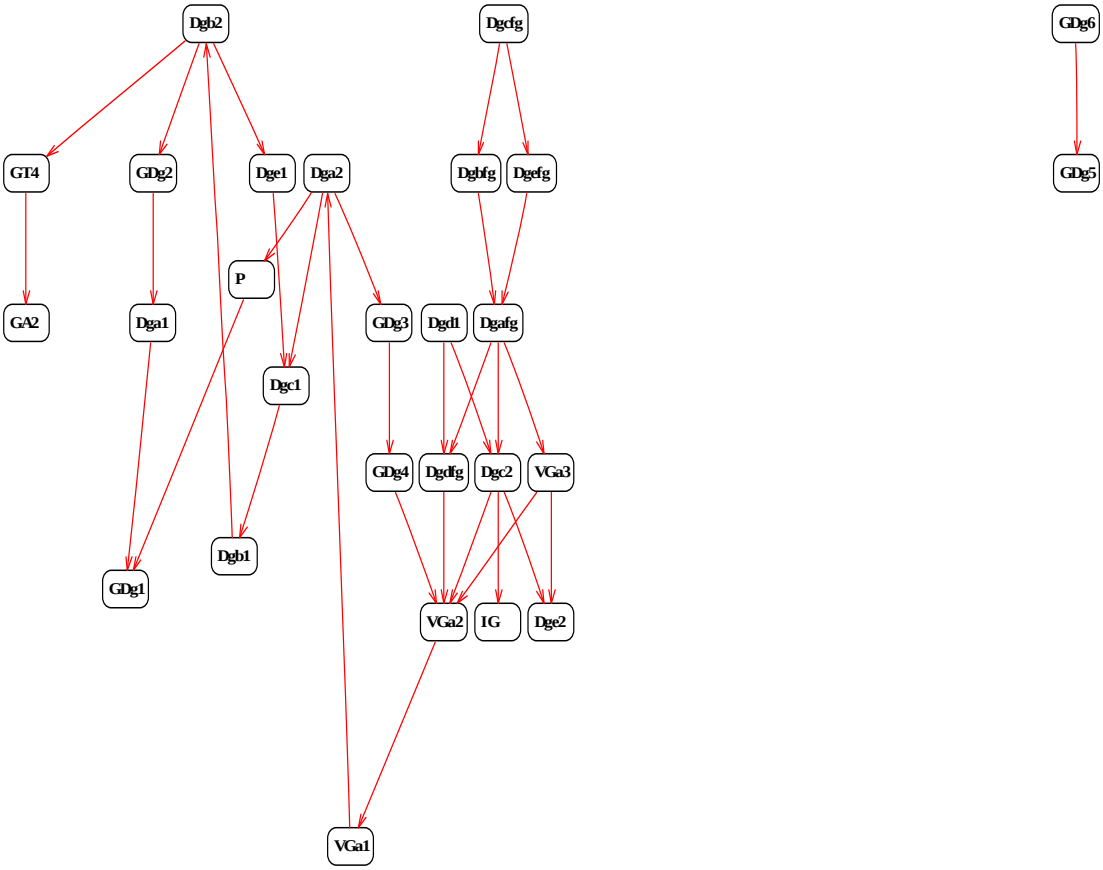
Αυτό φαίνεται να επαληθεύει την πεποίθηση πολλών – για να μην χρησιμοποιήσουμε τον ακραίο χαρακτηρισμό: «όλων» – καθηγητών της μέσης εκπαίδευσης, ότι δηλαδή **οι μαθητές υστερούν σημαντικά στην επίλυση προβλημάτων, ακόμη κι αν πρόκειται για απλές περιπτώσεις.**

4.3.2.2. Σχέσεις συνεπαγωγής ανάμεσα στα έργα.

Λόγω της πολυπλοκότητας του ερωτηματολογίου, όπως αυτή παρουσιάστηκε κατά την επεξεργασία του, αναγκαστήκαμε κι εδώ να αφαιρέσουμε τα λάθη από τις μεταβλητές. Επίσης, όλα τα διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε, δηλώνουν απλές συνεπαγωγές.

Πρώτο συνεπαγωγικό διάγραμμα

Συμπεριλάβαμε όλες τις μεταβλητές, εκτός από τα λάθη και την ερώτηση 3.



Από το διάγραμμα αυτό προκύπτουν αρκετά σημαντικά στοιχεία.

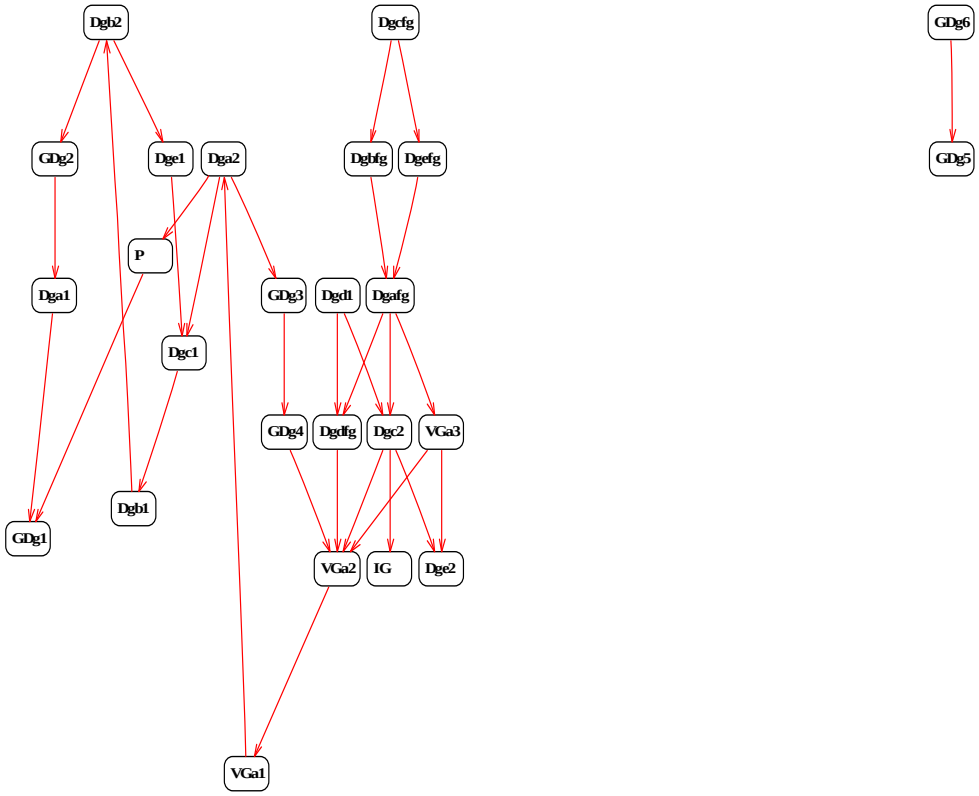
1. Το υποερώτημα Dgcfg φαίνεται να επηρεάζει άμεσα ή έμμεσα τα περισσότερα από τα υπόλοιπα ερωτήματα. Στο ερώτημα αυτό ζητήσαμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, δίνοντας τη γραφική παράσταση της παραγώγου της, η οποία είναι της μορφής $f'(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. (Ο ΄΄αλγεβρικά

υποψιασμένος΄΄ μαθητής μπορεί εύκολα να βρει για ποια συνάρτηση πρόκειται. Αλλιώς θα κινηθεί είτε αλγοριθμικά με τη συμπλήρωση του αντίστοιχου πίνακα μονοτονίας είτε και γεωμετρικά μεταφράζοντας και στις δύο αυτές περιπτώσεις τα συμπεράσματά του σε ένα γράφημα.)

2. Ισχυρή θέση σ' αυτό το διάγραμμα κατέχει και το υποερώτημα Dgb2. Εδώ είναι το γράφημα μιας παραβολής, η οποία είναι η παράγωγος μιας συνάρτησης και ζητάμε αν έχει ακρότατα, να χαρακτηριστούν ως τοπικά ή ολικά. Η συγκεκριμένη συνάρτηση προκύπτει ότι δεν έχει ακρότατα. Δε θα κρύψουμε το ότι μας έκανε εντύπωση αυτό το γεγονός, διότι θεωρούσαμε ως μια σχετικά απλή περίπτωση αυτή που παρουσιάζαμε εδώ, να εμφανίζει τόσο ισχυρό συνεπαγωγικό διάγραμμα.
3. Θα πρέπει βέβαια να παρατηρήσουμε τη μη συνδεσιμότητα των δύο προηγούμενων υποερωτημάτων, δηλαδή των Dgcfg και Dgb2.
4. Και από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ των ερωτήσεων 4 και 5, δηλαδή μεταξύ των VGa1, VGa2, VGa3 και P. Η επιτυχία σε ένα από τα υποερωτήματα της $4^{ης}$ ερώτησης δε δίνει άμεση συνεπαγωγή για την επιτυχία στην άλλη ερώτηση. Και αυτή η παρατήρηση δείχνει τη μεγάλη δυσκολία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων.
5. Φαίνεται να υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της επιτυχίας στην $7^{η}$ και στην $8^{η}$ ερώτηση. Με άλλα λόγια, όσοι πετυχαίνουν το $3^{ο}$ υποερώτημα από το $3^{ο}$ ερώτημα της άσκησης 7, τότε καταφέρνουν να φτάσουν στην $8^{η}$ ερώτηση (Dgcfg – Dgbfg – Dgc2 – IG).
6. Τέλος θα πρέπει να προσέξουμε την απομόνωση των υποερωτημάτων GDg6 και GDg5. Τα υποερωτήματα αυτά είναι τελείως ασύνδετα με τα υπόλοιπα, αλλά μεταξύ τους ισοδύναμα. Είναι τα δύο τελευταία ερωτήματα της $6^{ης}$ ερώτησης, που σχεδιάστηκαν ειδικά για να αναδείξουν αν οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν γεωμετρικές διαδικασίες. Έχουμε εκτενώς συζητήσει για το σχεδιασμό τους στην ποιοτική ανάλυση της $6^{ης}$ ερώτησης, μέσω XL. Φαίνεται λοιπόν ότι πράγματι η αντιμετώπισή τους από τους μαθητές (από όσους μπόρεσαν να τις αντιμετωπίσουν) απαίτησε διαδικασίες διαφορετικές από την αντιμετώπιση των υπολοίπων ερωτημάτων.

Δεύτερο συνεπαγωγικό διάγραμμα

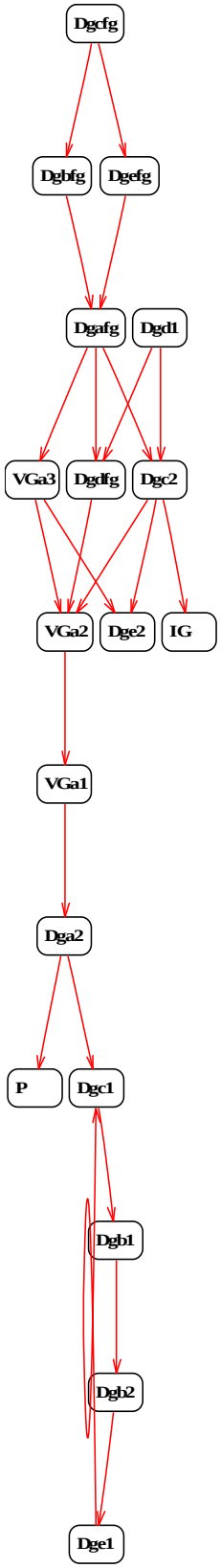
Συμπεριλάβαμε τις ερωτήσεις 4, 5, 6, 7 και 8.



Όπως βλέπουμε συνάγουμε τα ίδια συμπεράσματα με το προηγούμενο διάγραμμα.

Τρίτο συνεπαγωγικό διάγραμμα

Συμπεριλάβαμε τις ερωτήσεις 4, 5, 7 και 8. Αποφασίσαμε να αφήσουμε έξω την 6η ερώτηση λόγω της ιδιομορφίας που έδειξαν να παρουσιάζουν στα δύο προηγούμενα διαγράμματα τα υποερωτήματα 5 και 6.


Dgcfg
Dgbfg
Dgefg
Dgafg
Dgd1
VGa3
Dgdfg
Dgc2
VGa2
Dge2
IG
VGa1
Dga2
P
Dgc1
Dgb1
Dgb2
Dge1

Παρατηρήσεις

1. Σ' αυτό το διάγραμμα εμφανίζεται για πρώτη φορά μια σχέση μεταξύ των ερωτήσεων 4 και 5 (VGa3 – Vga2 – Vga1 – P). Φανερά η απουσία της 6^{ης} ερώτησης έδωσε αυτά τα αποτελέσματα. Δεν μπορέσαμε όμως να ελέγξουμε με ποιόν τρόπο η ερώτηση αυτή επηρεάζει τα εξαγόμενα.
2. Επίσης φαίνεται – και είναι αναμενόμενο, πλέον – το υποερώτημα Dgcfg να κρατάει για μια ακόμη φορά κυρίαρχη θέση σε όλο το διάγραμμα.
3. Το πρόβλημα P δε δίνει καμία συνεπαγωγή, που σημαίνει ότι η επιτυχία ενός μαθητή σε αυτό δε συνεπάγεται καμία άλλη επιτυχία του σε άλλα ερωτήματα.

4.4. ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Αρκετά από τα γραπτά παρουσίασαν ενδιαφέρον για περαιτέρω ψάξιμο. Ενδιαφέρον που οφειλόταν είτε στην ορθότητα μιας λύσης, είτε σε κάποιο λάθος που έκανε ο μαθητής και δε συμφωνούσε με τη γενική εικόνα του γραπτού του ή γενικώς μας φαινόταν περίεργο και δεν μπορούσαμε να βρούμε μια εξήγηση γιατί το έκανε. Προχωρήσαμε σε αρκετές συνεντεύξεις με μαθητές που συμμετείχαν στο τεστ. Δε θα αναφέρουμε όλες αυτές, αλλά τις πιο χαρακτηριστικές, κατά τη γνώμη μας, που μπόρεσαν να αναδείξουν κάποια συμπεράσματα.

4.4.1. Η 1η Συνέντευξη

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο μαθητής που συγκέντρωσε τη μεγαλύτερη βαθμολογία προσήλθε μόνος του για συζήτηση έχοντας κάποιες απορίες. Αυτό που ήθελε να μάθει ήταν, ποιος ήταν ο τύπος των συναρτήσεων στις γραφικές παραστάσεις στην 6η και 7η ερώτηση, οι οποίες και τον δυσκόλεψαν. Κυρίως όμως τον δυσκόλεψαν, όπως σαφώς ανέφερε, οι τελευταίες συναρτήσεις (5η και 6η) στην 6η ερώτηση. Ας θυμηθούμε εδώ, ότι είναι τα ερωτήματα που στα συνεπαγωγικά διαγράμματα είναι ξεκομμένα από τα υπόλοιπα. Στην 7η ερώτηση η απορία του ήταν αν είναι σωστοί οι αντιπρόσωποι των αορίστων ολοκληρωμάτων που χρησιμοποίησε. Δεν διατύπωσε βέβαια έτσι την ερώτηση, αλλά ήταν απόλυτα σαφής όταν ρώταγε: «*Είναι σωστές αυτές οι συναρτήσεις; Διότι υπάρχουν άπειρες που μπορώ να σχεδιάσω, αφού δεν έχω περισσότερα στοιχεία για να επιλέξω μια από αυτές*».

Ελέγχοντας λοιπόν το γραπτό του διαπιστώσαμε ότι σε όλα τα ερωτήματα μέχρι εκείνη τη στιγμή που αφορούσαν στις γραφικές παραστάσεις είχε κινηθεί αλγεβρικά, ακολουθώντας το δεύτερο σχήμα προσέγγισης που παρουσιάσαμε στην ανάλυση της 6ης ερώτησης. Είχε βρει δηλαδή, τον τύπο των συναρτήσεων και τις είχε παραγωγίσει στην 6η ερώτηση ή αντίστοιχα, τις είχε ολοκληρώσει στην 7η ερώτηση.

Του εξηγήσαμε ότι στην 6η ερώτηση, στα ερωτήματα που τον ενδιέφεραν, ο τύπος δεν είναι καθόλου εύκολο να βρεθεί, διότι οι συναρτήσεις ήταν σχεδιασμένες έτσι ώστε να μην παρουσιάζονται αναγνώσιμα σημεία από το σύστημα συντεταγμένων.

Στη συνέχεια, παρ' όλο που ελέγξαμε το γραπτό του και είχαμε ήδη σχηματίσει μια εικόνα για το πώς κινήθηκε, του ζητήσαμε να μας εξηγήσει αναλυτικά πως

κατάφερε να βρει την απάντηση στα συγκεκριμένα ερωτήματα. Η απάντησή του ήταν πραγματικά μια ευχάριστη έκπληξη.

Όσον αφορά στην 6η ερώτηση, στα σημεία που η f παρουσίαζε ακρότατο, έφερνε τις κάθετες μέχρι αυτές να συναντήσουν τον άξονα x΄x. Αυτά του όριζαν τα σημεία μηδενισμού της f'. Στη συνέχεια ήξερε ότι αν η f ήταν γνησίως αύξουσα θα ΄΄έπρεπε΄΄ να έχει θετική παράγωγο και ανάλογα, αν η f ήταν φθίνουσα, αρνητική παράγωγο. Είδε ότι η f δεν είχε άλλα σημεία εκτός από τα ακρότατά της που να παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη, άρα η f' δε θα μηδενιζόταν πουθενά αλλού, εκτός από τα ακρότατα της f. Είχε επίσης καταλάβει (προφανώς διαισθητικά, διότι θα μπορούσε να είναι και κάποια άλλη πολυωνυμική) ότι του παρουσιαζόταν μια συνάρτηση με τη γενική μορφή $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, οπότε η παράγωγός της θα ήταν παραβολή, επιβεβαίωσε έτσι το προηγούμενο σκεπτικό του, περί μη ύπαρξης άλλων σημείων μηδενισμού της f' κι έτσι προχώρησε στο σχεδιασμό της αντίστοιχης παραγώγου, στο 5ο γράφημα. Ο σχεδιασμός της παραγώγου στο 6ο γράφημα, δεν έγινε με βάση το σκεπτικό που είχαμε σχεδιάσει το γράφημα της συνάρτησης αυτής, ότι δηλαδή είναι η αντίθετη της προηγούμενης, άρα $(-f)' = -f'$, αλλά ξανασκέφτηκε τα ίδια, όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Προφανώς η πίεση του χρόνου δεν του άφησε τα περιθώρια να σκεφτεί κάτι τέτοιο, αφού άλλωστε, είχε ήδη έτοιμη μια λύση.

Ανάλογα κινήθηκε και στην 7η ερώτηση. Όπου μηδενιζόταν η παράγωγος έφερε κάθετες, τις οποίες μάλιστα δεν είχε σχεδιάσει στο γραπτό του ή είχε σχεδιάσει πολύ αχνά, άρα τις είχε στο μυαλό του και κατόπιν σημείωσε κάποια σημεία επάνω σ' αυτές που θα αποτελούσαν χαρακτηριστικά σημεία για τη συνάρτηση f (σημεία ακροτάτων και σημεία που η εφαπτομένη θα έπρεπε να είναι παράλληλη στον x΄x). Κατόπιν βλέποντας αν η παράγωγος είναι θετική η αρνητική σχεδίαζε την f αντίστοιχα αύξουσα ή φθίνουσα.

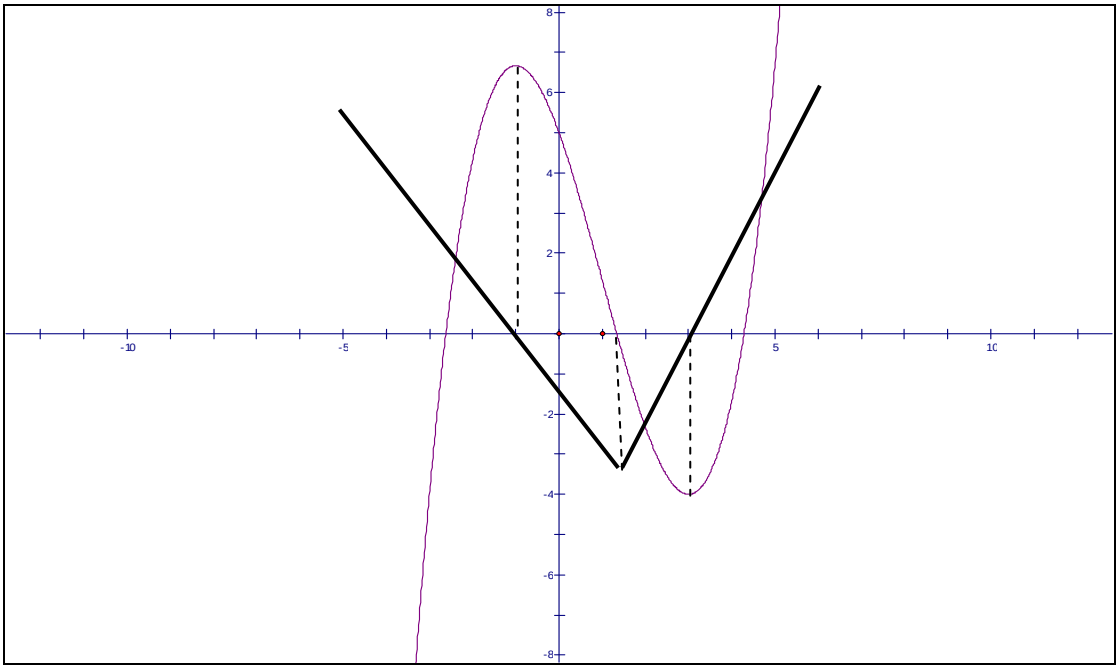
Δεν πέτυχε με ακρίβεια τις κλίσεις στις παραγώγους συναρτήσεις, αλλά αυτό μπορεί και να οφείλεται στο ότι του ζητάγαμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Εκτιμούμε ότι αυτός ο τύπος μαθητή εμπίπτει εμφανέστατα στην κατηγοριοποίηση του Krutetskii, και συγκεκριμένα είναι ο αρμονικός τύπος και ειδικότερα ο υποτύπος (α), δηλαδή ο **αφηρημένος αρμονικός**. Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα,

ξέρει να τα χειρίζεται καλά, αλλά δεν το προτιμά γενικότερα ως τρόπο αντιμετώπισης. Πάντως δεν έχει κανένα πρόβλημα να τα εμφανίζει σε πρώτη ζήτηση.

4.4.2. Η 2η Συνέντευξη

Στη δεύτερη συνέντευξη που αναφέρουμε συμμετείχε μια μαθήτρια, από τις πολύ καλές μαθήτριες του φροντιστηρίου. Ενώ γενικά το γραπτό της στο τεστ ήταν καλό, μας έκανε εντύπωση ότι στις παραγώγους των κυβικών συναρτήσεων που της ζητιόνταν, έδωσε για απάντηση γραφήματα ευθειών. Δεν ήταν η μόνη. Άλλοι 7 μαθητές, άρα 8 στους 85, έδωσαν απάντηση σε αυτά τα υποερωτήματα, ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα. Η απάντησή της στο γραπτό της για το συγκεκριμένο κομμάτι ήταν περίπου όπως η ακόλουθη:



Ε: Στην 6η ερώτηση στα δύο τελευταία υποερωτήματα έδωσες αυτές τις απαντήσεις. Είσαι σίγουρη για την ορθότητά τους.

Μ: Όχι και πολύ, αλλά δεν είχα τι άλλο να σκεφτώ.

Ε: Και πως σκέφτηκες να παρουσιάσεις αυτές τις ευθείες;

Μ: ……

Ε: Βλέπω ότι συμφωνούν τα σημεία μηδενισμού των παραγώγων με τα ακρότατα της f, συμφωνούν και τα πρόσημα των παραγώγων με τη μονοτονία της συνάρτησης, που σημαίνουν όλα αυτά ότι τα σκέφτηκες κι εσύ, αφού τα έχεις εμφανίσει στο γραπτό σου, άρα η απάντησή σου δε μπορεί να θεωρηθεί τυχαία. Τι σκέφτηκες λοιπόν, θυμάσαι;

Μ: Ναι, τώρα θυμήθηκα. Τα είδα ως τμήματα παραβολής.

Ε: Δηλαδή, τι εννοείς(!);

Μ: Να, το κομμάτι αυτό εδώ (δείχνει το πρώτο κομμάτι που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα), από το $-\infty$ *έως το* -1 *είναι ένα κομμάτι παραβολής. Το ίδιο και τα υπόλοιπα. Οπότε η γραφική παράσταση της παραγώγου θα είναι ευθεία.*

Ε: Όλη η γραφική παράσταση δηλαδή για σένα αποτελείται από τμήματα παραβολών;

Μ: Ναι.

Ε: Δηλαδή είναι τρίκλαδη;

Μ: Δε ξέρω. Μπορεί και δίκλαδη. Διότι κάποια κομμάτια μου φαίνονται σα να έχουν αναποδογυρίσει.

Ε: Τότε το ίδιο θα μπορούσαμε να πούμε και για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση; Ότι δηλαδή αποτελείται από τμήματα παραβολών; Όπως αυτή εδώ; (Σχεδιάζουμε μία συνάρτηση στο χαρτί).

Μ: Δεν ξέρω. Μάλλον όχι για όλες.

Ε: Αλλά, για ποιες νομίζεις ότι θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι τέτοιο;

Μ: Δεν ξέρω. Ίσως για τις πολυωνυμικές;

Ε: Αυτή η συνάρτηση που σου παρουσιάζεται είναι κάποια πολυωνυμική;

Μ: Νομίζω ναι.

Ε: Ποια νομίζεις ότι μπορεί να είναι;

Μ: Δεν ξέρω τον τύπο της. Άμα τον ήξερα θα τον παραγώγιζα. Παραβολή δεν είναι ολόκληρη πάντως.

Ε: Ποιες συναρτήσεις λέγονται πολυωνυμικές;

Μ: Αυτές που περιέχουν φυσικές δυνάμεις του x.

Ε: Πες μου μία εκτός από παραβολή.

Μ: Η $x^3 - x$.

Ε: Και ποια είναι η παράγωγός της;

Μ: Η $3x^2 - 1$.

Ε: Αν σου ζητούσα να σχεδιάσεις αυτή την παράγωγο, πιστεύεις ότι θα τα κατάφερνες;

Μ: Ναι, βέβαια. (Τη σχεδιάζει πρόχειρα σε ένα χαρτί)

Ε: Γιατί δεν τη σχεδίασες με ευθείες;

Μ: Μα γιατί είναι παραβολή.

Ε: Κι αν σου έδινα την $y = x^4 - x$, *η παράγωγός της ποια θα ήταν;*

Μ: Η $x^3 - 1$.

Ε: Και θα ήταν ευθεία ή καμπύλη;

Μ: Καμπύλη βέβαια.

Ε: Ποιες συναρτήσεις ξέρεις που βγάζουν παράγωγο ευθεία;

Μ: Μόνο τις παραβολές.

Ε: Νομίζεις ότι υπάρχουν κι άλλες;

Μ: Δεν ξέρω.

Ε: Ποιος είναι ο πρωταρχικός τρόπος για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης; Που βασίζονται δηλαδή κατ' αρχήν όλα αυτά τα αποτελέσματα που βγάζουμε;

Μ: Στον ορισμό της παραγώγου.

Ε: Και γιατί η παράγωγος της παραβολής βγαίνει ευθεία;

Μ: Γιατί αν πάρουμε μια παραβολή π.χ. την $f(x) = x^2 + x + 1$ *και την παραγωγίσουμε είτε με τον ορισμό είτε με κανόνα παραγώγισης θα πάρουμε* $f'(x) = 2x + 1$ *για κάθε x. Άρα θα έχουμε πάντα ευθεία.*

Ε: Κι αν το πάμε ανάποδα, αν σου δώσω δηλαδή μια ευθεία, ας πούμε την $y = 4x + 2$ *και σου πω ότι είναι η παράγωγος μιας συνάρτησης, μπορείς να βρεις ποια συνάρτηση είναι αυτή;*

Μ: Η $f(x) = 2x^2 + 2x$.

Ε: Αν ξαναδούμε τώρα την απάντησή σου, έχεις να κάνεις κάποια διαφορετική διαπίστωση;

Μ: Ναι, εντάξει. Ξέρω ότι δεν έπρεπε να βγάλω ευθεία, αλλά καμπύλη. Αυτή εδώ η συνάρτηση (δείχνει την συνάρτηση του ερωτήματος) είναι κάποια πολυωνυμική. Πρέπει να είναι μάλλον κάτι από την x^3. *Αλλά και πάλι αυτό που έκανα μου φαίνεται λογικό. Αυτή εδώ η παραβολή (γυρίζει στην προηγούμενη σελίδα του διαγνωστικού τεστ και δείχνει τη συνάρτηση που εννοεί) ταιριάζει πολύ καλά – όχι ολόκληρη, αλλά ένα τμήμα της – με αυτό εδώ το κομμάτι της γραφικής παράστασης (δείχνει την συνάρτηση στο ερώτημα που συζητάγαμε). Γιατί να μην είναι ευθεία η παράγωγος; Ξέρω ότι έχω λάθος, το βλέπω με τον ορισμό, αλλά δεν το βλέπω με το σχήμα.*

Ε: Είναι γιατί σε μπερδεύει το σχήμα. Οι δύο συναρτήσεις μπορεί να μοιάζουν όμοιες κατά τμήματα όπως λες, αλλά δεν έχουν τα ίδια αποτελέσματα στα ίδια x.

Στο σημείο αυτό τελείωσε η συνέντευξη με αυτή την μαθήτρια. Σίγουρα έφυγε αρκετά προβληματισμένη. Δεν ξέρουμε αν έφυγε έχοντας καλύτερη συγκρότηση των

πραγμάτων. Είναι αληθές ότι όταν ξεκινά κάποιος τέτοιου είδους συνεντεύξεις – συζητήσεις δε γνωρίζει εκ των προτέρων τι θα αντιμετωπίσει και κατά συνέπεια δε μπορεί να προσχεδιαστεί κάτι. Ξεκινάμε μια τέτοια συζήτηση ξέροντας από τη μεριά μας ότι δεν ξέρουμε τίποτε για το τι θα επακολουθήσει. Εδώ είχαμε μια συγκροτημένη μαθήτρια, τολμούμε να τη χαρακτηρίσουμε άριστη μαθήτρια, που ενώ γνώριζε πολύ καλά τα αντίστοιχα κομμάτια της θεωρίας και ενώ θα μπορούσε να απαντήσει ολόσωστα κάνοντας χρήση αυτών, το σχήμα αποτέλεσε εμπόδιο γι' αυτή και μάλιστα παρουσιάστηκε τόσο ισχυρό, ώστε να της δημιουργήσει αμφιβολίες ακόμη και για την ορθότητα της χρήσης του ορισμού.

4.4.3. Η 3η Συνέντευξη

Και εδώ έχουμε μια μαθήτρια της θετικής κατεύθυνσης, η οποία δεν ήταν άριστη όπως η προηγούμενη, αλλά ήταν γενικά αυτό που ονομάζουμε ΄΄καλή μαθήτρια΄΄. Σε όλα τα τεστ και τα διαγωνίσματα που είχαν γίνει στο φροντιστήριο έγραφε από 16 έως 18. Ανάλογοι ήταν και οι βαθμοί της στο Λύκειο. Ο λόγος που την καλέσαμε σε συνέντευξη είναι διότι δεν αντιμετώπισε καμία από τις ερωτήσεις 6, 7 και 8 και στην 4η έκανε λάθη σε όλα τα ερωτήματα γράφοντας μεν τα σημεία που έπρεπε να παρουσιαστούν τα ακρότατα της συνάρτησης, βάζοντας όμως στη θέση των τεταγμένων τις τετμημένες, χαρακτηρίζοντάς ανάποδα (μέγιστο, αντί για ελάχιστο) και τέλος χαρακτηρίζοντάς τα ολικά αντί του σωστού που είναι τοπικά.

Στην αντίστοιχη ερώτησή μας πως σκέφτηκε, δεν μπορούσε να δώσει καμία εξήγηση. Γι' αυτό παρακάμψαμε αυτό το μέρος της συνέντευξης, αφού δεν παρουσίασε τελικά κανένα ενδιαφέρον και παραθέτουμε το υπόλοιπο κομμάτι, που αφορά στις ερωτήσεις 6, 7 και 8.

Ε: Εδώ δεν έχεις απαντήσει τίποτε

Μ: Τι να απαντήσω, αφού δεν ξέρω.

Ε: Για να λεπτό. Η συμμετοχή σου στην τάξη την ώρα του μαθήματος δεν προϊδέαζε για κάτι τέτοιο.

Μ: Ναι γιατί εκεί καταλαβαίνω, ενώ εδώ δεν κατάλαβα τίποτε.

Ε: Για να τα πάμε από την αρχή. Αν σου δώσω έναν πίνακα μονοτονίας με συμπληρωμένη τη σειρά του πρόσημου της παραγώγου, δεν ξέρεις να συμπληρώσεις τη μονοτονία της f;

Μ: Όχι, εντάξει. Αυτό το ξέρω.

Ε: Ας δούμε λίγο την ερώτηση 7. Ξέρεις κατ' αρχήν τι σου δίνει και τι σου ζητάει;

Μ: Ναι μου δίνει τη γραφική παράσταση της παραγώγου και μου ζητάει τα ακρότατα και τη γραφική παράσταση της f.

Ε: Ωραία. Ας δούμε το πρώτο γράφημα. Μπορείς να μου πεις που είναι θετική και που αρνητική η παράγωγος;

Μ: Ναι. Είναι αρνητική στο $(-\infty,-1)$ *και θετική στο* $(-1,+\infty)$.

Ε: Εντάξει. Και δε μπορείς μ' αυτές τις πληροφορίες να φτιάξεις έναν πίνακα μονοτονίας συμπληρωμένο;

Μ: Μπορώ. Αυτό το έκανα και την ώρα του τεστ στο θρανίο μου.

Ε: Ε, τότε; Που είναι το πρόβλημα;

Μ: Τι θα τον κάνω;

Ε: Συγνώμη για να καταλάβω, μου λες ότι αν δεις ή φτιάξεις εσύ αυτόν τον πίνακα

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

(της δείχνω τον πίνακα μονοτονίας του αντίστοιχου ερωτήματος) , δεν μπορείς να προχωρήσεις παραπέρα;

Μ: Ναι. Αυτό ακριβώς;

Ε: Δηλαδή δεν μπορείς να σχεδιάσεις μια συνάρτηση η οποία θα είναι ας πούμε γνησίως φθίνουσα;

Μ: Όχι, μπορώ. (Σχεδιάζει μία)

Ε: Για σχεδίασε και μία αύξουσα.

Μ: (Σχεδιάζει και μία αύξουσα)

Ε: Και πάλι δεν καταλαβαίνω. Αφού αυτά μπορείς να τα κάνεις, γιατί δε σχεδίασες τη γραφική παράσταση; (Φαίνεται πολύ εύλογη η απορία μου, διότι από το παζλ της συνέντευξης και της προσπάθειας διερεύνησης των προβλημάτων της μαθήτριας, λείπει ένα πολύ σημαντικό κομμάτι, που δεν μου είχε περάσει καθόλου από το νου ότι έπρεπε να το ελέγξω και το οποίο εμφανίστηκε τελικά κατά τύχη.)

Μ: Μα πως θα ξέρω αν είναι θετική, αρνητική ή τι τέλος πάντων;

Ε: Πρόσεξες ότι ζητάω ***μία*** *γραφική παράσταση; Όλα αυτά που λες είναι κάποιοι προβληματισμοί σωστοί, αλλά δευτερευούσης αυτή τη στιγμή σημασίας. Μας αρκεί να σχεδιάσουμε μία γραφική παράσταση κι όχι όλες. Ούτε ζητάω ακρίβεια.*

Μ: Ναι, μα πώς να το κάνω; Να εδώ η παράγωγος είναι αρνητική και μετά γίνεται θετική. (Δείχνει τον πίνακα και το σχήμα)

Ε: Ναι και γι' αυτό ακριβώς συμπληρώσαμε έτσι όπως συμπληρώσαμε, τη μονοτονία της συνάρτησης στην τελευταία σειρά.

Μ: Ναι, αλλά πώς να σχεδιάσω μια συνάρτηση που θα είναι φθίνουσα και αρνητική και μετά αύξουσα και θετική και δε κόβεται κιόλας πουθενά;

Ε: Κάτσε ένα λεπτό. Γιατί πρέπει να έχει αυτά τα πρόσημα που μου ανέφερες;

Μ: Αφού έτσι είναι ο πίνακας από πάνω.

Ε: Αυτός είναι για το πρόσημο της παραγώγου, όχι της συνάρτησης.

Μ: Δεν πρέπει να είναι το ίδιο;

Ε: Για πάμε πάλι. Σχεδίασέ μου μια φθίνουσα συνάρτηση.

Μ: (Σχεδιάζει μια χωρίς να χρησιμοποιεί άξονες)

Ε: Σχεδίασέ μου πάλι μια φθίνουσα διαφορετική από την προηγούμενη.

Μ: (Σχεδιάζει μια, πάλι χωρίς να χρησιμοποιεί άξονες)

Ε: Σχεδίασέ μου τώρα αυτές τις δύο στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μ: (Τις σχεδιάζει βάζοντάς τες στο ίδιο τεταρτημόριο)

Ε: Όχι θέλω να μου σχεδιάσεις μία στο 1° τεταρτημόριο και την άλλη στο 4° τεταρτημόριο.

Μ: (Τις σχεδιάζει). Αυτές έχουν άλλο πρόσημο.

Ε: Βλέπεις; Είναι όμως και οι δύο φθίνουσες;

Μ: Ναι.

Ε: Άρα θα πρέπει να αποσυνδέσεις τη μονοτονία της συνάρτησης, (γιατί αυτό βγάζουμε από το πρόσημο της παραγώγου), με το πρόσημο της συνάρτησης, έτσι δεν είναι;

Μ: Ναι, τώρα το κατάλαβα.

Ε: Για πάμε να δούμε λίγο την ερώτηση 8, γιατί νομίζω ότι κατάλαβα κι εκεί τι έφταιγε. (Ευτυχώς που υπήρχε αυτή η ΄΄έμπνευση΄΄ και μπόρεσε να εμφανιστεί τελικά ένα πρόβλημα που μέχρι εκείνη τη στιγμή ήταν τόσο καλά κρυμμένο. Γιατί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μέχρι εκείνη τη στιγμή νόμιζα ότι είχα καταλάβει.) Για ξανακοίτα τη λοιπόν και πες μου τι μπορείς να κάνεις τώρα;

Μ: Θέλει $f(2) > 0$*, άρα αποκλείονται τα γραφήματα 3 και 5.*

Ε: Ωραία. Συνέχισε.

Μ: Θέλει $f'(2) < 0$*, άρα αποκλείεται και το γράφημα 2.*

Ε: Γιατί, το γράφημα 4 δεν αποκλείεται;

Μ: Όχι.

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί η συνάρτηση είναι φθίνουσα(!!!;;;)

Ε: Πώς το κατάλαβες αυτό;

Μ: Ορίστε (και δείχνει με το χέρι της πως πέφτει το γράφημα, ***διαβάζοντάς το όμως, από τα δεξιά προς τα αριστερά****).*

Ε: Μα γιατί το διάβασες έτσι;

Μ: Γιατί; Δεν μπορώ;

Ε: Πώς διαβάζεις ένα βιβλίο;

Μ: Από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ε: Δε νομίζεις ότι με τον ίδιο τρόπο πρέπει να τα διαβάζουμε όλα;

Μ: Έτσι εξηγούνται όλα.

Ε: Τι εννοείς;

Μ: Τόσο καιρό δεν μπορούσα να καταλάβω γιατί άλλες φορές τα καταφέρνω στις γραφικές παραστάσεις κι άλλες όχι. Βασικά, δεν τα κατάφερνα γενικά μ' αυτές, αλλά λέμε τώρα. Τώρα επιτέλους κατάλαβα τι έφταιγε. Ωραία, άρα είναι τα γραφήματα 1 και 6.

Σ' αυτό το σημείο τέλειωσε κι αυτή η συνέντευξη. Αποκομίσαμε την αίσθηση ότι αυτή η μαθήτρια έφυγε χωρίς πλέον ασάφειες στο συγκεκριμένο κομμάτι. Τα βασικά της προβλήματα ήταν ότι είχε λανθασμένα συνδέσει τις τιμές (θετικές ή αρνητικές) που μπορεί να πάρει μια συνάρτηση με τη μονοτονία της και ακόμη ότι διάβαζε τα γραφήματα με όποια φορά βουλευόταν κατά περίσταση. Το πρώτο πρόβλημα θεωρούμε ότι είναι ένα γνωστό πρόβλημα, που απαντάται σε αρκετούς μαθητές. Αισθανθήκαμε όμως πραγματικά τυχεροί, από την άποψη ότι μπορέσαμε να βοηθήσουμε τη συγκεκριμένη μαθήτρια, αλλά και να σχηματίσουμε γνώμη για παρόμοια προβλήματα, που μπορέσαμε να ανακαλύψουμε αυτό το δεύτερο πρόβλημα, έστω και μ' αυτόν τον τυχαίο τρόπο.

Το ότι επιλέξαμε να παρουσιάσουμε συνεντεύξεις μόνο από μαθητές και μαθήτριες της θετικής κατεύθυνσης είναι τελείως τυχαίο. Η επιλογή αυτών των συνεντεύξεων έγινε με κριτήριο τη νοηματική προσφορά τους και τη συνεισφορά τους στην αναγνώριση και ανάδειξη κάποιων καταστάσεων, προβληματικών ή μη.

5. ΚΑΠΟΙΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αρκετά συμπεράσματα αναλύσαμε κατά την αναφορά των στατιστικών επεξεργασιών. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε κάποια από αυτά.

Ένα κύριο συμπέρασμα, εκτιμούμε, είναι ότι οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις είναι τελικά απούσες από το νου των περισσότερων μαθητών. Οι μαθητές αρέσκονται σε αλγοριθμικές διαδικασίες καθώς και σε αλγεβρικές αντιμετωπίσεις. Επιβεβαιώνεται έτσι για μια ακόμη φορά η θέση αρκετών ερευνητών, όπως π.χ. των Tall, 1991, Vinner, 1989, που με τις μελέτες τους έχουν σταθερά δείξει ότι η κατανόηση των μαθητών είναι τυπικά αλγεβρική και όχι οπτική. Και εδώ λοιπόν, από τα συμπεράσματά μας, επιβεβαιώθηκε ότι οι μαθητές προτιμούν την αλγεβρική αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων.

Όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα, οι Schwartz & Dreyfus (1995) διατύπωσαν την άποψη: *΄Το να μαθαίνεις στα μαθηματικά, περιορίζεται στο να απεικονίζεις μεταξύ αρκετών σημειογραφικών συστημάτων, υποδηλώνοντας το ίδιο αφηρημένο αντικείμενο.΄΄*. Διακρίνοντας την σκωπτική ίσως διάθεση των συγγραφέων σ' αυτό το σημείο, δεν μπορούμε να ενστερνιστούμε την άποψη αυτή ως τη γενικά σωστή. Πάντως φαίνεται να υπάρχει ένα δίκιο, από τη μεριά της σχολικής πρακτικής. Αλλά από την έρευνά μας φάνηκε ότι κι αυτό ακόμη είναι δύσκολο. Επιβεβαιώθηκε στην παρούσα εργασία το συμπέρασμα στο οποίο είχαν καταλήξει οι ανωτέρω συγγραφείς, στο αντίστοιχο άρθρο τους. Ότι δηλαδή υπάρχουν μεγάλες δυσκολίες στη σύνδεση αυτών των διαφορετικών σημειογραφικών συστημάτων. Εκτιμούμε ότι *΄΄η απεικόνιση μεταξύ αρκετών σημειογραφικών συστημάτων΄΄* έχει ως προαπαιτούμενο, την επιτυχή ανάγνωση του ενός συστήματος που θα απεικονιστεί στο άλλο. Και αυτό είναι το σημείο που, κατά τη γνώμη μας, οι μαθητές υστερούν. Η *΄΄ανάγνωση΄΄* δηλαδή του συστήματος όταν αυτό είναι γεωμετρικό – γραφικό και κατά συνέπεια, η *΄΄μετάφραση΄΄* ενός αλγεβρικού συστήματος σε γεωμετρικό – γραφικό.

Ας ξαναδούμε τα ερευνητικά μας ερωτήματα, προσπαθώντας να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα γι' αυτά, απ' τα αποτελέσματα της έρευνάς μας.

1. *Τι είδους γεωμετρικές διασυνδέσεις παρουσιάζουν οι μαθητές σχετικά με την εφαπτομένη καμπύλης.*

Εδώ το πρόβλημα παρουσιάζεται σε μεγάλο βαθμό, στην τεχνολογική κατεύθυνση, όπου μόλις ένα ποσοστό 37,04% μπόρεσε να απαντήσει σωστά σε αντίστοιχο ερώτημα. Οι μαθητές ναι μεν είναι πρόθυμοι να απαντήσουν άμεσα στη γεωμετρική σημασία της παραγώγου σε σχέση με την εφαπτομένη καμπύλης, αλλά η απάντηση αυτή έρχεται μάλλον από την αποστήθιση, αφού η κατανόηση φαίνεται να λείπει σε μεγάλο ποσοστό αυτών.

2. *Τι είδους διαισθητικές αντιλήψεις έχουν (π.χ., όταν πρόκειται να αναγνωρίσουν ή όχι μια εφαπτομένη).*

Αν αναφερθούμε στο πρόβλημα της εφαπτομένης, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η εισαγωγή της εφαπτομένης με έναν καινούργιο ορισμό, στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού, δημιουργεί σύγχυση σε μια μεγάλη μερίδα μαθητών. Σε αρκετούς δε από αυτούς, αυτή η σύγχυση ανατρέπει ακόμη και το προηγούμενο μοντέλο που είχαν δημιουργήσει, για τις εφαπτόμενες σε κωνικές τομές, ωθώντας τους μέχρι του σημείου να δίνουν δύο εφαπτόμενες σε ένα και το αυτό σημείο.

Στο γενικότερο ερώτημα των διαισθητικών αντιλήψεων θα αναφερθούμε αργότερα.

3. *Σε ποιο βαθμό προσέχουν και κατανοούν τη θεωρία σε απλά βασικά θέματα όπως αυτό της μονοτονίας μιας συνάρτησης ή στην περίπτωση των ακροτάτων.*

Το ερώτημα αυτό αφορά τόσο στην 3η ερώτηση όσο και στις ερωτήσεις 4 και 7. Όσον αφορά στη μονοτονία, το ζητούμενο δηλαδή στην 3η ερώτηση, δε βγάλαμε ασφαλή συμπεράσματα. Οι περισσότεροι έκαναν λάθος στη μονοτονία σε όλο το πεδίο ορισμού της, για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, αλλά, το ποσοστό αυτό μειώνεται έως και 17 μονάδες (για την τεχνολογική κατεύθυνση) όταν ζητείται το ίδιο για τη συνάρτηση $s(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Ίσως, η συνθετότερη μορφή της αναγκάζει τους μαθητές να σκεφτούν προσεκτικότερα. Ίσως πάλι να είναι αυτή συνθετότερη μορφή που τους έμπλεξε κι έτσι αποφάσισαν να μη χαρακτηρίσουν αυτή τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Όπως και να ΄χει δεν καταφέραμε να βγάλουμε κάποιο ισχυρό συμπέρασμα.

Όσον αφορά στα ακρότατα, φαίνεται να υπάρχει ένα γενικό πρόβλημα, ιδίως όταν αυτά πρέπει να αναγνωριστούν από γραφικές παραστάσεις παραγώγων και

παρουσιάζεται ένα ακόμη μεγαλύτερο πρόβλημα στον χαρακτηρισμό τους ως τοπικά ή ολικά. Όσο κι αν φαίνεται περίεργο, ακόμη και οι μαθητές που πέτυχαν σ' αυτή την ερώτηση, στα δύο πρώτα υποερωτήματα, βρήκαν δηλαδή σωστά τα σημεία που τους ζητιόντουσαν, δεν αντιμετώπισαν με την ίδια επιτυχία το χαρακτηρισμό τους ως ολικά ή τοπικά. Το πρόβλημα φάνηκε ακόμη μεγαλύτερο σε μια επόμενη ερώτηση, στην 7η, όπου οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τα ακρότατα από πληροφορίες μέσω των παραγώγων. Ας δούμε όμως το παρακάτω ερευνητικό ερώτημα.

4. *Πώς μπορούν να συλλέξουν αλγεβρικές πληροφορίες από ένα γράφημα.*

Εδώ αναφερόμαστε στην 4η ερώτηση του ερωτηματολογίου μας. Η παρουσία ενός γραφήματος φαίνεται να είναι αρκετά ισχυρή. Αρκετοί μαθητές παρασύρθηκαν από αυτή την παρουσία και διάβασαν μόνο τα ζητούμενα. Ας θυμηθούμε ότι περίπου 42% από τη θετική και 23% από την τεχνολογική κατεύθυνση απάντησαν σωστά στο 1ο και 2ο υποερώτημα, ενώ από τον πίνακα λαθών φαίνεται χωρίς αμφισβήτηση, ότι το μεγαλύτερο ποσοστό και από τις δύο κατευθύνσεις έκανε στο 1ο υποερώτημα το δεύτερο λάθος και στο 2ο υποερώτημα το πρώτο λάθος. Η κωδικοποίηση που έχουμε κάνει γι' αυτά, είναι ότι αναφέρονται στην περίπτωση που οι μαθητές διαβάζουν το γράφημα σα να ήταν γράφημα της συνάρτησης και όχι της παραγώγου της[9].

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε και κάτι ακόμη το οποίο δεν έχουμε αναφέρει στους προηγούμενους σχολιασμούς μας. Αν περιοριστούμε στο ποσοστό των μαθητών που έκαναν τα λάθη 2 και 1 στο 1ο και 2ο υποερώτημα και θεωρήσουμε ότι αυτοί διάβασαν σωστά, δηλαδή ότι το γράφημα που τους παρουσιαζόταν ήταν το γράφημα μιας συνάρτησης κι όχι της παραγώγου της, αν και καλύτερα έπρεπε να πούμε ότι ήταν το γράφημα της διαφοράς δύο συναρτήσεων κι όχι της διαφοράς των παραγώγων τους, τότε από τα αποτελέσματα που έχουμε, αυτοί απάντησαν σωστά κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό στους χαρακτηρισμούς περί μεγίστων και ελαχίστων. Δηλαδή, στο υποτιθέμενο γράφημα που διάβαζαν, μπόρεσαν να χαρακτηρίσουν σωστά τα ακρότατα. Εδώ λαμβάνουμε υπόψη και το ποσοστό της τεχνολογικής κατεύθυνσης που στο 1ο υποερώτημα έκανε το λάθος 4, δηλαδή δεν απάντησε. Το ποσοστό αυτό είναι 34,04%, όσο είναι και το αντίστοιχο ποσοστό της ίδιας κατεύθυνσης, που έκανε το λάθος 2 στο αντίστοιχο υποερώτημα. Η ερμηνεία που

[9] Βλ. σχετικούς πίνακες στις σελίδες 54, 55 και 67. Εντάξαμε σε αυτή την κωδικοποίηση και την περίπτωση να δίνουν τα σημεία ανάποδα, καθαρά για λόγους συντόμευσης. Ήταν λίγοι τελικά οι μαθητές που έκαναν αυτό το δεύτερο λάθος και στατιστικά αμελητέοι.

δίνουμε σ' αυτό είναι ότι μέρος αυτού του ποσοστού δεν απάντησε διότι δεν έβλεπε ακρότατα στο υποτιθέμενο γράφημα που διάβαζε. Το ότι μάλλον δώσαμε σωστή ερμηνεία σ' αυτό το γεγονός, συνεπικουρείται από το ποσοστό της τεχνολογικής κατεύθυνσης που δεν απάντησε, δηλαδή έκανε το λάθος 3, στο $2^{ο}$ υποερώτημα, το οποίο είναι 17,02%, δηλαδή το μισό ακριβώς του προηγουμένου. Πραγματικά μας γεννήθηκε απορία, πώς γίνεται οι μισοί από τους μαθητές που απαρτίζουν αυτό το ποσοστό να αποφάσισαν να απαντήσουν στο υποερώτημα για μέγιστα και να μην απαντήσουν στο υποερώτημα για ελάχιστα; Μ' αυτή τη μακροσκελή παρατήρησή μας, αυτό που τελικά θέλουμε να αναφέρουμε είναι ότι οι μαθητές μπορεί να θεωρηθεί ότι τα πήγαν πολύ καλά σ' αυτή τη *΄΄μετάφραση΄΄* σε αλγεβρικά στοιχεία από γεωμετρικές πληροφορίες. Άρα θα πρέπει να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η άμεση, γιατί πραγματικά, εκτιμούμε ότι πιο άμεση δε μπορεί να υπάρξει, μετάβαση από ένα σημειογραφικό σύστημα σε ένα άλλο, δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα για την πλειοψηφία των μαθητών. Το υπό-δείγμα βέβαια που έχουμε από τα υποκείμενά μας, δε μπορεί να θεωρηθεί επαρκές για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως μια ένδειξη για κάποια αντίστοιχη έρευνα.

5. *Πώς μπορούν να χειριστούν ένα απλό, αλλά ρεαλιστικό πρόβλημα και τι ερμηνεία μπορούν να δώσουν στα αποτελέσματά τους.*

Η παρουσία ενός προβλήματος φαίνεται να είναι αγκάθι για τους μαθητές, σε γενικότερο επίπεδο. Χαρακτηριστικά είναι τα συμπεράσματα που βγάλαμε τόσο από την ανάλυση μέσω XL, όσο και από την ανάλυση μέσω Gras. Με τη θετική κατεύθυνση λίγο πάνω από το 50% και την τεχνολογική κάτω από το 40%, σε ένα απλό πρόβλημα γενικής παιδείας, τα πράγματα δεν είναι ενθαρρυντικά. Επίσης στα συνεπαγωγικά διαγράμματα φάνηκε ότι το πρόβλημα ήταν το τελευταίο στην ακολουθία των συνεπαγωγών.

Δε μας εκπλήσσει αυτό. Είναι γνωστά τα αποτελέσματα από άλλες έρευνες, που αναδεικνύουν το μεγάλο εμπόδιο που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε περιβάλλον προβλημάτων.

Θα πρέπει όμως να αναφέρουμε πάλι και να τονίσουμε, ότι οι ερωτήσεις 4 και 5 είναι πανομοιότυπες. Όπως όμως δείχθηκε από τα διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγής, πολύ λίγη σχέση φαίνεται να έχουν μεταξύ τους. Ενώ οι μαθητές μπορεί να πετύχουν στην $4^{η}$ ερώτηση, αυτό δε συνεπάγεται ότι μπορούν να πετύχουν και στην $5^{η}$ ερώτηση που είναι το πρόβλημα.

6. *Πως μπορούν να χειριστούν τις γραφικές παραστάσεις όταν από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης τους ζητηθεί η γραφική παράσταση της παραγώγου αλλά και αντίστροφα.*

Δε μπορούν! Άμεση η απάντησή μας, αλλά από τα στοιχεία που έχουμε, αυτό προκύπτει ως σχεδόν αβίαστο συμπέρασμα. Η επιτυχία σ' αυτά τα έργα είναι μικρή. Αναλύσαμε αρκετά στα προηγούμενα, τα αποτελέσματα που βγάλαμε. Θα θέλαμε να κάνουμε όμως εδώ έναν παραλληλισμό με τη μελέτη του Duval (1993, 1996) περί ανολοκληρωσιμότητας και ασάφειας των αναπαραστάσεων γενικότερα. Κάθε αναπαράσταση είναι μέρος αυτού που αναπαριστά. Και ως μέρος, δε μπορεί να μεταφέρει το σύνολο των ιδιοτήτων που μπορεί να έχει η έννοια. Άρα ενέχει από τη φύση της την ιδιότητα του ασαφούς.

Είναι όμως μόνο αυτό που εμποδίζει τον κατάλληλο χειρισμό των γραφικών παραστάσεων από τους μαθητές;

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και το πλήθος των πληροφοριών που μπορούν να μεταφερθούν με ένα γράφημα, φτάνουμε σε μια κατάσταση υπέρ – πληροφόρησης των μαθητών, αν και εφόσον μπορούν να αντλήσουν αυτές τις πληροφορίες από ένα γράφημα. Κι αυτό δεν μπορεί να οδηγήσει σε τίποτε άλλο από τη σύγχυση στο μυαλό του μέσου μαθητή. Η επιλογή, το ξεδιάλεγμα, αν προτιμά κάποιος, αυτών των πληροφοριών, δεν είναι άλλο από το πρώτο στάδιο, από αυτό που στα μαθηματικά ονομάζουμε *΄΄στοχαστική αφαίρεση΄΄*. Αυτό όμως απαιτεί αυξημένες νοητικές λειτουργίες, στις οποίες το σύνολο των μαθητών δεν εντρυφεί.

Επίσης, προσθέτοντας και τη δυσφορία και δυσθυμία των μαθητών απέναντι σε γεωμετρικές καταστάσεις, καταστάσεις δηλαδή που από τη φύση τους απαιτούν το χειρισμό τους μέσω *΄΄αφαιρέσεων΄΄*, έχουμε ως αποτέλεσμα το ότι οι γραφικές παραστάσεις αντιμετωπίζονται ως ξένο σώμα, ως κάτι περιττό, στην όλη διαδικασία της μελέτης των μαθητών επί κάποιων εννοιών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και με την αλγεβρική προτίμηση δεδομένη, και από την έρευνά μας και από προηγούμενες έρευνες, δεν θα έπρεπε κανείς να αναμένει διαφορετικά αποτελέσματα. Απλά τα επιβεβαιώσαμε.

7. *Αν μπορούν να διαβάσουν, να αναγνωρίσουν δηλαδή, τις αλγεβρικές πληροφορίες που τους δίνονται συμβολικά, σε ένα γράφημα.*

Εδώ αναφερόμαστε στην 8η και τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου μας. Δεν είχαμε ικανοποιητική επιτυχία από τους μαθητές. Η θετική κατεύθυνση μόλις που ξεπέρασε το 50% ενώ η τεχνολογική περιορίστηκε στο φτωχό 34%. Ας θυμηθούμε ότι στη, μέσω XL, ανάλυσή μας, θεωρούσαμε την ερώτηση αυτή σχετικά εύκολη, αφού οι μαθητές είχαν να κάνουν μια απλή μετάφραση, μέσω ανάγνωσης μάλιστα, από συμβολικό σε γεωμετρικό χαρακτήρα. Συχνά – πυκνά οι μαθητές διαψεύδουν τις εκτιμήσεις μας, άλλες φορές θετικά και άλλες φορές αρνητικά. Αναγκαζόμαστε τότε να αναδιαμορφώσουμε αυτές. Η μετάφραση τελικά αποδείχτηκε πολύ δύσκολη περίπτωση για τους μαθητές. Συζητήσαμε ανωτέρω τις απόψεις μας για τη μετάφραση.

8. *Τα ερωτήματα 4, 6 και 7 μπορούν να συντεθούν σε ένα γενικότερο: Τι είδους γεωμετρικές αναπαραστάσεις και εννοιολογικές διασυνδέσεις και σε τι βαθμό, μπορούν να αναπτύξουν σε ανάλογα έργα.*

Απ’ ότι είδαμε οι γεωμετρικές διασυνδέσεις είναι σε σχεδόν εμβρυακή κατάσταση στους μαθητές. Η Γεωμετρία – νομίζω θα πρέπει να συμφωνήσουμε σ’ αυτό – είναι παραγκωνισμένη, όσον αφορά στη διδασκαλία της στο Λύκειο. Δικαιολογητικό γι’ αυτό αποτελεί μάλλον η μη ευρεία αποδοχή της από τους μαθητές. Οι έννοιες όμως του Απειροστικού Λογισμού αναπτύχθηκαν έχοντας ως μια βασική συνιστώσα τους τη γεωμετρική αντίληψη. Κατά συνέπεια, οι εννοιολογικές διασυνδέσεις που θα μπορούσαν να υπάρχουν δεν βρίσκουν γόνιμο έδαφος να αναπτυχθούν.

Οι μαθητές προτιμούν τα αλγοριθμικά έργα. Σ΄ αυτό υπαίτια φαίνεται να είναι και η διδασκαλία, όπως αυτή εφαρμόζεται κάτω από τις υπαγορεύσεις της καθημερινής αναγκαιότητας, καθώς και ο γενικότερος προσανατολισμός που απορρέει από τις από καιρού εις καιρόν οδηγίες, υπό μορφή συστάσεων και προτροπών, που ανακοινώνονται από τους αρμόδιους φορείς. Ως συνέπεια λοιπόν, αναμένεται να έχουμε διασυνδέσεις σε πρωτόλεια μορφή.

Όλα τα παραπάνω εμφανίστηκαν με σαφέστατες ενδείξεις στα αποτελέσματα που συνάγομε.

Μέσω των συνεντεύξεών μας, οι οποίες με μια ευνοϊκή διάθεση θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ΄΄μελέτες περίπτωσης΄΄, εμφανίστηκε κατ’ αρχήν ο αρμονικός τύπος

του Krutetskii. Αυτό πραγματικά ήταν μια ευχάριστη έκπληξη για μας, δεδομένου του ότι η εμπειρία έχει δείξει τη σπανιότητα του είδους.

Επίσης, εμφανίστηκε κατά έναν σαφέστατο τρόπο το πρόβλημα που μπορεί να δημιουργήσει η οπτικοποίηση καταστάσεων, όταν δημιουργείται μια ανεξέλεγκτη εικόνα. Είχαμε ένα τελείως ανάλογο φαινόμενο με αυτό που παρατηρήθηκε στην έρευνα της Aspinwall. Η Presmeg το 1992 κατέθετε την άποψη ότι έντονες, ζωηρές εικόνες δε βοηθούσαν, αλλά αποτελούσαν εμπόδιο όταν οι μαθητές έλυναν προβλήματα διαφόρων τύπων. Ένα χαρακτηριστικό αυτών των ανεξέλεγκτων εικόνων είναι η αντοχή τους, ακόμη κι όταν αντιμετωπίζουν αντίθετα συμπεράσματα. Ας θυμηθούμε ότι η μαθήτρια που παρουσίασε τέτοιου είδους εικόνες, είχε αντικειμενικά – υπό την έννοια των βαθμολογιών της σε διάφορα τεστ και διαγωνίσματα – χαρακτηριστεί ως άριστη. Παρ' όλα αυτά έφυγε από τη συνέντευξη, χωρίς να έχουμε αποκομίσει την αίσθηση ότι άλλαξε η άποψή της για το συγκεκριμένο θέμα. Μάλλον αναγκάστηκε να την ΄΄φιμώσει΄΄.

Και τέλος, εμφανίστηκε το γνωστό πρόβλημα της σύνδεσης της μονοτονίας της συνάρτησης με το πρόσημό της, αλλά και το πρόβλημα της ανάγνωσης μιας γραφικής παράστασης σα να είναι ξένο σώμα. Ίσως μάλιστα να είναι αυτή η διατύπωση που πρέπει να χρησιμοποιούμε για να λέμε πως αντιμετωπίζονται οι γραφικές παραστάσεις από τους μαθητές. Ένα ξένο σώμα, μια ετικέτα που απλά αναφέρει, δεν συνεισφέρει.

Είναι γενικώς αποδεκτό από τους καθηγητές όλων των βαθμίδων, ότι η ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων συνεισφέρει θετικά στην κατανόηση από μέρους των μαθητών των διαφόρων εννοιών με τις οποίες έρχονται σε επαφή. Η εισαγωγή των αλγεβρικών και γραφικών – γεωμετρικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων είναι ένα κομβικό σημείο της διδασκαλίας των μαθηματικών και αποτελεί ένα πρώιμο στάδιο στο οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα συμβολικό σύστημα για να αναπτύξουν και να κατανοήσουν κάποιο άλλο. Μας φαίνεται ειλικρινά δύσκολο να κατανοήσει κάποιος μια έννοια, χωρίς να μετακινηθεί σε διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων

Από αυτές τις αναπαραστάσεις, κυρίαρχη θέση κατέχουν οι οπτικές αναπαραστάσεις. Μια παλιά κινέζικη παροιμία λέει:

Μια εικόνα, χίλιες λέξεις.

Θεωρούμε ότι η οπτικοποίηση στα πλαίσια της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού είναι συνώνυμη των γραφημάτων. Κάθε γράφημα είναι αποτέλεσμα μιας γεωμετρικής διαδικασίας. Από τη μεριά του, μεταφέρει ένας πλήθος πληροφοριών. Όπως όμως φάνηκε από τα συμπεράσματά μας, δεν μπορούν να είναι όλα εκμεταλλεύσιμα. Μάλιστα, αυτό που φάνηκε είναι ότι .λίγα έως ελάχιστα από αυτά είναι εκμεταλλεύσιμα. Παρουσιάστηκε μια αρκετά καλή δυνατότητα άμεσης μετάφρασης πληροφοριών από ένα γράφημα (η οποία όμως δεν ήταν δυνατόν να γίνει στατιστικά εκμεταλλεύσιμη). Αλλά μέχρις εκεί. Απαιτήσεις συνθετότερου επιπέδου δεν είναι στα ευρύτερα πλαίσια αντιμετώπισης από το σύνολο των μαθητών.

Πραγματικά μας είναι δύσκολο να φανταστούμε μια διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού χωρίς τη συμμετοχή γραφημάτων. Παρ' όλα αυτά έχει διαπιστωθεί ότι ο συνήθης χειρισμός των γραφημάτων δε δείχνει ο κατάλληλος για τους επιδιωκόμενους στόχους. Οι στόχοι μπορεί να είναι μεγαλεπήβολοι (κατανόηση, μετάφραση, διαχείριση των εννοιών), η καθημερινή πρακτική όμως, φαίνεται να απέχει από αυτούς. Δε θα πρέπει να παραγνωρίζουμε το φαινόμενο της εικόνας για την έννοια, όπως την όρισαν οι Tall & Vinner, που σχηματίζει κάθε μαθητής ξεχωριστά. Αν π.χ. ο καθηγητής εξηγήσει στην τάξη τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου σε ένα σημείο, αλλά στη συνέχεια ασχοληθεί κατά κύριο λόγο με την εύρεση της παραγώγου σε ένα σημείο μέσω αλγοριθμικών διαδικασιών, τότε θα πρέπει να αναμένουμε ότι ο μαθητής θα σχηματίσει μια μάλλον ασαφή εικόνα για τη γεωμετρική σημασία της έννοιας που του διδάχτηκε. Εν αντιθέσει θα σχηματίσει μια ισχυρή εικόνα για τους αλγεβρικούς χειρισμούς.

Αν και προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι η οπτικοποίηση μπορεί κάποιες φορές να αποτελέσει σοβαρό εμπόδιο.

Δεν είμαστε θιασώτες της άποψης να παραγκωνισθούν οι γραφικές παραστάσεις. Το ενάντιο μάλιστα. Εκτιμούμε όμως ότι η υπερπήδηση του εμποδίου της οπτικοποίησης συμβάλλει ουσιαστικότατα στην κατανόηση και αποσαφήνιση των εννοιών από τη μεριά του μαθητή. Όπως επίσης εκτιμούμε ότι είναι αναγκαία η ενίσχυση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Κατά την άποψή μας οι γραφικές παραστάσεις ως μέρος των αναπαραστάσεων που προκύπτουν από μια συνάρτηση, είναι ταυτόχρονα ***΄΄σημαίνον΄΄*** και ***΄΄σημαινόμενο΄΄***.

Ο επιτυχής ή όχι χειρισμός τους φαίνεται να οφείλεται σε αρκετούς παράγοντες, όπως:

- Η προτίμηση (ή όχι) των μαθητών σε αλγεβρικές διαδικασίες
- Η συρρίκνωση της Γεωμετρίας στο Λύκειο
- Οι συνδέσεις (πλήθος και ένταση αυτών) μεταξύ των αναπαραστάσεων οποιουδήποτε είδους, που ενυπάρχουν σε κάθε μαθητή στο νοητικό σχήμα που έχει φτιάξει, είτε αυτό είναι συνεπές βασιζόμενο στην τυπική θεωρία, είτε απαρτιζόμενο μόνο από την εικόνα της έννοιας που έχει σχηματίσει.
- Η αφαίρεση που πρέπει να κάνει κάποιος απομονώνοντας τις πληροφορίες που χρειάζεται
- Η ικανότητα μεταφοράς από τη μια αναπαράσταση στην άλλη.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Από την εργασία μας νομίζουμε ότι προέκυψαν κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Επιβεβαιώσαμε, και στην Ελληνική πραγματικότητα, έρευνες που αφορούν στη γενικότερη αλγεβρική αντιμετώπιση των μαθητών σε προβληματικές γι' αυτούς καταστάσεις, προβλήματα που αφορούν στην οπτικοποίηση, στην ανάγνωση, στη διαχείριση των προβλημάτων από τους μαθητές, στη μεγάλη δυσκολία χειρισμού γραφικών παραστάσεων και μετάβασης από ένα συμβολικό σύστημα σε ένα άλλο κ.α.. Επίσης προέκυψαν κάποιες ενδείξεις σε κάποια θέματα, όπως της μονοτονίας και των ακροτάτων, που δεν μπόρεσαν να επιβεβαιωθούν επαρκώς και που χρειάζονται περαιτέρω έρευνα.

Τελειώνοντας αυτή την εργασία, δεν μπορούμε να μην αναφέρουμε το αίσθημα του ανολοκλήρωτου που μας εμφανίστηκε. Πολλά θα μπορούσαμε να πούμε και πολλά δεν είπαμε. Δε θεωρούμε σε καμία περίπτωση ότι μπορέσαμε να δώσουμε ολοκληρωμένη απάντηση σε όλα τα ερωτήματα και παρατηρήσεις που προέκυψαν. Αν καταφέραμε να δώσουμε ψήγματα υπονοιών για κάποια κομμάτια, θα το θεωρήσουμε μεγάλη ικανοποίησή μας. Θα είναι ευχής έργο κάποια από αυτά να είναι εκμεταλλεύσιμα σε άλλες έρευνες, των οποίων τη εξέλιξη και το αποτέλεσμα θα αναμένουμε με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- Apostol Tom (1984). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι, ΙΙ.* εκδ. Ατλαντίς.
- Aspinwall L., Shaw L. K., Presmeg C. N. (1997). *Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Cpnnections between a Function and its Derivative.* Educational Studies in Mathematics, 33, 301-317.
- Baker B. (2000). *A calculus Graphing Schema*. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 5, 557-578.
- Bloch I. (2003). *Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?* Educational Studies Mathematics, 52, 3-28.
- Boardman S., Evans D., Clough T., Nield M. (2000). *Pure Maths I*. Heinemann
- Boardman S., Graham T., Parraamore K., Williamson R. (2001). *Pure Maths II*. Heinemann.
- Eisenberg T., Dreyfus T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics* (in W. Zimmermann and S. Cunningham: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*). Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 25-37.
- Fischbein E. (1999). *Intuitions and schemata in mathematical reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 38, 11-50.
- Grugnett L., Rizza A. (2003). *A lengthy process for the establishment of the concept of limit.*
- Juter K. (2003). *Limits of functions-How do students handle them?*
- Katz V. (1993). *A History of Mathematics*. HarperCollins College Publishers
- Krutetskii V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Lakoff G., Nunez E. (2000). *Where Mathematics Comes From*. Basic Books.
- MacFarlane S. (1964). *Spatial Ability, its Educational and Social Significance*. University of London Press.
- Posamentier A., Stepelman J. (1999). *Teaching Secondary School Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.
- Rudin W. (1985). *Principles of Mathematical Analysis*. International students Edition.

- Sawyer W. W. (1993). *Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός*. Εκδ. Τροχαλία.
- Speavak M (2000). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. εκδ. Π. Ε. Κ.
- Tall D. (1980). *Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes.* Fourth International Congress on Mathematics Education, 170-176 .
- Tall D. (1991). Intuition and Rigor: *The role of Visualization in Calculus* (in W. Zimmermann and S. Cunningham: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*). Mathematical Association of America, Washington DC, pp..105-119.
- Tall D., Vinner S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
- Thomas G., Finney R. (2000). *Απειροστικός Λογισμός. εκδ.* Π. Ε. Κ.
- Vinner S. (1989). *The avoidance of visual considerations in calculus students*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 2, 149-156.
- Γαγάτσης Α., Ευαγγελίδου Α., Ηλία Ι., Σπύρου Π. (2004). Αναπαραστάσεις *και μάθηση των μαθηματικών, Τομ. Ι &ΙΙ.* Εκδ. Intercollege.
- Γαγάτσης Α., Μιχαηλίδου Ε., Σιακαλλή Μ. (2000). *Συναρτήσεις*. Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής.
- Γιαννακούλιας Ε. (2004). *Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Μαθηματικό τμήμα.
- Ζαχαριάδης Θ,. Μπιζά Ε., Σογιούλ Α. (2004). *Εννοιολογική αλλαγή στη Μαθηματική Ανάλυση: Από την εφαπτομένη κύκλου στην εφαπτομένη καμπύλης.* Θερινό σχολείο, Κύπρος 2004.
- Μουσουλίδης Ν., Γαγάτσης Α. (2003). *Γεωμετρική και Αλγεβρική Προσέγγιση Επίλυσης σε Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων.* Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής.
- Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1995). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Εκδ. Συμμετρία.
- Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1995). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙα, ΙΙβ.* Εκδ. Συμμετρία.
- Ντούγιας Σ. (2000). *Απειροστικός Λογισμός Ι, ΙΙ.* Πανεπιστημιακό τυπογραφείο Ιωαννίνων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟ ΤΕΣΤ

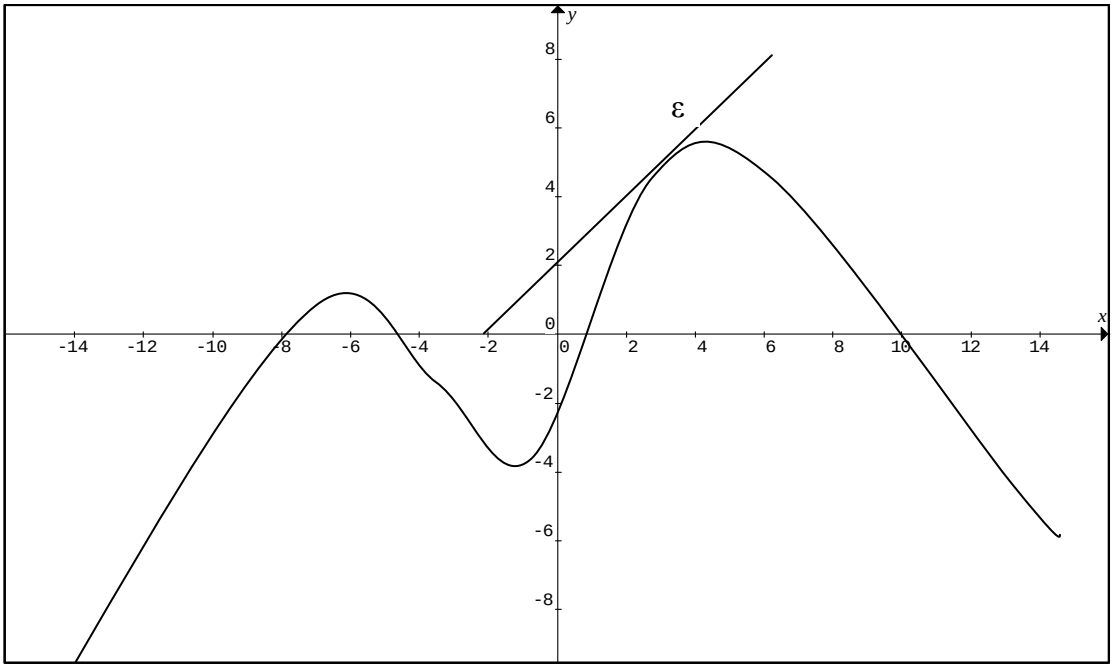
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: .....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΤΜΗΜΑ: .....

Ερώτηση 1η

Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της παρακάτω γραφικής παράστασης στο σημείο Α(3, 5), να υπολογίσετε τα ακόλουθα:



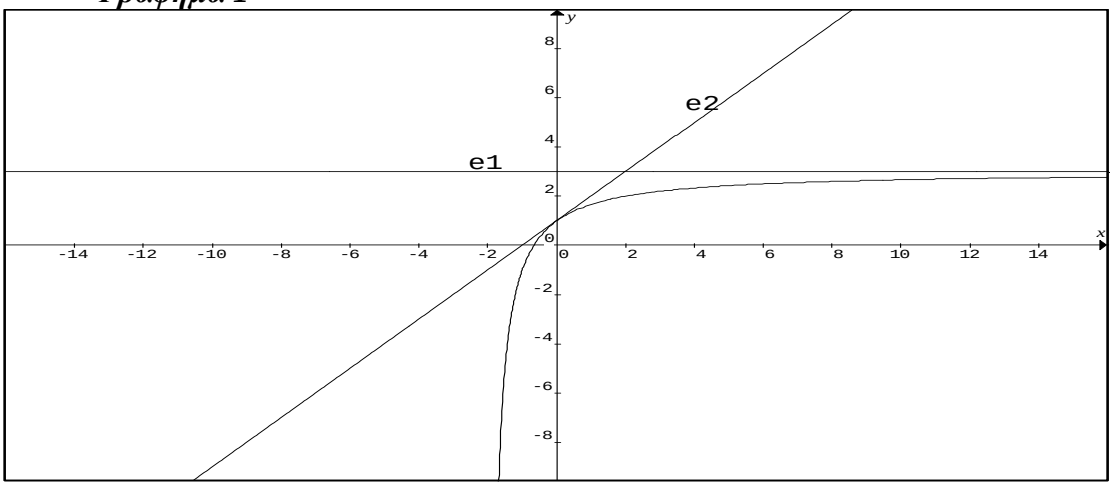
i. f (3)= …..
ii. $f'(3) =$ .....
iii. f (0)= …..

Ερώτηση 2η

Ποια είναι η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o = 0$, αν υπάρχει, καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις;

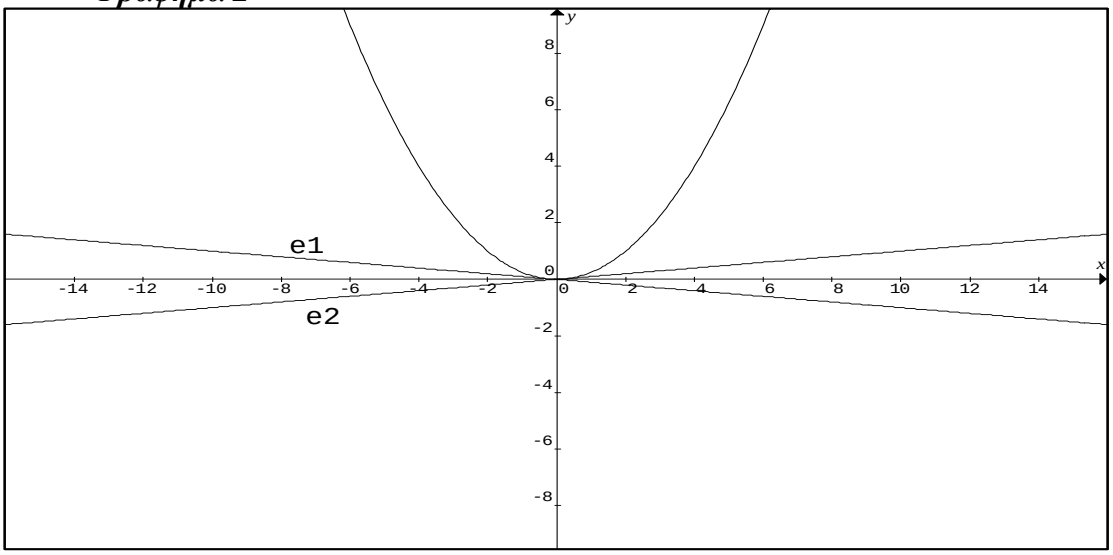
Γράψτε τις απαντήσεις σας συμπληρώνοντας κατάλληλα τον πίνακα στο τέλος του κάθε σχήματος.

Γράφημα 1



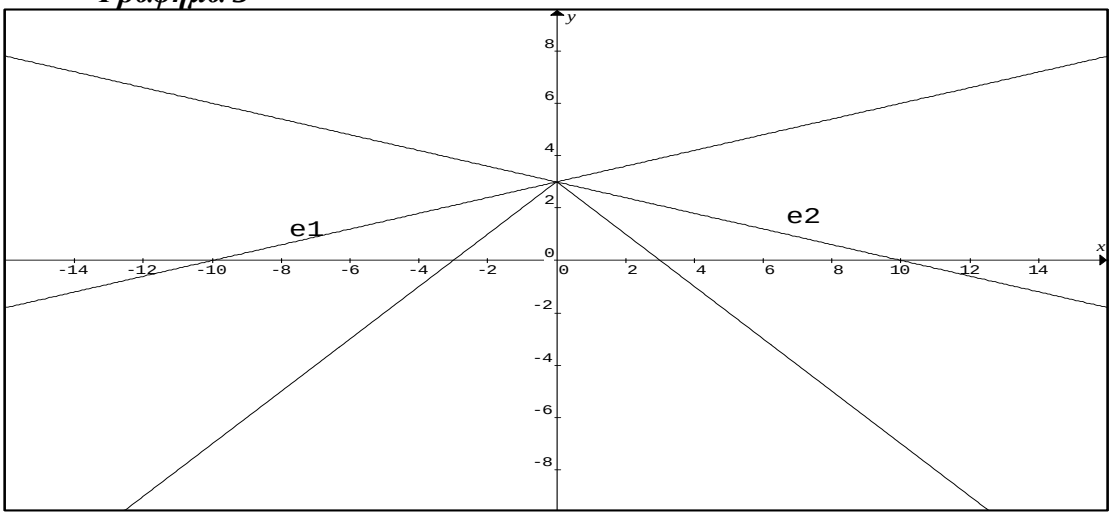
Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Γράφημα 2



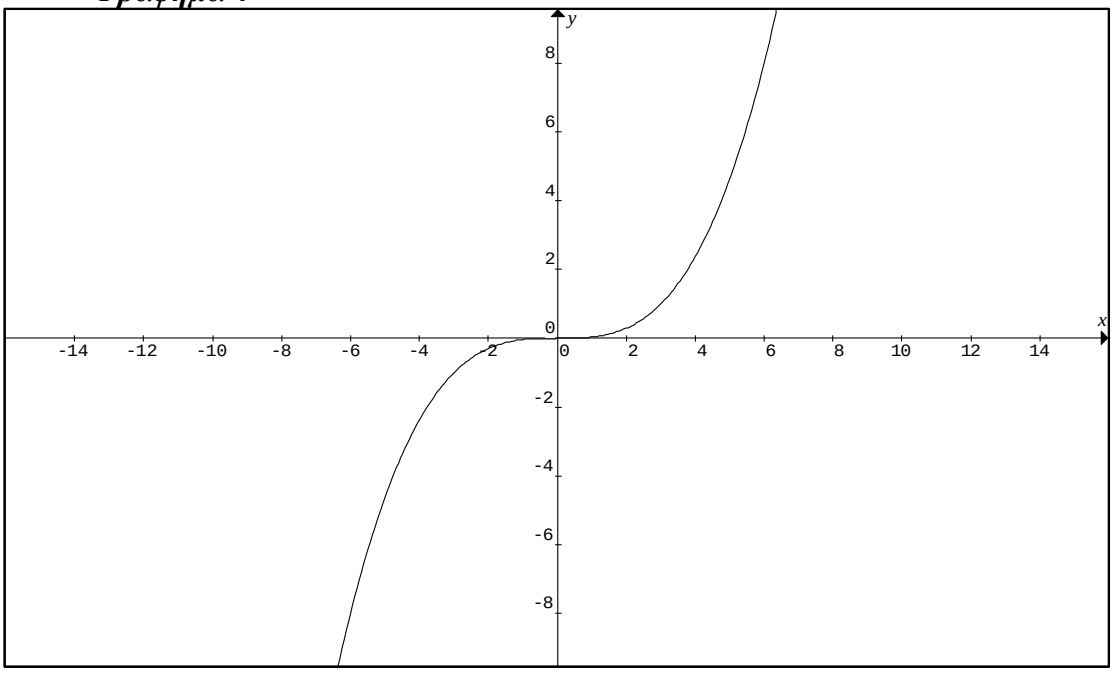
Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Γράφημα 3



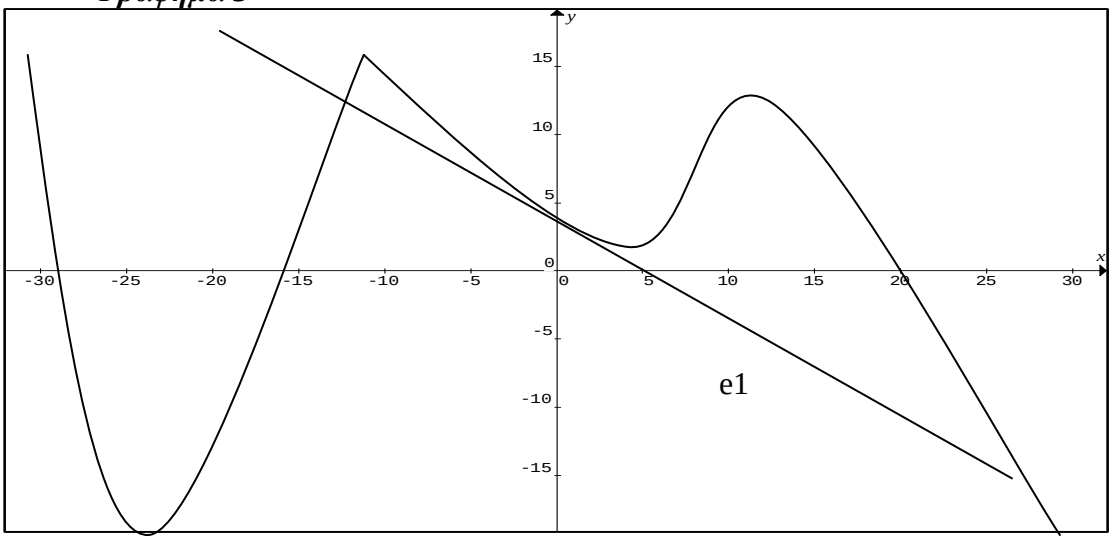
Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Γράφημα 4



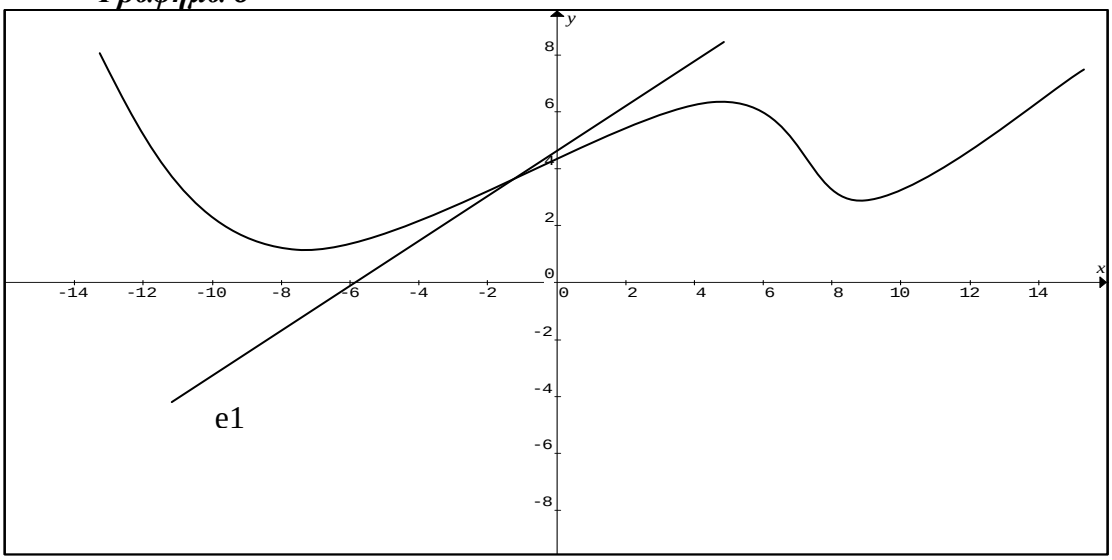
Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Γράφημα 5



Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Γράφημα 6



Εφαπτομένη είναι	Δεν είναι καμία από αυτές που παρουσιάζονται	Δεν υπάρχει	Δε γνωρίζω

Ερώτηση 3η

Ποια (ποιες) από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και τι είδους μονοτονία έχει; Να αναφέρετε και το πεδίο ορισμού.

i. $f(x) = 2x^3 - 5x + 3$ .....

ii. $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ .....

iii. $g(x) = x^3 + x + 1$ .....

iv. $h(x) = x^2 + x + \eta\mu x$ .....

v. $s(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ .....

vi. $w(x) = \sqrt{1 - x}$ .....

(*) Ποια (ποιες) από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι ΄΄1 – 1΄΄; Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας σε αυτό το υποερώτημα.

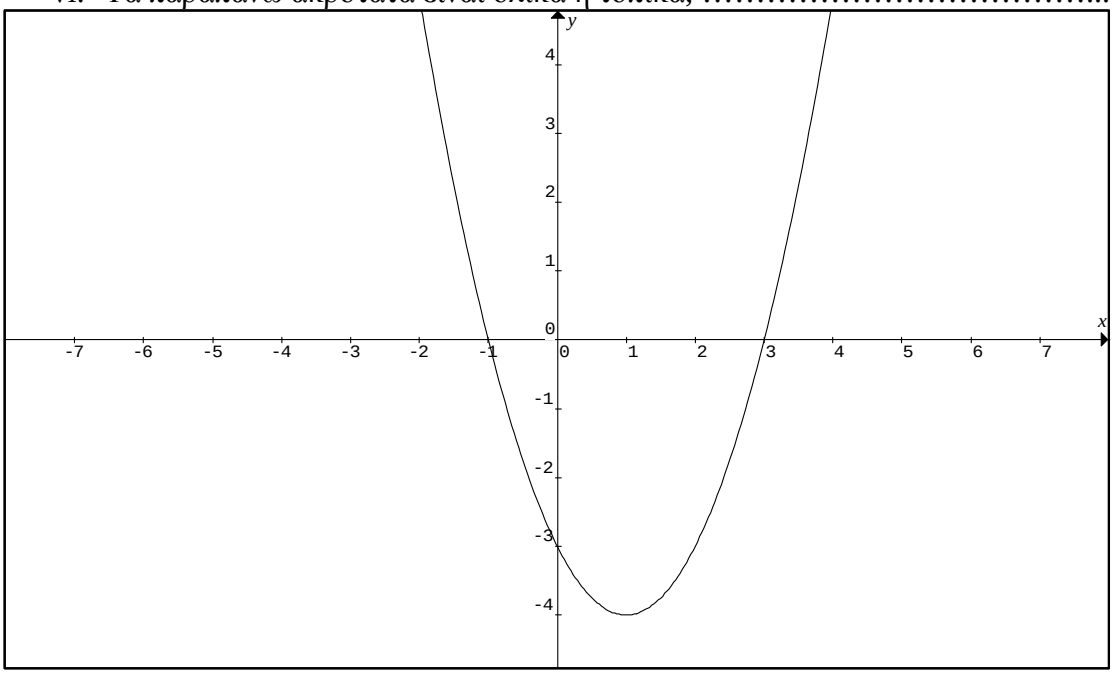
Ερώτηση 4η

Η παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την πρώτη παράγωγο της διαφοράς δύο συναρτήσεων f, g.

iv. Σε ποιο σημείο η διαφορά αυτή γίνεται μέγιστη; ……...

v. Σε ποιο σημείο γίνεται ελάχιστη; ……...

vi. Τα παραπάνω ακρότατα είναι ολικά ή τοπικά; ……...



Ερώτηση 5η

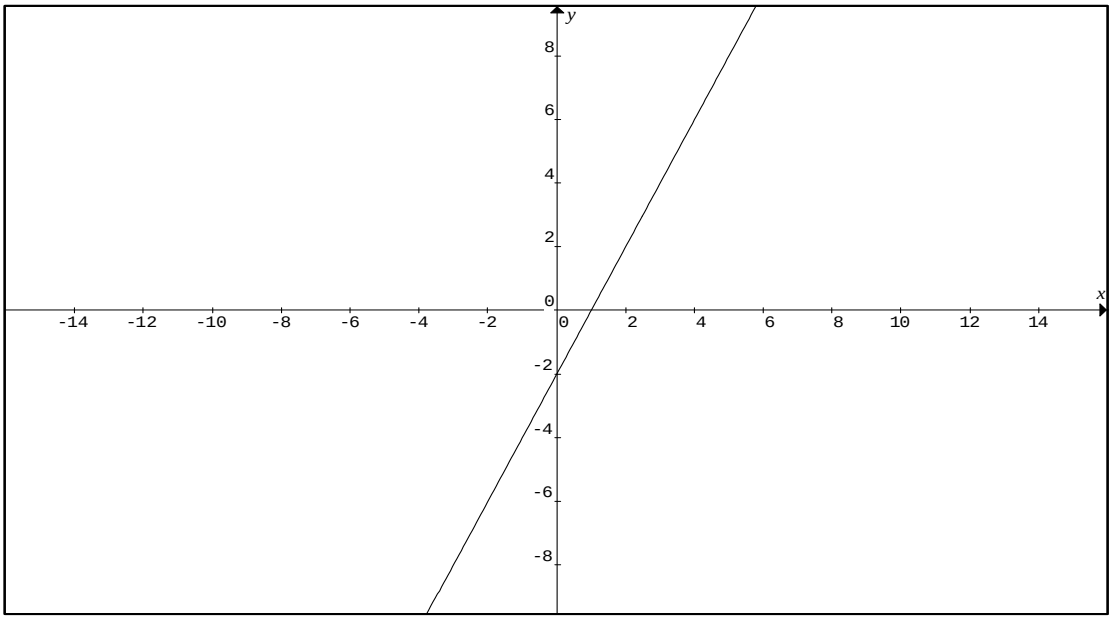
Μια εταιρία παράγει x μονάδες από ένα προϊόν ($x \geq 0$). Το κόστος για την παραγωγή των x μονάδων δίνεται, σε χιλιάδες ευρώ, από τη συνάρτηση $K(x) = 2x^2 + 9x$, ενώ τα έσοδα από την πώληση των x μονάδων δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^3 - x^2 + 4$, (επίσης, σε χιλιάδες ευρώ).

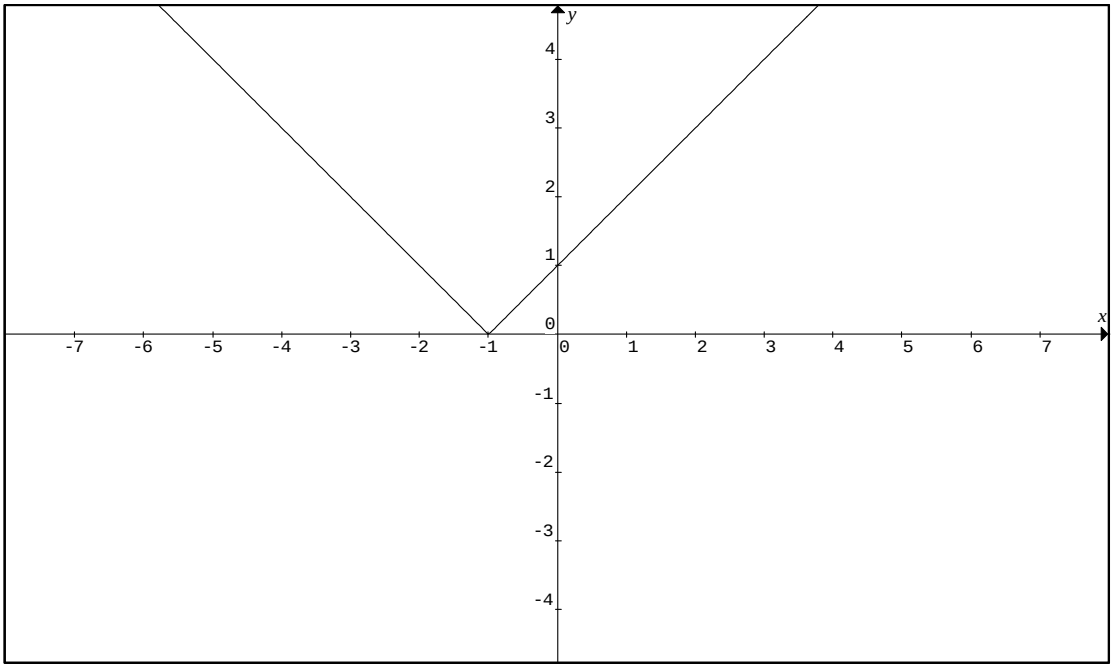
Παρουσιάζει η εταιρία αυτή ζημιά και πόσο μεγάλη μπορεί αυτή να είναι;

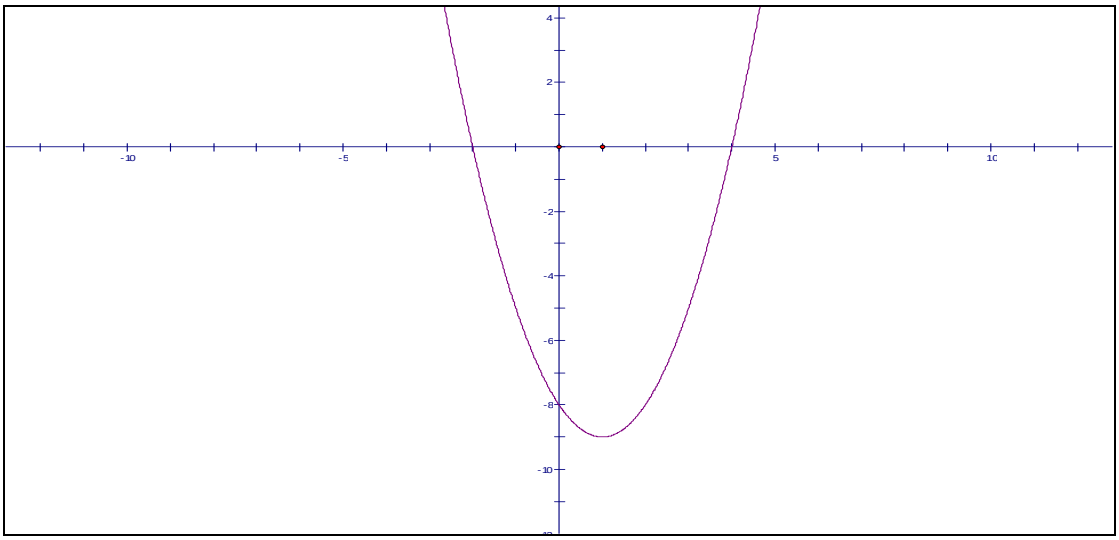
Να αναφέρετε αναλυτικά τους συλλογισμούς σας και τις πράξεις σας.

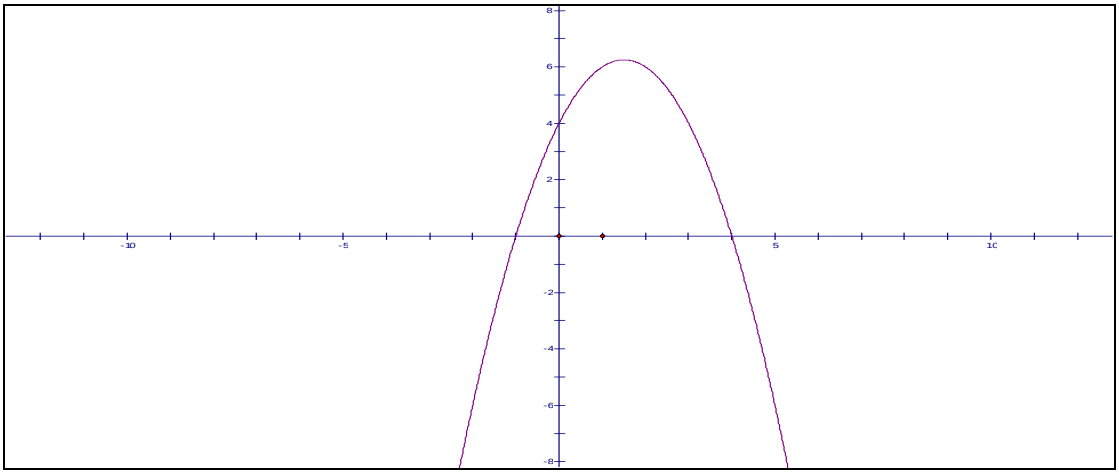
Ερώτηση 6η

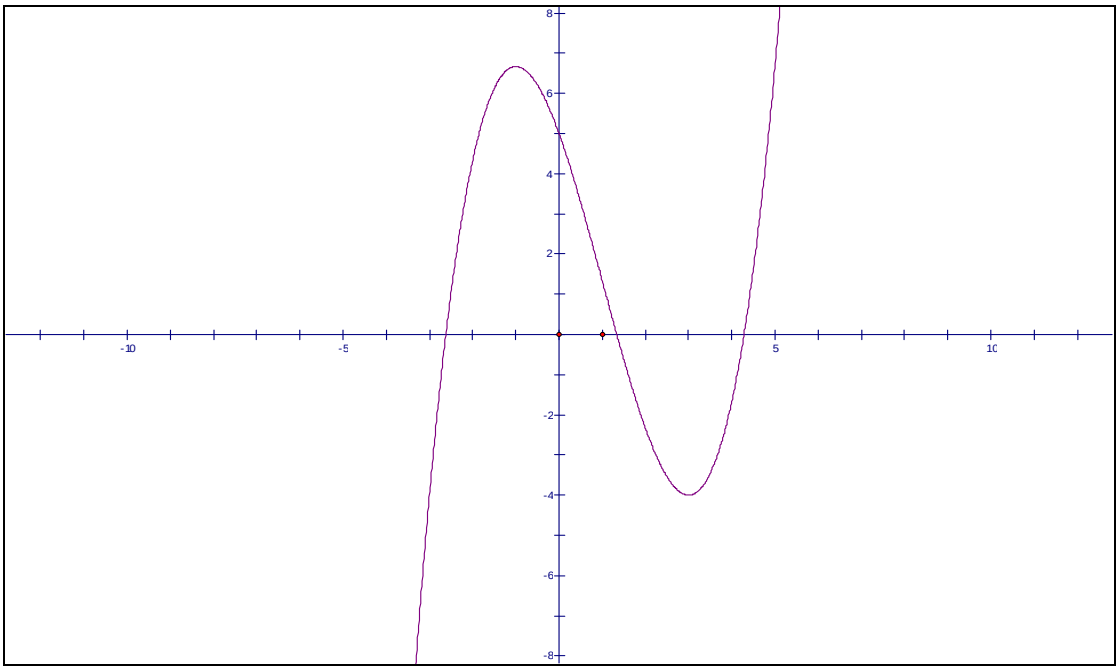
Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις μέσω των γραφικών τους παραστάσεων. Για κάθε μια από αυτές να σχεδιάσετε στο ίδιο γράφημα την πρώτη παράγωγό της.

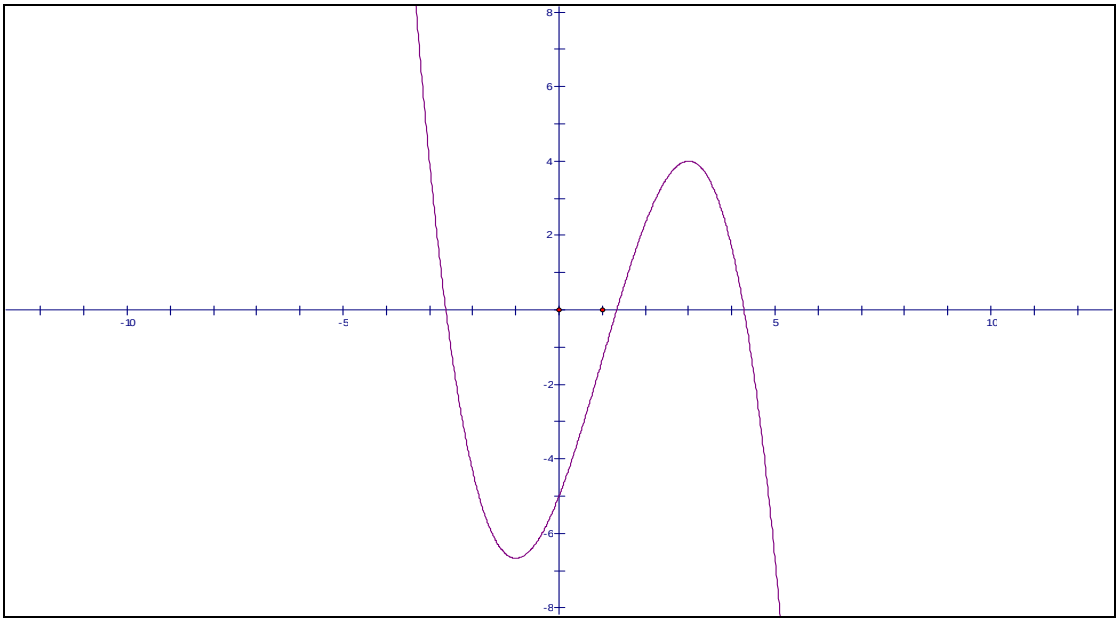



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7






8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-5
5
10


8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-5
5
10

Ερώτηση 7η

Σας δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων κάποιων συναρτήσεων f.

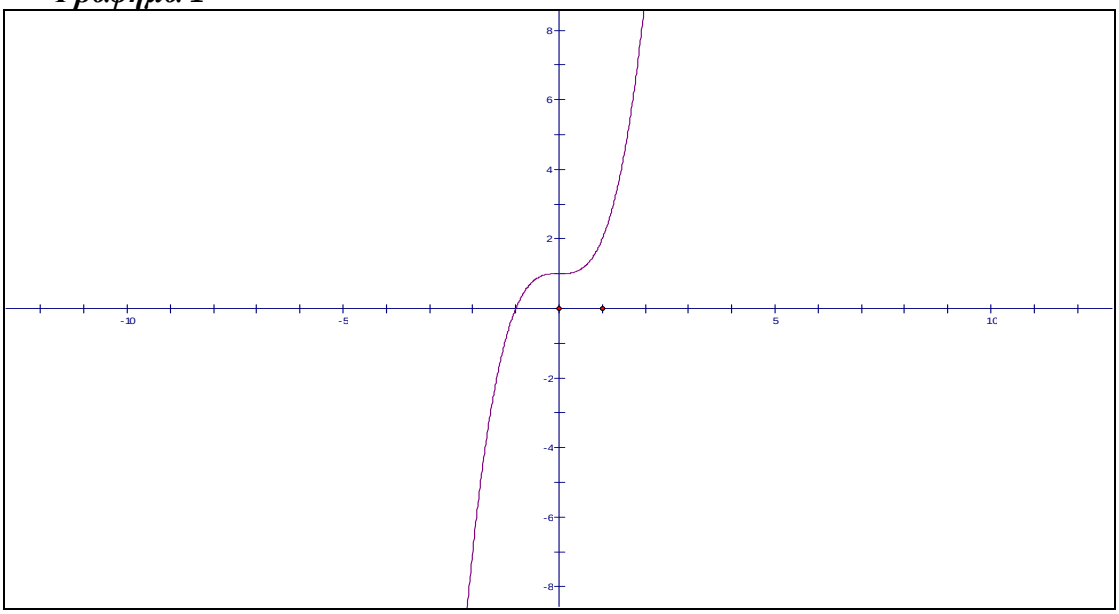
i. Ποια (ποιες) από αυτές τις συναρτήσεις παρουσιάζει (παρουσιάζουν) ακρότατο και σε ποιο σημείο του πεδίου ορισμού της (τους);

ii. Τι είδους ακρότατο είναι; (π.χ., τοπικό μέγιστο. ολικό ελάχιστο, κ.τ.λ.).

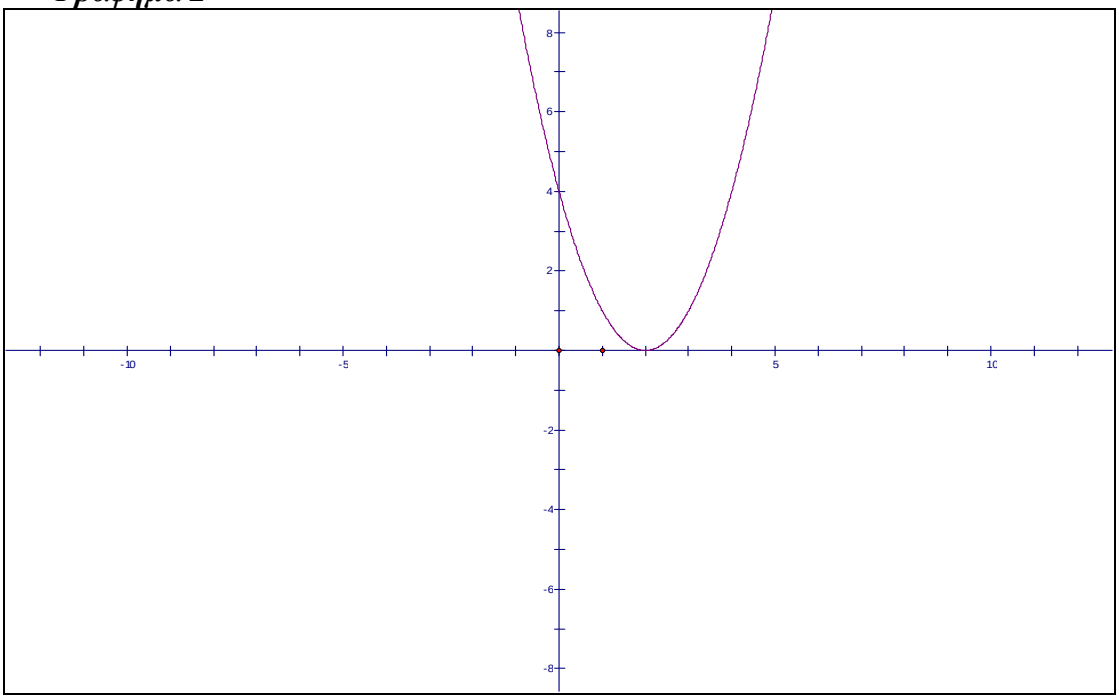
Απαντήστε στα παραπάνω ερωτήματα, συμπληρώνοντας κατάλληλα τον πίνακα που ακολουθεί, στο τέλος των γραφημάτων.

iii. Σχεδιάστε στα υπάρχοντα γραφήματα **μια** πρόχειρη γραφική παράσταση της f

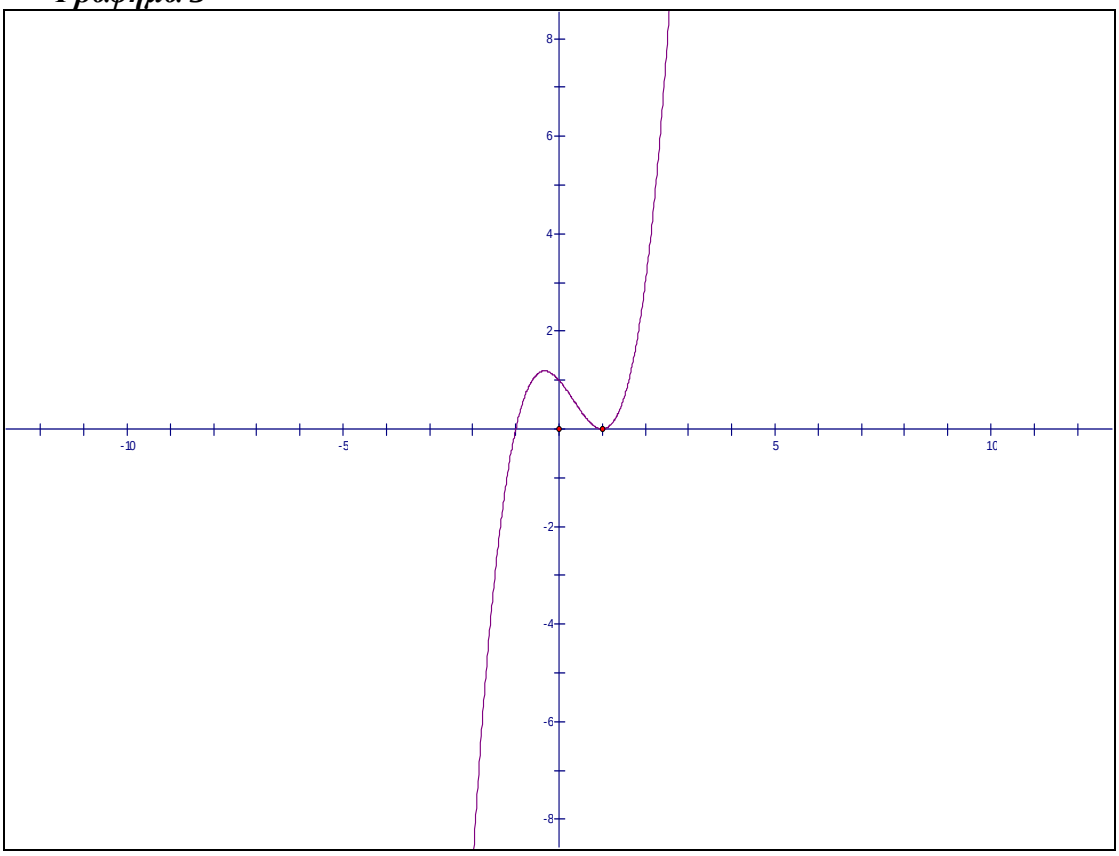
Γράφημα 1



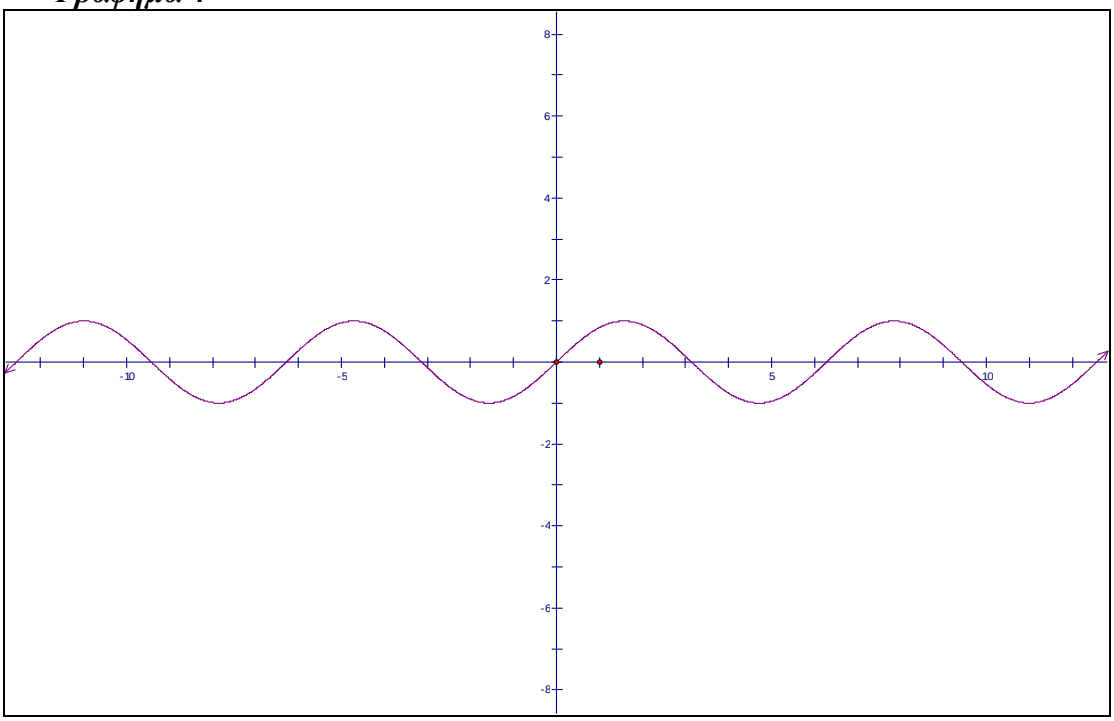
Γράφημα 2



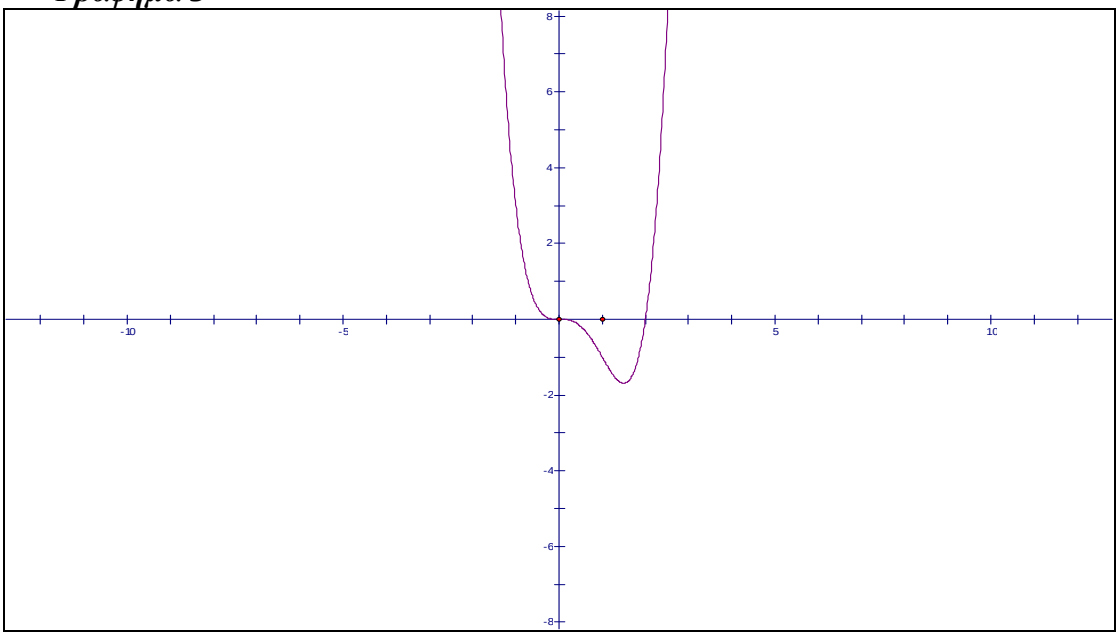
Γράφημα 3



Γράφημα 4



Γράφημα 5



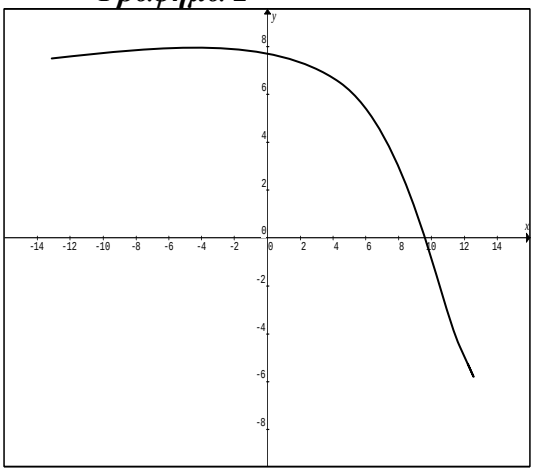
	Τ. Ε. στο x_o =	Τ. Μ. στο x_o =	Ο. Ε. στο x_o =	Ο. Μ. στο x_o =	Δεν έχει ακρότατα	Δε γνωρίζω
Γρ. 1						
Γρ. 2						
Γρ. 3						
Γρ. 4						
Γρ. 5						

Ερώτηση 8η

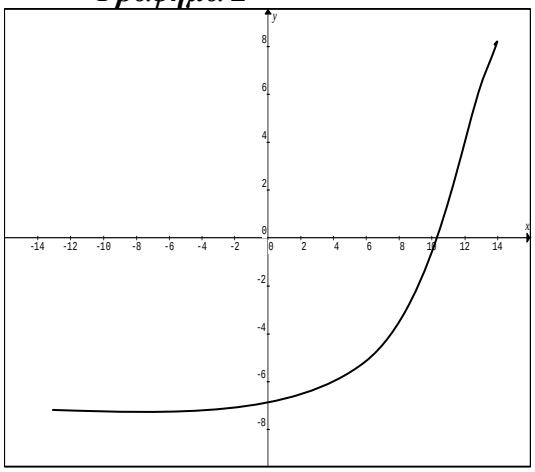
Ποιο (ποια) από τα παρακάτω γραφήματα παρουσιάζει μια συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$f(c) > 0, \quad f'(c) < 0, \quad f''(c) < 0$ με $c = 2$

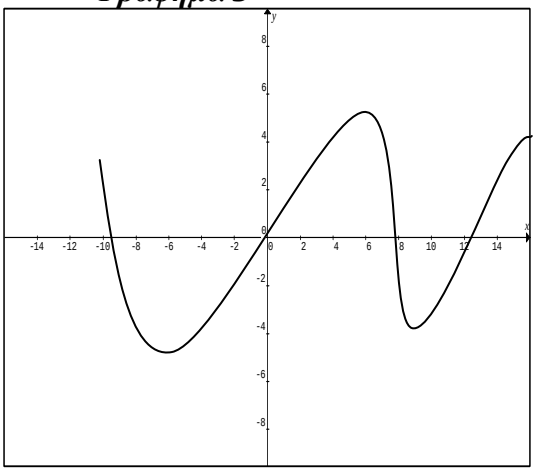
Γράφημα 1



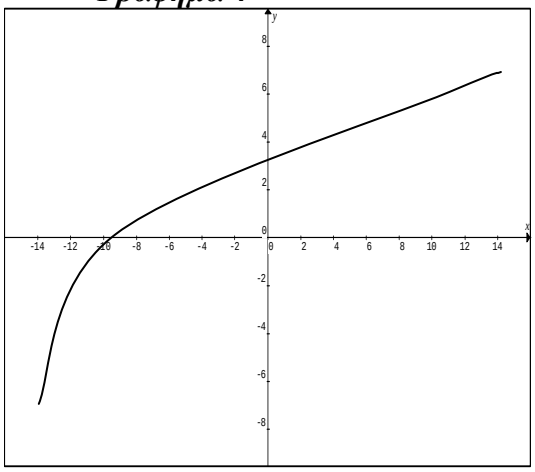
Γράφημα 2



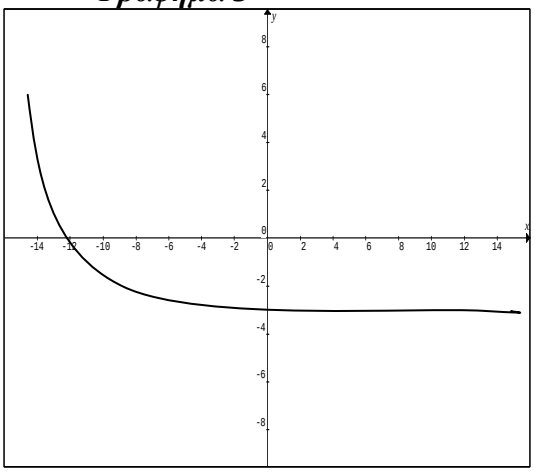
Γράφημα 3



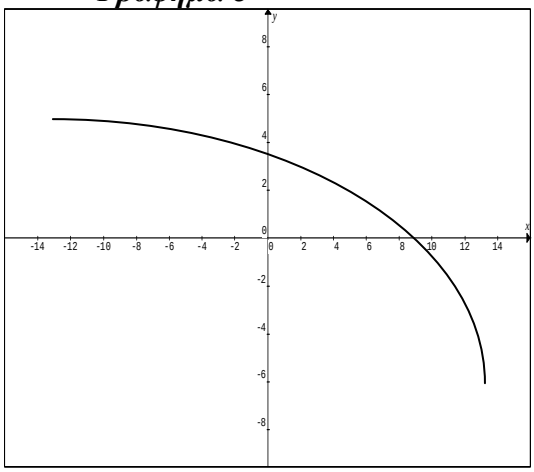
Γράφημα 4



Γράφημα 5



Γράφημα 6



Β. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ XL

Φ = Φροντιστήριο, Λ = Λύκειο, Σ = Σπίτι, Συγκ = Συγκεντρωτικά

Ερώτηση 1

		GA1	GA2	Er1GA2	Er2GA2	GA3	Er1GA3	Er2GA3
Φ	**Θ**	100%	76%	12%	12%	71%	29%	0%
	Τε	85,19%	37,04%	25,93%	37,04%	62,96%	22,22%	14,81%
Λ	**Θ**	100%	85%	8%	8%	92%	8%	0%
	Τε	91,67%	50,00%	8,33%	41,67%	91,67%	0,00%	8,33%
Σ	**Θ**	100,00%	75,00%	0,00%	25,00%	75,00%	25,00%	0,00%
	Τε	100,00%	75,00%	12,50%	12,50%	87,50%	12,50%	0,00%
Συγκ	**Θ**	100,00%	78,95%	7,89%	13,16%	78,95%	21,05%	0,00%
	Τε	89,36%	46,81%	19,15%	34,04%	74,47%	14,89%	10,64%

Ερώτηση 2, τα ερωτήματα 1, 2

		GT1	Er1GT1	Er2GT1	Er3GT1	GT2	Er1GT2	Er2GT2	Er3GT2
Φ	**Θ**	82,35%	5,88%	11,76%	0,00%	70,59%	0,00%	17,65%	11,76%
	Τε	88,89%	0,00%	7,41%	3,70%	37,04%	29,63%	11,11%	29,63%
Λ	**Θ**	76,92%	0,00%	15,38%	7,69%	30,77%	30,77%	0,00%	38,46%
	Τε	66,67%	0,00%	33,33%	0,00%	33,33%	58,33%	0,00%	8,33%
Σ	**Θ**	87,50%	0,00%	0,00%	12,50%	25,00%	0,00%	12,50%	62,50%
	Τε	87,50%	0,00%	12,50%	0,00%	50,00%	12,50%	12,50%	25,00%
Συγκ	**Θ**	81,58%	2,63%	10,53%	5,26%	47,37%	10,53%	10,53%	31,58%
	Τε	82,98%	0,00%	14,89%	2,13%	38,30%	34,04%	8,51%	23,40%

Ερώτηση 2, τα ερωτήματα 3,4

		GT3	Er1GT3	Er2GT3	Er3GT3	GT4	Er1GT4	Er2GT4	Er3GT4
Φ	**Θ**	88,24%	5,88%	5,88%	0,00%	82,35%	11,76%	5,88%	0,00%
	Τε	66,67%	11,11%	14,81%	7,41%	40,74%	29,63%	18,52%	11,11%
Λ	**Θ**	84,62%	0,00%	0,00%	15,38%	46,15%	38,46%	15,38%	0,00%
	Τε	91,67%	0,00%	8,33%	0,00%	33,33%	41,67%	25,00%	0,00%
Σ	**Θ**	87,50%	0,00%	12,50%	0,00%	62,50%	0,00%	37,50%	0,00%
	Τε	75,00%	12,50%	12,50%	0,00%	62,50%	37,50%	0,00%	0,00%
Συγκ	**Θ**	86,84%	2,63%	5,26%	5,26%	65,79%	18,42%	15,79%	0,00%
	Τε	74,47%	8,51%	12,77%	4,26%	42,55%	34,04%	17,02%	6,38%

Ερώτηση 2, τα ερωτήματα 5,6

		GT5	Er1GT5	Er2GT5	Er3GT5	GT6	Er1GT6	Er2GT6	Er3GT6
Φ	**Θ**	64,71%	23,53%	5,88%	5,88%	52,94%	11,76%	17,65%	17,65%
	Τε	48,15%	37,04%	11,11%	3,70%	66,67%	14,81%	11,11%	7,41%
Λ	**Θ**	30,77%	38,46%	0,00%	30,77%	84,62%	7,69%	0,00%	7,69%
	Τε	8,33%	50,00%	16,67%	25,00%	75,00%	16,67%	0,00%	8,33%
Σ	**Θ**	25,00%	50,00%	25,00%	0,00%	50,00%	12,50%	12,50%	25,00%
	Τε	37,50%	25,00%	37,50%	0,00%	62,50%	25,00%	0,00%	12,50%
Συγκ	**Θ**	44,74%	34,21%	7,89%	13,16%	63,16%	10,53%	10,53%	15,79%
	Τε	36,17%	38,30%	17,02%	8,51%	68,09%	17,02%	6,38%	8,51%

Ερώτηση 3, τα ερωτήματα 1, 2

		A1m	Er1A1m	Er2A1m	A1d	Er1A1d	Er2A1d	A2m	Er1A2m	Er2Adm	A2d	Er1A2d	Er2A2d
Φ	**Θ**	76,47%	23,53%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	17,65%	82,35%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
	Τε	48,15%	48,15%	3,70%	100,00%	0,00%	0,00%	18,52%	70,37%	14,81%	85,19%	11,11%	3,70%
Λ	**Θ**	84,62%	15,38%	0,00%	92,31%	0,00%	7,69%	7,69%	92,31%	0,00%	84,62%	7,69%	7,69%
	Τε	83,33%	16,67%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
Σ	**Θ**	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	25,00%	75,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
	Τε	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	25,00%	75,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
Συγκ	**Θ**	84,21%	15,79%	0,00%	97,37%	0,00%	2,63%	15,79%	84,21%	0,00%	94,74%	2,63%	2,63%
	Τε	65,96%	31,91%	2,13%	100,00%	0,00%	0,00%	14,89%	78,72%	8,51%	91,49%	6,38%	2,13%

Ερώτηση 3, τα ερωτήματα 3, 4

		A3m	Er1A3m	Er2A3m	A3d	Er1A3d	Er2A3d	A4m	Er1A4m	Er2A4m	A4d	Er1A4d	Er2A4d
Φ	**Θ**	88,24%	11,76%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	94,12%	5,88%	0,00%	88,24%	11,76%	0,00%
	Τε	74,07%	11,11%	14,81%	96,30%	0,00%	3,70%	62,96%	18,52%	18,52%	62,96%	14,81%	22,22%
Λ	**Θ**	92,31%	7,69%	0,00%	92,31%	0,00%	7,69%	92,31%	0,00%	7,69%	76,92%	0,00%	23,08%
	Τε	91,67%	8,33%	0,00%	91,67%	0,00%	8,33%	100,00%	0,00%	0,00%	58,33%	33,33%	8,33%
Σ	**Θ**	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	87,50%	12,50%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
	Τε	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
Συγκ	**Θ**	92,11%	7,89%	0,00%	97,37%	0,00%	2,63%	92,11%	5,26%	2,63%	86,84%	5,26%	7,89%
	Τε	82,98%	8,51%	8,51%	95,74%	0,00%	4,26%	78,72%	10,64%	10,64%	68,09%	17,02%	14,89%

Ερώτηση 3, τα ερωτήματα 5, 6

		A5m	Er1A5m	ER2A5m	A5d	Er1A5d	Er2A5d	A6m	Er1A6m	Er2A6m	A6d	Er1A6d	Er2A6d
Φ	**Θ**	29,41%	70,59%	0,00%	76,47%	23,53%	0,00%	88,24%	5,88%	5,88%	82,35%	17,65%	0,00%
	Τε	29,63%	59,26%	11,11%	85,19%	11,11%	3,70%	59,26%	22,22%	18,52%	77,78%	14,81%	7,41%
Λ	**Θ**	23,08%	76,92%	0,00%	84,62%	7,69%	7,69%	76,92%	15,38%	7,69%	61,54%	30,77%	7,69%
	Τε	33,33%	66,67%	0,00%	66,67%	33,33%	0,00%	50,00%	33,33%	16,67%	58,33%	41,67%	0,00%
Σ	**Θ**	12,50%	75,00%	12,50%	87,50%	0,00%	12,50%	62,50%	25,00%	12,50%	87,50%	0,00%	12,50%
	Τε	37,50%	62,50%	0,00%	87,50%	12,50%	0,00%	87,50%	12,50%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
Συγκ	**Θ**	23,68%	73,68%	2,63%	81,58%	13,16%	5,26%	78,95%	13,16%	7,89%	76,32%	18,42%	5,26%
	Τε	31,91%	61,70%	6,38%	80,85%	17,02%	2,13%	61,70%	23,40%	14,89%	76,60%	19,15%	4,26%

Ερώτηση 4

		VGa1	Er1VGa1	Er2VGa1	Er3VGa1	Er4VGa1	VGa2	Er1VGa2	Er2VGa2	Er3VGa3	VGa3	Er1VGa3	Er2VGa3
Φ	**Θ**	52,94%	17,65%	17,65%	0,00%	11,76%	52,94%	23,53%	17,65%	5,88%	41,18%	52,94%	5,88%
	Τε	18,52%	14,81%	22,22%	0,00%	44,44%	18,52%	48,15%	22,22%	18,52%	11,11%	85,19%	3,70%
Λ	**Θ**	23,08%	23,08%	46,15%	0,00%	7,69%	23,08%	46,15%	15,38%	23,08%	15,38%	84,62%	0,00%
	Τε	25,00%	0,00%	75,00%	0,00%	0,00%	25,00%	25,00%	41,67%	8,33%	33,33%	66,67%	0,00%
Σ	**Θ**	50,00%	0,00%	37,50%	0,00%	12,50%	50,00%	37,50%	12,50%	0,00%	37,50%	62,50%	0,00%
	Τε	37,50%	0,00%	12,50%	0,00%	50,00%	37,50%	25,00%	12,50%	25,00%	12,50%	62,50%	25,00%
Συγκ	**Θ**	42,11%	15,79%	31,58%	0,00%	10,53%	42,11%	34,21%	15,79%	10,53%	31,58%	65,79%	2,63%
	Τε	23,40%	8,51%	34,04%	0,00%	34,04%	23,40%	38,30%	25,53%	17,02%	17,02%	76,60%	6,38%

Ερώτηση 5

		P	Er1P	Er2P	Er3P	Er4P	Er5P
Φ	**Θ**	52,94%	35,29%	23,53%	17,65%	17,65%	29,41%
	Τε	31,48%	66,67%	40,74%	11,11%	18,52%	59,26%
Λ	**Θ**	57,69%	46,15%	23,08%	7,69%	23,08%	15,38%
	Τε	50,00%	58,33%	41,67%	8,33%	25,00%	8,33%
Σ	**Θ**	68,75%	25,00%	25,00%	0,00%	12,50%	25,00%
	Τε	37,50%	25,00%	12,50%	12,50%	0,00%	50,00%
Συγκ	**Θ**	57,89%	36,84%	23,68%	10,53%	18,42%	23,68%
	Τε	37,23%	57,45%	36,17%	10,64%	17,02%	44,68%

Ερώτηση 6, τα ερωτήματα 1, 2, 3

		GDg1	Er1GDg1	Er2GDg1	GDg2	Er1GDg2	Er2GDg2	GDg3	Er1GDg3	Er2GDg3
Φ	**Θ**	70,59%	17,65%	11,76%	58,82%	29,41%	11,76%	64,71%	17,65%	17,65%
	Τε	44,44%	25,93%	33,33%	29,63%	18,52%	51,85%	33,33%	14,81%	51,85%
Λ	**Θ**	84,62%	7,69%	7,69%	46,15%	23,08%	30,77%	15,38%	23,08%	61,54%
	Τε	41,67%	16,67%	41,67%	25,00%	16,67%	58,33%	16,67%	16,67%	66,67%
Σ	**Θ**	75,00%	12,50%	12,50%	62,50%	12,50%	25,00%	62,50%	0,00%	37,50%
	Τε	62,50%	12,50%	25,00%	50,00%	0,00%	50,00%	37,50%	0,00%	62,50%
Συγκ	**Θ**	76,32%	13,16%	10,53%	55,26%	23,68%	21,05%	47,37%	15,79%	36,84%
	Τε	46,81%	21,28%	34,04%	31,91%	14,89%	53,19%	29,79%	12,77%	57,45%

Ερώτηση 6, τα ερωτήματα 4, 5, 6

		GDg4	Er1GDg4	Er2GDg4	GDg5	Er1GDg5	Er2GDg5	GDg6	Er1GDg6	Er2GDg6
Φ	**Θ**	47,06%	29,41%	29,41%	23,53%	23,53%	52,94%	23,53%	23,53%	52,94%
	Τε	22,22%	14,81%	62,96%	11,11%	14,81%	74,07%	11,11%	14,81%	74,07%
Λ	**Θ**	15,38%	15,38%	69,23%	7,69%	7,69%	84,62%	7,69%	7,69%	84,62%
	Τε	16,67%	16,67%	66,67%	16,67%	8,33%	75,00%	25,00%	8,33%	66,67%
Σ	**Θ**	62,50%	0,00%	37,50%	25,00%	50,00%	25,00%	25,00%	50,00%	25,00%
	Τε	25,00%	0,00%	75,00%	12,50%	0,00%	87,50%	12,50%	0,00%	87,50%
Συγκ	**Θ**	39,47%	18,42%	44,74%	18,42%	23,68%	57,89%	18,42%	23,68%	57,89%
	Τε	21,28%	12,77%	65,96%	12,77%	10,64%	76,60%	14,89%	10,64%	74,47%

Ερώτηση 7, το ερώτημα 1

		Dga1	Er1Dga1	Er2Dga1	Dga2	Er1Dga2	Er2Dga2	Dgafg	Er1Dgafg	Er2Dgafg
Φ	**Θ**	58,82%	29,41%	11,76%	52,94%	35,29%	11,76%	41,18%	11,76%	47,06%
	Τε	29,63%	62,96%	7,41%	25,93%	66,67%	7,41%	14,81%	14,81%	70,37%
Λ	**Θ**	69,23%	30,77%	0,00%	23,08%	76,92%	0,00%	15,38%	0,00%	76,92%
	Τε	58,33%	33,33%	8,33%	8,33%	83,33%	8,33%	0,00%	8,33%	91,67%
Σ	**Θ**	62,50%	37,50%	0,00%	62,50%	37,50%	0,00%	50,00%	0,00%	50,00%
	Τε	37,50%	25,00%	37,50%	37,50%	25,00%	37,50%	0,00%	0,00%	100,00%
Συγκ	**Θ**	63,16%	31,58%	5,26%	44,74%	50,00%	5,26%	34,21%	5,26%	57,89%
	Τε	38,30%	48,94%	12,77%	23,40%	63,83%	12,77%	8,51%	10,64%	80,85%

Ερώτηση 7, το ερώτημα 2

		Dgb1	Er1Dgb1	Er2Dgb1	Dgb2	Er1Dgb2	Er2Dgb2	Dgbfg	Er1Dgbfg	Er2Dgbfg
Φ	**Θ**	58,82%	35,29%	5,88%	58,82%	35,29%	5,88%	41,18%	17,65%	41,18%
	Τε	25,93%	66,67%	7,41%	25,93%	66,67%	7,41%	3,70%	18,52%	77,78%
Λ	**Θ**	23,08%	76,92%	0,00%	23,08%	76,92%	0,00%	15,38%	0,00%	84,62%
	Τε	25,00%	50,00%	25,00%	25,00%	50,00%	25,00%	0,00%	8,33%	91,67%
Σ	**Θ**	62,50%	25,00%	12,50%	62,50%	25,00%	12,50%	50,00%	0,00%	50,00%
	Τε	37,50%	12,50%	50,00%	37,50%	12,50%	50,00%	0,00%	0,00%	100,00%
Συγκ	**Θ**	47,37%	47,37%	5,26%	47,37%	47,37%	5,26%	34,21%	7,89%	57,89%
	Τε	27,66%	53,19%	19,15%	27,66%	53,19%	19,15%	2,13%	12,77%	85,11%

Ερώτηση 7, το ερώτημα 3

		Dgc1	Er1Dgc1	Er2Dgc1	Dgc2	Er1Dgc2	Er2Dgc2	Dgcfg	Er1Dgcfg	Er2Dgcfg
Φ	**Θ**	52,94%	41,18%	5,88%	47,06%	47,06%	5,88%	29,41%	17,65%	52,94%
	Τε	22,22%	70,37%	7,41%	18,52%	74,07%	7,41%	0,00%	22,22%	77,78%
Λ	**Θ**	23,08%	53,85%	23,08%	0,00%	76,92%	23,08%	0,00%	7,69%	92,31%
	Τε	66,67%	25,00%	8,33%	0,00%	91,67%	8,33%	0,00%	8,33%	91,67%
Σ	**Θ**	62,50%	37,50%	0,00%	50,00%	50,00%	0,00%	25,00%	25,00%	50,00%
	Τε	25,00%	37,50%	37,50%	25,00%	37,50%	37,50%	0,00%	0,00%	100,00%
Συγκ	**Θ**	44,74%	44,74%	10,53%	31,58%	57,89%	10,53%	18,42%	15,79%	65,79%
	Τε	34,04%	53,19%	12,77%	14,89%	72,34%	12,77%	0,00%	14,89%	85,11%

Ερώτηση 7, το ερώτημα 4

		Dgd1	Er1Dgd1	Er2Dgd1	Dgd2	Er1Dgd2	Er2Dgd2	Dgdfg	Er1Dgdfg	Er2Dgdfg
Φ	**Θ**	29,41%	52,94%	17,65%	11,76%	70,59%	17,65%	52,94%	5,88%	41,18%
	Τε	11,11%	70,37%	18,52%	14,81%	66,67%	18,52%	18,52%	3,70%	77,78%
Λ	**Θ**	0,00%	15,38%	84,62%	0,00%	15,38%	84,62%	23,08%	23,08%	53,85%
	Τε	0,00%	75,00%	25,00%	0,00%	75,00%	25,00%	0,00%	8,33%	91,67%
Σ	**Θ**	12,50%	87,50%	0,00%	25,00%	75,00%	0,00%	37,50%	0,00%	62,50%
	Τε	0,00%	25,00%	75,00%	12,50%	12,50%	75,00%	0,00%	0,00%	100,00%
Συγκ	**Θ**	15,79%	47,37%	36,84%	10,53%	52,63%	36,84%	39,47%	10,53%	50,00%
	Τε	6,38%	63,83%	29,79%	10,64%	59,57%	29,79%	10,64%	4,26%	85,11%

Ερώτηση 7, το ερώτημα 5

		Dge1	Er1Dge1	Er2Dge1	Dge2	Er1Dge2	Er2Dge2	Dgefg	Er1Dgefg	Er2Dgefg
Φ	**Θ**	70,59%	23,53%	5,88%	47,06%	47,06%	5,88%	41,18%	11,76%	47,06%
	Τε	18,52%	70,37%	11,11%	22,22%	66,67%	11,11%	7,41%	7,41%	88,89%
Λ	**Θ**	30,77%	38,46%	30,77%	46,15%	23,08%	30,77%	0,00%	0,00%	100,00%
	Τε	66,67%	33,33%	0,00%	58,33%	41,67%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%
Σ	**Θ**	50,00%	50,00%	0,00%	37,50%	62,50%	0,00%	25,00%	12,50%	62,50%
	Τε	12,50%	50,00%	37,50%	0,00%	62,50%	37,50%	0,00%	0,00%	100,00%
Συγκ	**Θ**	52,63%	34,21%	13,16%	44,74%	42,11%	13,16%	23,68%	7,89%	68,42%
	Τε	29,79%	57,45%	12,77%	27,66%	59,57%	12,77%	4,26%	4,26%	93,62%

Ερώτηση 8

		IG	Er1IG	Er2IG	Er3IG
Φ	**Θ**	64,71%	11,76%	11,76%	11,76%
	Τε	33,33%	22,22%	29,63%	18,52%
Λ	**Θ**	23,08%	7,69%	23,08%	46,15%
	Τε	25,00%	8,33%	8,33%	58,33%
Σ	**Θ**	75,00%	0,00%	12,50%	12,50%
	Τε	50,00%	0,00%	25,00%	25,00%
Συγκ	**Θ**	52,63%	7,89%	15,79%	23,68%
	Τε	34,04%	14,89%	23,40%	29,79%

Γ. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ GRAS

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Classification at level : 1 : (VGa1 VGa2) similarity : 1

Classification at level : 2 : (GDg5 GDg6) similarity : 1

Classification at level : 3 : (Dgafg Dgbfg) similarity : 1

Classification at level : 4 : ((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) similarity : 1

Classification at level : 5 : (((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) similarity : 1

Classification at level : 6 : (Dgb1 Dgb2) similarity : 1

Classification at level : 7 : (GDg3 GDg4) similarity : 0.999999

Classification at level : 8 : ((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) similarity : 0.999999

Classification at level : 9 : (Dga2 Dgc2) similarity : 0.999999

Classification at level : 10 : (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1) similarity : 0.999998

Classification at level : 11 : (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1)) similarity : 0.999995

Classification at level : 12 : (Dgc1 Dge1) similarity : 0.999993

Classification at level : 13 : ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1)) similarity : 0.999968

Classification at level : 14 : ((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) similarity : 0.999925

Classification at level : 15 : (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2) similarity : 0.99984

Classification at level : 16 : ((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) similarity : 0.999832

Classification at level : 17 : ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)) similarity : 0.999515

Classification at level : 18 : (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2)) similarity : 0.99951

Classification at level : 19 : (((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) similarity : 0.999129

Classification at level : 20 : ((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) similarity : 0.996294

Classification at level : 21 : (((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) similarity : 0.994376

Classification at level : 22 : ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6))) similarity : 0.986496

Classification at level : 23 : (GT4 ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)))) similarity : 0.977696

Classification at level : 24 : (P GDg1) similarity : 0.964668

Classification at level : 25 : ((GT4 ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)))) IG) similarity : 0.941078

Classification at level : 26 : (GT2 (P GDg1)) similarity : 0.930549

Classification at level : 27 : (GA2 (GT2 (P GDg1))) similarity : 0.837026

Classification at level : 28 : (GT1 GT5) similarity : 0.827648

Classification at level : 29 : (Er2VGa3 Er2GDg3) similarity : 0.779571

Classification at level : 30 : (GT3 GT6) similarity : 0.628804

Classification at level : 31 : (GA1 A4d) similarity : 0.592174

Classification at level : 32 : ((GA2 (GT2 (P GDg1))) ((GT4 ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)))) IG)) similarity : 0.562136

Classification at level : 33 : (((GA2 (GT2 (P GDg1))) ((GT4 ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)))) IG)) (GT1 GT5)) similarity : 0.437425

Classification at level : 34 : ((GA1 A4d) (GT3 GT6)) similarity : 0.137774

ΔΕΥΤΕΡΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ-
Όλες οι μεταβλητές των ασκήσεων 4,5,6.7.8 δηλαδή όλων των ασκήσεων στις παραγώγους

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Classification at level : 1 : (VGa1 VGa2) similarity : 1

Classification at level : 2 : (GDg5 GDg6) similarity : 1

Classification at level : 3 : (Dgafg Dgbfg) similarity : 1

Classification at level : 4 : ((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) similarity : 1

Classification at level : 5 : (((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) similarity : 1

Classification at level : 6 : (Dgb1 Dgb2) similarity : 1

Classification at level : 7 : (GDg3 GDg4) similarity : 0.999999

Classification at level : 8 : ((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) similarity : 0.999999

Classification at level : 9 : (Dga2 Dgc2) similarity : 0.999999

Classification at level : 10 : (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1) similarity : 0.999998

Classification at level : 11 : (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1)) similarity : 0.999995

Classification at level : 12 : (Dgc1 Dge1) similarity : 0.999993

Classification at level : 13 : ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1)) similarity : 0.999968

Classification at level : 14 : ((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) similarity : 0.999925

Classification at level : 15 : (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2) similarity : 0.99984

Classification at level : 16 : ((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) similarity : 0.999832

Classification at level : 17 : ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6)) similarity : 0.999515

Classification at level : 18 : (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2)) similarity : 0.99951

Classification at level : 19 : (((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) similarity : 0.999129

Classification at level : 20 : ((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) similarity : 0.996294

Classification at level : 21 : (((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) similarity : 0.994376

Classification at level : 22 : ((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6))) similarity : 0.986496

Classification at level : 23 : (P GDg1) similarity : 0.964668

Classification at level : 24 : (((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6))) IG) similarity : 0.943462

Classification at level : 25 : ((((((((VGa1 VGa2) (VGa3 (((((Dgafg Dgbfg) Dgcfg) Dgefg) Dgdfg) Dgd1))) (Dga1 (((Dga2 Dgc2) ((Dgb1 Dgb2) (Dgc1 Dge1))) Dge2))) Dgd2) GDg2) ((GDg3 GDg4) (GDg5 GDg6))) IG) (P GDg1)) similarity : 0.758444

The most significant node is at level : 19

Significant nodes
at level: 1
at level: 5
at level: 8

at level: 11
at level: 14
at level: 16
at level: 19
at level: 22
at level: 25

Παρατηρήσεις στο δεύτερο διάγραμμα

1. Όλες οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους που είναι φυσικό αφού όλες οι ασκήσεις αφορούν παραγώγους
2. Ειδικά το πρόβλημα P και η άσκηση 8 συνδέονται με όλες τις ασκήσεις
3. Όμως οι ασκήσεις 4 και 5 που είναι ακριβώς οι ίδιες δεν συνδέονται άμεσα όπως θα ανέμενε κάποιος(VGa1,VGa2 και VGa3 βρίσκονται σε μικρή σχέση με το P).

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

nb col : 145, nb lig : 85

	Occurrence	Average	Standard deviations:
GA1	: 80.00	0.94	0.24
GA2	: 52.00	0.61	0.49
Er1GA2	: 12.00	0.14	0.35
Er2GA2	: 21.00	0.25	0.43
GA3	: 65.00	0.76	0.42
Er1GA3	: 15.00	0.18	0.38
Er2GA3	: 5.00	0.06	0.24
GT1	: 70.00	0.82	0.38
Er2GT1	: 11.00	0.13	0.34
Er3GT1	: 3.00	0.04	0.18
GT2	: 36.00	0.42	0.49
Er1GT2	: 20.00	0.24	0.42
Er2GT2	: 8.00	0.09	0.29
Er3GT2	: 21.00	0.25	0.43
GT3	: 68.00	0.80	0.40
Er1GT3	: 5.00	0.06	0.24
Er2GT3	: 8.00	0.09	0.29
Er3GT3	: 4.00	0.05	0.21
GT4	: 45.00	0.53	0.50
Er1GT4	: 23.00	0.27	0.44
ER2GT4	: 14.00	0.16	0.37
Er3GT4	: 3.00	0.04	0.18
GT5	: 34.00	0.40	0.49
Er1GT5	: 31.00	0.36	0.48
Er2GT5	: 11.00	0.13	0.34
Er3GT5	: 9.00	0.11	0.31
GT6	: 56.00	0.66	0.47
Er1GT6	: 12.00	0.14	0.35
Er2GT6	: 7.00	0.08	0.27
Er3GT6	: 10.00	0.12	0.32
A1m	: 63.00	0.74	0.44
Er1A1m	: 21.00	0.25	0.43

A1d	: 84.00	0.99	0.11
A2m	: 13.00	0.15	0.36
Er1A2m	: 69.00	0.81	0.39
Er2Adm	: 4.00	0.05	0.21
A2d	: 79.00	0.93	0.26
Er1A2d	: 4.00	0.05	0.21
A3m	: 74.00	0.87	0.34
Er1A3m	: 7.00	0.08	0.27
Er2A3m	: 4.00	0.05	0.21
A3d	: 82.00	0.96	0.18
Er2A3d	: 3.00	0.04	0.18
A4m	: 72.00	0.85	0.36
Er1A4m	: 7.00	0.08	0.27
Er2A4m	: 6.00	0.07	0.26
A4d	: 65.00	0.76	0.42
Er1A4d	: 10.00	0.12	0.32
Er2A4d	: 10.00	0.12	0.32
A5m	: 24.00	0.28	0.45
Er1A5m	: 57.00	0.67	0.47
ER2A5m	: 4.00	0.05	0.21
A5d	: 69.00	0.81	0.39
Er1A5d	: 13.00	0.15	0.36
Er2A5d	: 3.00	0.04	0.18
A6m	: 59.00	0.69	0.46
Er1A6m	: 16.00	0.19	0.39
Er2A6m	: 10.00	0.12	0.32
A6d	: 65.00	0.76	0.42
Er1A6d	: 16.00	0.19	0.39
Er2A6d	: 4.00	0.05	0.21
VGa1	: 27.00	0.32	0.47
Er1VGa1	: 10.00	0.12	0.32
Er2VGa1	: 28.00	0.33	0.47
Er4VGa1	: 20.00	0.24	0.42
VGa2	: 27.00	0.32	0.47
Er1VGa2	: 31.00	0.36	0.48
Er2VGa2	: 17.00	0.20	0.40
Er3VGa3	: 10.00	0.12	0.32
VGa3	: 20.00	0.24	0.42
Er1VGa3	: 61.00	0.72	0.45
Er2VGa3	: 4.00	0.05	0.21
P	: 39.50	0.46	0.45
Er1P	: 41.00	0.48	0.50
Er2P	: 26.00	0.31	0.46
Er3P	: 9.00	0.11	0.31
Er4P	: 15.00	0.18	0.38
Er5P	: 26.00	0.31	0.46
GDg1	: 51.00	0.60	0.49
Er1GDg1	: 15.00	0.18	0.38
Er2GDg1	: 20.00	0.24	0.42
GDg2	: 36.00	0.42	0.49
Er1GDg2	: 16.00	0.19	0.39
Er2GDg2	: 33.00	0.39	0.49
GDg3	: 32.00	0.38	0.48
Er1GDg3	: 12.00	0.14	0.35
Er2GDg3	: 41.00	0.48	0.50
GDg4	: 25.00	0.29	0.46
Er1GDg4	: 13.00	0.15	0.36
Er2GDg4	: 48.00	0.56	0.50
GDg5	: 13.00	0.15	0.36
Er1GDg5	: 14.00	0.16	0.37

Er2GDg5	: 58.00	0.68	0.47
GDg6	: 14.00	0.16	0.37
Er1GDg6	: 14.00	0.16	0.37
Er2GDg6	: 57.00	0.67	0.47
Dga1	: 42.00	0.49	0.50
Er1Dga1	: 35.00	0.41	0.49
Er2Dga1	: 8.00	0.09	0.29
Dga2	: 28.00	0.33	0.47
Er1Dga2	: 49.00	0.58	0.49
Er2Dga2	: 8.00	0.09	0.29
Dgafg	: 17.00	0.20	0.40
Er1Dgafg	: 7.00	0.08	0.27
Er2Dgafg	: 60.00	0.71	0.46
Dgb1	: 31.00	0.36	0.48
Er1Dgb1	: 43.00	0.51	0.50
Er2Dgb1	: 11.00	0.13	0.34
Dgb2	: 31.00	0.36	0.48
Er1Dgb2	: 43.00	0.51	0.50
Er2Dgb2	: 11.00	0.13	0.34
Dgbfg	: 14.00	0.16	0.37
Er1Dgbfg	: 9.00	0.11	0.31
Er2Dgbfg	: 62.00	0.73	0.44
Dgc1	: 33.00	0.39	0.49
Er1Dgc1	: 42.00	0.49	0.50
Er2Dgc1	: 10.00	0.12	0.32
Dgc2	: 19.00	0.22	0.42
Er1Dgc2	: 56.00	0.66	0.47
Er2Dgc2	: 10.00	0.12	0.32
Dgcfg	: 7.00	0.08	0.27
Er1Dgcfg	: 13.00	0.15	0.36
Er2Dgcfg	: 65.00	0.76	0.42
Dgd1	: 9.00	0.11	0.31
Er1Dgd1	: 48.00	0.56	0.50
Er2Dgd1	: 28.00	0.33	0.47
Dgd2	: 9.00	0.11	0.31
Er1Dgd2	: 48.00	0.56	0.50
Er2Dgd2	: 28.00	0.33	0.47
Dgdfg	: 20.00	0.24	0.42
Er1Dgdfg	: 6.00	0.07	0.26
Er2Dgdfg	: 59.00	0.69	0.46
Dge1	: 34.00	0.40	0.49
Er1Dge1	: 40.00	0.47	0.50
Er2Dge1	: 11.00	0.13	0.34
Dge2	: 30.00	0.35	0.48
Er1Dge2	: 44.00	0.52	0.50
Er2Dge2	: 11.00	0.13	0.34
Dgefg	: 11.00	0.13	0.34
Er1Dgefg	: 5.00	0.06	0.24
Er2Dgefg	: 69.00	0.81	0.39
IG	: 36.00	0.42	0.49
Er1IG	: 10.00	0.12	0.32
Er2IG	: 17.00	0.20	0.40
Er3IG	: 23.00	0.27	0.44
Th s	: 30.00	0.35	0.48
Te s	: 39.00	0.46	0.50
Hth s	: 8.00	0.09	0.29
The s	: 8.00	0.09	0.29