ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ-ΙΑΚΩΒΙΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ

Αθήνα
Φεβρουάριος, 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	…….
2) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αναπλ. Καθηγητής	……
3) Παναγιώτης Σπύρου	Επίκ. Καθηγητής	……

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα, ο οποίος καταρχήν μου εμπιστεύθηκε την εκπόνηση του θέματος και στη συνέχεια με πολύ υπομονή και μεθοδικότητα προσέφερε ολόπλευρη βοήθεια με συστάσεις, επισημάνσεις και διορθώσεις.

- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια και επίκουρο καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου για την τιμή που μου έκαναν να αποτελέσουν μέλη της τριμελούς επιτροπής.

- Όλους τους καθηγητές του Προγράμματος που συνετέλεσαν ώστε να αποκτήσω την απαραίτητη υποδομή για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, καθώς και για τα εφόδια που μου προσέφεραν για τη μελλοντική επαγγελματική μου πορεία.

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ:

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Σπηλιοπούλου Ελένη-Ιακωβίνα

Επιβλέπων Καθηγητής:
Διονύσιος Λάππας

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2010

Περίληψη

Αν και οι πρώτες προσπάθειες θεμελίωσης της Γεωμετρίας ανατρέχουν στα Αρχαία χρόνια, με πρωτοπόρο τον Ευκλείδη (περίπου 300π.Χ.), εντούτοις μέχρι και τον 20^{ο} αιώνα αξιόλογοι επιστήμονες ασχολήθηκαν με την αξιωματικοποίησή της, προτείνοντας νέες θεμελιώσεις με όρους σύγχρονων Μαθηματικών.

Στο Α΄ μέρος της εργασίας, επιχειρείται να παρουσιαστούν κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν την αξιωματική μέθοδο γενικότερα, και στη συνέχεια γίνεται σύντομη αναφορά της πορείας θεμελίωσης της επίπεδης γεωμετρίας. Με αφετηρία την Αρχαιότητα και μέσα από την εποικοδομητική κριτική του έργου του Ευκλείδη και της γενικότερης κρίσης των Μαθηματικών θεμελίων, οδηγούμεθα στην πρόταση του Hilbert. Το επίτευγμα αυτό, αν και κοντά στο πνεύμα του Ευκλείδη, λαμβάνει υπόψη όλες τις τάσεις των Μαθηματικών των αρχών του 20^{ου} αιώνα.

Στο Β΄ μέρος σκιαγραφείται μια συγκριτική παρουσίαση νεότερων αξιωματικών θεμελιώσεων. Συγκεκριμένα επικεντρώνεται στην αξιωματική θεμελίωση κατά Birkhoff και MacLane. Και οι δύο επιστήμονες, οικοδομούν το σύστημά τους λαμβάνοντας ως πρωταρχικές έννοιες διαφορετικές από εκείνες του Hilbert. Οι προτάσεις τους έχουν επηρεάσει σαφώς τον τρόπο διδασκαλίας της Γεωμετρίας ακόμα και σε επίπεδο Λυκείου.

Στο Γ΄ μέρος, συμπερασματικά εντοπίζεται μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση της επίπεδης γεωμετρίας, βασισμένη στη θεμελίωση του Birkhoff , σε αντιπαραβολή την με την κλασσική ευκλείδεια μέθοδο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

Α΄ μέρος

Α.1. Εισαγωγή……..……..8

Α.2. Η πορεία της θεωρητικοποίησης της Γεωμετρίας στον αρχαίο κόσμο…….12

Α.3. Βασικές αρχές και χαρακτηριστικά της αξιωματικής μεθόδου…….....17

Α.4. Το πρόγραμμα του Hilbert για τα Μαθηματικά…….…....25

Α.4.1. Ιστορική εξέλιξη του προγράμματος του Hilbert……...25

Α.4.2.Τα θεωρήματα μη-Πληρότητας του Gödel και ο αντίκτυπος στο πρόγραμμα του Hilbert……...…….….…29

Α.5. Κριτική στα Στοιχεία……..…….…..30

Α.6. Θεμελίωση των Γεωμετριών κατά Klein.....39

Α.6.1. Το Ευκλείδειο επίπεδο μέσα από τη Γεωμετρία Klein……..….....40

Α.6.2. Οι ισομετρίες του Ευκλείδειου επιπέδου…….……...……41

Α.7. Αξιωματική Θεμελίωση της Επίπεδης Γεωμετρίας από τον Hilbert…….…….43

Α.7.1. Η διόρθωση των «παραλήψεων» του Ευκλείδη μέσα στην αξιωματική του Hilbert…….……..……51

Β΄ μέρος

Β.1. Αξιωματική θεμελίωση της Επίπεδης Γεωμετρίας από τον George Birkhoff….…54

Β.1.1. Πρωταρχικές έννοιες, αξιώματα, βασικοί ορισμοί……...……54

Β.1.2. Θεμελιώδη θεωρήματα της Επίπεδης Γεωμετρίας μέσα από την κατά Birkhoff αξιωματική……..……59

Β.1.3. Θεωρία καθέτων και παραλλήλων……..66

Β.1.4. Ορθογώνιες συντεταγμένες……74

Β.1.5. Σύγκριση Birkhoff-Hilbert……...76

Β.2. Αξιωματική Θεμελίωση της επίπεδης Γεωμετρίας από τον Saunders MacLane....79

Β.2.1. Αξιώματα και θεμελιώδη θεωρήματα……..79

Β.2.2. Θεωρία παραλλήλων και καθέτων……..…….92

Β.2.3. Σύγκριση Birkhoff – MacLane…….....95

Γ΄ μέρος

Γ.1. Μια εναλλακτική διδακτική πρόταση……..……97

Γ.1.1. Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ΄΄Στοιχεία΄΄……97

Γ.1.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα κατά Birkhoff……..102

Γ.1.3. Συμπεράσματα…….....104

Βιβλιογραφία.....106

Α΄ ΜΕΡΟΣ

«Η πρόοδος που πραγματοποίησε η αξιωματική συνίσταται
σε μια σαφή και καθαρή διάκριση της διαίσθησης και της λογικής:
σύμφωνα με την αξιωματική, μόνο τα λογικά και τυπικά γεγονότα
συνιστούν το αντικείμενο της μαθηματικής επιστήμης
κι όχι το διαισθητικό στοιχείο με το οποίο μπορεί να συνδεθεί.»
(Αϊνστάιν, «Γεωμετρία και εμπειρία»)

Α.1. **Εισαγωγή**

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας, όπως θα δούμε παρακάτω, είχε ξεκινήσει από τον αρχαίο κόσμο (Αρχαία Ελλάδα). Μάλιστα από το 300 π.Χ. με τη συγγραφή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, βλέπουμε ότι η Γεωμετρία έχει φτάσει σε ένα αξιοσημείωτο βαθμό θεωρητικοποίησης.

Με την πάροδο των αιώνων, αν και η αναγνώριση της σπουδαιότητας αυτού του επιτεύγματος ήταν εμφανής, εντούτοις η ορθολογική προσέγγιση της Γεωμετρίας αποτελούσε απλά ένα βοηθητικό εργαλείο. Η διαίσθηση έπαιζε πάντα ένα σημαντικό ρόλο. Παρόλα αυτά υπήρχε μία τάση περιορισμού της διαίσθησης.

Το 19^{ο} αιώνα, με την εμφάνιση των διαφορετικών γεωμετριών καθώς και την αυξανόμενη δυσπιστία προς τη χωρική διαίσθηση, επιτείνεται η ανάγκη να στηριχθεί η γεωμετρία σε ένα αυστηρά θεμελιωμένο λογικό σύστημα. Ένα από τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν γενικότερα τα Μαθηματικά εκείνης της εποχής είναι η ανάπτυξη του προβληματισμού γύρω από τη λογική αυστηρότητα. Τότε παρουσιάστηκαν και οι πρώτες έντονες παρατηρήσεις που αφορούν τις ατέλειες του έως τότε πιο ολοκληρωμένου παραδείγματος απαγωγικής θεωρίας: της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η προσπάθεια

διόρθωσης των ατελειών, οδήγησε σταδιακά στην **αξιωματική παρουσίαση της θεωρίας**. Στη συνέχεια, λόγω του τυπικού και λογικού χαρακτήρα της, αποδεσμεύτηκε από το γεωμετρικό περιεχόμενό της ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε απαγωγική θεωρία.

Το έδαφος λοιπόν έχει προετοιμαστεί κατάλληλα για να ξεκινήσει η αξιωματικοποίηση των επιστημών. Όπως γράφει και ο Blanche *«η προσφυγή στη διαίσθηση σημαίνει παράβαση των κανόνων του παιχνιδιού»*.

«Ένα **αξιωματικό σύστημα** λοιπόν, είναι η πλήρης μορφή που παίρνει σήμερα μια απαγωγική θεωρία. Είναι ένα σύστημα όπου όλοι οι αόριστοι όροι και οι αναπόδεικτες προτάσεις είναι σαφείς και οι τελευταίες τοποθετούνται σαν απλές υποθέσεις, ώστε με αφετηρία αυτές, όλες οι προτάσεις του συστήματος, οικοδομούνται σύμφωνα με λογικούς κανόνες καθορισμένους με σαφήνεια.» (Blanche, Αξιωματική Μέθοδος)

Ας δούμε όμως με συντομία την αλματώδη εξέλιξη της γεωμετρίας, η οποία οδήγησε στην αξιωματική θεμελίωση όχι μόνο της ίδιας αλλά όπως είπαμε και των σημαντικότερων μαθηματικών θεωριών.

Ξεκινώντας από τον 18^{ο} αιώνα, οι **Saccheri** και **Legendre**, επιχείρησαν να αποδείξουν το αξίωμα των παραλλήλων. Στο τέλος του 18^{ου} και στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, οι **Euler** και **Gauss** προώθησαν την ανάπτυξη της ανάλυσης, μειώνοντας το ενδιαφέρον για γεωμετρία. Όμως οι εφαρμογές της στη γεωμετρία, οδήγησαν σε νέες σημαντικές έννοιες αυτής. Έτσι το 1827, ο **Gauss** δημοσίευσε μελέτη πάνω στη θεωρία επιφανειών, η οποία έκανε χρήση του διαφορικού λογισμού. Σε αυτή αποδεικνύει μία σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πάνω σε μια επιφάνεια, η οποία σχετίζεται με το ζήτημα του αξιώματος των παραλλήλων.

Το 19^{ο} αιώνα με την αυξανόμενη χρήση της ανάλυσης σε όλα τα προβλήματα, παρουσιάστηκε καινούργια προσέγγιση στο ζήτημα του αξιώματος των παραλλήλων. Οι υπερβολικές συναρτήσεις του **Lambert** χρησιμοποιήθηκαν για να συνδέσουν την ανάλυση με μια νέα γεωμετρία. Τη δεκαετία 1820, οι **Lobachevsky** και **Bolyai**, δημοσιεύουν ανεξάρτητα ο καθένας την πρώτη ολοκληρωμένη εισαγωγή σε μη-Ευκλείδεια γεωμετρία.. Οι εργασίες των **Riemann** (1854) και **Hermann Von Helmholtz** (1868) καθώς και τα διάφορα μοντέλα μη –ευκλείδειων γεωμετριών (**Beltrami, Poincare**) πείθουν τη μαθηματική κοινότητα για την εγκυρότητα των νέων γεωμετριών.

Η παρουσίαση της μελέτης του **Riemann** «On hypotheses which lie at the foundation of geometry», τον Ιούνιο του 1854, περιείχε πολλές ιδέες για το τι σημαίνει Γεωμετρία, για το οποίο οι μαθηματικοί είχαν ασχοληθεί πάνω από ένα αιώνα. Μάλιστα, ο Riemann είναι ο πρώτος που δημιούργησε ένα καινούργιο γεωμετρικό σύστημα. Στην παρουσίαση αυτή ασχολήθηκε με την έννοια της πολλαπλότητας των ν-διαστάσεων, κατασκευάζοντας μια πολλαπλότητα επαγωγικά, ξεκινώντας από τη μονοδιάστατη πολλαπλότητα. Νωρίτερα ο **Hermann Grassman** (1844) είχα κάνει μια λεπτομερή μελέτη του ν-διάστατου διανυσματικού χώρου, ενώ αρκετά αργότερα, το 1888 ο **Giuseppe Peano** ανέφερε αξιώματα για πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο, προνοώντας μια βάση για τη μελέτη πολυδιάστατης γεωμετρίας.

Μετά τη διάλεξη του Riemann, ο **Hermann Von Helmholtz** επιχείρησε να καταγράψει ένα σύνολο υποθέσεων που προβλέπουν τα βασικά για κάθε μελέτη της γεωμετρίας. Το 1870, ο **William Clifford** επιχείρησε να καθορίσει τα αξιώματα του φυσικού χώρου, διαπιστώνοντας ότι ένας τρόπος διάκρισης ανάμεσα στον ευκλείδειο και μη –ευκλείδειο χώρο, ήταν ένα αξίωμα ομοιότητας (κάθε σχήμα μπορεί να μεγαλώσει ή να μικρύνει χωρίς να αλλάξει "μορφή"), το οποίο ισοδυναμεί με τη θεώρηση της μηδενικής καμπυλότητας και δεν ισχύει στη γεωμετρία του Lobachevsky.

Την ίδια περίοδο αναπτύσσεται και η **προβολική γεωμετρία**. Σε αυτόν τον τομέα εργάστηκαν οι **Pascal, Desargues, Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles, Julius Plucker**. Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, οι **Pascal** και **Desargues** είχαν εισάγει τις βασικές αρχές της θεωρίας της προβολικής γεωμετρίας. Στα τέλη του 18^{ου} αιώνα ο **Monge** εργάστηκε πάνω στην περιγραφική γεωμετρία. Το 1822, ο μαθητής του, **Jean-Victor Poncelet**, έγραψε το 1^{ο} κείμενο πάνω στη συνθετική προβολική γεωμετρία. Το 1847, ο **Christian Von Staudt**, σκιαγράφησε ένα αξιωματικό σύστημα για την προβολική γεωμετρία, βασισμένο στην έννοια μιας προβολικής χαρτογράφησης όπου διατηρούνται οι αρμονικές τετράδες (:ένα σύνολο τεσσάρων σημείων A, B, C, D τα οποία βρίσκονται στην ίδια ευθεία και για τα οποία ισχύει: ο λόγος των αποστάσεων του C από το A και το B, είναι ίσος με το λόγο των αποστάσεων του D από τα ίδια σημεία A και B). Το 1871 ο **Felix Klein** απέδειξε μία σχέση ανάμεσα στην προβολική και τη μη-ευκλείδεια γεωμετρία. Με σχετικό άρθρο έδειξε πώς αντλούνται θεμελιώδεις ιδέες μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, μέσω των ιδεών της προβολικής. Το 1872 έδωσε ένα νέο ορισμό μιας

γεωμετρίας στα πλαίσια των ομάδων μετασχηματισμών, αποδεικνύοντας τη σχέση μεταξύ προβολικής και ευκλείδειας γεωμετρίας. Η αφετηρία του έργου αυτού πιθανόν να ήταν η συνειδητοποίηση ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός του προβολικού επιπέδου αφήνει τη διαγώνια αναλογία αναλλοίωτη και έτσι διατηρούνται οι αποστάσεις και οι γωνίες. Στη μελέτη γίνεται μια προσπάθεια ενοποίησης και ταξινόμησης των διαφόρων γεωμετριών, συνδέοντας τη γεωμετρία με τη Θεωρία Ομάδων.

Έτσι, τη δεκαετία του 1870 η γεωμετρία αποτελεί ένα καλά μελετημένο επιστημονικό πεδίο, με σαφώς προσδιορισμένα προγράμματα έρευνας. Οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες έχουν γίνει πλήρως αποδεκτές, ενώ η προβολική γεωμετρία βρίσκεται στο κέντρο του ενδιαφέροντος των περισσοτέρων μαθηματικών της εποχής.

Στο τέλος του αιώνα η ανάγκη για θεμελίωση της γεωμετρίας, όπως είχε γίνει και με την Ανάλυση, γίνεται επιτακτική. Η πρώτη αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας επιχειρείται από τον **Moritz Pasch** το 1882. Στο βιβλίο του διακρίνει με σαφήνεια τους όρους και τις προτάσεις που ανήκουν στο αξιωματικοποιημένο σύστημα, από εκείνους που λογικά έπονται. Ο ίδιος μάλιστα δηλώνει: "*για να γίνει η γεωμετρία απαγωγική θεωρία, θα πρέπει ο τρόπος με τον οποίο εξάγουμε τα συμπεράσματα να είναι παντού ανεξάρτητος από τις σημάνσεις των γεωμετρικών εννοιών και να λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις σχέσεις ανάμεσα στις γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες καθιερώνονται από τις προτάσεις.*"

Το 1889 ο **Peano**, ακολουθώντας το παράδειγμα του Pasch, επιχειρεί μια νέα αξιωματική θεμελίωση των γεωμετριών εισάγοντας τη χρήση των "απροσδιόριστων όρων και σχέσεων".

Το επιστέγασμα όλων των παραπάνω, έρχεται το 1899 με το βιβλίο του **Hilbert** «Grundlagen der Geometrie». Το έργο αυτό αποτελεί σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών και διακρίνεται για την εξαιρετικά αφαιρετική του μορφή, καθώς και για την αξιωματική θεώρηση των μαθηματικών που ενδιαφέρουν περισσότερο οι σχέσεις παρά η φύση των μαθηματικών. Οι ιδέες του Hilbert για τα «νέα μαθηματικά» και η αξιωματική θεμελίωση που πρότεινε θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα παρακάτω.

Α.2. Η πορεία της θεωρητικοποίησης της Γεωμετρίας στον αρχαίο κόσμο

Στον αρχαίο κόσμο, οι Αιγύπτιοι, οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες είναι αυτοί που ασχολήθηκαν περισσότερο με την Αριθμητική και τη Γεωμετρία, τις οποίες χρησιμοποιούσαν στην καθημερινότητα τους.

Οι **Αιγύπτιοι** έφτασαν σε αρκετά αξιοσημείωτα γεωμετρικά αποτελέσματα. Από τις μέχρι τώρα ανακαλύψεις όμως, δεν προκύπτει καμία ανάγκη γενίκευσης ή απόδειξης των αποτελεσμάτων που ανακάλυψαν. Φαίνεται ότι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά για να φτάνουν σε αποτελέσματα που ήταν χρήσιμα για τις πρακτικές ανάγκες που αντιμετώπιζαν.

Οι **Βαβυλώνιοι** οι οποίοι είχαν αναπτύξει έναν αξιοζήλευτο πολιτισμό, είχαν ασχοληθεί πολύ με τη Γεωμετρία και την Αριθμητική. Η χρήση των Μαθηματικών όμως οφείλεται και πάλι στις πρακτικές ανάγκες που προέκυπταν. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι Βαβυλώνιοι παρουσίαζαν τάσεις υπέρβασης των ορίων του εμπειρισμού. Για παράδειγμα, από τον τρόπο που εκτελούσαν τους υπολογισμούς, φαίνεται ότι γνώριζαν κάποια θεωρήματα.

Η στροφή προς την αξιωματικοποίηση πραγματοποιείται με την ανάπτυξη του εμπορίου. Συγκεκριμένα, μετά την αντικατάσταση του χαλκού από το σίδηρο ($10^{ο}$ π.Χ. αιώνα), βελτιώνονται τα γεωργικά εργαλεία, με αποτέλεσμα την αύξηση της γεωργικής παραγωγής και τη δημιουργία προϋποθέσεων για την ανάπτυξη του εμπορίου. Η ανάπτυξη του εμπορίου δημιουργεί διαφορετικά οικονομικο-κοινωνικά στρώματα. Το ανώτερο από αυτά τα στρώματα η λεγόμενη «τάξη πλουσίων» , διακρίνεται για τον πλούτο και την πολιτική ισχύ, δύο χαρακτηριστικά που υπάρχουν εκεί όπου παρατηρείται ανάπτυξη των επιστημών και των τεχνών. Η τάξη αυτή προωθεί την θεωρητικοποίηση της επιστήμης, μετατοπίζοντας το ερώτημα «**πως;**» που επικρατούσε μέχρι τότε, στο «**γιατί;**»(Στράντζαλος, 1989).

Δεν είναι τυχαία λοιπόν η αλληλεξάρτηση μεταξύ της ανάπτυξης της επιστήμης και προώθησης της αφηρημένης σκέψης και της κοινωνικής, πολιτικής και οικονομικής κατάστασης ανά τόπο και εποχή. Παράδειγμα αποτελούν η ίδρυση της Ελεατικής Σχολής και της Σχολής των Πυθαγορείων στη νότια Ιταλία, από φιλοσόφους και επιστήμονες που διώχτηκαν από μοναρχικά πολιτικά καθεστώτα, αναζητώντας ένα περιβάλλον σχετικής πολιτικής ανεξαρτησίας, οι οποίες αποτέλεσαν εφαλτήρια για την ανάπτυξη και

διάδοση της θεωρητικοποίησης της επιστήμης. (Στράντζαλος Χ., «Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών», παράγραφος 1)

Για να φτάσουμε όμως να μιλάμε για αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας χρειάστηκε να διανύσουμε πολλούς αιώνες και να συμβάλλουν μεγάλοι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί. Στη συνέχεια θα αναφερθούν οι πρωταγωνιστές αυτής της πορείας.

Ο **Θαλής** (περίπου 600 π.Χ.) , ο οποίος ήταν έμπορος και γόνος πλούσιας οικογένειας, ιδρύει στη Μίλητο την πρώτη φιλοσοφική σχολή στην Αρχαία Ελλάδα, την «Ιωνική Σχολή». Εκεί τίθενται τα πρώτα ερωτήματα θεωρητικού περιεχομένου γύρω από την επιστήμη της Φιλοσοφίας και της Γεωμετρίας. Ειδικά γύρω από τη Γεωμετρία, ο Θαλής είναι ο πρώτος που διατυπώνει «ποιοτικά» ερωτήματα που βασίζονται σε ιδιότητες σχημάτων και χρησιμοποιεί συλλογιστικές διαδικασίες, οι οποίες βασίζονται σε «αφηρημένα σχήματα». Από το Θαλή λοιπόν γίνεται το πρώτο βήμα προς τη θεωρητικοποίηση της Γεωμετρίας.

Από τα σημαντικά πρόσωπα με αξιόλογη συνεισφορά προς αυτή την κατεύθυνση, θεωρείται ο **Πυθαγόρας** (περίπου 570-500 π.Χ.), ο οποίος μεταξύ άλλων ίδρυσε και τη γνωστή **Σχολή των Πυθαγορείων**, αρχικά στη Σάμο και έπειτα μεταφέρθηκε στη Νότιο Ιταλία. Στη σχολή αυτή, εκτός από Γεωμετρία, ήκμαζε και η Αριθμητική, η Μουσική, η Φιλοσοφία. Την εποχή εκείνη, η Γεωμετρία αρχίζει να παίρνει τη μορφή που ξέρουμε σήμερα. Οι Πυθαγόρειοι αναπτύσσουν ένα σύστημα θεωρημάτων. Κάθε θεώρημα απαιτεί μια απόδειξη, η οποία στηρίζεται σε προηγούμενα αποδεδειγμένα θεωρήματα. Ο **Ίππασος** ($5^{ος}$ π.Χ. αιώνα), ένας από τους πιο γνωστούς Πυθαγορείους, έμεινε στην ιστορία για τη γνωστοποίηση της ύπαρξης ασυμμετριών. Η ανακάλυψη και γνωστοποίηση των ασύμμετρων μεγεθών, φαίνεται πως επηρέασε καταλυτικά την εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Κατά πολλούς, λόγω της εμφάνισης των ασύμμετρων μεγεθών και της επακόλουθης δυσκολίας στους υπολογισμούς, αναζητούνται χειρισμοί για να απαντήσουν σε ερωτήματα, στους οποίους δεν υπεισέρχονται υπολογισμοί. Αυτό σημαίνει αναζήτηση απαντήσεων , οι οποίες έχουν μια θεωρητική χροιά. Σημαντικό επακόλουθο, είναι η κατασκευή σχημάτων που απαιτούσε μόνο κανόνα και διαβήτη.

Οι προσπάθειες του **Ιπποκράτη του Χίου** (460-380 π.Χ) κινήθηκαν προς την προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου με εμβαδά κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων

σε αυτόν. Ο Ιπποκράτης ο Χίος γνώριζε πολλά θεωρήματα και προσπαθούσε να δίνει αποδείξεις. Μάλιστα φέρεται να είναι ο πρώτος συγγραφέας βιβλίου Γεωμετρίας, από το οποίο ο Ευκλείδης συμπεριέλαβε μεγάλο μέρος της ύλης του στα 4 πρώτα βιβλία των «Στοιχείων».

Ο **Πλάτωνας** (427-347 π.Χ.), προέτρεψε πολλούς να ασχοληθούν με τα μαθηματικά για τα μαθηματικά, προβάλλοντας τη μαθηματική γνώση ως παιδευτική αυταξία. Προώθησε τη θεωρητικοποίηση της γεωμετρίας, υποστηρίζοντας ότι τα μαθηματικά εργάζονται με ιδέες και όχι με αισθητά αντικείμενα που σχεδιάζονται στο χαρτί. Χαρακτηριστικό προς αυτή την κατεύθυνση είναι το απόσπασμα από ένα διάλογο στην «Πολιτεία»:

«Παρόλο που οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν ορατά σχήματα και η επιχειρηματολογία τους αναφέρεται σε αυτά, οι συλλογισμοί τους δεν αφορούν παρά σε ότι τα σχήματα αυτά παριστάνουν. Η ουσία των επιχειρημάτων τους ανάγεται στο καθαυτό τετράγωνο και στην καθαυτή διαγώνιο, όχι στα σχεδιάσματά τους. Όμοια, κάθε σχήμα, που το παράγουν με οποιονδήποτε τρόπο, το θεωρούν ως εικόνα»

Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, τα υλικά αντικείμενα μπορούν να κινητοποιήσουν το νου μας και τα διαγράμματα να υποβοηθήσουν τους συμβολισμούς μας, όμως η αρχική πηγή των ιδεών μας ούτε στον υλικό κόσμο βρίσκεται, ούτε στα διαγράμματα, αλλά στο μυαλό μας ή σε αυτό που ο Πλάτωνας ονομάζει «ψυχή». Για παράδειγμα, τα τετράγωνα είναι μια **αφηρημένη μαθηματική έννοια**, δηλαδή παραλληλόγραμμα με μια γωνία ορθή και όλες τις πλευρές ίσες, όπου οι λέξεις «τετράπλευρο», «παραλληλόγραμμο», «πλευρά», και «ορθή γωνία» παριστάνουν καθαρές μαθηματικές ιδέες και όχι τα σχεδιάσματα που κάνουμε στο χαρτί. Ουσιαστικά η σχεδίαση οποιουδήποτε σχήματος είναι μια ατελής εικόνα των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών.

Με βάση αυτό κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί πως οι ιδιότητες που έχουμε ανακαλύψει για το σχήμα δεν είναι απαραίτητα και ιδιότητες του σχήματος που έχουμε στο μυαλό μας. Καταλήγουμε αναγκαστικά στο να στηριχτούμε σε λογικά επιχειρήματα για να βγάλουμε συμπεράσματα. Ο Πλάτωνας με βάση αυτό το σκεπτικό καταλήγει ότι το μόνο όργανο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι η διάνοιά μας. Οι ιδέες αυτές είναι πολύ κοντά στις σύγχρονες μαθηματικές απόψεις και συγκεκριμένα θυμίζουν την

αντίληψη περί μαθηματικού προτύπου (μοντέλου). Στην ουσία όποτε χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά δημιουργούμε μαθηματικά μοντέλα του πραγματικού κόσμου.

Αν και η αντίληψη ότι τα μόνα γνήσια μέσα για γεωμετρικές κατασκευές είναι ο κανόνας και ο διαβήτης, υπήρχε πριν από τον Πλάτωνα, εντούτοις ενισχύθηκε μετά από αυτόν, καθώς αποτελούν όργανα με τα οποία σχεδιάζονται γραμμές με συμμετρικές ιδιότητες και τελειότητα που συνάδει με τις φιλοσοφικές του αντιλήψεις.

Σημαντικό ρόλο στην πορεία της αξιωματικοποίησης έπαιξε και ο **Εύδοξος ο Κνίδιος** (περίπου 408-350 π.Χ.). Εικάζεται ότι είχε επιχειρήσει μια προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας, θέτοντας αξιώματα και αποδεικνύοντας θεωρήματα στηριζόμενα σε αυτά, πριν από τον Ευκλείδη. Το έργο του παρουσιάζεται στο $5^{ο}$ βιβλίο των «Στοιχείων», που αφορά τη Θεωρία Αναλογιών καθώς και στο $12^{ο}$ βιβλίο, στο οποίο χρησιμοποιείται η «μέθοδος εξάντλησης» για τον υπολογισμών όγκων και εμβαδών , διαδικασία που πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Εύδοξο. Η σημαντική συμβολή αυτού στη Γεωμετρία αποδεικνύεται και από το αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη : Αν δοθούν δύο θετικοί αριθμοί α,β, υπάρχει φυσικός αριθμός ν έτσι ώστε να ισχύει να >β. Όταν θα μελετήσουμε παρακάτω τις σύγχρονες αξιωματικές θεμελιώσης της Γεωμετρία, θα δούμε αναλυτικά τη σημασία του παραπάνω αξιώματος.

Ενώ ο Πλάτωνας ασχολήθηκε με το ‘‘ποια είναι η φύση των μαθηματικών αντικειμένων’’, ο μαθητής του, **Αριστοτέλης** (384-322 π.Χ.), ασχολήθηκε με το ‘‘ποια μέθοδος χρησιμοποιείται στο Μαθηματικό διαλογισμό’’. Σε αυτόν ανήκουν τα αρχαιότερα κείμενα που έφτασαν ως εμάς και αναφέρονται στη σπουδαιότητα των ορισμών και των αξιωμάτων. Είχε διαμορφώσει μία θεωρία αποδείξεων, δημιουργώντας ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη μιας επιστήμης που βασίζεται σε αποδεικτικές διαδικασίες στηριζόμενες σε κάποια αρχικά αξιώματα (παραγωγική επιστήμη). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, κάθε παραγωγική επιστήμη στηρίζεται στις «αποφάνσεις». Μια «απόφανση» γίνεται αποδεκτή αν μπορεί να αποδειχθεί ως αληθής ακολουθώντας μια σειρά συλλογισμών, στηριζόμενη σε άλλες αποδεκτά αληθείς αποφάνσεις. Μια μαθηματική απόφανση η οποία είναι δυνατόν να αποδειχθεί ονομάζεται **θεώρημα**. Είναι αναγκαίο όμως αρχικά να δεχόμαστε κάποιες αποφάνσεις ως αληθείς χωρίς απόδειξη, οι οποίες αποτελούν την αφετηρία για το σχηματισμό ενός μαθηματικού συστήματος. Αυτές οι αποφάνσεις είναι τα γνωστά μας **αξιώματα** ή **αιτήματα**. Αυτά χωρίζονται στις

«**κοινές έννοιες**» που ισχύουν σε όλες τις παραγωγικές επιστήμες, και στις «**ειδικές έννοιες**» που αποτελούν βασικές αλήθειες για καθεμία ειδική επιστήμη. Αυτός ο διαχωρισμός διατηρήθηκε για πολλούς αιώνες. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη οι κοινές έννοιες θα πρέπει να είναι προφανείς.

Επίσης υπάρχουν και οι «**θεμελιώδεις έννοιες**» (πχ σημείο, ευθεία) οι οποίες κατά τον Αριστοτέλη δεν απαιτούν ακριβή ορισμό, αλλά το νόημά τους θα πρέπει να αποσαφηνίζεται έμμεσα, μέσω αποφάνσεων που εκφράζουν τις ουσιώδεις ιδιότητες αυτών των εννοιών. Για κάθε μία από αυτές θα πρέπει να υπάρχει μία απόφανση που να δηλώνει την ύπαρξή τους (ειδικές έννοιες). Κάθε άλλη έννοια ορίζεται ως υποβαθμίδα μιας γενικότερης έννοιας. Η γενική έννοια καλείται «**προσεχές γένος**». Κάθε ειδική υποβαθμίδα του προσεχούς γένους χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα γνωρίσματα, τα οποία καλούνται «**ειδοποιός διαφορά**» (για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως προσεχές γένος το τρίγωνο, και την ειδοποιό διαφορά ότι οι δύο πλευρές του τριγώνου είναι ίσες, τότε η νέα έννοια είναι το ισοσκελές τρίγωνο). Για να οριστεί μια υποβαθμίδα θα έπρεπε πρώτα να εξασφαλιστεί ότι αυτή είναι μη κενή, εφόσον βασική αρχή του Αριστοτέλη ήταν η απόδειξη ύπαρξης κάθε αντικειμένου που ορίζουμε.

Οι αρχές που έθεσε ο Αριστοτέλης, επηρέασαν καίρια το έργο του Ευκλείδη.

Σημαντικό ρόλο στην πορεία που εξετάζουμε έπαιξαν και οι **Θεόδωρος**, **Θεαίτητος**, **Εύδημος** και **Μέναιχμος**.

Ο **Ευκλείδης** στο έργο του «Στοιχεία» (3ος αιώνας π.Χ.) συλλέγει όλες τις προσπάθειες των πρότερών του στην πορεία τους για αυτή την επαναστατική μετάβαση. Τα «Στοιχεία» είναι το πιο παλιό, ολοκληρωμένο μαθηματικό βιβλίο που γνωρίζουμε. Παρακάτω θα αναφερθεί κριτική πάνω στο έργο αυτό.

Λίγο αργότερα ο **Αρχιμήδης** (287-212 π.Χ.) παραθέτει το πρωτοποριακό για την εποχή έργο του.

Η δημιουργική περίοδος για τη Γεωμετρία, κλείνει με την πολύτιμη συμβολή του **Απολλώνιου** (225 π.Χ.). Ο Απολλώνιος έγραψε 7 βιβλία για τις κωνικές τομές, εκ των οποίων τα πρώτα τέσσερα έχουν βασιστεί στο έργο του Ευκλείδη. Επίσης έλυσε 10 προβλήματα σχετικά με επαφές, οι λύσεις των οποίων ακόμα και σήμερα θεωρείται ότι απαιτούν πολύπλοκους χειρισμούς.

Ακολούθησαν περίπου 2000 χρόνια χωρίς ιδιαίτερη ανάπτυξη στον τομέα αυτό, για να φτάσουμε στον 19^{ο} αιώνα, όπου σημειώνεται η αλματώδης πρόοδο στην Γεωμετρία.

Α.3. Βασικές αρχές και χαρακτηριστικά της αξιωματικής μεθόδου

Η ανάπτυξη κάθε επιστήμης περιλαμβάνει τέσσερις διαδοχικές φάσεις, δηλαδή την περιγραφική, την επαγωγική, την απαγωγική και την αξιωματική. Από αυτές τις τέσσερις φάσεις οι δύο τελευταίες είναι αυτές που θα μας απασχολήσουν.

Η απαγωγική έκθεση για να παρέχει επαρκή επιστημονική τεκμηρίωση, οφείλει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- 1^{η} συνθήκη: Διατύπωση των **πρωταρχικών όρων**, από τους οποίους θα ορίσουμε όλους τους υπόλοιπους.
- 2^{η} συνθήκη: Οι **σχέσεις** ανάμεσα στους πρωταρχικούς όρους θα πρέπει να είναι καθαρά λογικές σχέσεις και να είναι ανεξάρτητες από την κάθε σήμανση που θα μπορούμε να δώσουμε στους όρους.
- 3^{η} συνθήκη: Διατύπωση των **πρωταρχικών προτάσεων (αιτήματα)**, από τις οποίες θα αποδείξουμε όλες τις υπόλοιπες.
- 4^{η} συνθήκη: Οι αποδείξεις αυτές θα πρέπει να περιλαμβάνουν μόνο τις διατυπωμένες σχέσεις μεταξύ των πρωταρχικών όρων.

Η αξιωματική αποτελεί συμπλήρωση της απαγωγικής θεωρίας, συνεπώς όταν μια θεωρία παίρνει απαγωγική μορφή, σημαίνει ότι ξεκινά η αξιωματικοποίησή της.

Σκοπός της αξιωματικοποίησης μιας απαγωγικής θεωρίας είναι η απαλλαγή από τις συγκεκριμένες και διαισθητικές σημασίες πάνω στις οποίες αρχικά οικοδομήθηκε, ούτως ώστε να εμφανιστεί καθαρά το λογικό αφηρημένο της σχήμα. (Blanche, 1971)

Πριν προχωρήσουμε σε συγκεκριμένες αξιωματικές θεωρίες, είναι απαραίτητο να διευκρινιστούν κάποιες ορολογίες και βασικά χαρακτηριστικά της αξιωματικής μεθόδου, με σκοπό να εξυπηρετηθεί η μελέτη οποιασδήποτε αξιωματικοποιημένης θεωρίας.

Α.3.1. Τα «θεμέλια» κάθε αξιωματικοποιημένης θεωρίας είναι οι **πρωταρχικοί όροι** και **πρωταρχικές προτάσεις**. Οι πρωταρχικοί όροι δεν ορίζονται «ανοιχτά». Η σημασία τους καθορίζεται από τη χρήση τους στα αιτήματα, γι’αυτό και ονομάζονται «σιωπηροί»

ορισμοί. Συνεπώς δεν καθορίζονται οι ίδιοι οι όροι αλλά οι σχέσεις μεταξύ των όρων. Έχουμε λοιπόν ορισμό μέσω των αιτημάτων.

Τα αιτήματα είναι υποθέσεις, από τις οποίες παράγουμε ένα σύνολο αποδείξιμων προτάσεων και διατυπώνουν τις λογικές σχέσεις που συνδέουν τους πρωταρχικούς όρους.. Δε μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε την αλήθεια αυτών των υποθέσεων, δηλαδή δεν αποτελούν προτάσεις που πρέπει να ελέγξουμε την αλήθεια ή το ψεύδος τους. Ο Poincare χαρακτήριζε «μεταμφιεσμένους ορισμούς» τα αιτήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, τα οποία αποτελούν σιωπηρό ορισμό του συνόλου των ευκλείδειων εννοιών.

Τονίζεται ιδιαίτερα ότι δεν είναι ανάγκη να παρουσιαστούν στην αρχή του συστήματος, όλοι οι πρωταρχικοί όροι και οι πρωταρχικές προτάσεις (απροσδιόριστοι όροι και αναπόδεικτες προτάσεις). Πολλές φορές μάλιστα αυτό μπορεί να είναι εις βάρος της αξιωματικής. Προτιμότερο είναι να διατυπώνονται στην πορεία της παρουσίασης της αξιωματικής και φυσικά πριν χρησιμοποιηθούν σε όρους ή παράγωγες προτάσεις.

<u>Α.3.2.</u> Πρότερη γνώση προς ένα αξιωματικό σύστημα, είναι η εξωτερική γνώση την οποία επικαλείται αυτό το σύστημα. Μερικές φορές είναι δύσκολο να διασαφηνίσουμε τα όρια μεταξύ των εννοιών του συστήματος και των εννοιών που είναι πρότερες αυτού. Οι διατύπωση των πρωταρχικών όρων του συστήματος μας βοηθάει προς αυτή την κατεύθυνση.

Ας δούμε όμως παραδείγματα πρότερων γνώσεων.

Έστω ότι έχουμε μια αξιωματικοποιημένη θεωρία. Η θεωρία αυτή τηρεί τις τέσσερις παραπάνω αρχές. Όμως για τη διατύπωση και συγκρότηση των πρωταρχικών όρων και των προτάσεων, απαιτείται η χρήση λέξεων που έχουν μια λογική λειτουργία, για παράδειγμα: και, ή , υπάρχει, είναι, αν , τότε κλπ. Επίσης για να αποδείξουμε τις προτάσεις που ανήκουν στη θεωρία, δεν αρκεί να βασιστούμε μόνο στους πρωταρχικούς όρους και προτάσεις αλλά χρειάζεται να κάνουμε χρήση των κανόνων της λογικής για να εξάγουμε συμπεράσματα. Επειδή λοιπόν απαιτείται γνώση της Λογικής, η Λογική ονομάζεται **πρότερη** σε σχέση με την αξιωματικοποιημένη επιστήμη. Η Λογική δεν έχει επιστήμες πρότερες αυτής.

Άλλο παράδειγμα πρότερης γνώσης η οποία συναντιέται πολύ συχνά στις θεμελιώσεις μαθηματικών θεωριών είναι η Αριθμητική. Η Αριθμητική είναι πρότερη για παράδειγμα

ως προς ένα γεωμετρικό σύστημα διότι για την απόδειξη ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές , απαιτείται η χρήση θεωρημάτων της Αριθμητικής που σχετίζονται με την πρόσθεση.

Η χρήση των πρότερων γνώσεων απαιτεί προσοχή και οφείλει να γίνεται με μέτρο, διαφορετικά αντιτίθεται στην ιδέα της αυστηρής θεωρητικής θεμελίωσης του συστήματος.

<u>Α.3.3.</u> Δύο **συστήματα προτάσεων** είναι **ισοδύναμα**, αν κάθε πρόταση του ενός αποδεικνύεται μόνο με τη βοήθεια των προτάσεων του άλλου και αντίστροφα. Δύο **συστήματα όρων** είναι **ισοδύναμα**, αν κάθε όρος του ενός ορίζεται μόνο με τη βοήθεια των όρων του άλλου και αντίστροφα.

Ας δούμε όμως τι σημαίνει αυτό. Όπως αναφέρθηκε, σε κάθε αξιωματικό σύστημα θα πρέπει να διατυπώνονται με σαφήνεια οι απροσδιόριστοι όροι και οι αναπόδεικτες προτάσεις. Οι όροι αυτοί είναι απροσδιόριστοι και οι προτάσεις αναπόδεικτες στο εσωτερικό του συστήματος, σύμφωνα με τον τρόπο που έχουμε οικοδομήσει το σύστημα. Μπορούμε να τροποποιήσουμε το σύστημα έτσι ώστε αυτοί οι όροι και προτάσεις να μην είναι αόριστοι και αναπόδεικτες αντίστοιχα. Μπορούμε δηλαδή να επιλέξουμε μια αποδείξιμη πρόταση ενός συστήματος, η οποία να είναι ισοδύναμη με μια πρωταρχική- άρα αναπόδεικτη πρόταση του ίδιου συστήματος και να την θέσουμε σαν πρωταρχική πρόταση ενός άλλου συστήματος. Τότε σε αυτό το σύστημα, η πρωταρχική πρόταση του πρώτου συστήματος είναι αποδείξιμη πρόταση. Έτσι έχουμε δύο ισοδύναμα συστήματα.

Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αντί του αιτήματος των παραλλήλων, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν αίτημα την εξής πρόταση: «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές». Τότε στο καινούργιο σύστημα, μπορούμε να αποδείξουμε το $5^{ο}$ αίτημα του Ευκλείδη.

Τονίζεται ιδιαίτερα ότι όλες οι αξιωματικές θεμελιώσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι ισοδύναμες. Αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι η εκλογή των αόριστων όρων και αναπόδεικτων προτάσεων, δηλαδή αλλάζει η ευκλείδεια διάταξη. Συνεπώς οι διαφορετικές αξιωματικές θεμελιώσεις της προσφέρουν τον ίδιο κύκλο γνώσεων.

Α.3.4. Τροποποιώντας με διάφορους τρόπους έστω και ένα από τα αιτήματα μιας απαγωγικής θεωρίας, **προκύπτουν γειτονικές ή συγγενικές θεωρίες** της. Έτσι προκύπτει μια πολλαπλότητα της θεωρίας. Για παράδειγμα, γειτονική θεωρία της ευκλείδειας γεωμετρίας αποτελεί η γεωμετρία Λομπατσέφσκι, η οποία προκύπτει όταν τροποποιήσουμε το αίτημα των παραλλήλων, αρνούμενοι τη μοναδικότητα της παραλλήλου.

Α.3.5. **Μοντέλα** μιας αξιωματικής ονομάζονται οι πραγματοποιήσεις, οι οποίες προκύπτουν δίνοντας συγκεκριμένες ερμηνείες στους όρους της, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις που διατυπώνουν τα αιτήματα. Έτσι μία αξιωματική θεωρία μπορεί να έχει πολλά μοντέλα, ενώ η ίδια η αρχική συγκεκριμένη θεωρία, αυτή που παρέσχε τα στοιχεία του λογικού σχήματος που περιγράφει η αξιωματική, αποτελεί ένα από τα μοντέλα της. (Blanche, 1971)

Ισόμορφα μοντέλα μιας θεωρίας λέγονται τα μοντέλα τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους μόνο από τις διαφορετικές ερμηνείες που δίνουμε στους ορισμούς, ενώ όταν τις αφαιρούμε καταλήγουμε στην αρχική αξιωματική. Μάλιστα ένας από τους σκοπούς της αξιωματικής μεθόδου είναι η αποκάλυψη των ισομορφισμών που υπάρχουν σε φαινομενικά διαφορετικές θεωρίες, οι οποίες τελικά ανάγονται στην ενότητα ενός ευρύτερου συστήματος.

Α.3.6. Απαιτήσεις γύρω από την εκλογή των αιτημάτων

Η εκλογή των αιτημάτων δεν είναι τελείως αυθαίρετη, αλλά, οφείλει να ικανοποιεί κάποιες εσωτερικές απαιτήσεις.

Το αξιωματικό σύστημα οφείλει να είναι **συνεπές**, δηλαδή να μη μπορούμε να αποδείξουμε την αλήθεια μιας πρότασης και ταυτόχρονα και την άρνησή της. Αν το σύστημα δεν είναι συνεπές τότε είναι **αντιφατικό**. Για τον έλεγχο της συνέπειας, υπάρχει η μέθοδος της αναγωγής σε μια προγενέστερη θεωρία και η μέθοδος της πραγματοποίησης στον κόσμο των αντικειμένων. Στην πρώτη έχοντας σαν αίτημα τη μη-αντιφατικότητα ενός καλά θεμελιωμένου συστήματος (συνήθως επιλέγεται η κλασσική αριθμητική) , οικοδομούμε μια ερμηνεία του συστήματος που εξετάζουμε, ώστε να

εφαρμόζεται σε ολόκληρο ή ένα μέρος του (καλά θεμελιωμένου) συστήματος. Συνεπώς η υποτιθέμενη μη-αντιφατικότητα μεταβιβάζεται στο άλλο σύστημα-υπόδειγμα.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο αρκεί να κατασκευάσουμε ένα φυσικό μοντέλο της θεωρίας. Αν το καταφέρουμε αυτό, τότε εξασφαλίζουμε τη συνέπεια της αξιωματικής, εφόσον οτιδήποτε πραγματικό είναι a fortiori δυνατό.

Μια άλλη βασική απαίτηση είναι το σύστημα να είναι **πλήρες**. Ένα σύστημα αιτημάτων ονομάζεται **πλήρες** εάν η θεωρία που απορρέει από αυτό αποδεικνύει είτε την αλήθεια μιας πρότασης (διατυπωμένης με όρους του συστήματος), είτε την άρνησή της, είτε και τα δύο.

Αν το σύστημα είναι πλήρες και συνεπές, ονομάζεται **κατηγορικό.** Τότε μπορούμε να αποδείξουμε μόνο την αλήθεια ή μόνο την άρνηση μιας τέτοιας πρότασης. Ο συνδυασμός πληρότητας και συνέπειας επιτρέπει τη χρήση της «εις άτοπον απαγωγής» στις αποδείξεις των προτάσεων.

Μια λιγότερο ισχυρή μορφή κατηγορικότητας είναι η **επιλυσιμότητα**. Ένα σύστημα λέγεται **επιλύσιμο** αν μπορούμε να αποφανθούμε αν μία πρόταση διατυπωμένη με τους όρους του συστήματος είναι αποδείξιμη ή όχι.

Τα αιτήματα θα πρέπει να είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι κανένα από τα αξιώματα δε μπορεί να προκύψει σαν αποδείξιμη πρόταση από τα υπόλοιπα.

Για να εξετάσουμε την ανεξαρτησία ενός αιτήματος, θεωρούμε ένα νέο αξιωματικό σύστημα το οποίο έχει ως αιτήματα, μια τροποποίηση του υπό εξέταση αιτήματος και τα υπόλοιπα αιτήματα του αρχικού συστήματος. Αν το νέο σύστημα παραμένει συνεπές, αυτό σημαίνει την ανεξαρτησία του αιτήματος.

Τονίζεται ιδιαίτερα ότι η μη-συνέπεια, αποτελεί λογικό λάθος του συστήματος, ενώ η μη πληρότητα αποτελεί μία σημαντική ατέλεια. Επίσης η μη-κατηγορικότητα και η μη-επιλυσιμότητα αποτελούν ατέλειες του συστήματος. Η μη ανεξαρτησία δεν αποτελεί λάθος, αλλά επιβάλλεται για την οικονομία του συστήματος. Η οικονομία του συστήματος παίζει σημαντικό ρόλο. Το ιδανικό είναι να μειωθούν στο ελάχιστο οι πρωταρχικοί όροι και προτάσεις. Όμως η έσχατη οικονομία, έχει ως αποτέλεσμα την περίπλοκη ανάπτυξη της θεωρίας. Οπότε το βαθμό της οικονομίας τον καθορίζουν αισθητικοί και διδακτικοί λόγοι.

<u>Α.3.7.</u> Ένα σύστημα λέγεται **κορεσμένο**, όταν η προσθήκη οποιουδήποτε ανεξάρτητου επιπλέον αιτήματος, καθιστά το σύστημα αντιφατικό. Παράδειγμα κορεσμένου συστήματος, αποτελεί η ευκλείδεια γεωμετρία.

Αν το σύστημα δεν είναι κορεσμένο και εισάγουμε ένα ή παραπάνω επιπλέον αιτήματα, τότε ενισχύουμε και περιορίζουμε το συγκεκριμένο σύστημα. Αν αφαιρέσουμε ένα αίτημα από ένα σύστημα, τότε το νέο σύστημα προφανώς διευρύνεται, γίνεται πιο γενικό, οπότε το αρχικό αποτελεί μια ειδική περίπτωση του νέου συστήματος.

Για παράδειγμα, η Ουδέτερη γεωμετρία είναι ένα μη κορεσμένο σύστημα. Όταν προσθέσουμε το αίτημα των παραλλήλων, τότε περιορίζουμε το σύστημα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, ενώ αν προσθέσουμε στο αρχικό την άρνηση της μοναδικότητας της παράλληλης το περιορίζουμε στη γεωμετρία Lobachevsky. Αντίστροφα αν έχουμε ένα αξιωματικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αφαιρέσουμε το αίτημα της παραλληλίας, τότε το σύστημα χαλαρώνει και διευρύνεται στην Ουδέτερη γεωμετρία.

<u>Α.3.8. Συμβολικοποίηση και τυποποίηση</u>

Οι πρώτες αξιωματικές, παρουσιάζουν κάποιες ατέλειες, οι οποίες οφείλονται στην προσφυγή στη διαίσθηση. Σε αυτή την κατεύθυνση συνέβαλαν και οι όροι που χρησιμοποιούνται στις αξιωματικές, οι οποίες συνήθως έχουν κάποια συγκεκριμένη σημασία.

Κάπως έτσι γεννήθηκε η ανάγκη για συμβολικοποίηση, ως μία προσπάθεια να αντικατασταθούν οι λέξεις των όρων με σύμβολα. Τα σύμβολα είναι απαλλαγμένα από κάθε προηγούμενη σημασία, συνεπώς αποκόβουν κάθε προσφυγή προς τη διαίσθηση.

Παράδειγμα: ο συμβολισμός Σ(Α,α) σημαίνει ότι το σημείο Α κείται επί της ευθείας α (Σ συμβολισμός για τη σχέση σύμπτωσης, με κεφαλαία γράμματα συμβολίζουμε τα σημεία και με μικρά γράμματα τις ευθείες).

Οφείλουμε να εξαλείψουμε κάθε περιθώριο αμφισβήτησης των λογικών κανόνων που ακολουθούμε. Αυτό επιτυγχάνεται με τη σαφή και συγκεκριμένη διατύπωση των νόμων του ορισμού (**νόμοι κατασκευής**) και της απόδειξης (**νόμοι επαγωγής**). Προς αυτήν την κατεύθυνση στράφηκαν οι επιστήμονες το 1920, στη λεγόμενη **τυποποίηση** της λογικής παρουσίασης των απαγωγικών θεωριών.

Όπως είπαμε, οι νόμοι αυτοί χωρίζονται στους νόμους κατασκευής και στους νόμους απαγωγής. Οι πρώτοι είναι αυτοί που αφορούν το σχηματισμό των εκφράσεων. Με τη χρήση τους αναγνωρίζουμε αν μία έκφραση ανήκει ή όχι στο σύστημα. Οι δεύτεροι είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις. Με τη χρήση και αυτών, ελέγχουμε αν μια απόδειξη προχωρεί ορθά στα πλαίσια του εν λόγω συστήματος και κατά συνέπεια την ορθή απαγωγική πορεία.

Με αυτόν τον τρόπο η οικοδόμηση της θεωρίας δεν αφήνεται σε μια λογική αλληλουχία συλλογισμών αλλά επιτυγχάνεται μια αυστηρή πορεία μετασχηματισμών όρων ή αξιωμάτων, όπου κάθε μετασχηματισμός υπαγορεύεται από έναν νόμο. Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι η τυποποίηση προϋποθέτει την συμβολικοποίηση.

Α.3.9. Ο ρόλος της διαίσθησης στην αξιωματική μέθοδο

Ένα μεγάλο λάθος που κάνουμε είναι να θεωρούμε ότι η διαίσθηση δεν έχει καμία θέση στην αξιωματική μέθοδο. Η λειτουργία, η οικοδόμηση και η χρήση της αξιωματικής απαιτεί την παρουσία της διαίσθησης. Ο φορμαλισμός στηρίζεται και τροφοδοτείται από τη διαίσθηση. Η κάθε θεωρία ξεκινά από την εμπειρική παρατήρηση, συνεχίζει με μία προκαταρκτική επαγωγική εργασία και προτού καταλήξει στην αξιωματική περνά στο στάδιο της απαγωγικής. Μετά την συμβολικοποίηση και τυποποίηση ναι μεν η διαίσθηση εξαλείφεται, αλλά όμως δεν παύει να είναι αυτή που υπαγόρευσε την εξέλιξη των σταδίων για την αξιωματικοποίηση της θεωρίας (Blanche, 1971).

Υπάρχει και άλλος λόγος που κρίνει σημαντική τη συμβολή της διαίσθησης σε μία θεωρία. Για να καταλάβουμε το λόγο για τον οποίο επιλέχτηκαν τα αξιώματα κάποιας θεωρίας και για να μην τα θεωρήσουμε ως αυθαίρετες επιλογές του αξιωματιστή, θα πρέπει, πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της αξιωματικοποιημένης θεωρίας, να έχουμε αφομοιώσει τη συγκεκριμένη γνώση. Τότε μόνο θα είμαστε σε θέση να εξασφαλίσουμε την κατανόηση των ορίων και των κύριων γνωρισμάτων.

Συνεπώς, το όφελος της αξιωματικής μεθόδου είναι ότι περιορίζει τη διαίσθηση στα πλαίσια που είναι χρήσιμη, χωρίς να χρειάζεται να την αποκλείσει. Διαίσθηση και φορμαλισμός αλληλοσυμπληρώνονται.

Α.3.10. Πλεονεκτήματα της αξιωματικής μεθόδου

Η αξιωματική μέθοδος αποτελεί αναμφισβήτητα όργανο αφαίρεσης και ανάλυσης. Με τη χρήση της περιορίζουμε τις διαισθητικές σημασίες και έτσι «μπορούμε να σκεφτούμε με τρόπο περισσότερο αφηρημένο την αρχική θεωρία, ενώ συγχρόνως σφυρηλατούμε ένα πολύτιμο νοητικό όργανο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις ισόμορφες, προς την πρώτη θεωρίες» (Blanche, 1971). Έτσι συγκεντρώνουμε το πλήθος των διαφορετικών θεωριών σε μία, επιτυγχάνοντας οικονομία σκέψης.

Στην αξιωματική θεμελίωση μιας θεωρίας, οι ιδιότητες των θεμελιωδών εννοιών διατυπώνονται με σαφήνεια. Έτσι συνεχίζεται η ανάλυση των πρώτων εννοιών, χρησιμοποιώντας μόνο αυτές τις ιδιότητες ή εκείνες που απάγονται από αυτές. Αυτή η αυστηρή οργάνωση βοηθά να ανακαλύπτουμε τις συγγενικές με τη θεωρία που εξετάζουμε επιστήμες, ενώ ταυτόχρονα εξυπηρετεί τη διάκριση μεταξύ των διαφόρων περιοχών της ίδιας της θεωρίας. Έτσι κάθε θεωρία επωφελείται από τις θεωρίες με τις οποίες συγγενεύει, κερδίζοντας πολλά για την ίδια τη γνώση.

Επίσης, προβλήματα που αφορούν την ουσία των οντοτήτων που χειρίζεται η θεωρία, και που η ορθολογική επιστήμη δε μπορούσε να λύσει, έρχεται να τα αντιμετωπίσει η αξιωματική.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τη μαθηματική επιστήμη, σήμερα πλέον έχουν αξιωματικοποιηθεί όλες οι μαθηματικές θεωρίες, ενώ κάποιες από αυτές έχουν αξιωματικοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αλλάξει όλη τη φυσιογνωμία της επιστήμης. Κυρίως αλλάζει ο τρόπος διάταξης των διαφορετικών μαθηματικών θεωριών. Αντί η διάταξη των θεωριών να στηρίζεται στο αντικείμενο μελέτης τους, όπως γινόταν πριν τις αξιωματικοποιήσεις, τώρα βασίζεται στην ιεραρχία των δομών , ξεκινώντας από τις πιο απλές και γενικές (πχ αλγεβρικές δομές, τοπολογικές δομές) στις πιο σύνθετες (πχ τοπολογική άλγεβρα) και ειδικές, τα στοιχεία των οποίων παίρνουν μια πιο έντονη ατομικότητα (καθορίζονται από διασταυρώσεις περισσότερο γενικών θεωριών, πχ το σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σώμα ή ένα διατεταγμένο σύνολο ή τοπολογικός χώρος).

Η αξιωματική προώθησε τη λύση, σχετικά με το πρόβλημα των θεμελίων των μαθηματικών, το οποίο παρουσιάστηκε όταν συνέβη η κρίση στη θεωρία συνόλων.

Α.3.11. Αξιωματική μέθοδος και Γεωμετρία

Η αξιωματική μέθοδος γεννήθηκε από τη Γεωμετρία. Η αξιωματικοποίησή της είχε ως αποτέλεσμα να διαχωρισθεί σε δύο διαφορετικές θεωρήσεις:

- Στην **καθαρή γεωμετρία**, η οποία είναι η αξιωματικοποιημένη, από την οποία έχει εξαλειφθεί κάθε προσφυγή στην εμπειρία και στη διαίσθηση.
- Στην **εφαρμοσμένη γεωμετρία**, η οποία στηρίζεται στη διαίσθηση και τα θεωρήματά της οποίας αποτελούν φυσικούς νόμους.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η εφαρμοσμένη γεωμετρία έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη συγκρότηση της καθαρής γεωμετρίας, ενώ πλέον αποτελεί ένα από τα μοντέλα της.

Συνεπώς η γεωμετρία αποτελεί **ορθολογική επιστήμη,** δηλαδή για να αληθεύει δεν απαιτεί τα αντικείμενά που διαπραγματεύεται να είναι υπαρκτά, ενώ ταυτόχρονα είναι και **πειραματική επιστήμη**, δηλαδή για να υπάρξει δεν απαιτεί τα αντικείμενά της να είναι νοητά. Η αξιωματική μέθοδος λοιπόν δηλώνει μία δυαδικότητα στο εσωτερικό της γεωμετρίας.(Blanche, 1971)

Α.4. Το πρόγραμμα του Hilbert για τα Μαθηματικά

Α.4.1. Ιστορική εξέλιξη του προγράμματος του Hilbert

Στις αρχές της δεκαετίας 1920, ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert (1862-1943) υπέβαλε μια νέα πρόταση για τη θεμελίωση των κλασσικών μαθηματικών που είναι γνωστή ως πρόγραμμα του Hilbert. Η πρόταση αυτή έρχεται να λύσει το πρόβλημα της κρίσης των Θεμελίων των Μαθηματικών, η οποία προήλθε από την ανακάλυψη των παραδόξων και των ασυνεπειών που διαπιστώθηκαν στην προσπάθεια να διευκρινιστούν τα θεμέλια των Μαθηματικών. Η εργασία αυτή, έχει τις ρίζες της στην εργασία του ιδίου, σχετικά με τη γεωμετρία (τη δεκαετία του 1890) και τη συγγραφή του βιβλίου «*Foundations of Geometry*» το 1899. Το πρόγραμμα απαιτεί τη διαμόρφωση όλων των μαθηματικών θεωριών με αξιωματική μορφή, μαζί με μια απόδειξη ότι αυτή η αξιωματική είναι συνεπής. Ο Hilbert θεωρεί ότι ο κατάλληλος τρόπος για να αναπτυχθεί οποιοδήποτε επιστημονικό πεδίο, είναι η αξιωματική προσέγγιση. Παρέχοντας μια αξιωματική προσέγγιση, η θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί ανεξάρτητα από κάθε χρήση

της διαίσθησης, και θα επιτρέπει την ανάλυση των λογικών σχέσεων μεταξύ των βασικών όρων και των αξιωμάτων.

Ο Hilbert πέρα από τη συνέπεια θέτει και κάποιες άλλες βασικές προϋποθέσεις για να είναι αποδεκτό ένα αξιωματικό σύστημα. Θα πρέπει τα αξιώματα να είναι **ανεξάρτητα** μεταξύ τους, δηλαδή να μην είναι δυνατό να αποδειχθεί ένα αξίωμα ως πρόταση κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, κατοχυρώνοντας έτσι την ‘‘οικονομία’’ του συστήματος αξιωμάτων. Επίσης θα πρέπει να είναι **πλήρες**, δηλαδή η θεωρία που απορρέει από αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση να κατοχυρώσει την ισχύ ή την άρνηση της ισχύς μιας πρότασης.

Ο Hilbert επισημαίνει την πρωταρχική σημασία της συνέπειας των μαθηματικών θεωριών η οποία αποδεικνύεται με μεθόδους που έχουν άμεσα συνδυαστικό-περατοκρατικό χαρακτήρα και ως εκ τούτου είναι διαφανείς και ασφαλείς. Ο ειδικός επιστημολογικός χαρακτήρας του περατοκρατικού συλλογισμού, τότε, παράγει την απαραίτητη αιτιολόγηση των κλασσικών μαθηματικών. Θα δούμε παρακάτω τι σημαίνει αυτή η έννοια.

Για τα αξιώματα της γεωμετρίας, η συνέπεια μπορεί να αποδειχτεί παρέχοντας μια ερμηνεία του συστήματος στο πραγματικό επίπεδο, και έτσι, η συνέπεια της γεωμετρίας βασίζεται στη συνέπεια της ανάλυσης. Η θεμελίωση της ανάλυσης, φυσικά, είναι αυτονόητο ότι απαιτεί αξιωματικοποίηση και μια απόδειξη συνέπειας. Ο Hilbert το 1900 προχώρησε σε μια τέτοια αξιωματική, αλλά έγινε σαφές πολύ γρήγορα ότι η συνέπεια της ανάλυσης αντιμετώπιζε σημαντικές δυσκολίες, διότι η αξιωματικοποίησή της στα πλαίσια της εργασίας του Dedekind, στηρίχθηκε σε αμφίβολες υποθέσεις συγγενείς με εκείνες που οδηγούν στα παράδοξα της θεωρίας συνόλων και στα παράδοξα του Russell στην κατά Frege αξιωματικοποίηση της αριθμητικής.

Ο Hilbert τόνισε την ανάγκη για μια άμεση απόδειξη της συνέπειας της ανάλυσης, ώστε αυτή να μη βασίζεται στη συνέπεια μιας άλλης θεωρίας. Στο δεύτερο από τα 23 μαθηματικά προβλήματα που έθεσε σε ένα συνέδριο Μαθηματικών το 1900,προτείνεται το θέμα της απόδειξης αυτής, την οποία το 1905 παρουσίασε υπό μορφή σκιαγράφησης. Διάφοροι παράγοντες καθυστέρησαν την περαιτέρω ανάπτυξη του προγράμματος του Hilbert. Ένας από αυτούς τους παράγοντες ήταν και η κριτική του Poincare το 1906, στην κυκλική χρήση της επαγωγής στη σκιαγράφηση της απόδειξης του Hilbert.

Η δημοσίευση των Russell και Whitehead, το 1910, «Principia Mathematica» παρέχει τις απαιτούμενες λογικές βάσεις, για μια νέα προσπάθεια λύσης των προβλημάτων σχετικά με τη θεμελίωση των Μαθηματικών. Ο Hilbert συνεχίζει τις προσπάθειές του για τη θεμελίωση και το Σεπτέμβρη του 1917, δίνει μία ομιλία στην Ελβετική Μαθηματική Κοινότητα με τίτλο «Axiomatic Thought». Είναι η πρώτη δημοσιευμένη συμβολή του στα μαθηματικά θεμέλια μετά το 1905. Σε αυτή, υπογραμμίζει πάλι την ανάγκη της απόδειξης της συνέπειας κάθε αξιωματικού συστήματος: ‘‘*Η κύρια απαίτηση της θεωρίας των αξιωμάτων πρέπει να πάει μακρύτερα [από το να αποφεύγει τα γνωστά παράδοξα], δηλαδή, να δείξει ότι μέσα σε κάθε γνωστικό πεδίο που είναι αξιωματικά θεμελιωμένο, είναι αδύνατον να υπάρξουν αντιφάσεις*’’. Θέτει και πάλι ως κύριο πρόβλημα την απόδειξη της συνέπειας της Αριθμητικής και της Θεωρίας Συνόλων. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, φαίνεται ότι δεν υπάρχει τίποτα περισσότερο θεμελιώδες διαθέσιμο για την απόδειξη της συνέπειας, από την Λογική. Τότε ο Hilbert σκέφτηκε ότι στο πρόβλημα είχε δοθεί λύση από το έργο του Russell «Principia». Εντούτοις, άλλα προβλήματα θεμελίωσης παρέμεναν άλυτα, περιλαμβανομένου και του προβλήματος σχετικά με την απόφαση της αλήθειας ή του ψεύδους κάθε μαθηματικής πρότασης, το οποίο είχε επισημανθεί επίσης στην ομιλία του Hilbert το 1900.

Τα προβλήματα που εκκρεμούσαν στον τομέα της αξιωματικής, οδήγησαν το Hilbert να ασχοληθεί τα επόμενα χρόνια με τη μελέτη στον τομέα της Λογικής. Το 1917, ο Paul Bernays γίνεται βοηθός του στο Göttingen. Σε μία σειρά μαθημάτων το 1917-1921, ο Hilbert, με τη βοήθεια των Bernays και Behmann, επιτυγχάνουν σημαντική συνεισφορά στον τομέα της Λογικής. Συγκεκριμένα το 1917, γίνεται μια προσεγμένη ανάπτυξη της πρώτης τάξεως λογικής, και τίθενται οι βάσεις του εγχειριδίου «Principles of Theoretical Logic» των Hilbert και Ackermann.

Μέσα στα επόμενα χρόνια, ο Hilbert απορρίπτει τη λύση που πρότεινε ο Russell στο πρόβλημα της συνέπειας της αριθμητικής. Την ίδια περίοδο, τα «διαισθητικά» μαθηματικά του Brouwer κερδίζουν έδαφος. Ειδικότερα, ο μαθητής του Hilbert, Hermann Weyl, έγινε υποστηρικτής της διαίσθησης. Ο Hilbert απάντησε στο άρθρο του Weyl “The new foundational crisis in mathematics” (1921) σε τρεις διαλέξεις που έδωσε στο Hamburg το καλοκαίρι του 1921. Τότε υπέβαλε την πρότασή του για μια λύση στο πρόβλημα των θεμελίων των μαθηματικών. Αυτή η πρόταση περιελάμβανε τις ιδέες του

Hilbert από το 1904, σχετικά με τις άμεσες αποδείξεις συνέπειας, τα αξιωματικά συστήματα, και επίσης τις τεχνικές ανάπτυξης της αξιωματικοποίησης των μαθηματικών όπως υπάρχουν στις μελέτες του ιδίου, των συνεργατών του και του Russell. Αυτό που ήταν νέο ήταν ο τρόπος με τον οποίο ο Hilbert θέλησε να εμποτίσει το πρόγραμμά του σχετικά με τη συνέπεια. Εισήγαγε την απαραίτητη φιλοσοφική αιτιολόγηση ώστε να απαντήσει στην κριτική του Brouwer και του Weyl: την έννοια του **περατοκρατικού**.

Σύμφωνα με τον Hilbert, υπάρχει ένα προνομιούχο μέρος των μαθηματικών, που περιέχεται στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών, το οποίο στηρίζεται μόνο σε μία "καθαρά διαισθητική βάση συγκεκριμένων συμβόλων". Εκτιμώντας ότι η δυνατότητα των πράξεων των αφηρημένων εννοιών είναι ‘‘ανεπαρκής και αβέβαιη’’, υπάρχει ένας «κόσμος λογικών αντικειμένων», τα οποία λειτουργούν διαισθητικά ως άμεση εμπειρία. Η μεθοδολογική έννοια του **περατοκρατικού** συνίσταται σε έναν περιορισμό της μαθηματικής σκέψης σε αυτά τα αντικείμενα και σε εκείνες τις διαδικασίες και μεθόδους συλλογισμού για τέτοια αντικείμενα που δεν απαιτούν την εισαγωγή των αφηρημένων εννοιών και δεν προσφεύγουν σε άπειρες ολότητες, αλλά ορίζονται με άμεσο συνδυαστικό πεπερασμένο τρόπο. Είναι στην ουσία το κομμάτι των μαθηματικών που κανείς δεν αμφισβητεί και όλοι θεωρούν ότι αποτελεί τη βάση της Μαθηματικής σκέψης. Ο Hilbert θεωρεί ότι θα πρέπει να απομονώσουμε το παραπάνω μέρος των μαθηματικών ενώ το ‘‘προβληματικό’’ τους μέρος που είναι το **απειροκρατικό** και αναφέρεται σε άπειρες ολότητες ή μεθόδους, προσπαθούμε να το περιγράψουμε και να το αποδώσουμε σαν ένα μεγάλο τυπικό σύστημα. (Σπύρου,2005)

Τα αντικείμενα του περατοκρατικού μέρους ήταν για τον Hilbert τα «*σύμβολα*». Οι διαισθητικές πράξεις με σύμβολα αποτελούν τη βάση για τα μεταμαθηματικά του Hilbert, τα οποία λειτουργούν με ακολουθίες συμβόλων (τύποι, αποδείξεις). Τους τύπους και τις αποδείξεις μπορούμε να τους χειριστούμε συντακτικά, ενώ οι ιδιότητες και οι σχέσεις των τύπων και αποδείξεων βασίζονται σε μια ανεξάρτητα από τη λογική διαισθητική ικανότητα, η οποία εγγυάται τη βεβαιότητα της γνώσης των τύπων και αποδείξεων που προσεγγίζονται από τέτοιες συντακτικές διαδικασίες. Εδώ επισημαίνεται ότι τα μαθηματικά, λειτουργούν με αφηρημένες έννοιες, όπως για παράδειγμα σύνολα, συναρτήσεις, και χρήση λογικών συμπερασμάτων βασισμένων σε αρχές όπως η μαθηματική επαγωγή ή η αρχή αποκλεισμού του τρίτου. Αυτές οι

“έννοιες-σχηματισμοί” και οι τρόποι συλλογισμού αποτέλεσαν αντικείμενο κριτικής από τον Brouwer και άλλους, διότι προϋποθέτουν άπειρες ολότητες ή περιλαμβάνουν μη κατηγορικούς ορισμούς. Ο σκοπός του Hilbert ήταν να δικαιολογήσει τη χρήση αυτών. Για αυτόν τον λόγο, επισήμανε ότι μπορούν να τυποποιηθούν σε αξιωματικά συστήματα (όπως αυτά των *Principia* ή σε αυτά που αναπτύχθηκαν από τον ίδιο τον Hilbert), και έτσι οι μαθηματικές προτάσεις και οι αποδείξεις οδηγούν σε τύπους και παραγόμενες προτάσεις οι οποίες προκύπτουν από τα αξιώματα, σύμφωνα με αυστηρούς κανόνες. Έτσι σύμφωνα με τον Hilbert, τα μαθηματικά “έγιναν ένας κατάλογος αποδείξιμων τύπων.” Με αυτόν τον τρόπο οι αποδείξεις των μαθηματικών υπόκεινται σε μεταμαθηματικού περιεχομένου έρευνα. Ο σκοπός του προγράμματος του Hilbert είναι να δώσει μια περιεκτική μεταμαθηματική απόδειξη ότι δε μπορεί να υπάρξει κάποια αντίφαση, δηλαδή ισχύς ενός τύπου *A* και της άρνησής του ¬ A.

Για το σκοπό αυτό εργάστηκε ο Hilbert και οι συνεργάτες του τα επόμενα 10 χρόνια. Από εννοιολογικής απόψεως, η έννοια του πεπερασμένου και η στρατηγική για μια απόδειξη συνέπειας μελετήθηκαν από τον Hilbert και τον Bernays, όπου το άρθρο του Hilbert “On the infinite” (1926) παρέχει την πλέον λεπτομερή μελέτη σχετικά με την έννοια του περατοκρατικού. Εκτός από τον Hilbert και τον Bernays, ένα πλήθος ατόμων συμμετείχαν στο πρόγραμμα

Α.4.2.Τα θεωρήματα μη-Πληρότητας του Gödel και ο αντίκτυπος στο πρόγραμμα του Hilbert

Τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel έδειξαν ότι κάποιες από τις ιδέες του Hilbert δε μπορούσαν να πραγματοποιηθούν. Το Σεπτέμβρη του 1930, σε μια διάσκεψη στο Königsberg, ο Kurt Gödel ανακοίνωσε το **πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας:** *Σε οποιοδήποτε συνεπές σύστημα που είναι ισχυρό όσο η αριθμητική του Peano, υπάρχει αληθής πρόταση του συστήματος τέτοια ώστε ούτε αυτή ούτε η άρνησή της να αποδεικνύεται με εργαλεία του συστήματος.* Ο Von Neumann, αμέσως αναγνώρισε τη σημασία που θα είχε η μελέτη του Gödel για το πρόγραμμα του Hilbert και έγραψε στον Gödel, λέγοντας ότι είχε παρατηρήσει ένα πόρισμα των αποτελεσμάτων του. Ο Gödel είχε ήδη καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα με το **δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας:** *δεν*

είναι δυνατή η απόδειξη συνέπειας οποιουδήποτε συνεπούς συστήματος που είναι ισχυρό όσο η αριθμητική Peano. Έτσι συστήματα όπως το *Principia*, θεωρία συνόλων κατά Zermelo-Fraenkel, ή τα συστήματα των Ackermann και Von Neumann δε μπορούν να αποδείξουν τη συνέπειά τους με μεθόδους που τυποποιούνται μέσα σε αυτά. Ο Gödel άφησε ανοιχτή την πιθανότητα ότι μπορεί να υπάρχουν περατοκρατικές μέθοδοι, οι οποίες δεν τυποποιούνται σε αυτά τα συστήματα αλλά θα μπορούσαν να παράγουν τις απαιτούμενες αποδείξεις.

Το 1936, ο Gentzen δημοσίευσε μια απόδειξη της συνέπειας της κατά Peano αριθμητικής, βασιζόμενος στην άποψη του Gödel και Bernays ότι η δυσκολία για την απόδειξη της συνέπειάς της θα μπορούσε να ξεπεραστεί με την υιοθέτηση μεθόδων οι οποίες , αν και δεν τυποποιούνται στην αριθμητική, είναι εντούτοις περατοκρατικές. Η εργασία του Gentzen αποτελεί την αρχή της μετα-Gödel θεωρίας αποδείξεων και βασίζεται στα σχετικά προγράμματα του Hilbert. Στην κατά Gentzen θεωρία αποδείξεων, αναλύονται τα αξιωματικά συστήματα σύμφωνα με τις επεκτάσεις του περατοκρατικού συλλογισμού που είναι απαραίτητες για την απόδειξη της συνέπειάς αυτών.

Όπως γράφει ο Zach (2005) «πολλές από τις ιδέες του προγράμματος του Hilbert, μπορούν να πραγματοποιηθούν, με κάποιες τροποποιήσεις, αλλάζοντας ταυτόχρονα ελαφρώς τους στόχους». Για παράδειγμα αν και δεν είναι δυνατό να τυποποιηθούν **όλα** τα μαθηματικά, είναι δυνατό να τυποποιηθούν ουσιαστικά όλα τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται. Ειδικότερα, η κατά Zermelo–Fraenkel θεωρία συνόλων, σε συνδυασμό με την πρώτης τάξεως Λογική, δίνει έναν ικανοποιητικό και γενικά αποδεκτό φορμαλισμό για όλα τα τρέχοντα μαθηματικά. Δικαιολογημένα λοιπόν ο Hilbert έγραψε για τα θεωρήματα του Gödel ότι *δεν αποτελούν εμπόδιο, αλλά μία μέθοδο*.

Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι πολλές έρευνες στη Μαθηματική Λογική και τη Θεωρία Αποδείξεων μπορούν να θεωρηθούν ως φυσικό επακόλουθο του αρχικού προγράμματος του Hilbert.

Α.5. Κριτική στα Στοιχεία

Τα «Στοιχεία» γράφτηκαν από τον Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια γύρω στο 3ο π.Χ. Στο έργο αυτό συγκεντρώνει όλα τα μαθηματικά που είχαν κατακτηθεί πριν από αυτόν

και συμπληρώνει τις προϋπάρχουσες γνώσεις σε ένα αξιωματικά θεμελιωμένο ενιαίο κείμενο. Χαρακτηρίζεται από τη συστηματικότητα της διαδοχής των ορισμών, αξιωμάτων, αιτημάτων και αποδείξιμων προτάσεων και γενικότερα τη συστηματικότητα οικοδόμησης μιας αποδεικτικά δομημένης επιστήμης. Το γεγονός αυτό μαρτυρά την κριτική σκέψη του Ευκλείδη, την ευρύτητα της αντίληψής του και την αξιοσημείωτη συνθετική του ικανότητα.

Τα «Στοιχεία» περιλαμβάνουν 13 βιβλία. Από αυτά θα ασχοληθούμε με το 1^{ο}, το οποίο περιλαμβάνει την αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης Γεωμετρίας και φτάνει έως το πυθαγόρειο θεώρημα (48 πρόταση). Στην αρχή του 1^{ου} βιβλίου εισάγονται οι 23 όροι. Μέσα σε αυτούς είναι και οι όροι σημείο, γραμμή, ευθεία γραμμή, επιφάνεια, επίπεδο. Οι έννοιες αυτές δεν ορίζονται με σαφήνεια. Στη συνέχεια διατυπώνονται τα πέντε αιτήματα. Από αυτά, τα τρία πρώτα εξασφαλίζουν ύπαρξη κάποιων θεμελιωδών εννοιών και τα άλλα δύο δηλώνουν ορισμένες ειδικές ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων. Ακολουθεί η διατύπωση των κοινών εννοιών, η οποία επιβεβαιώνει την ωριμότητα της χρήσης της αξιωματικής μεθόδου από τους Αρχαίους.

Αμέσως μετά τη συγγραφή των «Στοιχείων», υπήρξαν πολλοί, ανάμεσα σε αυτούς και ο Αρχιμήδης (287-212π.Χ.) και ο Απολλώνιος (225π.Χ), οι οποίοι σχολίασαν τα έργα του Ευκλείδη, τα διασαφήνισαν και τα επέκτειναν. Παρά την εξαιρετική ποιότητα τους και τον επαναστατικό για την εποχή χαρακτήρα τους, τα «Στοιχεία» παρουσιάζουν κάποιες ελλείψεις που αφορούν την αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης. Αυτές οι ελλείψεις, καθώς και η εισαγωγή του 5^{ου} και τελευταίου αιτήματος, αποτέλεσαν για περίπου 2000 χρόνια το κέντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών. Μάλιστα, η κριτική στο 5^{ο} αίτημα, του οποίου η διατύπωση αποδίδεται στον Ευκλείδη, οδήγησε στην ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Από τα πέντε αιτήματα των «Στοιχείων», τα τρία πρώτα πληρούν τις απαιτήσεις του Αριστοτέλη, ενώ το τέταρτο αναφέρεται σε μία ιδιότητα των ορθών γωνιών. Το 5^{ο} αίτημα το οποίο διατυπώνεται ως εξής: «*Αν μία ευθεία που τέμνει δύο άλλες σχηματίζει με αυτές δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές*», από την αρχή προκάλεσε αμφισβητήσεις, οι οποίες ήταν μάλλον φιλοσοφικής υφής. Το αίτημα αυτό παρεμβαλλόταν σαν ξένος προς το σύστημα κρίκος, σαν επινόηση προορισμένη να

γεφυρώσει ένα χάσμα της λογικής αλληλουχίας (Blanche, Αξιωματική Μέθοδος). Μάλιστα ακόμα και ο ίδιος ο Ευκλείδης φαίνεται ότι είχε διαισθανθεί την ιδιαιτερότητα αυτού του αιτήματος, ώστε «τρέναρε» τη χρήση του. Αξιοποιείται για πρώτη φορά στην απόδειξη της 29^{ης} πρότασης (ισοδύναμη με το 5^{ο} αίτημα), ενώ η χρήση του θα έκανε πιο εύκολη την απόδειξη προγενέστερων προτάσεων.

Ο βασικός στόχος των ερευνητών από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι τον 19^{ο} αιώνα ήταν η απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος από τα υπόλοιπα αιτήματα και αξιώματα. Ανάμεσα σε αυτούς συγκαταλέγονται οι Πρόκλος, Πτολεμαίος, Nasir el Din, Umar Khayyam, Nasireddin, Commandino, Cataldi, Tussi, Wallis, Klugel, Saccheri, Lambert, Legendre. Οι προσπάθειες όλων αυτών αποβαίνουν άκαρπες, καταφεύγοντας στον ίδιο λανθασμένο συλλογισμό: να αντικαθιστούν το αίτημα με υποθέσεις-αιτήματα τα οποία είναι λογικά ισοδύναμα με αυτό. Μερικές από αυτές τις υποθέσεις είναι οι εξής:

- Εάν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν ένα ζεύγος των εντός και επί τα αυτά γωνιών με άθροισμα μεγαλύτερο των δύο ορθών, το ίδιο συμβαίνει και με το άλλο ζεύγος των εντός και επί τα αυτά γωνιών. (Πτολεμαίος)
- Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μόνο μία παράλληλη προς αυτήν. (Playfair)
- Αν δοθεί ένα τρίγωνο και ένα ευθύγραμμο τμήμα, υπάρχει τρίγωνο όμοιο με το δεδομένο και με πλευρά το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.(Wallis)
- Υπάρχει τρίγωνο με άθροισμα γωνιών δύο ορθές. (Legendre)
- Δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων, υπάρχει ένας κύκλος που διέρχεται από αυτά. (Legendre)
- Από ένα σημείο στο εσωτερικό γωνίας μικρότερης των 60^{ο} , μπορούμε πάντοτε να φέρουμε μια ευθεία που τέμνει και τις δύο πλευρές της γωνίας. (Legendre)
- Υπάρχουν όμοια τρίγωνα, δηλαδή τρίγωνα με ίσες γωνίες και άνισες πλευρές (Wallis).
- Υπάρχει τρίγωνο με οσοδήποτε μεγάλο εμβαδό. (Gauss)

Ο Πρόκλος στο βιβλίο του σχετικά με τα σχόλια στο 1^{ο} βιβλίο των «Στοιχείων», επιχειρεί τη μαθηματική αιτιολόγηση της αναγκαιότητας της απόδειξης του 5ου

αιτήματος. Παρατηρεί ότι δύο προτάσεις του 1ου Βιβλίου των Στοιχείων είναι αντίστροφες:

- ✓ το 5ο αίτημα
- ✓ η 17η πρόταση: «Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο οποιονδήποτε γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών» − στην απόδειξη της οποίας δεν χρησιμοποιείται το 5ο αίτημα.

Θεωρεί ότι δεν είναι δυνατόν από δύο αντίστροφες προτάσεις η μία να έχει απόδειξη ενώ η άλλη να μην είναι δυνατόν να αποδειχθεί ούτε ως αληθής, ούτε ως ψευδής. Συνεπώς η απόδειξη του υπό εξέταση αιτήματος υπάρχει και οφείλει να βρεθεί. Όπως γράφει, η ύπαρξη ασύμπτωτων καμπύλων αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχουν και ευθείες ασύμπτωτες, και επομένως η απόδειξη του 5ου αιτήματος γίνεται πιο επιτακτική ανάγκη. Επίσης στα σχόλια στην πρόταση 29 (πρώτη πρόταση στην απόδειξη της οποίας γίνεται χρήση του $5^{ου}$ αιτήματος) καταγράφονται δύο απόπειρες απόδειξης του 5ου αιτήματος (μία του Πτολεμαίου και μία του ίδιου του Πρόκλου), καθώς και μία απόπειρα απόδειξης της άρνησής του. Όμως και σε αυτές τις αποδείξεις υπάρχει το λάθος της ισοδύναμης υπόθεσης που αναφέρθηκε παραπάνω.

Μία άλλη μέθοδος που ακολουθήθηκε ώστε να αποδειχτεί το αίτημα ήταν η απαγωγή σε άτοπο. Ένας από αυτούς που την ακολούθησαν ήταν ο **Saccheri** (1667-1733), ο οποίος ήλπιζε ότι θα αναπτύξει κάποιες συνέπειες έχοντας ως αρχικές υποθέσεις αντίθετες προς το αίτημα, οι οποίες θα έρχονταν σε αντίφαση επιβεβαιώνοντας έτσι την αλήθεια του εν λόγω αιτήματος. Τις προσπάθειες αυτές δημοσίευσε το 1733 στο βιβλίο του “Euclides ab omni naevo vindicatus” (Ο Ευκλείδης απαλλαγμένος από κάθε σφάλμα).

Ο Saccheri χρησιμοποιεί τα τέσσερα πρώτα αιτήματα, τις πρώτες 27 προτάσεις, το αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου, το αξίωμα του Pasch και το εξής αξίωμα “συνέχειας-πληρότητας”: *κάθε γεωμετρικό μέγεθος, μεταβαλλόμενο από μια τιμή του προς μία άλλη παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.*

Ο Saccheri συσχέτισε το $5^{ο}$ αίτημα με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Μέσα από μία σειρά συλλογισμών κατέληξε στις εξής τρεις υποθέσεις:

I. Αν υπάρχει ένα τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο των δύο ορθών, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο
II. Αν υπάρχει ένα τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με δύο ορθές, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο
III. Αν υπάρχει ένα τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο

Σκοπός ήταν να αποκλείσει τις υποθέσεις I και III, καταλήγοντας στην II η οποία είναι ισοδύναμη με το 5^{ο} αίτημα. Οι συλλογισμοί που ακολούθησε ήταν πολύ ευρηματικοί και με την κατάλληλη συμπλήρωσή τους μπορεί να αποκλειστεί η υπόθεση III. Αντίθετα η προσπάθειά του για τον αποκλεισμό της υπόθεσης I, περιέχει κενά που δε μπορούν να καλυφθούν , αποδεικνύοντας όμως παράλληλα προτάσεις που αναφέρονται στην Υπερβολική Γεωμετρία και τη Θεωρία Παραλλήλων.

Αν και οδηγήθηκε σε παράξενα αποτελέσματα, εντούτοις δεν υπήρχε κάποια λογική αντίφαση, γεγονός που σήμαινε την ύπαρξη και άλλης γεωμετρίας. Όμως η βαθειά πίστη ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μόνη δυνατή γεωμετρία του φυσικού χώρου, δεν του επέτρεψε να είναι ο πρώτος που θα ανακάλυπτε τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Εδώ διακρίνεται ένα επιστημολογικό εμπόδιο, δηλαδή βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις περιορίζουν τη γνώση σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο για σχεδόν 2000 χρόνια.

Ο **Legendre** (1752-1833) στην τρίτη έκδοση του βιβλίου “Elements of Geometry”, όμοια με τον Saccheri, ασχολήθηκε με τη διερεύνηση της σχέσης του 5^{ου} αιτήματος προς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Ο Legendre, στηρίχθηκε στο αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη και στις 26 πρώτες προτάσεις των «Στοιχείων» και απέδειξε το 1^{ο} Θεώρημα του Legendre που λέει ότι *«το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές»*. Στη συνέχεια απέδειξε το 2^{ο} Θεώρημα του Legendre: «αν υπάρχει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο ή ίσο με δύο ορθές γωνίες αυτό ισχύει σε κάθε τρίγωνο». Στην πραγματικότητα αυτά τα δύο θεωρήματα είχαν δοθεί από τον Saccheri όπως είδαμε παραπάνω.

Το 1823 πίστεψε ότι είχε βρει την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος. Για αυτή την απόδειξη είχε βασιστεί στην εξής υπόθεση: «από εσωτερικό σημείο μιας γωνίας, μπορούμε να φέρουμε ευθεία που τέμνει και τις δύο πλευρές της». Η υπόθεση αυτή όμως δεν ισχύει στην περίπτωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας, επαναλαμβάνοντας το ίδιο λάθος που

έκαναν όλοι οι ερευνητές. Παρόλα αυτά το έργο του επηρέασε καθοριστικά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ευρώπη, και καθιερώθηκε ως πρότυπο στοιχειώδους εγχειριδίου γεωμετρίας.

Στις αρχές του 19ου αιώνα εμφανίζονται κάποιες αμφισβητήσεις της αποτελεσματικής ερμηνείας του φυσικού χώρου από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Πρώτος ο Gauss, γύρω στο 1813 οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι η άρνηση του $5^{ου}$ αιτήματος μπορεί να οδηγήσει σε μία λογικά συνεπή θεωρία που ονόμασε μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δε δημοσίευσε όμως αυτά τα αποτελέσματα για ευνόητους λόγους.

Το 1830 ο Ρώσος **Lobatchevsky**(1792-1856) και ο Ούγγρος **Bolyai**(1802-1860) δημοσιεύουν σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα, τα πρώτα ολοκληρωμένα έργα μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, παρουσιάζοντας ένα εναλλακτικό αξιωματικό σύστημα στο οποίο το $5^{ο}$ αίτημα αναιρείται. Αν και τα συμπεράσματα ήταν αντίθετα με τη διαίσθηση, η έλλειψη λογικής αντίφασης οδηγεί στο γεγονός ότι το ευκλείδειο αίτημα δε μπορεί να αποδειχτεί. Επίσης οδηγεί στη δημιουργία μίας λογικά άψογης Γεωμετρίας, διαφορετικής από την Ευκλείδεια, της οποίας η αλήθεια των αποτελεσμάτων μπορεί να διαπιστωθεί μόνο πειραματικά.

Η εμφάνιση των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών ήταν η μεγαλύτερη επανάσταση στην ιστορία των μαθηματικών από την εποχή των Αρχαίων Ελλήνων. Αυτή η επανάσταση είχε πολλές και σοβαρές συνέπειες στα Μαθηματικά γενικότερα.

Όσον αφορά την κριτική για τις «ατέλειες» των «Στοιχείων», αν και είχε αρχίσει νωρίς, μόλις το $19^{ο}$ αιώνα παρουσιάστηκε η πρώτη ιδανική αξιωματική της επίπεδης γεωμετρίας, ακολουθώντας τις απαιτήσεις της λογικής αυστηρότητας (Hilbert, 1899μ.Χ.). Ο Bertrand Russell στο άρθρο «The Teaching of Euclids», επισημαίνει τις ατέλειες των «Στοιχείων». Γενικά, «κατηγορεί» τον Ευκλείδη ότι τα αξιώματα που έθεσε ήταν πολύ λίγα, ενώ οι αποδείξεις του απαιτούν περισσότερα αξιώματα. Πράγματι, μια προσεκτική ανάλυση της έκθεσης της θεωρίας, αποκαλύπτει ένα μεγάλο αριθμό υπονοούμενων προτάσεων. Επίσης τον «κατηγορεί» για τους ασαφείς ορισμούς του. Πράγματι, στα αξιώματα και στους ορισμούς χρησιμοποιούνται φράσεις όπως «προσθέτουμε», «αφαιρούμε», «ίσα», «όλο» (κοινές έννοιες), «μέρος» (κοινές έννοιες, ορισμός Ι), «μήκος» (ορισμός ΙΙ), «πλάτος» (ορισμός ΙΙ), «πέρατα» (ορισμός ΙΙΙ), «κείται εξίσου» (ορισμός IV), «περικλείεται» (ορισμός XV), «επίπεδο σχήμα» (ορισμός XV),

«κλίση» (ορισμός XIII) των οποίων το νόημα δεν αναφέρεται πουθενά. Συνεπώς και οι έννοιες του σημείου (ορισμός I), της ευθείας (ορισμός II) και του κύκλου (ορισμός XV) δε διευκρινίζονται με σαφήνεια. Επιπλέον δε γίνεται ακριβής χρήση αυτών των ορισμών.

Θα δούμε σε ποιες ακριβώς περιπτώσεις αναφέρεται στο άρθρο του ο Russell, τις λύσεις που προτείνει, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πως αυτές αντιμετωπίζονται από την αξιωματική του Hilbert.

1η Πρόταση των "Στοιχείων" του Ευκλείδη:

Σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο.

Για την κατασκευή αυτή απαιτείται να υπάρχουν δύο κύκλοι ,οι οποίοι τέμνονται. Η υπόθεση όμως αυτή, δηλαδή ότι δύο κύκλοι τέμνονται, δεν αναφέρεται από τον Ευκλείδη. Η αντίρρηση του Russell έγκειται στο ότι δε γνωρίζουμε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται. Υποστηρίζει ότι απαιτείται ένα λήμμα:

Αν Α,Β δύο δοθέντα σημεία, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Γ του οποίου οι αποστάσεις από τα Α και Β είναι και οι δύο ίσες με το ΑΒ.

Αυτό το λήμμα εξάγεται με τη βοήθεια του Αξιώματος Αρχιμήδους- Ευδόξου το οποίο περιλαμβάνεται στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας κατά Hilbert, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Επίσης ο Russell παρατηρεί ότι ο Ευκλείδης δε θεωρεί τη γραμμή ως κλειστή καμπύλη, το οποίο όμως δεν αναφέρεται με σαφήνεια στα Στοιχεία. Σύμφωνα με αυτές τις παρατηρήσεις υποστηρίζεται ότι η πρώτη πρόταση προϋποθέτει την τέταρτη (θα αναφερθεί παρακάτω) και η απόδειξη αυτής είναι περισσότερο μακροσκελής.

Προτείνεται το αξίωμα: **Πάνω σε ευθεία γραμμή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του οποίου η απόσταση από ένα δοθέν σημείο το οποίο είτε κείται είτε όχι πάνω στην ευθεία υπερβαίνει μια δοθείσα απόσταση.**

4η Πρόταση των "Στοιχείων" του Ευκλείδη:

Αν σε δύο τρίγωνα οι δύο πλευρές τους είναι μία προς μία ίσες και η περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε τα τρίγωνα είναι ισχυρά ίσα.

Ο Russell αποκαλεί «ανοησία» αυτήν την πρόταση. Εντοπίζει το πρόβλημα στο «άχρηστο τέχνασμα» όπως το χαρακτηρίζει, της μεταφοράς, υποστηρίζοντας ότι αυτή η

θεωρία οδηγεί σε λογική αντίφαση, δεδομένου ότι η έννοια της «μεταφοράς» δεν υπάρχει πουθενά. Προτείνει το παρακάτω αξίωμα:

Δοθέντος ενός τριγώνου ΑΒΓ και μιας ευθείας ΔΕ, υπάρχουν δύο τρίγωνα , ένα σε κάθε πλευρά της ΔΕ, έχοντας τις κορυφές στο Δ, και μία πλευρά κατά μήκος της ΔΕ, και ίσα όλα τα στοιχεία τους αντιστοίχως με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Αυτό το αξίωμα προϋποθέτει να ορίσουμε τι σημαίνει λέγοντας δύο πλευρές μιας ευθείας, εννοώντας τον ορισμό του ημιεπιπέδου, ορισμός που υπάρχει στην αξιωματική του Hilbert. Όταν βεβαιωθεί η ύπαρξη ενός τέτοιου τριγώνου που δίνεται από το παραπάνω αξίωμα τότε μπορεί να αποδειχθεί η $4^{η}$ πρόταση.

<u>$6^{η}$ Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:</u>

Αν σε ένα τρίγωνο οι δύο γωνίες είναι ίσες τότε είναι ίσες και οι απέναντί τους πλευρές.

Ο Russell θεωρεί για αυτήν την πρόταση αναγκαίο το παρακάτω αξίωμα που είναι η βάση για τη μέτρηση γωνιών:

Εάν ΟΑΑ΄, ΟΒΒ΄, ΟΓΓ΄ είναι τρεις ευθείες του ίδιου επιπέδου, που συναντούν δύο τέμνουσες στο Α,Β,Γ,Α΄,Β΄,Γ΄ αντίστοιχα και αν το Ο δεν κείται ανάμεσα στο Α και Α΄, ούτε στο Β και Β΄, ούτε στο Γ και Γ΄ είτε είναι ανάμεσα και στις τρεις περιπτώσεις, τότε αν το Β βρίσκεται μεταξύ του Α και Γ, το Β΄ βρίσκεται μεταξύ του Α΄ και Γ΄.

Στην απόδειξη που δίνεται από τον Ευκλείδη στην $6^{η}$ πρόταση, θεωρεί αρχικά ότι οι δύο πλευρές είναι άνισες και με την εις άτοπον απαγωγή καταλήγει ότι είναι ίσες.

Με τη βοήθεια του παραπάνω αξιώματος μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν το Δ κείται πάνω στο ΑΒ και ΒΔ είναι μικρότερο του ΒΑ, το τρίγωνο ΔΒΓ είναι μικρότερο από το τρίγωνο ΑΒΓ, οδηγώντας στην απόδειξη της $6^{ης}$ πρότασης.

<u>$7^{η}$ Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:</u>

Αν έχω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και δύο σημεία Γ και Δ από την ίδια πλευρά της ΑΒ και ισχύει ΑΓ=ΑΔ και ΒΓ=ΒΔ τότε η γωνία Γ που σχηματίζεται στο τρίγωνο ΑΓΔ και η γωνία Δ που σχηματίζεται στο τρίγωνο ΒΔΓ είναι ίσες.

Εδώ πρέπει να οριστεί τι σημαίνει όταν λέμε από την ίδια μεριά (όπως ειπώθηκε και στην $4^{η}$ πρόταση χρειαζόμαστε ορισμό του ημιεπιπέδου).

Προτείνονται τα εξής δύο αξιώματα τα οποία βοηθούν στον ορισμό του ημιεπιπέδου:

(1)Δοθέντων τριών σημείων Α,Β,Γ, ενός σημείου Δ ανάμεσα στα Β και Γ, και ενός σημείου Ζ ανάμεσα στα Α και Δ, η ευθεία ΒΖ συναντά την ΑΓ σε ένα σημείο μεταξύ των Α και Γ.

(2) Δοθέντων τριών σημείων Α,Β,Γ, ενός σημείου Δ ανάμεσα στα Β και Γ, και ενός Ε ανάμεσα στα Α και Γ, οι ΑΔ και ΒΕ συναντιούνται σε ένα σημείο ανάμεσα στα Α και Δ και επίσης ανάμεσα στα Β και Ε.

Επίσης η απόδειξη της 7^{ης} πρότασης προϋποθέτει τον εξής συλλογισμό:

Από τρεις ευθείες ενός επιπέδου που ξεκινούν από ένα σημείο, είτε η μία από αυτές βρίσκεται ‘‘μεταξύ’’ των άλλων δύο, είτε οποιαδήποτε προέκταση της μίας από αυτές βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο. Οφείλει όμως να οριστεί η έννοια ‘‘μεταξύ’’.

8^{η} Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:

Αν οι τρεις πλευρές δύο τριγώνων είναι ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Προκύπτει το ίδιο πρόβλημα που υπάρχει και στην πρόταση 4.

12^{η} Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:

Δοσμένης ευθείας μπορώ να φέρω κάθετο από δοθέν σημείο εκτός αυτής.

Όπως υποστηρίζει ο Russell αυτή η πρόταση απαιτεί την υπόθεση ότι ένας κύκλος τέμνει μία ευθεία σε δύο σημεία ή σε κανένα, το οποίο δεν αναφέρεται πουθενά, ούτε σαν αξίωμα, ούτε σαν αποδείξιμη πρόταση.

16^{η} Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:

Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική.

Και πάλι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την παρακάτω υπόθεση που επίσης δεν διατυπώνεται. Αν ΑΒΓ είναι ένα τρίγωνο και Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ, και αν προεκταθεί η ΒΕ και πάρω σημείο Ζ ώστε ΒΕ=ΕΖ, τότε η ΓΖ βρίσκεται ‘‘μεταξύ’’ της ΓΑ και της προέκτασης της ΒΓ.

26^{η} Πρόταση των “Στοιχείων” του Ευκλείδη:

Αν σε δύο τρίγωνα η μία τους πλευρά είναι ίση και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ισχυρά ίσα.

Εδώ προκύπτει το ίδιο πρόβλημα που υπάρχει και στην πρόταση 4 και την πρόταση 8.

Μία επίσης σημαντική παρατήρηση είναι ότι στο σχήμα των αποδείξεων κάποιων προτάσεων (πχ πρόταση 35) ο Ευκλείδης δεν καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Έχει αποδειχτεί όμως ότι η ειδική περίπτωση που εξετάζει είναι η περισσότερο

πολύπλοκη. Πιθανότατα άφηνε για τον αναγνώστη τις άλλες περιπτώσεις, για να περιορίσει την έκταση του κειμένου.

Παρά τις ατέλειες που επισημάνθηκαν, δε θα πρέπει να μειώσουμε τη σημασία και την αξία του έργου του Ευκλείδη. Ξεκινώντας από αυτό το έργο, το οποίο αποτελεί την πρώτη προσπάθεια αξιωματικοποίησης, «οι απαιτήσεις αυστηρότητας, οι οποίες και τη γέννησαν, οξύνθηκαν και επέδρασαν πάνω της με τρόπο, ώστε να οδηγηθεί όλο και πιο πέρα στο δρόμο που της προορίστηκε»,όπως γράφει ο Blanche. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η πορεία προς την τελειοποίηση διήρκησε 2000 χρόνια, με τη συμβολή μεγάλων Μαθηματικών οι οποίοι προσέφεραν καίριες επισημάνσεις, δημιουργικές ιδέες και αποτελεσματικές μεθόδους, με κορύφωση την αξιωματική του Hilbert, η οποία πήρε το αρχαιότερο όλων και έδειξε ότι με κάποιες τροποποιήσεις αντέχει στο χρόνο.

Α.6. Θεμελίωση των Γεωμετριών κατά Klein

Το 1872 ο **Felix Klein** στο έργο του “Erlanger Programm” έδωσε έναν νέο ορισμό της Γεωμετρίας στα πλαίσια των ομάδων μετασχηματισμών. Ο Klein έκρινε ότι η θεωρία ομάδων, η οποία χρησιμοποιεί αλγεβρικές μεθόδους, θα αποτελούσε την καλύτερη βάση για την οργάνωση των γεωμετρικών γνώσεων. Ο ορισμός αυτός αποτελεί μια νέα πρόταση για την ενοποίηση και ταξινόμηση όλων των γεωμετριών, σύμφωνα με την οποία, όλες οι γεωμετρίες είναι δυνατόν να περιγραφούν μέσω κατάλληλων ομάδων μετασχηματισμών. Μέσα από τη νέα θεώρηση καταφέρνει να δείξει τη σχέση ανάμεσα στην προβολική και την ευκλείδεια γεωμετρία καθώς και της πρώτης με τις μη-ευκλείδειες γεωμετρίες.

Έστω ένα μη κενό σύνολο X και IS(X)= {f / f: X→X, όπου f είναι “1-1” και “επί”}. Το IS(X) εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων αποτελεί ομάδα. Απόδειξη:

- Κλειστότητα: Αν f ,g$\in$ IS(X) τότε οι f και g είναι ‘‘1-1’’ και ‘‘επί’’ άρα $f\circ g\in$ IS(X)
- Προσεταιριστικότητα: Αν f ,g,h$\in$ IS(X) ισχύει $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ από προσεταιριστικότητα της σύνθεσης
- Ουδέτερο στοιχείο: Υπάρχει id_x:X→X με $id_x(x)=x$ ‘‘1-1’’ και ‘‘επί’’ άρα $id_x(x)\in$ IS(X)

- Αντίστροφο στοιχείο: Αν $f\in IS(X)$, υπάρχει f^{-1} η οποία είναι ‘‘1-1’’ και ‘‘επί’’ και $f\circ f^{-1} = id_x(x)=x$ για κάθε $x\in X$

Ορισμός: Θεωρούμε μια υποομάδα της $(IS,\circ)$, την $(G,\circ)$. Το ζευγάρι (X,G) καλείται **Γεωμετρία Klein** του X.

Το αντικείμενο έρευνας μιας Γεωμετρίας Klein είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των “σχημάτων” του X (δηλαδή των μη κενών υποσυνόλων του X), οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες ως προς την G. Μια ιδιότητα του “σχήματος” $\Sigma\subseteq X$, θα λέμε ότι παραμένει **αναλλοίωτη** ως προς G, αν το f (Σ) έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $f\in G$.

Για παράδειγμα, στην Προβολική γεωμετρία ασχολούμαστε με τις ιδιότητες των σχημάτων οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τους προβολικούς μετασχηματισμούς, ενώ η Ελλειπτική και η Υπερβολική γεωμετρία χαρακτηρίζονται από τις ομάδες των προβολικοτήτων που μεταφέρουν μια κατάλληλη κωνική τομή στον εαυτό της.

Η νέα αυτή προσέγγιση χαρακτηρίζεται από την εξάλειψη της εποπτείας, με ενδεικτικό παράδειγμα τα «σχήματα», τα οποία αποτελούν συνολοθεωρητικές έννοιες. Επίσης μέσα από αυτήν δίνεται η δυνατότητα να μελετηθούν γεωμετρίες R^n διαστάσεως $n>3$ με $n\in N$, το οποίο δεν είναι δυνατόν να γίνει μέσα από την κλασσική ευκλείδεια άποψη.

Α.6.1. Το Ευκλείδειο επιπέδο μέσα από τη Γεωμετρία Klein

Θεωρούμε το σύνολο $X=R^2$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική d_E: $R^2 x R^2\to R^2$ η οποία ορίζεται από τον τύπο $d(b_1,b_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, οπότε έχουμε τον ευκλείδειο μετρικό χώρο (R^2,d_E). Ενδιαφερόμαστε για τις ισομετρίες, δηλαδή τις απεικονίσεις που διατηρούν την απόσταση. Πιο συγκεκριμένα, μια απεικόνιση $f:X\to X$ θα λέγεται **ισομετρία**, αν $d(f(x),f(y))=d(x,y)$ για κάθε $x,y\in X$. Μια ισομετρία είναι μια απεικόνιση “1-1”(αν $f(x)=f(y)$ τότε $d(f(x),f(y))=0 \Rightarrow d(x,y)=0\Rightarrow x=y$).

Θεωρούμε το σύνολο $I(R^2,d_E)$, το οποίο αποτελείται από όλες τις “επί” ισομετρίες πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο. Η $(I(R^2,d_E),\circ)$ είναι υποομάδα της $(IS,\circ)$. Τότε η Γεωμετρία Klein του Ευκλείδειου επιπέδου είναι το ζεύγος $(R^2,I(R^2,d))$. Όλες οι ιδιότητες των σχημάτων που θα μας απασχολήσουν στα πλαίσια της ευκλείδειας γεωμετρίας, παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τις ισομετρικές εικόνες των «σχημάτων»

(Στράντζαλος,2002). Παράδειγμα τέτοιας ιδιότητας είναι αυτή που υπαγορεύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.

Υπενθυμίζουμε ότι στην «κλασσική» ευκλείδεια γεωμετρία δύο σχήματα θεωρούνται **ίσα** αν με κατάλληλη επίθεση μπορούν να ταυτιστούν. Επίσης οι ιδιότητες των σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτες κατά τη μετακίνησή τους στο επίπεδο. Μιλώντας με όρους της άποψης Klein δύο σχήματα του ευκλείδειου επιπέδου είναι **ίσα** αν υπάρχει μία Ευκλείδεια "επί" ισομετρία $g: R^2 \to R^2$ (δηλαδή αν $\exists f \in I(R^2,d_E)$)που απεικονίζει το ένα επί του άλλου, δηλαδή, τα Σ_1, Σ_2 είναι ίσα (γράφουμε $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$) αν $\exists g \in I(R^2,d_E)$ ώστε $g(\Sigma_1)=\Sigma_2$.

Η σχέση ισότητας είναι σχέση ισοδυναμίας. Απόδειξη:

- Αυτοπαθής: $1_x(\Sigma)=\Sigma$ για κάθε $\Sigma \subset X$ όπου $1_x:X \to X$ η ταυτοτική απεικόνιση του X και $1_x \in I(R^2,d_E)$, εφόσον $I(R^2,d_E)$ υποομάδα της IS(X).
- Συμμετρική: Αν $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$, $\exists g \in I(R^2,d_E)$ με $g(\Sigma_1)=\Sigma_2$, και εφόσον η g είναι ''1-1'' και ''επί'' $\exists g^{-1}$ με $g^{-1}g(\Sigma_1)= g^{-1}(\Sigma_2)$ άρα $1_x(\Sigma_1)= g^{-1}(\Sigma_2)$ οπότε $g^{-1}(\Sigma_2)=\Sigma_1$ άρα $\Sigma_2 \approx \Sigma_1$.
- Μεταβατική: Αν $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ και $\Sigma_2 \approx \Sigma_3$ τότε $\exists g_1,g_2 \in I(R^2,d_E)$ με $g_1(\Sigma_1)=\Sigma_2$ και $g_2(\Sigma_1)=\Sigma_3$ οπότε $g_2 \circ g_1(\Sigma_1)= g_2(\Sigma_2)= \Sigma_3$ άρα $\Sigma_1 \approx \Sigma_3$.

Α.6.2. Οι ισομετρίες του Ευκλείδειου επιπέδου

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση των ευκλείδειων ισομετριών, είναι αναγκαία η υπενθύμιση κάποιων ορισμών και θεωρημάτων.

Ορισμός: **Θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο** στον γραμμικό χώρο $V=R^n$ πεπερασμένης διάστασης είναι μια απεικόνιση $E: VxV \to R^+$ η οποία είναι συμμετρική, διγραμμική και θετικά ορισμένη.

Το ζεύγος (V,E) λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο**.

Ορισμός: **Γραμμική** λέγεται η **απεικόνιση** $f:V \to V$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ και $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ με λ.

Ορισμός: **Ορθογώνια** λέγεται η **απεικόνιση** $f:V \to V$ η οποία είναι γραμμική και ισομετρία.

Ορισμός: **Μεταφορά κατά ένα διάνυσμα** $v \in V$ λέγεται η ''1-1'' και ''επί'' απεικόνιση $\tau: V \to V$ για την οποία $\tau(x)=x+v$.

Η μεταφορά είναι ισομετρία διότι: d(τ(x),τ(y))= $\|\tau(x)-\tau(y)\| = \|(x+v)-(y+v)\| = \|x-y\| = d(x,y)$.

<u>Θεώρημα 1ο:</u> Έστω (V,E) χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Κάθε ισομετρία του f:V→V γράφεται μονοσήμαντα ως σύνθεση μιας ορθογώνια απεικόνιση g:V→V και μιας μεταφοράς τ:V→V ώστε f=τ∘g.

<u>Θεώρημα 2ο:</u> Μια γραμμική απεικόνιση f:V→V είναι ισομετρία, αν και μόνο αν $\|x\| = \|f(x)\|$

Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα για να βρω τις ισομετρίες του ευκλείδειου επιπέδου, αρκεί να βρω τη σύνθεση μιας ορθογώνιας απεικόνισης και μιας μεταφοράς. Έστω μια γραμμική απεικόνηση g:R^2→R^2 ,η οποία θα ορίζεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ώστε:

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\beta y \\ \gamma x+\delta y \end{pmatrix} \Rightarrow g(x,y) = (ax+\beta y, \gamma x+\delta y)$$

Για να είναι αυτή η απεικόνιση ορθογώνια θα πρέπει εκτός από γραμμική να είναι και ισομετρία. Άρα από το 2ο θεώρημα, θα πρέπει να ισχύει $\|(x,y)\| = \|\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y\| \Rightarrow x^2+y^2 = (ax+\beta y)^2 + (\gamma x+\delta y)^2$, για κάθε x, y∈ R. Άρα $x^2+y^2 = (a^2+\gamma^2)x^2 + (\beta^2+\delta^2)y^2 + 2(\alpha\beta+\gamma\delta)xy$. Συνεπώς πρέπει: $\alpha^2+\gamma^2=1$, $\beta^2+\delta^2=1$, αβ+γδ=0, άρα β=∓ γ ,δ=± α και $\alpha^2+\gamma^2=1$. Άρα οι ζητούμενες ορθογώνιες απεικονίσεις είναι:

$\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, με $\alpha^2+\gamma^2=1$

Η σύνθεση αυτών των ορθογωνίων απεικονίσεων με μια μεταφορά κατά διάνυσμα v=(κ,λ) αποτελούν τις απεικονίσεις που αναζητούμε. Οπότε οι ευκλείδειες ισομετρίες δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x-\gamma y+\kappa \\ \gamma x+\alpha y+\lambda \end{pmatrix} \\ \\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\gamma y+\kappa \\ \gamma x-\alpha y+\lambda \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ με } \alpha^2+\gamma^2=1$$

Από τον πρώτο τύπο για α=συνθ και γ=ημθ έχουμε:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Δηλαδή είναι μία στροφή περί της αρχής των αξόνων κατά γωνία θ, ακολουθούμενη από μία μεταφορά.

Από το δεύτερο τύπο για α=1 και γ=0 έχουμε:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Δηλαδή είναι ένας κατοπτρισμός ως προς τον άξονα y΄y, ακολουθούμενος από μία μεταφορά.

Το παρακάτω θεώρημα είναι θεμελιώδες, εξασφαλίζοντας το μονοσήμαντο του καθορισμού των ισομετριών: ***Μία ισομετρία της επίπεδης ευκλείδειας γεωμετρίας, καθορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες τριών μη συνευθειακών σημείων***.

Συνέπεια αυτού είναι η εξής πρόταση: *Αν δοθούν δύο τρίγωνα τα οποία έχουν ίσες τις αντίστοιχες πλευρές τους, υπάρχει ακριβώς μία ισομετρία, η οποία απεικονίζει το ένα επί του άλλου*. Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα κατά Ευκλείδη και κατά Klein.

Α.7. Αξιωματική Θεμελίωση της Επίπεδης Γεωμετρίας από τον Hilbert

Η αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας από τον Hilbert, αποτελεί την προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα αξιωματικό σύστημα από το οποίο να προκύπτει το σύστημα του Ευκλείδη. Δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1899 στο βιβλίο «Grundlagen der Geometrie» (Θεμελιώσεις της Γεωμετρίας). Έκτοτε υπήρξαν δέκα επανεκδόσεις, εκ των οποίων οι τρεις τελευταίες έγιναν μετά το θάνατο του Hilbert, ενώ το έργο του μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες.

Ο Hilbert ορίζει τον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο ως ένα σύνολο τυχαίων στοιχείων τα οποία διαιρούνται σε τρία συστήματα. Συγκεκριμένα ο Hilbert αναφέρει: «Θεωρούμε τρία διακεκριμένα συστήματα αντικειμένων. Τα αντικείμενα που αποτελούν το πρώτο σύστημα, θα τα ονομάσουμε **σημεία** και τα παριστούμε με τα γράμματα A, B, C…, τα αντικείμενα του δευτέρου συστήματος είναι οι **ευθείες** τις οποίες παριστούμε με τα γράμματα a, b, c,… και τα αντικείμενα του τρίτου συστήματος είναι τα **επίπεδα** και τα

παριστούμε με τα ελληνικά γράμματα α, β, γ,… Τα σημεία ονομάζονται στοιχεία της ευθύγραμμης γεωμετρίας, τα σημεία και οι ευθείες γραμμές είναι στοιχεία της επιπέδου γεωμετρίας, και τα σημεία, ευθείες και επίπεδα είναι στοιχεία της γεωμετρίας του χώρου ή στοιχεία του χώρου.»

Βλέπουμε λοιπόν ότι θέτει ως πρωταρχικές τις έννοιες **σημείο**, **ευθεία**, **επίπεδο**. Ο Hilbert, ως φορμαλιστής, δεν όρισε αυτές τις έννοιες αλλά προσδιόρισε τις σχέσεις μεταξύ τους, μέσα από το σύστημα των αξιωμάτων που εισήγαγε. Έτσι μπορούμε να βρούμε μοντέλα όπου ικανοποιούνται οι διάφορες ομάδες των αξιωμάτων όπου οι έννοιες «σημείο» και «ευθεία» διαφέρουν κατά πολύ από την οντολογική υπόσταση που έχουμε «συνηθίσει». Παρατηρείται εξαρχής η τάση του Hilbert να απορρίπτει κατηγορηματικά την εποπτεία.

Στη συνέχεια ακολουθούν τα αξιώματα που έθεσε ο Hilbert για την Επίπεδη Γεωμετρία, τα οποία προσδιορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των συστημάτων των «αντικειμένων» και τα οποία διέκρινε σε πέντε ομάδες. Αναφέρονται λοιπόν σε ένα σύνολο σημείων Σ, σε ένα σύνολο ευθειών Ε και στο επίπεδο που θεωρείται το σύνολο των σημείων.

1.Αξιώματα της ‘‘σύμπτωσης’’: Στην ομάδα αυτή τα αξιώματα σχετίζονται με τη σύμπτωση ενός σημείου και μιας ευθείας. Θεωρούμε μια σχέση σύμπτωσης μεταξύ σημείων και ευθειών (συμβολίζουμε με $\subset$). Γράφουμε $A \subset b$ όταν το σημείο Α ανήκει στην ευθεία b.

I. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία υπάρχει μία ευθεία που τα περιέχει
II. Η ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία είναι μοναδική
III. Κάθε ευθεία περιέχει δύο τουλάχιστον σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία (μη συνευθειακά).

Δύο σημαντικές συνέπειες των παραπάνω αξιωμάτων είναι:

- Δύο ευθείες έχουν το πολύ ένα **κοινό σημείο**. Θα λέμε τότε ότι οι ευθείες αυτές **τέμνονται** σε αυτό το σημείο.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε αυτή.

2.Αξιώματα του ‘‘μεταξύ’’(ή διάταξης): Η σχέση του **‘‘μεταξύ’’** είναι πρωταρχική, δηλαδή ο Hilbert δεν κάνει καμία προσπάθεια να την ορίσει άμεσα. Η ομάδα αυτή, αναφέρεται στην έννοια του ‘‘μεταξύ’’ για συνευθειακά σημεία και στην έννοια του ‘‘μεταξύ’’ για το επίπεδο.

I. Το σύμβολο Χ-Υ-Ζ σημαίνει ότι τα σημεία Χ, Υ, Ζ είναι συνευθειακά και διαφορετικά και ότι το Υ βρίσκεται μεταξύ των Χ και Ζ. Τότε ισχύει και Ζ-Υ-Χ.
II. Για κάθε δύο σημεία Χ, Υ υπάρχει ένα τρίτο Ζ έτσι, ώστε Χ-Υ-Ζ
III. Αν δοθούν τρία συνευθειακά και διαφορετικά σημεία, το πολύ ένα από αυτά θα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

Πριν αναφερθεί το επόμενο αξίωμα διατυπώνονται δύο απαραίτητοι ορισμοί.

Ορισμός: Ένα **ευθύγραμμο τμήμα** με άκρα τα σημεία Α και Β αντιστοιχεί στο όχι διατεταγμένο ζευγάρι Α, Β και συμβολίζεται με ΑΒ ή ΒΑ. **Εσωτερικά** σημεία του ΑΒ λέγονται τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των Α και Β. Τα άκρα και τα εσωτερικά σημεία του ΑΒ, θεωρούνται ότι ανήκουν στο ευθύγραμμο αυτό τμήμα.

Ορισμός: Τρία μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ ορίζουν το **τρίγωνο** ΑΒΓ. Τα Α,Β,Γ λέγονται **κορυφές** του τριγώνου, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται **πλευρές** του τριγώνου.

IV. Έστω Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία που δεν κείνται επί της αυτής ευθείας και έστω χ μία ευθεία, τέτοια ώστε να μην περνάει από κανένα από τα προηγούμενα σημεία. Τότε αν η χ περνάει από ένα σημείο του τμήματος ΑΒ, θα περνάει επίσης και από ένα σημείο του ΑΓ ή από ένα σημείο του ΒΓ.

Το τελευταίο αξίωμα οδηγεί στην έννοια του **ημιεπιπέδου** και είναι γνωστό ως ***αξίωμα του Pasch.*** Είναι ισοδύναμο με το αξίωμα **διαχωρισμού**: «*μια ευθεία χ χωρίζει τα σημεία του επιπέδου, που δε βρίσκονται επ’αυτής, σε δύο σύνολα έτσι ώστε, για δύο σημεία Α, Β που βρίσκονται στο ίδιο σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να μην τέμνει τη χ, ενώ για τα σημεία Γ, Δ που βρίσκονται σε διαφορετικά σύνολα, το ΓΔ τέμνει τη χ*».

Σημαντικές συνέπειες των παραπάνω αξιωμάτων είναι οι εξής:

- Για κάθε δύο σημεία Α, Β υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίτο σημείο Γ ώστε Α-Γ-Β.

- Δοθέντων τριών συνευθειακών σημείων, ακριβώς ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.
- Στο αξίωμα του Pasch αποδεικνύεται ότι η ευθεία χ διέρχεται από μία ακριβώς από τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου.
- Αν δοθούν πεπερασμένα το πλήθος συνευθειακά σημεία, μπορούμε να τα συμβολίσουμε με A_κ, κ=1,…,ω έτσι ώστε το A_λ να βρίσκεται μεταξύ του $A_{\lambda-\mu}$ και του $A_{\lambda+\nu}$ για λ=2,…,ω-1 και επιτρεπτά μ=1,…,λ-1, ν=1,…,ω-λ.
- Μεταξύ δύο σημείων βρίσκονται άπειρα σημεία.
- Κάθε πολύγωνο χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, την εσωτερική και την εξωτερική και κάθε ευθεία η οποία ενώνει ένα σημείο από το εσωτερικό με ένα σημείο από το εξωτερικό, έχει ένα κοινό σημείο με το πολύγωνο.

Ορισμός: Για κάθε ευθεία χ και σημείο Α όπου το Α δεν ανήκει στη χ, αντιστοιχεί το σύνολο Σ(χ,Α) το οποίο λέγεται **ημιεπίπεδο** ως προς χ που περιέχει το Α, όπου
Σ(χ,Α)={Α}U{Χ ∈ Σ-{Α}:το ΑΧ δεν τέμνει την χ}

Κάθε ευθεία ορίζει δύο ακριβώς ημιεπίπεδα ξένα μεταξύ τους, τα οποία περιέχουν όλα τα στοιχεία του συνόλου Σ εκτός από εκείνα που ανήκουν στην ευθεία χ.

Αντίστοιχα ορίζεται η έννοια της ημιευθείας:

Ορισμός: Έστω Α,Β δύο διάφορα σημεία και χ μία ευθεία που διέρχεται από αυτά, από το δεύτερο αξίωμα του ‘‘μεταξύ’’ υπάρχει ένα σημείο Γ της χ ώστε Γ-Α-Β. Σε κάθε τέτοια επιλογή 3 σημείων μιας ευθείας χ αντιστοιχούν δύο **ημιευθείες** της με αρχή το Α, η $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Τα στοιχεία του συνόλου Σ ($\overrightarrow{AB}$)= $\{A,B\}\cup\{X : \mathrm{A}-\mathrm{X}-\mathrm{B}\}\cup\{\mathrm{X} : \mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{X}\}\subset\Sigma$ θα λέμε ότι ανήκουν στην ημιευθεία $\overrightarrow{AB}$.

Ορισμός : Έστω $\mathrm{A}\vec{\mathrm{B}}$ και $\mathrm{B}\vec{\Gamma}$ δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, έτσι ώστε τα στοιχεία τους να ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες χ_B και χ_Γ (με κοινό σημείο το Α) αντίστοιχα. Το σύστημα των δύο αυτών ημιευθειών το ονομάζουμε **γωνία.** Το **εσωτερικό** της γωνίας αυτής αποτελείται από τα ‘‘εσωτερικά’’ της σημεία που είναι τα σημεία του συνόλου $\Sigma(x_\Gamma,B)\cap\Sigma(x_B,\Gamma)$. Οι ημιευθείες $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ λέγονται **πλευρές** της γωνίας ΒΑΓ και το Α λέγεται **κορυφή** της.

3.Αξιώματα της ‘‘συμφωνίας’’: αναφέρονται στη ‘‘συμφωνία’’ ευθυγράμμων τμημάτων, γωνιών και τριγώνων. Με τη χρήση αυτών των αξιωμάτων εξετάζουμε την ‘‘ισότητα’’ δύο σχημάτων, κατοχυρώνοντας τη ‘‘μεταφορά’’ ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει μία **σχέση ισοδυναμίας** (πρωταρχική) ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα. Δύο ευθύγραμμα τμήματα που συνδέονται με τη σχέση αυτή τα λέμε **‘‘σύμφωνα’’** ή **‘‘ίσα’’**. Όταν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ‘‘σύμφωνα’’, γράφουμε $ΑΒ \cong ΓΖ$.

I. Αν δοθεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε σε κάθε ημιευθεία $\overrightarrow{ΓΔ}$ αντιστοιχεί ένα τουλάχιστον σημείο Ζ, που ανήκει σε αυτήν ώστε το ΑΒ να είναι σύμφωνο με το ΓΖ. Γράφουμε $ΑΒ \cong ΓΖ$

Με αυτό το αξίωμα μπορούμε να θεωρήσουμε τη *‘‘μεταφορά’’* ενός ευθυγράμμου τμήματος σε οποιαδήποτε ημιευθεία. Με πρόταση θα αποδειχτεί ότι το Ζ είναι μοναδικό, εξασφαλίζοντας τη μοναδικότητα της ‘‘μεταφοράς’’. Συνεπώς μπορούμε να μιλήσουμε για σύγκριση δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Θα λέμε ότι το ΑΒ είναι **μικρότερο** από το Α΄Β΄ (γράφουμε ΑΒ<Α΄Β΄) αν στην ημιευθεία που ορίζει το Α΄Β΄, το σημείο Ζ ώστε $ΑΒ \cong Α΄Ζ$ έχει την ιδιότητα Α΄-Ζ-Β΄. Αντίστοιχα ισχύει για τη σχέση **μεγαλύτερο**.

II. Θεωρούμε τις ευθείες χ και χ΄ και σε κάθε μία τους τα σημεία Α,Β,Γ και Α΄,Β΄,Γ΄ αντίστοιχα έτσι ώστε τα Γ και Α να μην ανήκουν στις ημιευθείες $\overrightarrow{ΒΑ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ αντίστοιχα και ανάλογα να ισχύουν για τα Γ΄,Α΄ και τις $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'Γ'}$. Με αυτές τις υποθέσεις δεχόμαστε ότι, αν ΑΒ, Α΄Β΄ είναι σύμφωνα και ΒΓ, Β΄Γ΄ είναι σύμφωνα, τότε ΑΓ και Α΄Γ΄ είναι σύμφωνα.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ (ή Α΄Γ΄) θεωρείται το **‘‘άθροισμα’’** των ΑΒ και ΒΓ (αντίστοιχα Α΄Β΄ και Β΄Γ΄). Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει τη ‘‘μεταφορά’’ του ‘‘αθροίσματος’’ των ευθυγράμμων τμημάτων.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει μία **σχέση ισοδυναμίας** ανάμεσα στις γωνίες. Δύο γωνίες που συνδέονται με τη σχέση αυτή τις λέμε **‘‘σύμφωνες’’** ή **‘‘ίσες’’**.

III. Αν δοθούν η γωνία ΒΑΓ, η ευθεία χ, μία ημιευθεία της $\overrightarrow{ΖΘ}$ και προκαθοριστεί ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η χ, τότε υπάρχει ακριβώς μία ημιευθεία

$\overrightarrow{ZH}$ ώστε να ισχύει ότι η γωνία ΒΑΓ να ισούται με τη γωνία ΗΖΘ και επιπλέον τα σημεία της $\overrightarrow{ZH}$,εκτός του Ζ, και τα εσωτερικά σημεία της ΗΖΘ να ανήκουν στο προκαθορισμένο ημιεπίπεδο.

Με αυτό το αξίωμα εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της μεταφοράς των γωνιών, ενώ η ανισοτική σχέση μεταξύ των γωνιών ορίζεται ανάλογα με αυτή των ευθύγραμμων τμημάτων.

Ορισμός :Δύο **γωνίες** λέγονται **διαδοχικές** αν έχουν μία ημιευθεία ως κοινή πλευρά και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

Ορισμός : Άθροισμα δύο διαδοχικών γωνιών ΒΑΓ και ΒΑΔ, με κοινή πλευρά την $\overrightarrow{AB}$ και τα Δ και Γ να βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο, ορίζεται η γωνία ΔΑΓ.

Ορισμός : Δύο τρίγωνα λέγονται σύμφωνα ή ίσα αν οι κορυφές τους μπορούν να αντιστοιχισθούν έτσι ώστε οι αντίστοιχες πλευρές να είναι σύμφωνες και οι αντίστοιχες γωνίες σύμφωνες.

IV. Αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν ότι η πλευρά ΑΒ σύμφωνη με την Α΄Β΄ ,η πλευρά ΑΓ σύμφωνη με την πλευρά Α΄Γ΄ και η γωνία ΒΑΓ σύμφωνη με τη γωνία Β΄Α΄Γ΄ τότε και η γωνία ΑΒΓ σύμφωνη με την Α΄Β΄Γ΄.

Σημαντικές συνέπειες των παραπάνω αξιωμάτων είναι οι εξής:

- **1^{ο} Κριτήριο ισότητας τριγώνων:** Δύο τρίγωνα είναι «σύμφωνα», αν δύο πλευρές τους είναι αντίστοιχα «σύμφωνες» και οι περιεχόμενες σε αυτές γωνίες είναι «σύμφωνες».
- **2^{ο} Κριτήριο ισότητας τριγώνων:** Δύο τρίγωνα είναι «σύμφωνα», αν οι κορυφές τους μπορούν να συμβολισθούν με Α, Β, Γ και Α΄, Β΄, Γ΄ έτσι ώστε $AB \cong A'B'$, και η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την Β΄Α΄Γ΄ και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την Α΄Β΄Γ΄.

Ορισμός: Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές**, αν είναι διαδοχικές και οι μη κοινές πλευρές τους είναι ημιευθείες της ίδιας ευθείας με αρχή την κορυφή των γωνιών.

- Αν δύο γωνίες είναι «σύμφωνες», τότε και οι παραπληρωματικές τους γωνίες είναι «σύμφωνες».

- Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι «σύμφωνες», τότε και οι απέναντί τους γωνίες είναι «σύμφωνες»
- **3^{ο} Κριτήριο ισότητας τριγώνων:** Δύο τρίγωνα είναι «σύμφωνα» αν οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι «σύμφωνες».

Ορισμός: Μια γωνία λέγεται **ορθή**, αν είναι «σύμφωνη» με την παραπληρωματική της.

- Κάθε δύο ορθές γωνίες είναι σύμφωνες.

Ορισμός: Οι παραπληρωματικές γωνίες των γωνιών ενός τριγώνου λέγονται **εξωτερικές γωνίες** του.

Ορισμός: Απέναντι εσωτερικές γωνίες μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου, ονομάζονται οι γωνίες του τριγώνου εκτός της παραπληρωματικής της.

- Μια εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμιά από τις δύο απέναντί της εσωτερικές γωνίες.
- **Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.**
- Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένο σημείο Μ έτσι ώστε Α-Μ-Β και $AM \cong MB$. Το σημείο Μ ονομάζεται **μέσον**.
- Σε κάθε γωνία υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη ημιευθεία με αρχή την κορυφή της και ένα σημείο της να βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ώστε να ορίζει δύο διαδοχικές γωνίες με κοινή πλευρά την ημιευθεία, οι οποίες να είναι ίσες. Η ημιευθεία αυτή καλείται **διχοτόμος**.

4.Αξιώματα της ‘‘συνέχειας’’

Σε αυτή την ομάδα περιέχονται δύο αξιώματα. Το πρώτο από αυτά, το λεγόμενο αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου έρχεται να διορθώσει και να καλύψει πολλά κενά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Μάλιστα αν παραλειφθεί, τότε το σύστημα των υπολοίπων αξιωμάτων οδηγεί σε αντιφάσεις. Πριν διατυπωθεί είναι απαραίτητος ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός: Έστω Α,Β δύο σημεία και ΓΔ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το **ν-πολλαπλάσιο** του ΓΔ στην ημιευθεία $\overrightarrow{AB}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται επαγωγικά με την ακόλουθη διαδικασία: Έστω $ΑΔ_1$ η ‘‘μεταφορά’’ του ΓΔ στην $\overrightarrow{AB}$ σύμφωνα με το

πρώτο αξίωμα συμφωνίας και $\Delta_\lambda\Delta_{\lambda+1}$ η αντίστοιχη μεταφορά πάλι του ΓΔ στην $\overrightarrow{\Delta_\lambda Z_\lambda}$, όπου $\Delta_{\lambda-1}$-Δ_λ-Z_λ για λ=2,…,ν-1. Το ν-πολλαπλάσιο του ΓΔ στην $\overrightarrow{AB}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta_\nu$

I. Αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν έτσι ώστε να ισχύει Α-Β-Δ_ν όπου $A\Delta_\nu$ είναι το ν-πολλαπλάσιο του ΓΔ στην $\overrightarrow{AB}$.(**Αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη**)

Αυτό το αξίωμα μας παρέχει τη **δυνατότητα μέτρησης.**

II. Δεν είναι δυνατό να επεκταθεί μια ευθεία σε μια καινούρια ευθεία έτσι ώστε να ισχύουν για τα σημεία της καινούριας ευθείας οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα της σύμπτωσης , του μεταξύ, της συμφωνίας και του αξιώματος Αρχιμήδους-Ευδόξου. (**Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας**)

Αυτό το αξίωμα συμβάλλει στη διασύνδεση της Γεωμετρίας αυτής με την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου. Με τη βοήθειά αυτού αποδεικνύεται ότι κάθε ευθεία είναι συνεχές. Ο Hilbert το χαρακτηρίζει ως «τελικό δομικό λίθο».

Τα δύο αυτά αξιώματα, μπορούν να αντικατασταθούν από το αξίωμα συνέχειας του **Dedekind**: «*για οποιαδήποτε διαμέριση των σημείων μιας ευθείας σε δύο μη κενά σύνολα, τέτοια ώστε κανένα σημείο του ενός να μη βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου, υπάρχει ένα σημείο του ενός συνόλου που βρίσκεται μεταξύ οποιουδήποτε άλλου σημείου αυτού του συνόλου και οποιουδήποτε σημείου του άλλου συνόλου*».

Σημαντική συνέπεια του τελευταίου αξιώματος είναι η εξής πρόταση:

«Δεν είναι δυνατόν να επεκταθεί το επίπεδο για το οποίο ισχύουν όλα τα παραπάνω αξιώματα σε ένα καινούργιο, έτσι ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν για τα σημεία του καινούργιου επιπέδου όλα τα προηγούμενα αξιώματα».

5.Αξίωμα των παραλλήλων

Στο επίπεδο που ορίζουν ένα σημείο και μία ευθεία που δεν διέρχεται από το σημείο, υπάρχει το πολύ μία ευθεία, που περνά από το σημείο και δεν τέμνει την ευθεία. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **παράλληλη** της δεδομένης ευθείας από το δοθέν σημείο.

Το αξίωμα αυτό είναι γνωστό ως **Ευκλείδειο Αξίωμα.** Ο Hilbert αποδεικνύει ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται τουλάχιστον μία παράλληλη και με τη χρήση του

τελευταίου αξιώματος εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της παραλλήλου. Αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμο με καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

- ✓ Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές.
- ✓ Αν μία ευθεία τέμνει τη μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.
- ✓ Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και τέμνονται από μία τρίτη, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι σύμφωνες.

Ας δούμε αν το σύστημα του Hilbert ικανοποιεί τις απαιτήσεις που έθεσε ο ίδιος για κάθε αξιωματικό σύστημα. Για την απαίτηση της **συνέπειας**, δημιούργησε ένα αλγεβρικό μοντέλο για τα αξιώματά του και αφού το αλγεβρικό μοντέλο δεν οδηγεί σε αντιφάσεις δεν θα οδηγεί σε αντιφάσεις ούτε το αξιωματικό του σύστημα. Όσον αφορά την απαίτηση για **ανεξαρτησία** των αξιωμάτων, ο Hilbert δεν απέδειξε την πλήρη ανεξαρτησία τους αλλά έδειξε ότι οι ομάδες των αξιωμάτων είναι ανεξάρτητες, κατασκευάζοντας μοντέλα όπου κάποια από αυτές τις ομάδες δεν ικανοποιείται. Δεν ασχολήθηκε με την απόδειξη της πληρότητας, διότι πίστευε ότι το σύστημά του είναι πλήρες. Άλλωστε όπως προκύπτει τελικά, όλες οι προτάσεις του Ευκλείδη αποδεικνύονται από τα αξιώματά του.

7.1. Η διόρθωση των «παραλήψεων» του Ευκλείδη μέσα στην αξιωματική του Hilbert

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε τις παραλείψεις που επεσήμανε ο Russel στο σύστημα του Ευκλείδη, καθώς και τις προτάσεις που έδωσε για την κάλυψή τους. Σε αυτήν την παράγραφο, θα εξετάσουμε πως τα κενά αυτά καλύπτονται μέσα από την αξιωματική θεμελίωση που πρότεινε ο Hilbert.

Ο Hilbert, όπως είδαμε, υποστηρικτής του φορμαλισμού, στην αρχή του συστήματος θέτει ως πρωταρχικούς τους όρους σημείο, ευθεία, επίπεδο. Μέσα από τον μεγαλύτερο αριθμό αξιωμάτων που έθεσε, εκφράζονται με σαφήνεια οι σχέσεις μεταξύ των πρωταρχικών αυτών όρων. Έτσι αποφεύγει τους ασαφείς ορισμούς που εισήγαγε και χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης.

Το **αξίωμα Αρχημήδους-Ευδόξου** έρχεται να λύσει μερικά προβλήματα από αυτά που εντόπισε ο Russell: Αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν έτσι ώστε να ισχύει Α-Β-$Δ_ν$ όπου $ΑΔ_ν$ είναι το ν-πολλαπλάσιο του ΓΔ στην $\overrightarrow{AB}$.

Επίσης το **αξίωμα του Pasch** -αν μία ευθεία χ δεν περιέχει καμιά από τις κορυφές ενός τριγώνου, ΑΒΓ, και περνάει από ένα εσωτερικό σημείο μιας πλευράς αυτού τότε στη χ ανήκει ένα εσωτερικό σημείο μιας τουλάχιστον από τις δύο άλλες πλευρές του ΑΒΓ- οδηγεί στην έννοια του ημιεπιπέδου, το οποίο καλύπτει τα σχετικά κενά της θεωρίας του Ευκλείδη. Αλλά ας δούμε τις διορθώσεις με τη σειρά που παρουσιάζει τις παραλήψεις ο Russell.

Το κενό της $1^{ης}$ πρότασης που αποτελεί την υπόθεση ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται, καλύπτεται με τη χρήση του αξιώματος **Dedekind** (για οποιαδήποτε διαμέριση των σημείων μιας ευθείας σε δύο μη κενά σύνολα, τέτοια ώστε κανένα σημείο του ενός να μη βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου, υπάρχει ένα σημείο του ενός συνόλου που βρίσκεται μεταξύ οποιουδήποτε άλλου σημείου αυτού του συνόλου και οποιουδήποτε σημείου του άλλου συνόλου), το οποίο όπως είδαμε είναι ισοδύναμο με τα δύο αξιώματα «συνέχειας» του Hilbert. Επίσης εξασφαλίζεται η αξιωματική κατοχύρωση της έννοιας του «μεταξύ», η οποία απαιτείται στην απόδειξη, με την αντίστοιχη ομάδα των αξιωμάτων.

Τις παραλείψεις που διαπιστώθηκαν στην $4^η$ πρόταση, «διορθώνει» ο Hilbert μέσα από τα αξιώματα συμφωνίας, με τη χρήση των οποίων κατοχυρώνεται η μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών. Στην απόδειξη αυτή, απαιτείται και ο ορισμός του ημιεπιπέδου, ο οποίος εισάγεται με τη βοήθεια του αξιώματος Pasch.

Η απόδειξη της $6^{ης}$ πρότασης, διαμορφώνεται σύμφωνα με τις αυστηρές απαιτήσεις της αξιωματικής, μέσα από την ομάδα των αξιωμάτων «μεταξύ». Η ίδια ομάδα τελειοποιεί και την απόδειξη της $7^{ης}$ πρότασης και κυρίως το αξίωμα Pasch.

Οι παραλείψεις στην Πρόταση 8 είναι παρόμοιες με αυτές της πρότασης 4, οπότε και πάλι τα αξιώματα «συμφωνίας» και «μεταξύ» τις διορθώνουν.

Η πρόταση 12, η οποία όπως ειπώθηκε απαιτεί την υπόθεση ότι ένας κύκλος τέμνει μία ευθεία σε δύο ή κανένα σημεία, συμπληρώνεται μέσα από τα αξιώματα «συνέχειας» και «μεταξύ».

Η απόδειξη της πρότασης 16 διορθώνεται μέσα από τα αξιώματα «μεταξύ» ώστε να αποδειχθεί η υπονοούμενη υπόθεση του Ευκλείδη που αναφέρεται στην παράγραφο 5.

Τέλος οι παραλείψεις στην πρόταση 26 είναι παρόμοιες με εκείνες των προτάσεων 4 και 8, οπότε τα αξιώματα «συμφωνίας» και το αξίωμα Pasch είναι απαραίτητα.

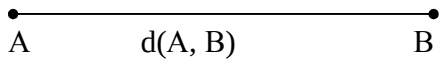
Β΄ ΜΕΡΟΣ

Β.1. Αξιωματική θεμελίωση της Επίπεδης Γεωμετρίας από τον George Birkhoff.

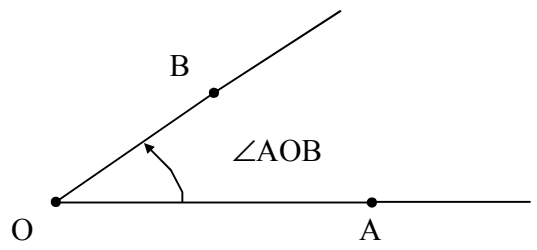
Ο **George Birkhoff** θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της γενιάς του. Το 1932 δημοσιεύεται στο περιοδικό "The Annals of Mathematics" το άρθρο του "A set of postulates for plane geometry based on scale and protactor", όπου προτείνει μια αξιωματική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διαφορετική από αυτή του Hilbert, με βάση τη χρήση του κανόνα (με κλίμακα) και του μοιρογνωμόνιου. Το 1941 κυκλοφορεί το βιβλίο του "Basic Geometry", συγγραφέας του οποίου είναι και ο **Ralph Beatley**, το οποίο μάλιστα αποτέλεσε σχολικό εγχειρίδιο Γεωμετρίας για μαθητές Λυκείου σε κάποια σχολεία των ΗΠΑ. Σε αυτό το βιβλίο αναπτύσσεται μια απλούστερη αλλά πιο εκτενής μελέτη της αξιωματικής του θεμελίωσης. Παρακάτω παρουσιάζονται τα προτεινόμενα αξιώματα καθώς και βασικά θεωρήματα και εφαρμογές που απορρέουν από αυτά.

Β.1.1. Πρωταρχικές έννοιες, αξιώματα, βασικοί ορισμοί

Στην παρούσα αξιωματική λαμβάνονται ως πρωταρχικοί όροι οι έννοιες **σημείο** και **ευθεία** όπου συμβολίζονται με A, B, …και l, m,… αντίστοιχα, καθώς και οι σχέσεις **απόσταση δύο σημείων** A, B που συμβολίζεται με d(A, B) και είναι ένας μη – αρνητικός πραγματικός αριθμός με d(A, B) = d(B, A) (Σχ. 1), και **γωνία** που σχηματίζεται από τρία διατεταγμένα σημεία A, O, B με A ≠ O, B ≠ O, συμβολίζεται με ∠ AOB και είναι ένας πραγματικός αριθμός modulo 2π. (Σχ. 2)



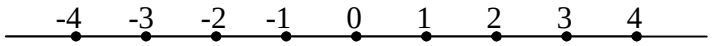
Σχήμα 1



Σχήμα 2

<u>1ο Αξίωμα: Το αξίωμα του μέτρου της ευθείας:</u>

Σε κάθε ευθεία l, μπορούμε να εφαρμόσουμε μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της l, A, B, … και των πραγματικών x, έτσι ώστε $|x_B - x_A| = d(A, B)$ για όλα τα σημεία A, B.



Σχήμα 3

Το αξίωμα αυτό μας επιτρέπει τη χρήση του χάρακα για τη μέτρηση. Κατά συνέπεια ισχύει:

(i) d(A, B) = O αν και μόνο αν A = B

(ii) Εάν A, B, Γ, τρία σημεία ώστε A ≠ B ≠ Γ και είναι διατεταγμένα ως A, B, Γ ή αντίστροφα Γ, B, A τότε ισχύει d(A, Γ) = d(A, B) + d(B, Γ).

(iii) Εάν x΄ δηλώνει ένα άλλο σύστημα αρίθμησης της ευθείας l τότε για κάθε σημείο A της l ισχύει είτε $x'_A = x_A + d$ είτε $x'_A = -x_A + d$, d: σταθερά. Συνεπώς η αρίθμηση της ευθείας δεν εξαρτάται από το εκάστοτε σύστημα αλλά από το σημείο O που λαμβάνουμε ως αρχή και την οριζόμενη θετική κατεύθυνση.

<u>Ορισμός:</u> Ένα σημείο B βρίσκεται **μεταξύ** των σημείων A και Γ (με A ≠ Γ) εάν ισχύει d(A, Γ) = d(A, B) + d(B, Γ).

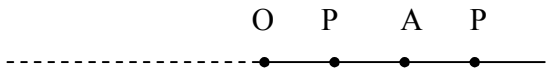
<u>Ορισμός:</u> Ευθύγραμμο τμήμα AΓ ορίζεται το σύνολο των σημείων B τα οποία βρίσκονται μεταξύ των A και Γ συμπεριλαμβανομένων των A και Γ.

Ή ισοδύναμα είναι το σύνολο των σημείων P για τα οποία

$$x_A \le x_P \le x_C \text{ ή } x_C \le x_P \le x_A$$

<u>Ορισμός</u>: Εάν ΑΓ ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο του Β ώστε d(Α, Β) = d(Β, Γ) τότε λέμε ότι το Β **διχοτομεί** το ΑΓ και το Β καλείται **μέσο** του Α.

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο των σημείων Ρ μιας ευθείας l για τα οποία το Ο δε βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ρ και Α (Ο ≠ Α) καλείται **ημιευθεία** l΄ με **αρχή** το Ο.



Σχήμα 4

Εάν θεωρήσουμε το Ο ως αρχή ενός συστήματος αρίθμησης και θεωρήσουμε ότι το Α βρίσκεται στο θετικό μέρος, δηλαδή $x_A > O$ τότε η ημιευθεία ΟΑ αποτελείται από τα σημεία Ρ για τα οποία $x_P \ge O$.

<u>Ορισμός</u>: Εάν Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ορίζουν ένα **τρίγωνο** το οποίο συμβολίζεται ΔΑΒΓ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καλούνται **πλευρές** και τα σημεία Α, Β, Γ **κορυφές**.

<u>Ορισμός</u>: Το τρίγωνο ΔΑΒΓ καλείται **εκφυλισμένο** αν τα Α, Β, Γ κείνται στην ίδια ευθεία. Αλλιώς καλείται **μη – εκφυλισμένο.**

<u>2ο Αξίωμα: Το αξίωμα σημείου – ευθείας:</u>

Υπάρχει μία και μόνο ευθεία l που διέρχεται μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων.

Συνεπώς δύο διαφορετικές ευθείες l, m έχουν είτε ένα κοινό σημείο είτε κανένα.

<u>Ορισμός</u>: Δύο ευθείες που έχουν ένα κοινό σημείο θα λέγονται **τεμνόμενες**. Το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής**.

<u>Ορισμός</u>: Δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο θα λέγονται **παράλληλες**.

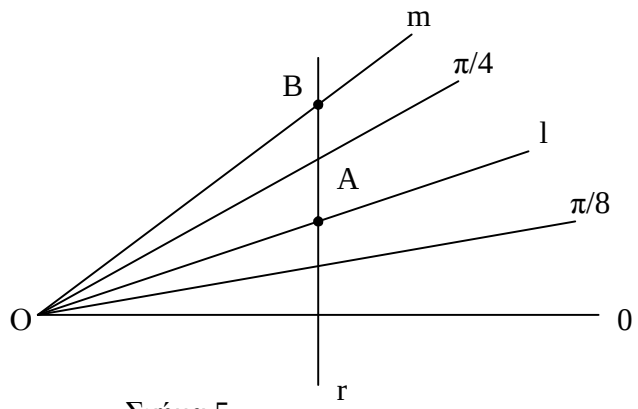
Θα θεωρούμε ότι μία ευθεία είναι παράλληλη στον εαυτό της.

<u>3ο Αξίωμα: Το αξίωμα του μέτρου γωνίας:</u>

Υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των πραγματικών αριθμών α(mod2π) και των ημιευθείων l, m με κοινή αρχή το Ο έτσι ώστε αν Α ≠ Ο, Β ≠ Ο σημεία των l και m

αντίστοιχα, η διαφορά $\alpha_m - \alpha_l (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ είναι η ∠AOB. Επίσης αν το σημείο B «κινείται» κατά συνεχή τρόπο σε μία ευθεία r, η οποία δε διέρχεται από το O, τότε ο αριθμός α_m παίρνει συνεχείς τιμές. (Σχήμα 5)

Κατά συνέπεια κάθε δύο ημιευθείες l, m με κοινή αρχή O ορίζουν μία γωνία ∠lOm που καλείται ∠AOB όπου τα A ≠ O και B ≠ O κείνται στην l και m αντίστοιχα. Η προσανατολισμένη γωνία ∠lOm δίνεται από την αριθμητική τιμή του ελάχιστου υπολοίπου του $\alpha_m - \alpha_l (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ και μας δείχνει τη θέση της m ως προς την l.



Σχήμα 5

Από το τελευταίο αξίωμα ισχύει:

(i) ∠lOm = 0 αν και μόνο αν l = m.

(ii) αν l, m, n είναι τρεις ημιευθείες από το O τότε ∠lOm + ∠mOn = ∠lOn. Συνεπώς υπάρχει η δυνατότητα πρόσθεσης γωνιών.

(iii)αν α΄ ένα διαφορετικό σύστημα αρίθμησης τότε για όλες τις ημιευθείες l που διέρχονται από το O ισχύει είτε $\alpha_l' = \alpha_l + d$ είτε $\alpha_l' = -\alpha_l + d$ για κάποια σταθερά d.

<u>Ορισμός</u>: Δύο ημιευθείες l, m που διέρχονται από το O λέμε ότι σχηματίζουν **ευθεία γωνία** αν ∠lOm = π.

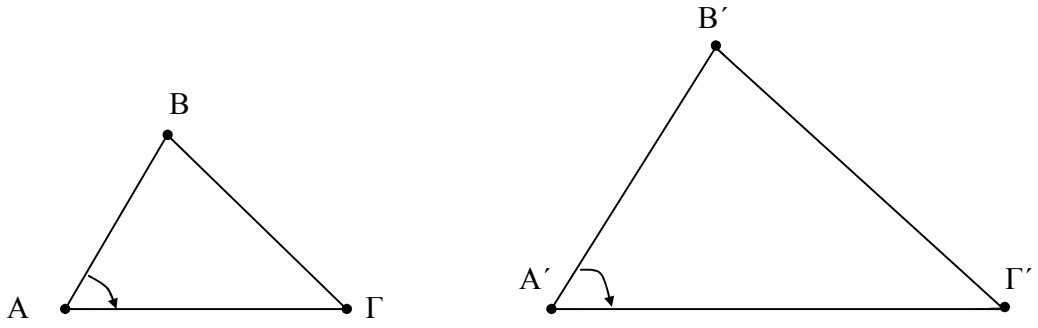
<u>Ορισμός</u>: Δύο ημιευθείες l, m που διέρχονται από το O λέμε ότι σχηματίζουν **ορθή γωνία** αν $\angle \mathrm{lOm} = \pm\frac{\pi}{2}$.

<u>Ορισμός</u>: Η ημιευθεία m θα λέμε ότι είναι **κάθετη** στην ημιευθεία l και θα γράφουμε $m \perp l$ όταν $\angle \mathrm{lOm} = \pm\frac{\pi}{2}$.

Έπεται ότι υπάρχουν δύο ημιευθείες m_1, m_2 που είναι κάθετες στην l με $\angle lOm_1 = \frac{\pi}{2}$ και $\angle lOm_2 = -\frac{\pi}{2}$. Συνεπώς οι m_1, m_2 σχηματίζουν ευθεία γωνία. (από πρόσθεση γωνιών)

<u>4° Αξίωμα: Το αξίωμα ομοιότητας: (1° Κριτήριο Ομοιότητας τριγώνων)</u>

Εάν σε δύο τρίγωνα ΔΑΒΓ και ΔΑΓΒΓΓ ισχύει $d(A',B') = kd(A,B)$, $d(A',\Gamma') = kd(A,\Gamma)$ για k > Ο και $\angle B'A'\Gamma' = \pm\angle BA\Gamma$ τότε ισχύει επίσης $d(B',\Gamma') = kd(B,\Gamma)$, $\angle\Gamma'B'A' = \pm\angle\Gamma BA$, $\angle A'\Gamma'B' = \pm\angle A\Gamma B$



Σχήμα 6

Το αξίωμα εφαρμόζεται και στα εκφυλισμένα τρίγωνα.

<u>Ορισμός</u>: Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια** αν οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι όλες ίσες ή όλες αντίθετες.

<u>Ορισμός</u>: Τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ … ΘΙ ορίζεται ως το σύνολο των διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, … ΘΙ. Τα σημεία Α, Β, …, Ι καλούνται **κορυφές** της τεθλασμένης γραμμής.

<u>Ορισμός</u>: Εάν το αρχικό και το τελικό σημείο μιας τεθλασμένης γραμμής συμπίπτουν τότε ονομάζεται **πολύγωνο**.

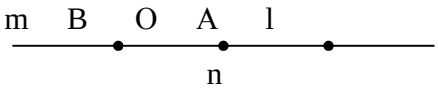
<u>Ορισμός</u>: Δύο τεθλασμένες γραμμές ή πολύγωνα είναι **όμοια**, αν οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες και οι αντίστοιχες γωνίες όλες ίσες ή όλες αντίθετες.

<u>Ορισμός</u>: Δύο τρίγωνα ή δύο τεθλασμένες γραμμές ή δύο πολύγωνα είναι **σύμφωνα** εάν είναι όμοια με λόγο ομοιότητας k = 1.

<u>Β.1.2. Θεμελιώδη θεωρήματα της Επίπεδης Γεωμετρίας μέσα από την κατά Birkhoff αξιωματική</u>

<u>Θεώρημα 1:</u>

Η γωνία $\angle$lOm είναι μια ευθεία γωνία αν και μόνο αν οι l και m είναι δύο ημιευθείες της ίδιας ευθείας n με κοινή αρχή το σημείο O.



<u>Απόδειξη:</u> $\Leftarrow$ Έστω η n είναι ευθεία που διέρχεται από O, και l, m οι ημιευθείες.Θα δείξουμε ότι $\angle$lOm = π.

Παίρνω σημείο A στην l και B στην m έτσι ώστε OA = OB = 1 (αξίωμα 1).

Στα εκφυλισμένα τρίγωνα OBA και OAB έχουμε:

$\angle$OBA = + $\angle$OAB = 0

d(B, O) = d(O, A)

d(B, A) = d(A, B)

Συνεπώς από το 4^{ο} αξίωμα τα δύο τρίγωνα είναι όμοια με k = 1, άρα είναι σύμφωνα, άρα $\angle BOA = \angle AOB \Rightarrow \angle BOA = -\angle BOA$

$$\Rightarrow 2\angle BOA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BOA = 0 \;\; ή \;\; \angle BOA = \pi$$

Η λύση $\angle$BOA = O απορρίπτεται διότι οι ημιευθείες OA και OB είναι διαφορετικές. Άρα $\angle$BOA = π.

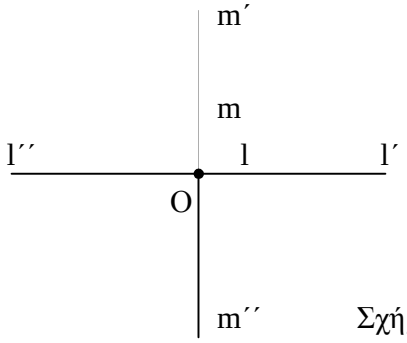
$\Rightarrow$ Έστω ότι οι δύο ημιευθείες l, m διέρχονται από το O και σχηματίζουν μία ευθεία γωνία. Θα αποδείξω ότι οι l και m ανήκουν στην ίδια ευθεία n.

Έστω l΄ η ημιευθεία που έχει αρχικό σημείο το Ο και βρίσκεται στην ίδια ευθεία που βρίσκεται η l, συνεπώς σχηματίζει με την l γωνία π. Θα δείξω ότι η l΄ συμπίπτει με την m. Από τα παραπάνω έχω: $\angle lOm = \pi$, $\angle l'Ol = \pi$.

Οπότε $\angle l'Om = \angle l'Ol + \angle lOm = 0$

άρα η l΄ συμπίπτει με την m. ■

Συνεπώς δύο ευθείες l, m θα είναι κάθετες $(l \perp m)$ αν διέρχονται από ένα σημείο Ο με κάθετες ημιευθείες l΄, l΄΄ και m΄, m΄΄. (σχήμα 6)

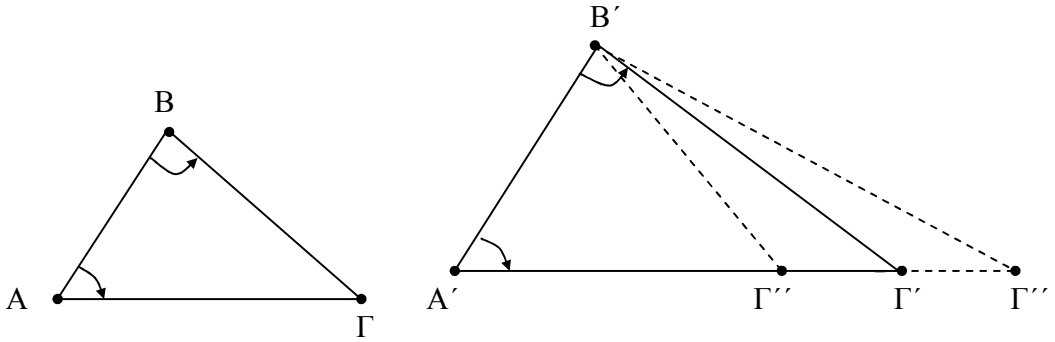


Σχήμα 7

<u>Θεώρημα 2: (2^{ο} Κριτήριο Ομοιότητας τριγώνων)</u>

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια αν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες ή αντίθετες με δύο γωνίες του άλλου.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\angle AB\Gamma = \angle A'B'\Gamma'$, $\angle \Gamma AB = \angle \Gamma'A'B'$



Σχήμα 8

Ορίζω $k = \frac{A'B'}{AB}$ και έστω σημείο Γ΄΄ της ημιευθείας Α΄Γ΄ ώστε $\frac{A'\Gamma''}{A\Gamma} = k$.

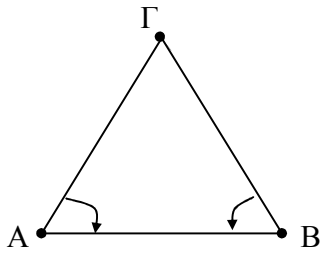
Από το 4° αξίωμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄΄ είναι όμοια άρα $\angle$ΑΒΓ=$\angle$Α΄Β΄Γ΄΄ και άρα $\angle$Α΄Β΄Γ΄=$\angle$Α΄Β΄Γ΄΄.

Τότε όμως από το 3° αξίωμα οι Β΄Γ΄και Β΄Γ΄΄ συμπίπτουν. Οπότε το σημείο Γ΄΄ βρίσκεται πάνω στην ευθεία Α΄Γ΄ και επίσης το σημείο Γ΄΄ βρίσκεται πάνω στην Β΄Γ΄. Συνεπώς από το αξίωμα 2 το Γ΄΄ συμπίπτει με το Γ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια. ■

<u>Θεώρημα 3</u>: Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι δύο πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή d(Α, Γ) = d(Β, Γ) τότε $\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΑΒ και αντίστροφα: αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΑΒ τότε οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις γωνίες είναι ίσες.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>⇒</u>



Θα δείξω αν d(Α, Γ) = d(Β, Γ) τότε $\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΑΒ

Σχήμα 9

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΒΑ. Ισχύει:

d(Γ, Α) = d(Γ, Β)

d(Γ, Β) = d(Γ, Α)

$\angle$ΑΓΒ = – $\angle$ΒΓΑ

Οπότε από το 4° αξίωμα τα δύο τρίγωνα είναι όμοια με k = 1, άρα είναι σύμφωνα, άρα $\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΒΑ.

<u>⇐</u> Θα δείξω ότι αν $\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΒΑ τότε d(Α, Γ) = d(Β, Γ). Συγκρίνω πάλι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΒΑ. Ισχύει:

$\angle$ΓΑΒ = – $\angle$ΓΒΑ

$\angle$ΓΒΑ = – $\angle$ΓΑΒ

οπότε από 2° θεώρημα τα τρίγωνα είναι όμοια με k = 1 συνεπώς d(Α, Γ) = d(Β, Γ). ■

<u>Ορισμός</u>: Ένα τρίγωνο που έχει τις δύο του πλευρές ίσες ονομάζεται **ισοσκελές**.

<u>Πόρισμα</u>: Αν σε ένα τρίγωνο οι τρεις πλευρές του είναι ίσες τότε και οι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες ή αντίθετες.

<u>Ορισμός</u>: Ένα τρίγωνο που έχει και τις τρεις του πλευρές ίσες ονομάζεται **ισόπλευρο**.

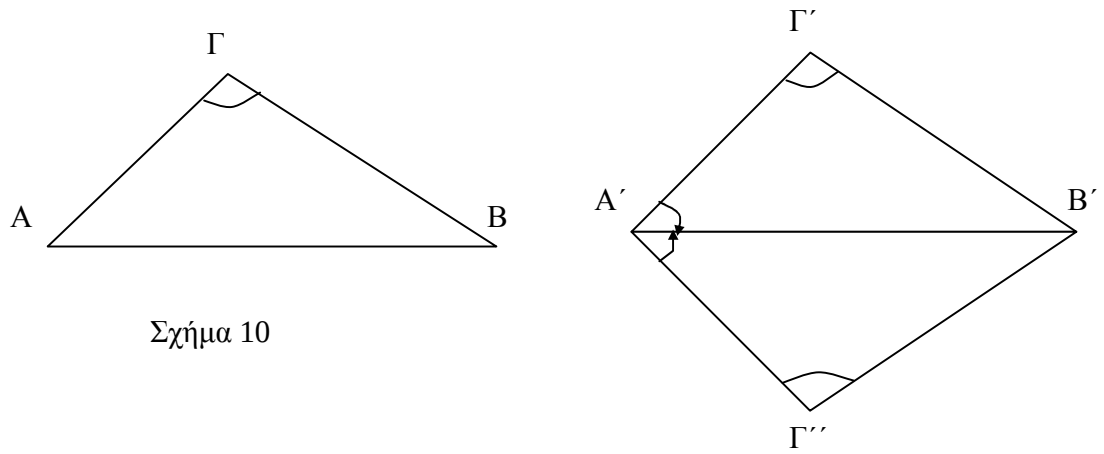
<u>Θεώρημα 4: (3° Κριτήριο Ομοιότητας τριγώνων)</u>

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ανάλογες τότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ΔΑΒΓ, ΔΑΊΒΊΓΊ έχουν τις πλευρές μια προς μία ανάλογες. Δηλαδή ΑΊΒΊ=kΑΒ, ΒΊΓΊ = kΒΓ, ΓΊΑΊ = kΓΑ.

Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΊΒΊΓΊΊ όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε η γωνία ∠ΓΊΊΑΊΒΊ να έχει πρόσημο αντίθετο με τη γωνία ∠ΓΊΑΊΒΊ. Η δυνατότητα αυτής της κατασκευής δίνεται από το αξίωμα 4, εκτός εάν ∠ΓΊΑΊΒΊ = 0 ή π ή ∠ΓΑΒ = 0 ή π, δηλαδή όταν ένα από τα δυο τρίγωνα είναι εκφυλισμένα. Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΊΒΊΓΊ και ΑΊΒΊΓΊΊ είναι όμοια. Προφανώς οι πλευρές τους είναι μία προς μία ίσες.



Σχήμα 10

Έστω ΓΊ≠ ΓΊΊ.

Τα τρίγωνα ΓΊΑΊΓΊΊ και ΓΊΒΊΓΊΊ είναι ισοσκελή, συνεπώς ∠ΑΊΓΊΓΊΊ= – ∠ΑΊΓΊΓΊΊ και ∠ΓΊΓΊΊΑΊ = – ∠ΓΊΓΊΊΒΊ.

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε ∠Α΄Γ΄Β΄ = – ∠Α΄Γ΄΄Β΄. Κατά συνέπεια τα τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ και Α΄Β΄Γ΄΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1 και τις γωνίες τους αντίθετες.

Άρα και τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια.

Όταν ένα από τα δύο τρίγωνα είναι εκφυλισμένο, τότε ισχύει Γ΄ ≠ Γ΄΄ οπότε δεν υπάρχει πρόβλημα.

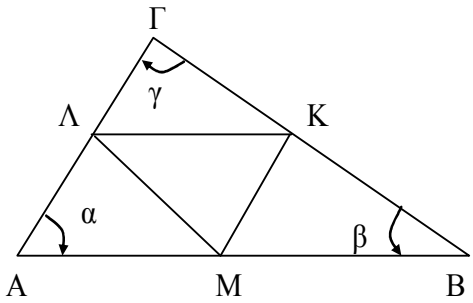
Όταν ομοίως ισχύει: ∠ΓΑΒ=∠ΓΆΆΒ΄= Ο ή π τότε η αλήθεια του θεωρήματος εξασφαλίζεται από το 4^{ο} αξίωμα. ■

Σε αυτό το σημείο έχουμε διατυπώσει τα τρία **κριτήρια ομοιότητας τριγώνων**. Προφανώς ισχύουν και ως **κριτήρια συμφωνίας τριγώνων**, όταν έχουμε λόγο ομοιότητας k = 1.

<u>Θεώρημα 5: ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ:</u>

Σε κάθε τρίγωνο ΔΑΒΓ ισχύει : ∠ΑΒΓ+ ∠ΒΓΑ+∠ΓΑΒ=π.

<u>Απόδειξη</u>**:** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.



Σχήμα 10

Τότε τα τρίγωνα που σχηματίζονται ΑΜΛ, ΜΒΚ, ΛΚΓ είναι όμοια με το ΑΒΓ με k = $\frac{1}{2}$ (από το 4^{ο} αξίωμα) και με ίσες γωνίες.

Οπότε $d(\Lambda,M)=\frac{1}{2}d(B,\Gamma)$, $d(M,K)=\frac{1}{2}d(\Gamma,A)$, $d(K,\Lambda)=\frac{1}{2}d(A,B)$.

Συνεπώς από θεώρημα 4 και το τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΑΒΓ και ίσο με τα άλλα τρία.

Ονομάζω $\angle ΓΑΒ = α$, $\angle ΑΒΓ = β$, $\angle ΒΓΑ = γ$

και έχουμε $\angle ΜΚΛ = \pm α$, $\angle ΚΛΜ = \pm β$, $\angle ΛΜΚ = \pm γ$ όπου θα ισχύει παντού το ίδιο πρόσημο.

Η ευθεία γωνία ΑΜΒ μπορεί να γραφεί:

$\angle ΑΜΒ = \angle ΑΜΛ + \angle ΛΜΚ + \angle ΚΜΒ = β + \angle ΛΜΚ + α = π$ (1)

Όμοια η ευθεία γωνία ΓΛΑ μπορεί να γραφεί:

$\angle ΓΛΑ = \angle ΓΛΚ + \angle ΚΛΜ + \angle ΜΛΑ = α + \angle ΚΛΜ + γ = π$ (2)

Όμοια η ευθεία γωνία ΒΚΓ μπορεί να γραφεί:

$\angle ΒΚΓ = \angle ΒΚΜ + \angle ΜΚΛ + \angle ΛΚΓ = γ + \angle ΜΚΛ + β = π$ (3)

Αν $\angle ΛΜΚ=+γ$ τότε από την (1) $α+β+γ=π$, άρα ισχύει η υπόθεση.

Αν $\angle ΛΜΚ=-γ$ τότε όλες οι γωνίες του τριγώνου ΚΛΜ έχουν αρνητικό πρόσημο, οπότε οι (1), (2), (3) γίνονται: $α – γ + β = π$ (1΄)

$α – β + γ = π$ (2΄)

$γ – α + β = π$ (3΄)

Προσθέτοντας έχουμε $α + β + γ = 3π = π$

Συνεπώς ισχύει η υπόθεση και σε αυτήν την περίπτωση.

Άρα $α+β+γ=π$.■

<u>Θεώρημα 6:</u>

Σε κάθε μη–εκφυλισμένο τρίγωνο οι τιμές των τριών γωνιών του μπορούν να πάρουν το ίδιο πρόσημο και βρίσκονται μεταξύ του 0 και π.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ένα μη – εκφυλισμένο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ότι το Β κινείται για παράδειγμα προς το σημείο Γ, πάνω στην ευθεία ΒΓ. Η γωνία γ μένει σταθερή, η γωνία α σύμφωνα με το αξίωμα 3 θα μεταβάλει κατά συνεχή τρόπο και θα προσεγγίζει την τιμή 0.

Όμως η γωνία α δε μπορεί να πάρει την τιμή 0 ή π εφόσον το ΑΒΓ είναι μη εκφυλισμένο. Εφόσον το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι π, έπεται ότι και η γωνία β μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο και τείνει να πάρει την οριακή τιμή $β_0$.

Προφανώς η β δε μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και π εφόσον το τρίγωνο είναι μη εκφυλισμένο.

Όταν το α είναι πολύ μικρό και το β τείνει στο β_0 το β + γ πλησιάζει στο π σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Δηλαδή όταν το α είναι μικρό το ελάχιστο υπόλοιπο του β και του γ βρίσκεται μεταξύ των 0 και π ή μεταξύ των 0 και –π και άρα με τη χρήση και του προηγούμενου θεωρήματος τα α, β, γ παίρνουν το ίδιο πρόσημο. ■

<u>Ορισμός</u>: Δύο ημιευθείες l, m σχηματίζουν **οξεία γωνία** αν $0<\angle lOm < \frac{\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2}< \angle lOm <0$.

<u>Ορισμός</u>: Δύο ημιευθείες l, m σχηματίζουν **αμβλεία γωνία** αν $\frac{\pi}{2}< \angle lOm < \pi$ ή $\pi < \angle lOm < -\frac{\pi}{2}$.

<u>Ορισμός</u>: Ένα τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι οξείες.

<u>Ορισμός</u>: Ένα τρίγωνο λέγεται **ορθογώνιο** αν μία γωνία του είναι ορθή.

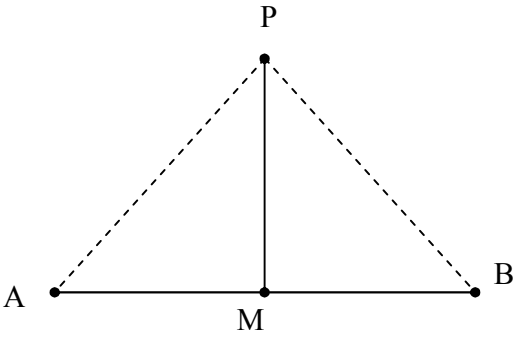
<u>Ορισμός</u>: Ένα τρίγωνο λέγεται **αμβλυγώνιο** αν μία γωνία του είναι αμβλεία.

<u>Ορισμός</u>: Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία κάθετη στην ΑΒ που διέρχεται από το μέσον Δ του ΑΒ.

<u>Θεώρημα 7:</u>

Όλα τα σημεία Ρ που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και μόνον αυτά βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Ρ τέτοιο ώστε d(P, A) = d(P, B). Έστω Μ το μέσον του ΑΒ και φέρνω την ΡΜ. ΘΔΟ η ΡΜ ⊥ ΑΒ.



Σχήμα 12

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΡ και ΜΒΡ

d(A, P) = d(B, P)

d(M, P) = d(M, P)

d(A, M) = d(M, B)

άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. (θεώρημα 4).

Άρα $\angle MPB = \pm\angle MPA$ και επειδή $A \neq B$, $\angle MPB = \pm\angle MPA$.

Συνεπώς $\angle BMP = -\angle AMP = \angle PMA$.

Ισχύει $\angle AMB = \angle AMP + \angle PMA = 2\angle AMP$

δηλαδή $\pi = 2\angle AMP$

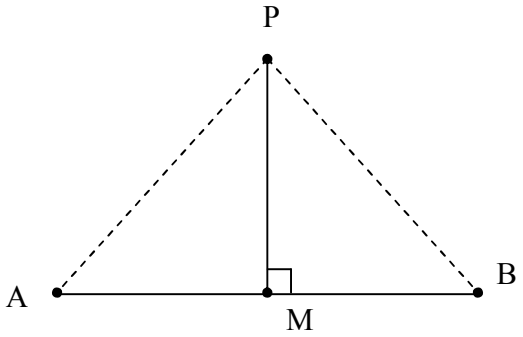
άρα $\angle AMP = \pm\frac{\pi}{2}$, άρα $PM \perp AB$.

Θα δείξουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύ τμήματος. Έστω P ένα σημείο που κείται στη μεσοκάθετο, τότε συγκρίνω τα τρίγωνα AMP και BMP και έχω: d(A, M) = d(M, B)

d(M, P) = d(M, P)

$\angle AMP = -\angle BMP$

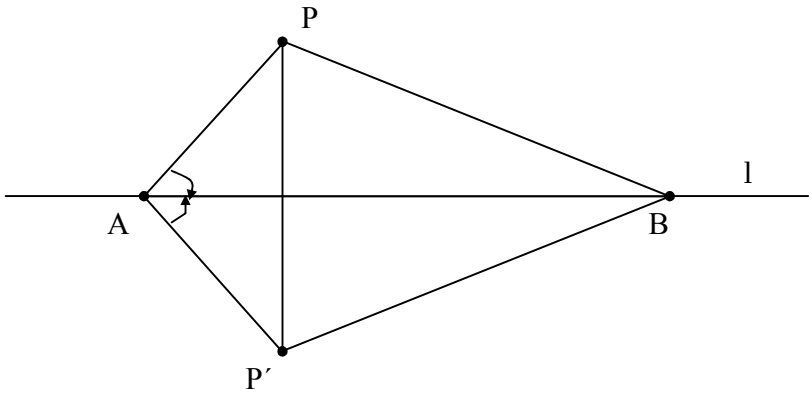
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (αξίωμα 4^{ο}) οπότε d(A, P) = d(B, P). Άρα όλα τα σημεία που κείνται στη μεσοκάθετο ισαπέχουν από τα A και B ■.



Σχήμα 13

Β.1.3. Θεωρία καθέτων και παραλλήλων

Θεώρημα 8: Από δοθέν σημείο διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία l.



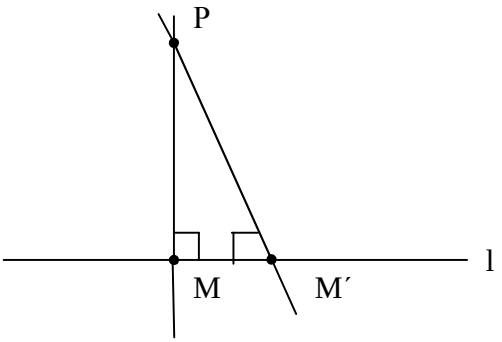
Σχήμα 14

Απόδειξη: Προφανώς ισχύει όταν το Ρ ανήκει στην l, διότι έστω ότι διέρχονται από το Ρ δύο κάθετες στο l τότε είναι άτοπο από αξίωμα 3.

Έστω ότι το Ρ δεν ανήκει στην l. Έστω Α, Β δύο σημεία της l, Α ≠ Β, και έχω κατασκευάσει το τρίγωνο ΑΒΡ. Κατασκευάζω και το τρίγωνο ΑΒΡ΄ ίσο με το ΑΒΡ ώστε Ρ΄≠ Ρ, ως εξής: κατασκευάζω γωνία $\angle P'AB$ ώστε $\angle P'AB = -\angle PAB$ και λαμβάνω το Ρ΄ έτσι ώστε d(A, P) = d(A, P΄). Εφόσον είναι ίσα τα τρίγωνα ισχύει: d(A, P) = d(A, P΄) και d(B, P) = d(B, P΄). Συνεπώς τα Α, Β ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΡΡ΄. Άρα $AB \perp PP'$. Οπότε βρήκα μία ευθεία κάθετη στην ΑΒ που διέρχεται από το Ρ.

Θα δείξουμε ότι αυτή η κάθετος είναι μοναδική.

Αν υπήρχε και δεύτερη κάθετος της ΑΒ διερχόμενη από το Ρ τότε για το τρίγωνο ΡΜΜ΄ όπου Μ, Μ΄ είναι τα σημεία της l που ανήκουν στις καθέτους έχουμε:



Σχήμα 15

$$\angle M'MP + \angle MPM' + \angle PM'M = \pi$$

$$\pm\frac{\pi}{2} + \angle MPM' \pm \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$

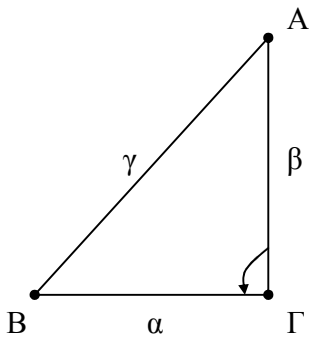
$$\Rightarrow \angle MPM' = O \text{ ή } \pi$$

Δηλαδή τότε οι Μ΄Ρ, ΜΡ θα έπρεπε να βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που είναι άτοπο από υπόθεση. ■

<u>Ορισμός</u>: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία καλείται **υποτείνουσα**.

<u>Θεώρημα 9: Πυθαγόρειο θεώρημα</u>

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.



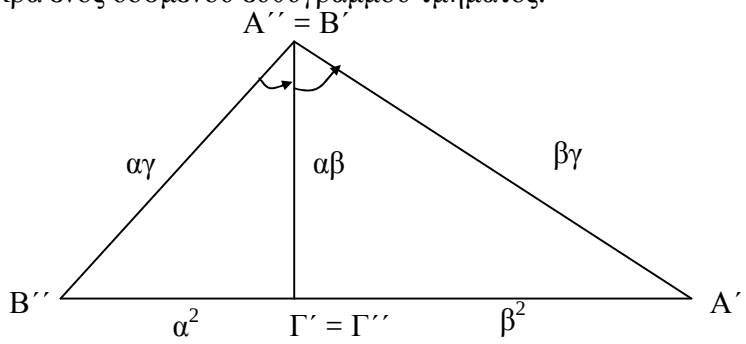
Σχήμα 16

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\angle A\Gamma B = \pm\frac{\pi}{2}$ τότε $d(A,B)^2 = d(A,\Gamma)^2 + d(\Gamma,B)^2$ ή $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Μεγεθύνω το τρίγωνο ΑΒΓ με λόγο β προς 1 (αξίωμα 4), δηλαδή κατασκευάζω όμοιό του με λόγο k = β. Το νέο αυτό τρίγωνο έχει πλευρές: αβ, β^2, βγ και την γωνία $\angle A'\Gamma'B'$ ορθή.

Όμοια κατασκευάζω τρίγωνο Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ μεγεθύνοντας το τρίγωνο ΑΒΓ κατά k = α. Το τρίγωνο Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ έχει πλευρές : α^2, αβ, αγ και τη γωνία $\angle A''\Gamma''B''$ ορθή.

Μεταφέρω τα τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ και Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ έτσι ώστε τα Β΄, Γ΄ και Α΄΄Γ΄΄ να είναι τα άκρα ενός δοσμένου ευθύγραμμου τμήματος.



Σχήμα 17

Ισχύει $\angle A'\Gamma'B'' = \angle A'\Gamma'B' + \angle B'\Gamma'B'' = \pm\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} = \pm\pi$.

Από αυτό συνεπάγεται ότι το Γ΄ βρίσκεται πάνω στην ευθεία Α΄Β΄΄ μεταξύ των Α΄ και Β΄΄.

Επίσης: $\angle B''B'A' = \angle B''B'\Gamma' + \angle \Gamma'B'A' =$

$$= \angle BA\Gamma + \angle \Gamma BA = \pm(\pi - A - B) = \pm\frac{\pi}{2}$$

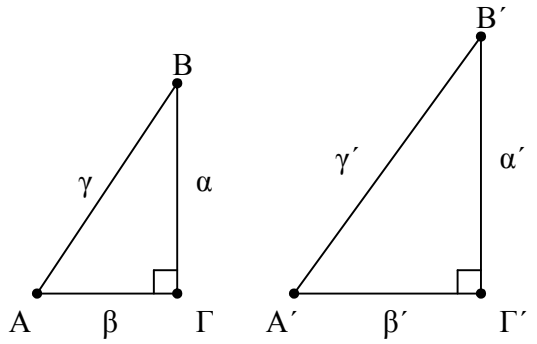
(από το θεώρημα αθροίσματος γωνιών τριγώνου).

Συνεπώς το τρίγωνο Α΄Β΄Β΄΄ είναι όμοιο με το ΑΒΓ με λόγο k = γ, οπότε η $d(A', B'')$ ισούται με γ^2 δηλαδή $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ■

<u>Πόρισμα 1 (Θ.9)</u>

Εάν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά δύο ορθογωνίων τριγώνων είναι ανάλογες, τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

Απόδειξη: Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έτσι ώστε $\angle\Gamma' = \angle\Gamma = \pm\frac{\pi}{2}$, $\gamma' = k\cdot\gamma$, α΄ = kα. Θα δείξουμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια. Αρκεί να δείξουμε ότι $\beta' = k\cdot\beta$.



Σχήμα 18

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχω:

$\gamma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 \Rightarrow \beta'^2 = \gamma'^2 - \alpha'^2 = k^2\cdot\gamma^2 - k^2\alpha^2 \Rightarrow \beta'^2 = k^2(\gamma^2 - \alpha^2) \Rightarrow \beta'^2 = k^2\cdot\beta^2$

γιατί από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

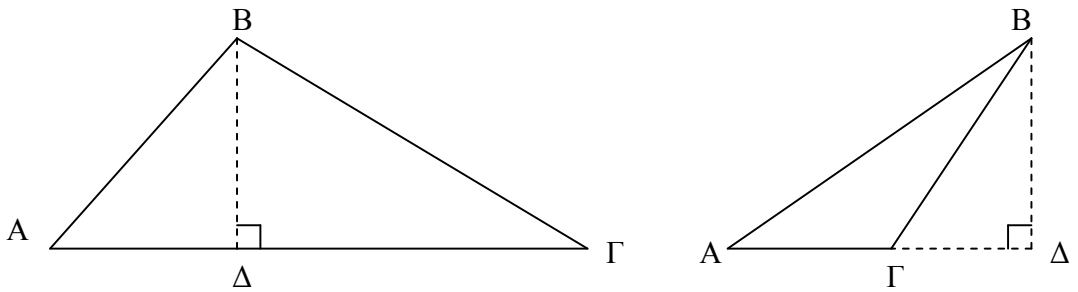
Άρα εφόσον $\beta'^2 = k^2\cdot\beta^2$ έχω $\beta' = k\cdot\beta$. Συνεπώς και οι τρεις πλευρές είναι ανάλογες, άρα από 3ο Κριτήριο ομοιότητας τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια. ■

Πόρισμα 2 (Θ.9):

Το άθροισμα των μέτρων δύο πλευρών είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ



Σχήμα 19

Θα δείξω ότι $d(A,B)+d(B,\Gamma)>d(A,\Gamma)$

Από το Β φέρνω την κάθετη στην ευθεία που βρίσκεται το ΑΓ και έστω Δ το σημείο τομής.

Ισχύει $d^2(A,B)=d^2(B,\Delta)+d^2(A,\Delta)$

συνεπώς $d^2(A,B)>d^2(A,\Delta)$ άρα $d(A,B)>d(A,\Delta)$ (1)

Όμοια $d^2(B,\Gamma)=d^2(B,\Delta)+d^2(\Delta,\Gamma)$ συνεπώς $d^2(B,\Gamma)>d^2(\Delta,\Gamma)$

άρα $d(B,\Gamma)>d(\Delta,\Gamma)$ (2)

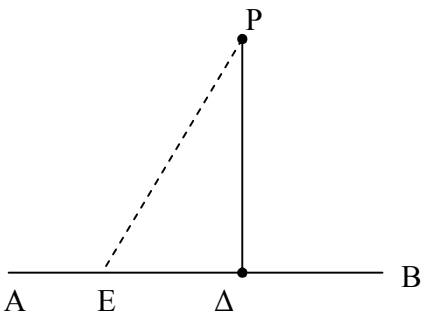
Άρα από (1) και (2) $d(A,B)+d(B,\Gamma)>d(A,\Gamma)$ ■

<u>Πόρισμα 3 (Θ.9):</u>

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός σημείου και μιας ευθείας ισούται με το μέτρο του ευθυγράμμου τμήματος που ανήκει στην κάθετο που διέρχεται από το σημείο στην ευθεία και έχει για άκρα το σημείο αυτό και το σημείο τομής των κάθετων ευθειών.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω η ευθεία ΑΒ και δοθέν σημείο Ρ και φέρνω την κάθετο από το Ρ στο ΑΒ, την ΡΔ. Θα δείξω ότι το μέτρο του ευθυγράμμου τμήματος ΡΔ είναι μικρότερο από κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το Ρ και κάποιο σημείο της ΑΒ. Έστω ΡΕ ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα. Από Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει



Σχήμα 20

$$d^2(P,E)=d^2(P,\Delta)+d^2(\Delta,E)$$

άρα $d^2(P,E)>d^2(P,\Delta)$ άρα $d(P,E)>d(P,\Delta)$ ■

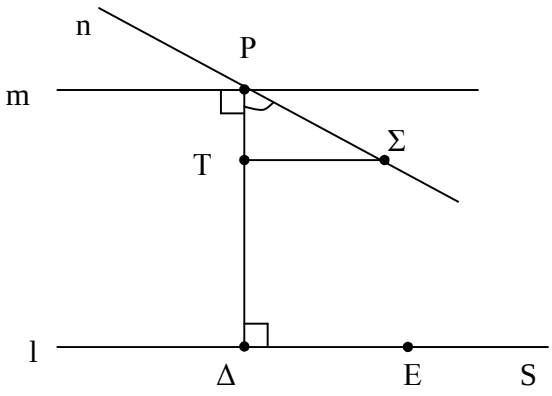
Τα τέσσερα αξιώματα και τα παραπάνω οχτώ θεωρήματα αποτελούν σύμφωνα με τους Birkhoff και Beatley το σκελετό της γεωμετρίας που μελετάμε.

<u>Θεώρημα 10:</u>

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλος προς την ευθεία.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ευθεία l και σημείο Ρ που δεν ανήκει στην ευθεία l.

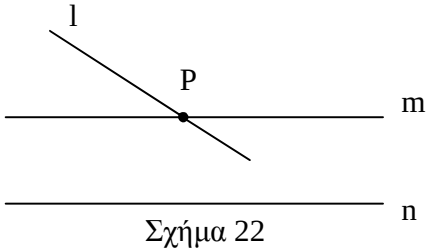
Πρώτα θα αποδείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ευθεία που διέρχεται από το Ρ παράλληλη στην l. Από θεώρημα 7 έχουμε ότι από το Ρ διέρχεται μοναδική κάθετος στην l, έστω ΡΔ. Επίσης έστω m η μοναδική κάθετος της ΡΔ που διέρχεται από το Ρ. Εφόσον οι l και m είναι κάθετες στην ΡΔ δε μπορεί να έχουν κοινό σημείο, γιατί αν είχαν τότε θα είχαμε από το σημείο τομής τους δυο καθέτους στην ΡΔ. Εφόσον οι l, m δε συναντιούνται τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ευθεία που διέρχεται από το Ρ παράλληλη στην l. Θα δείξουμε ότι η παράλληλος αυτή είναι μοναδική.



Σχήμα 21

Έστω n μία άλλη ευθεία που διέρχεται από το Ρ και είναι παράλληλη στην l. Από σημείο Σ της n με Σ ≠ Ρ, φέρνω κάθετο στην ΡΔ την οποία συναντά στο Τ. Στην ευθεία l βρίσκω σημείο S πάνω στην ημιευθεία ΔΕ ώστε $\angle \Sigma T P = \angle E \Delta P = \pm\frac{\pi}{2}$, και d(Δ, S) έτσι ώστε $\frac{S\Delta}{P\Delta} = \frac{\Sigma T}{PT}$. Τότε τα τρίγωνα ΡΔS και ΡΤΣ είναι όμοια εφόσον έχουν τις δύο πλευρές όμοιες και είναι ορθογώνια, οπότε η γωνία Ρ θα είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα, άρα η ημιευθεία PS ταυτίζεται με την ημιευθεία ΡΣ. Δηλαδή η ευθεία n τέμνει την l, άρα η n δεν είναι παράλληλος όπως είχαμε υποθέσει. Άρα η m είναι μοναδική παράλληλος της l που διέρχεται από το Ρ. ■

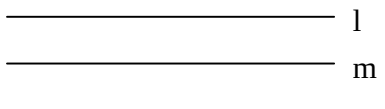
<u>Πόρισμα 1 (Θ.10)</u>: Εάν μία ευθεία τέμνει μια άλλη ευθεία, τότε θα τέμνει και κάθε παράλληλή της.



Σχήμα 22

<u>Απόδειξη</u>: Έστω η ευθεία l τέμνει την m στο Ρ και m // n, τότε αν η l δεν τέμνει την n τότε από το Ρ διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες στην n. Άτοπο από το θεώρημα 9. ■

<u>Πόρισμα 2 (Θ.10)</u>: Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες σε μία τρίτη ευθεία, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.



Σχήμα 23

<u>Απόδειξη</u>: Έστω l // m και n // m. Αν οι l, n συναντιούνται, τότε από το σημείο τομής τους θα έχουμε δυο παράλληλες προς την m. Άτοπο από θεώρημα 9. Άρα l // m. ■

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο των ευθειών που είναι παράλληλες σε μία ευθεία μαζί με την ευθεία μαζί με την ευθεία ονομάζεται **σύστημα παραλλήλων**. Κάθε ευθεία του συνόλου αυτού ορίζει το σύστημα αυτό.

Από το θεώρημα 9 έπεται ότι από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία ενός συστήματος παραλλήλων.

<u>Ορισμός</u>: Κάθε ευθεία που δεν ανήκει σε ένα συγκεκριμένο σύστημα παραλλήλων ονομάζεται **τέμνουσα** του συστήματος. Αυτή η ευθεία τέμνει κάθε ευθεία του συστήματος.

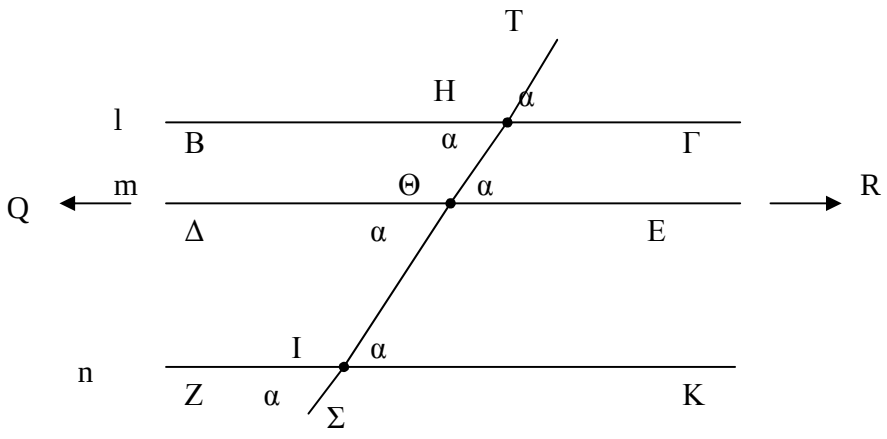
<u>Θεώρημα 11</u>:

Αν μία ευθεία τέμνει δύο ή περισσότερες ευθείες κατά ίση γωνία τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ευθείες l, m, n που τέμνονται από την ΤΣ στα σημεία Η, Θ, Ι αντίστοιχα ώστε $\angle ΓΗΤ = \angle ΕΘΤ = \angle ΚΙΤ = \angle ΒΗΣ = \angle ΔΘΣ = \angle ΖΙΣ = α$. Θα δείξουμε ότι l, m, n παράλληλες.

Αν οι l και m τέμνονται στο Q τότε στο τρίγωνο ΗΘQ το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο από π. Άτοπο.

Αν οι l, m τέμνονται από την άλλη μεριά της ΤΣ σε κάποιο σημείο R, τότε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΗΘR είναι επίσης μεγαλύτερο από π, άτοπο.



Σχήμα 24

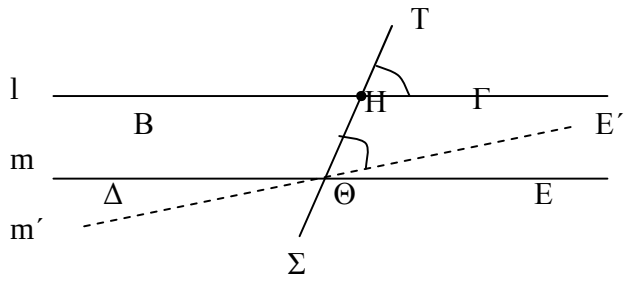
Άρα οι l, m δε συναντιούνται πουθενά. Άρα l // m.

Όμοια αποδεικνύεται ότι m // n άρα και l // n. ■

<u>Θεώρημα 12</u>:

Μία ευθεία τέμνει κάθε ευθεία ενός συστήματος παραλλήλων κατά ίση γωνία.

<u>Απόδειξη</u>:



Σχήμα 25

Έστω l, m παράλληλες ευθείες που τέμνονται από την ΤΣ στα σημεία Η,Θ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $\angle ΤΗΓ = \angle ΤΘΕ$. Κατασκευάζω την ευθεία m΄ έτσι ώστε $\angle Ε΄ΘΤ = \angle ΓΗΤ$. Από θεώρημα 10 οι l και m΄ θα είναι παράλληλες. Όμως εφόσον και l // m και από σημείο διέρχεται μοναδική παράλληλος στην l, τότε οι m και m΄ συμπίπτουν και $\angle ΤΘΕ = \angle ΤΗΓ$. ■

<u>Πόρισμα 1 (Θ.12)</u>:

Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μια ευθεία ενός συστήματος παραλλήλων, τότε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του συστήματος. Κάθε δύο τέτοιες κάθετες, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Β.1.4. Ορθογώνιες συντεταγμένες

Από τη θεωρία παραλλήλων εξασφαλίζεται ένα **ορθογώνιο δίκτυο** που σχηματίζεται από δύο συστήματα παραλλήλων κάθετα μεταξύ τους όπου μια και μόνο μια ευθεία του κάθε συστήματος διέρχεται από κάθε σημείο. Κάθε τέτοιο δίκτυο ορίζεται μονοσήμαντα από οποιαδήποτε ευθεία του ενός από τα δύο συστήματα.

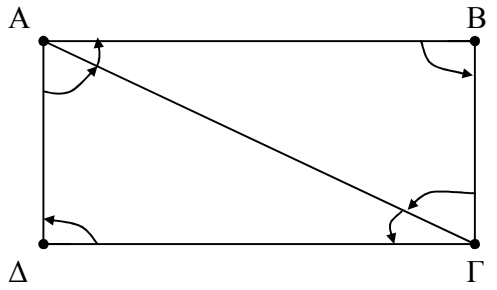
Με το θεώρημα που ακολουθεί θα μπορούμε να μιλάμε για **προσανατολισμένο σύστημα παραλλήλων** καθώς και για **προσανατολισμένο ορθογώνιο δίκτυο**.

Ορισμός: Το πολύγωνο που έχει τέσσερις πλευρές και τις τέσσερις γωνίες του ορθές ονομάζεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**.

Θεώρημα 13:

Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τα δυο ζεύγη των απέναντι πλευρών είναι ίσα και οι τέσσερις γωνίες είναι όλες ίσες με $+\frac{\pi}{2}$ ή όλες ίσες με $-\frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη: Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΑΔΓ είναι ίσα εφόσον: ΑΓ = ΑΓ



Σχήμα 26

$\angle ΑΒΓ = -\angle ΑΔΓ = \pm\frac{\pi}{2}$

$\angle ΓΑΒ = -\angle ΑΓΔ$

Άρα ΑΔ = ΒΓ και ΑΒ = ΔΓ

Θα αποδείξουμε ότι το πρόσημο των γωνιών είναι ίδιο και στις τέσσερις γωνίες.

Από θεώρημα 5 το άθροισμα των γωνιών των δυο τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΑ ισούται με 2π. Άρα το άθροισμα των γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με 2π.

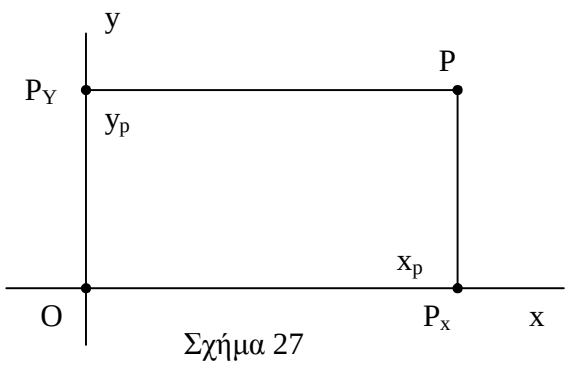
Επίσης οι γωνίες $\angle$ΒΓΑ και $\angle$ΓΑΒ είναι αριθμητικώς μικρότερες από $\frac{\pi}{2}$ και έχουν το ίδιο πρόσημο με την ορθή γωνία $\angle$ΑΒΓ (εφόσον ανήκουν στο τρίγωνο ΑΒΓ και από θεώρημα 5).

Όμοια οι γωνίες $\angle$ΑΓΔ και $\angle$ΔΑΓ είναι αριθμητικώς μικρότερες από $\frac{\pi}{2}$ και έχουν το ίδιο πρόσημο με την ορθή γωνία $\angle$ΓΔΑ.

Επίσης $\angle$ΒΓΑ $+ \angle$ΑΓΔ $= \pm\frac{\pi}{2}$, οπότε θα πρέπει αυτές οι δύο γωνιές να έχουν το ίδιο πρόσημο.

Οπότε όλες οι γωνίες έχουν το ίδιο πρόσημο άρα και οι τέσσερις γωνίες του ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο πρόσημο άρα είναι όλες ίσες με $+\frac{\pi}{2}$ ή με $-\frac{\pi}{2}$. ■

Τώρα πλέον μπορούμε να ορίσουμε ένα **προσανατολισμένο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** (x, y) με **άξονες** κάθετες προσανατολισμένες ευθείες Ox, Oy που τέμνονται στο σημείο O το οποίο ονομάζουμε **αρχή**. Επιλέγω ένα σύστημα αρίθμησης για τους Ox, Oy όπου όμως το σημείο O έχει την τιμή 0 και η αρίθμηση αυξάνεται αλγεβρικά προς τη θετική φορά.



Σχήμα 27

Από το P φέρνω τις μοναδικές κάθετες προς τους άξονες Ox και Oy οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία P_x και P_y αντίστοιχα. Οι ορθογώνιες συντεταγμένες του σημείου P είναι οι αριθμοί x_p, y_p οι οποίοι είναι μονοσήμαντη ορισμένοι αριθμοί σύμφωνα με το αξίωμα 1.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση μιας ευθείας του επιπέδου είναι η Ax+ By+ Γ = O με $A^2 + B^2 \neq 0$ και αντίστροφα κάθε εξίσωση αυτής της μορφής αναπαριστά ευθεία.

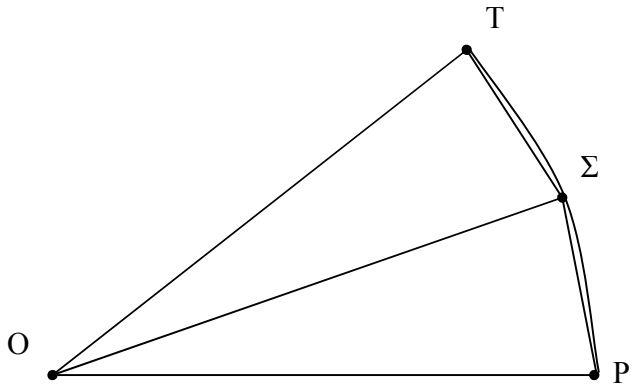
Τέλος με χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, μπορούμε να βρούμε την απόσταση δύο σημείων Ρ, Σ με συντεταγμένες (x_p, y_p), (x_Σ, y_Σ) αντίστοιχα.

$$d(\mathrm{P},\Sigma) = \sqrt{(x_p - x_\Sigma)^2 + (y_p - y_\Sigma)^2}$$

Β.1.5. Σύγκριση Birkhoff-Hilbert

Είναι εμφανές ότι τα δύο αξιωματικά συστήματα είναι ισοδύναμα. Για να το αποδείξουμε όμως θα πρέπει να δείξουμε ότι η αξιωματική του Birkhoff περιγράφει πλήρως το ευκλείδειο επίπεδο, δηλαδή ότι το σύστημα αυτό είναι **κατηγορικό**. Για να γίνει αυτό αρκεί να δείξω ότι η γωνία του συστήματος συμφωνεί με την ευκλείδεια γωνία (mod2π).

Η απόδειξη στηρίζεται στην αναλογία μεταξύ εγγεγραμένων γωνιών και τόξων. Ο κύκλος ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση r (ακτίνα) από δοθέν σημείο Ο (κέντρο). Αν θεωρήσουμε το Ο ως αρχή ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, τότε η εξίσωση που περιγράφει τον κύκλο είναι $x^2 + y^2 = r^2$.



Σχήμα 28

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε το μήκος του τόξου ορίζεται με το συνήθη τρόπο. Από το 3° αξίωμα, η γωνία ΡΟΣ μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο όταν Ρ είναι σταθερό σημείο και Σ μεταβαλλόμενο. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\angle$ΡΟΣ ταυτίζεται με το μήκος του τόξου ΡΣ στο μοναδιαίο κύκλο.

Θεωρούμε το λόγο $\frac{\angle \text{ΡΟΣ}}{\text{τόξο ΡΣ}}$ για σταθερό σημείο Ρ και μεταβαλλόμενο Σ. Τότε αν το τόξο ΡΣ πολλαπλασιαστεί με λόγο m : 1 τότε και η γωνία ΡΟΣ πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο λόγο m : 1. Για παράδειγμα, αν διπλασιάσουμε το μήκος του τόξου ώστε τόξοΡΣ = τόξοΣΤ τότε d(Ρ, Σ) = d(Σ, Τ) και από κριτήριο ομοιότητας $\angle \text{ΡΟΣ} = \angle \text{ΣΟΤ}$ συνεπώς $\angle \text{ΡΟΤ} = \angle \text{ΡΟΣ} + \angle \text{ΣΟΤ} = 2\angle \text{ΡΟΣ}$. Άρα $\frac{\angle \text{ΡΟΤ}}{\text{τόξο ΡΤ}} = \frac{\angle \text{ΡΟΣ}}{\text{τόξο ΡΟΣ}}$. Το ίδιο ισχύει για λόγο 3:1, 4:1, … κ.λ.π. Όμοια, αν διαιρεθεί το τόξο ΡΣ, ώστε ο λόγος να είναι 1: n τότε και η γωνία ΡΟΣ διαιρείται με τον ίδιο λόγο.

Συνεπώς ο λόγος $\frac{\angle \text{ΡΟΣ}}{\text{τόξο ΡΣ}}$ για Ρ σταθερό και Σ μεταβαλλόμενο, με Ρ≠Σ, έχει σταθερή τιμή k. Για τόξοΡΣ =π ισχύει $\angle \text{ΡΟΣ} = \pi$ άρα $\frac{\angle \text{ΡΟΣ}}{\text{τόξο ΡΣ}}$=1, δηλαδή k=1. Άρα $\angle \text{ΡΟΣ}$=τόξοΡΣ, δηλαδή η γωνία $\angle \text{ΡΟΣ}$ συμπίπτει με το μήκος του τόξου ΡΣ στο μοναδιαίο κύκλο.

Συνεπώς τα τέσσερα αξιώματα του Birkhoff αποτελούν ένα κατηγορικό σύστημα και άρα τα δύο συστήματα που θέλουμε να συγκρίνουμε είναι **ισοδύναμα**. Συνεπώς το μόνο που αλλάζει είναι ίσως η διαφορετική επιλογή κάποιων αξιωμάτων και πρωταρχικών εννοιών.

Πιο συγκεκριμένα οι έννοιες **‘‘σημείο’’** και **‘‘ευθεία’’** είναι πρωταρχικές και στα δύο συστήματα. Επίσης τα δύο πρώτα αξιώματα σύμπτωσης του Hilbert είναι ίδια με το 2^{ο} αξίωμα του Birkhoff (υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία που διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία).

Την έννοια του **‘‘μεταξύ’’** ο Hilbert την λαμβάνει ως πρωταρχική, αφιερώνοντας όμως τέσσερα αξιώματα σε αυτήν, ο Birkhoff την ορίζει(ένα σημείο Β θα λέμε ότι βρίσκεται ‘‘μεταξύ’’ των Α και Γ με Α≠Γ εάν ισχύει d(Α,Γ)=d(Α,Β)+d(Β,Γ)). Μάλιστα το 3^{ο} αξίωμα ‘‘μεταξύ’’ του Hilbert (αν Χ, Υ, Ζ είναι τρία διαφορετικά σημεία, το πολύ ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο) είναι άμεσο συμπέρασμα του 1^{ου} αξιώματος Birkhoff. Μέσα από την ομάδα των ‘‘μεταξύ’’ αξιωμάτων και κυρίως το αξίωμα του Patch, ο Hilbert εισάγει τον ορισμό του ημιεπιπέδου. Ο Birkhoff στα συγγράμματά του

δεν ορίζει ‘‘ανοιχτά’’ το ημιεπίπεδο αλλά μπορεί να οριστεί μέσω του 3^{ου} αξιώματός του που αφορά τις προσανατολισμένες γωνίες.

Άλλη μία έννοια την οποία ο Hilbert λαμβάνει ως πρωταρχική είναι η ‘‘συμφωνία’’, η οποία αποτελεί μία σχέση ισοδυναμίας. Στον Birkhoff η έννοια της συμφωνίας ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται μέσω της απόστασης. Το 3^{ο} αξίωμα ‘‘συμφωνίας’’ του Hilbert που αφορά το μονοσήμαντο της μεταφοράς των γωνιών, εξασφαλίζεται από τον Birkhoff, μέσω του 3ου αξιώματός του.

Η έννοια της ‘‘συνέχειας’’ η οποία περιγράφεται στην 4^{η} ομάδα αξιωμάτων του Hilbert, εξασφαλίζεται στην αξιωματική του Birkhoff μέσα από το 1^{ο} και 3^{ο} αξίωμα.

Η **σημαντικότερη διαφορά** στις δύο θεμελιώσεις είναι ότι στην αξιωματική του Birkhoff, το αξίωμα ομοιότητας τριγώνων (4^{ο} αξίωμα) έρχεται να αντικαταστήσεις το αξίωμα παραλληλίας του Hilbert. Κατά συνέπεια, στη θεμελίωση αυτή, η θεωρία των παραλλήλων έπεται από τη θεωρία ομοιότητας. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη και μοναδικότητα της παραλληλίας αποτελεί θεώρημα (9^{ο} θεώρημα της παρούσας εργασίας), ενώ ακολουθούν βασικά θεωρήματα που σχετίζονται με αυτήν. Μία άλλη συνέπεια αυτού, είναι ότι στην αξιωματική του Birkhoff η συμφωνία τριγώνων αποτελεί υποπερίπτωση της ομοιότητας , ενώ σε αυτήν του Hilbert, η έννοια της συμφωνίας τριγώνων εισάγεται με το 4^{ο} αξίωμα συμφωνίας.

Β.2. Αξιωματική Θεμελίωση της επίπεδης Γεωμετρίας από τον MacLane

Ο Saunders MacLane (1909-2005) διακεκριμένος καθηγητής του πανεπιστημίου του Σικάγο, υπήρξε ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα, που άσκησε τεράστια επιρροή στη μαθηματική κοινότητα της Αμερικής και όχι μόνο. Η συνεισφορά του στη Μαθηματική επιστήμη, συνίσταται σε διάφορους τομείς όπως στη Λογική, τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, την Άλγεβρα ενώ είναι ο δημιουργός (μαζί με τον Samuel Eilenberg) της Θεωρίας Κατηγοριών.

Ο Saunders MacLane είναι άλλος ένας σπουδαίος μαθηματικός που έδωσε μια νέα αξιωματική στην επίπεδη γεωμετρία. Η αξιωματική αυτή, η οποία δημοσιεύτηκε μετά τη θεμελίωση του Birkhoff, βασίζεται και αυτή στην έννοια της μετρικής και αποτελείται από 5 ομάδες αξιωμάτων.

Β.2.1. Αξιώματα και θεμελιώδη θεωρήματα

Ο MacLane λαμβάνει ως πρωταρχικούς όρους τις έννοιες **σημείο, απόσταση, ευθεία και μέτρο γωνίας**. Η απόσταση d(AB) είναι η συνήθης έννοια της απόστασης του σημείου Α από το Β. Ακολουθούν οι πέντε ομάδες των αξιωμάτων, οι ορισμοί που χρησιμοποιούνται, καθώς και βασικά θεωρήματα και λήμματα που απορρέουν από αυτά.

1^{η} ομάδα αξιωμάτων: Τα αξιώματα της απόστασης

Υπάρχουν τέσσερα αξιώματα που αφορούν τα σημεία και τις αποστάσεις.

D1) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία

D2) Αν Α, Β σημεία, η d(AB) είναι μη αρνητικός αριθμός

D3) Αν Α,Β σημεία, ισχύει d(AB)=0 αν και μόνο αν Α=Β

D4) Αν Α,Β σημεία, d(AB)= d(BA)

Ορισμός: Ένα σημείο Β λέμε ότι κείται **μεταξύ** των σημείων Α και Γ αν τα τρία σημεία είναι διαφορετικά και d(ΑΓ)=d(ΑΒ)+d(ΒΓ)

<u>Ορισμός:</u> Ευθύγραμμο τμήμα από το Α στο Β καλείται το σύνολο των σημείων Ρ για τα οποία ισχύει d(AB)=d(AP)+d(PB).

<u>Ορισμός:</u> Αν $A \neq \Gamma$, το **διάστημα ΑΓ** (συμβολίζεται **IntΑΓ**) ορίζεται ως το σύνολο όλων των σημείων Β που βρίσκονται μεταξύ των Α και Γ.

Έτσι το IntΑΓ είναι το σύνηθες ανοιχτό διάστημα από το Α στο Γ.

<u>Ορισμός:</u>Για Α,Ο δύο διαφορετικά σημεία, ορίζουμε το σύνολο $r = \{P / P \neq O, d(AP) = |d(OA) - d(OP)|\}$. Κάθε τέτοιο σύνολο καλείται **ημιευθεία ΟΑ** από το Ο.

Παρατηρούμε ότι κάθε ημιευθεία από το Ο είναι ένα σύνολο σημείων που δεν περιλαμβάνει το Ο. Η ημιευθεία θα μπορούσε επίσης να περιγραφεί και ως η ένωση όλων των διαστημάτων ΑΡ με Ρ σύνολο σημείων για τα οποία ισχύει είτε Ρ=Α είτε Α κείται μεταξύ των Ο και Ρ. Το IntΟΑ μπορεί τώρα να περιγραφεί ως το σύνολο όλων των σημείων Ρ της ημιευθείας ΟΑ για τα οποία d(OP)<d(OA). Επίσης IntΟΑ είναι η τομή των ημιευθειών ΟΑ και ΑΟ.

<u>2η ομάδα αξιωμάτων: Τα αξιώματα των ευθειών</u>

L1) Μια ευθεία είναι ένα σύνολο σημείων που περιλαμβάνει περισσότερα από ένα σημεία

L2) Από δύο διαφορετικά σημεία, διέρχεται μοναδική ευθεία

L3) Τρία διαφορετικά σημεία είναι συνευθειακά αν και μόνο αν ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο

L4) Σε κάθε ημιευθεία από ένα σημείο Ο και για κάθε πραγματικό αριθμό β, υπάρχει σημείο Β ώστε d(OB)=β

Η ευθεία του αξιώματος L3 είναι η ένωση των συνόλων: IntAB, του συνόλου των σημείων Ρ με Α μεταξύ των Ρ και Β, του συνόλου των σημείων Σ με Β μεταξύ των Α και Σ συμπεριλαμβανομένων και των σημείων Α,Β. Συνεπώς ισχύει ημιευθεία $AB \subset$ ευθεία AB.

<u>Λήμμα 1:</u> Αν Α, Β και Γ είναι συνευθειακά, τότε $d(\text{ΑΓ}) \leq d(\text{ΑΒ}) + d(\text{ΒΓ})$

Απόδειξη: Από το αξίωμα L3, ένα από τα σημεία Α, Β, Γ βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο. Έστω Β μεταξύ του Α και Γ, τότε ισχύει $d(\text{ΑΓ}) = d(\text{ΑΒ}) + d(\text{ΒΓ})$. Αν το Α βρίσκεται μεταξύ των Β,Γ ή το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α,Β τότε d(ΑΓ)<d(ΑΒ)+d(ΒΓ).■

Λήμμα 2: Αν το Β βρίσκεται μεταξύ των Ο και Α, τότε IntOB $\subset$ IntOA

Απόδειξη: Έστω Ρ$\in$ IntOB, θα αποδείξω ότι Ρ$\in$ IntOA. Εφόσον Ρ$\in$ IntOB ισχύει d(OB)=d(OP)+d(PB) (1). Επίσης έχουμε ότι Β είναι μεταξύ των ΟΑ, άρα d(OA)=d(OB)+d(BA) η οποία λόγω της (1) γίνεται d(OA)=d(OP)+d(BP)+d(BA)$\geq$ d(OP)+d(PA), διότι από το 1^{ο} λήμμα έχουμε ότι εφόσον Α,Β,Ρ συνευθειακά, $d(PA) \leq d(PB) + d(\text{B}A)$. Για τον ίδιο λόγο ισχύει d(OA)$\leq$d(OP)+d(PA). Από τις δύο ανισότητες προκύπτει η ισότητα d(OA)=d(OP)+d(PA), συνεπώς το Ρ βρίσκεται μεταξύ των Ο και Α άρα Ρ$\in$ IntOA.■

Λήμμα 3: Σε κάθε ημιευθεία από ένα σημείο Ο και για ένα θετικό πραγματικό αριθμό β, υπάρχει μοναδικό σημείο Β ώστε d(OB)=β.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο τέτοια σημεία Β, Β’ σε κάποια ημιευθεία ΟΑ. Τότε τα Ο, Α, Β και Β΄ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και μάλιστα αυτήν που ορίζει η ημιευθεία ΟΑ. Θα γράφουμε [x, y, z] όταν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, και z είναι τέτοιοι ώστε ένας από αυτούς είναι το άθροισμα των άλλων δύο. Εφόσον Ο, Β, Β΄ είναι συνευθειακά, από το αξίωμα L3 έχουμε [β ,β, d(BB΄)] και εφόσον Β≠Β΄ έχουμε d(BB΄)≠0 άρα d(BB΄)=2β. Θέτω α=d(OA)

1^{η} περίπτωση: Έστω β>α, τότε το Α είναι μεταξύ του Ο και του Β και επίσης είναι μεταξύ του Ο και του Β΄, άρα d(AB)=β-α=d(AB΄). Εφόσον Α, Β, Β΄ είναι συνευθειακά τότε [d(AB), d(AB΄), d(BB΄)]=[β-α, β-α, d(BB΄)] συνεπώς d(BB΄)=2β-2α, το οποίο είναι άτοπο διότι έχουμε ότι d(BB΄)=2β και α≠0. Άρα Β=Β΄.

2^{η} περίπτωση: Έστω β=α. Εφόσον το Β ανήκει στην ημιευθεία ΟΑ έχουμε Β$\in$ IntOA ή Α$\in$ IntOB. Αν Β$\in$ IntOA τότε α=d(OA)=d(OB)+d(BA), άρα d(BA)=0 οπότε από το αξίωμα D3 έχουμε Β=Α. Αν Α$\in$ IntOB τότε β=d(OB)=d(OA)+d(AB), άρα d(AB)=0 οπότε από το αξίωμα D3 έχουμε Α=Β. Το ίδιο ισχύει και για το Β΄. Άρα Β=Α=Β΄.

3η περίπτωση: Έστω β<α. Τότε τα Β, Β΄ βρίσκονται μεταξύ του Ο και του Α, συνεπώς d(ΒΑ)=d(Β΄Α)=d(ΟΑ)-d(ΟΒ)=α-β. Εφόσον Α, Β, Β΄ συνευθειακά έχουμε [α-β, α-β, d(ΒΒ΄)] άρα d(ΒΒ΄)=2α-2β . Πιο πάνω βρήκαμε ότι d(ΒΒ΄)=2β, άρα α=2β , δηλαδή d(ΟΑ)=d(ΒΒ΄)=2β. Συνεπώς d(ΟΒ)=d(ΒΑ)=d(ΑΒ΄)=d(Β΄Ο)=β.

Έστω ένα σημείο Γ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο d(ΟΓ)=3β (αξίωμα L4). Τότε το Α θα βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Γ (διότι α=2β) και Β,Β΄∈ IntΟΑ⊂IntΟΓ (από το λήμμα 2). Έτσι d(ΒΓ)=2β=d(Β΄Γ). Εφόσον Β, Β΄, Γ είναι συνευθειακά τότε [2β, 2β, 2β], άτοπο. Άρα Β=Β΄.■

<u>Θεώρημα 1:</u> Αν Ο≠Α και Β∈ ημιευθεία ΟΑ τότε ημιευθεία ΟΒ= ημιευθεία ΟΑ

<u>Απόδειξη:</u> Έστω Β≠Α και Β∈ στην ημιευθεία ΟΑ, τότε είτε Β∈ IntΟΑ είτε Α∈ IntΟΒ. Εφόσον το συμπέρασμα είναι συμμετρικό των Α και Β, αρκεί να δείξω ότι αν Β∈ IntΟΑ τότε ημιευθεία ΟΒ=ημιευθεία ΟΑ. Επίσης από το αξίωμα L4 η ημιευθεία ΟΒ περιέχει ένα σημείο για κάθε δεδομένη απόσταση από το Ο, ενώ από το Λήμμα 3 η ημιευθεία ΟΑ περιέχει μόνο ένα τέτοιο σημείο. Έτσι αρκεί να δείξω ότι αν Β ∈ IntΟΑ τότε ημιευθεία ΟΒ⊂ ημιευθεία ΟΑ.

Για να το δείξω αυτό, έστω Ρ∈ ημιευθεία ΟΒ και θεωρώ τις τρεις πιθανές περιπτώσεις για το Ρ:

i. Αν Ρ∈ IntΟΒ τότε από το λήμμα 2 IntΟΒ⊂ IntΟΑ⊂ημιευθεία ΟΑ οπότε Ρ∈ ημιευθεία ΟΑ
ii. Αν Ρ=Β τότε Ρ∈ ημιευθεία ΟΑ
iii. Αν Β∈ IntΟΡ τότε d(ΟΡ)=d(ΟΒ)+d(ΒΡ). Εφόσον Β∈ IntΟΑ τότε d(ΟΑ)=d(ΟΒ)+d(ΒΑ). Έστω Ρ∉ ημιευθεία ΟΑ, εφόσον το Ρ βρίσκεται στην ευθεία ΟΑ τότε το Ο βρίσκεται μεταξύ των Ρ και Α, συνεπώς d(ΡΑ)=d(ΡΟ)+d(ΟΑ)= d(ΟΒ)+d(ΒΡ)+ d(ΟΒ)+d(ΒΑ)≥ 2d(ΟΒ)+d(ΡΑ) (από λήμμα 1), δηλαδή d(ΡΑ)≥ 2d(ΟΒ)+d(ΡΑ) άρα 2d(ΟΒ)=0 άρα d(ΟΒ)=0 άρα Β=Ο, άτοπο. Άρα Ρ∈ ημιευθεία ΟΑ.■

Αν θέταμε το Θεώρημα 1 ως αξίωμα, τότε τα λήμματα 2 και 3 θα αποδεικνύονταν πολύ εύκολα. Συγκεκριμένα στην απόδειξη του λήμματος 3 θα απαιτείται μόνο η δεύτερη περίπτωση.

<u>Πόρισμα:</u> Δύο οποιεσδήποτε ημιευθείες από το Ο είτε ταυτίζονται, είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

<u>Θεώρημα 2:</u> Αν Ο είναι οποιοδήποτε σημείο μιας ευθείας l, τότε η l περιέχει ακριβώς δύο διαφορετικές ημιευθείες από το Ο, και κάθε σημείο $B \in l$ με $B \neq O$ ανήκει σε μία από αυτές τις ημιευθείες.

<u>Απόδειξη:</u> Από το αξίωμα L1 υπάρχει σημείο $A \neq O$ της l. Από το αξίωμα L4 πάνω στην ημιευθεία AO υπάρχει σημείο Α΄ με d(AA΄)=2d(OA). Εφόσον το Α΄ δε βρίσκεται μεταξύ των Ο και Α, τότε το Ο είναι μεταξύ των Α και Α΄. Αν α=d(OA) τότε d(AA΄)=2α.

Συμβολίζω με r=ημιευθεία OA και r΄=ημιευθεία OA΄. Έστω $B \neq O$ πάνω στην l. Εάν το $B \notin r$ τότε από L3 και τον ορισμό της ημιευθείας, το Ο είναι μεταξύ των Α και Β και d(AB)=d(AO)+d(OB)=α+d(OB). Αν $B \notin r'$ τότε Ο είναι μεταξύ των Α΄ και Β και d(A΄B)=α+d(OB).

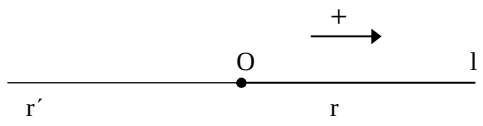
Όμως τα Α, Α΄, Β είναι συνευθειακά και διαφορετικά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ένας από τους τρεις αριθμούς α+d(OB), α+d(OB), 2α είναι άθροισμα των άλλων δύο, το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς το Β βρίσκεται είτε στην r είτε στην r΄.

Εφόσον $A' \in r'$ και $A' \notin r$ από το παραπάνω πόρισμα έχουμε ότι τα r,r΄ δεν έχουν κοινό σημείο. Κάθε ημιευθεία της l που ξεκινά από το Ο πρέπει να έχει ένα σημείο της είτε στην r είτε στην r΄, συνεπώς από το πόρισμα αυτή η ημιευθεία θα είναι είτε η r είτε η r΄.■

<u>Ορισμός:</u> Καλούμε την r΄ **αντίθετη** της r.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος 2 μπορούμε να ορίσουμε συντεταγμένες πάνω σε μία ευθεία l.

<u>Ορισμός:</u> Αν $O \in l$, επιλέγω μία από τις δύο ημιευθείες από το Ο και την καλώ **θετική ημιευθεία** r, ενώ την άλλη την καλώ **αρνητική ημιευθεία** r΄.



Σχήμα 1

Ορίζω μία συνάρτηση x μεταξύ του συνόλου l και των πραγματικών αριθμών, με x(O)=0, x(P)=d(OP) αν P$\in r$ και x(P)=-d(OP) αν P$\in r'$. Καλούμε τη x **τετμημένη της l** με αρχή το O και θετική φορά την r.

<u>Θεώρημα 3:</u> Κάθε τετμημένη x μιας ευθείας l είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ της l και του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ώστε d(PΣ)=$|x(P)-x(\Sigma)|$ $\forall P,\Sigma \in l$.

<u>Απόδειξη:</u> Η ένα προς ένα αντιστοιχία συνεπάγεται άμεσα από το λήμμα 3. Για να αποδείξω την ισότητα, θεωρώ το σημείο O ώστε x(O)=0. Διακρίνω έξι περιπτώσεις:

- Αν O είναι μεταξύ των P και Σ και P$\in r'$ και Σ$\in r$ τότε : d(PΣ)=d(PO)+d(OΣ)= d(OP)+d(OΣ)=-x(P)+x(Σ)
- Αν O είναι μεταξύ των P και Σ και P$\in r$ και Σ$\in r'$ τότε: d(PΣ)=d(PO)+d(OΣ)= d(OP)+d(OΣ)=x(P)-x(Σ)
- Αν τα P και Σ $\in r$ και το P μεταξύ των O και Σ τότε : d(OΣ)=d(OP)+d(PΣ), x(Σ)=x(P)+d(PΣ) άρα d(PΣ)= x(Σ)-x(P)
- Αν τα P και Σ $\in r$ και το Σ μεταξύ των O και P τότε : d(OP)=d(OΣ)+d(ΣP), x(P)=x(Σ)+d(PΣ) άρα d(PΣ)= x(P)-x(Σ)
- Αν τα P και Σ $\in r'$ και το P μεταξύ των Σ και O τότε : d(OΣ)=d(OP)+d(PΣ), $-x$(Σ)=-x(P)+d(PΣ) άρα d(PΣ)= x(P)-x(Σ)
- Αν τα P και Σ $\in r'$ και το Σ μεταξύ των P και O τότε : d(OP)=d(OΣ)+d(PΣ), $-x$(P)=-x(Σ)+d(PΣ) άρα d(PΣ)= x(Σ)-x(P).

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση d(PΣ)=$|x(P)-x(\Sigma)|$ ■

Στην αξιωματική του Birkhoff το παραπάνω θεώρημα τίθεται ως αξίωμα.

<u>Πόρισμα:</u> Το σημείο Σ βρίσκεται μεταξύ των P και Z αν και μόνο αν είτε x(P)<x(Σ)<x(Z) είτε x(P)>x(Σ)>x(Z).

Από τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι οι δύο ημιευθείες από οποιοδήποτε σημείο A της l, είναι τα σύνολα των σημείων P με x(P)>x(A) και x(P)<x(A) αντίστοιχα. Συνεπώς εάν x, y είναι δύο τετμημένες σε μία ευθεία l, υπάρχει ένας πραγματικός

αριθμός α και ένας αριθμός ε= ± 1 ώστε x(P)=εy(P)+α για κάθε P$\in l$. Για ε=-1 σημαίνει αλλαγή φοράς στην ευθεία.

<u>Ορισμός:</u> Η **κατεύθυνση** D σε μία ευθεία l μπορεί να περιγραφεί ως μία συνάρτηση η οποία ορίζει σε κάθε σημείο P της l μία ημιευθεία D(P) της l από το P, ώστε για κάθε δύο σημεία P και Σ της l ισχύει D(P) $\cap$ D(Σ)=D(P) ή D(P) $\cap$ D(Σ)=D(Σ).

<u>Ορισμός:</u> Θα λέμε τότε ότι το P **προηγείται** του Σ στην κατεύθυνση D αν D(P) $\cap$ D(Σ)=D(Σ). Η σχέση προηγείται ορίζει μια σχέση διάταξης των σημείων της ευθείας.

<u>Θεώρημα 4:</u> Μία ευθεία έχει ακριβώς δύο κατευθύνσεις την D και την D΄.

Η απόδειξη είναι προφανής. Δοθέντος μίας κατεύθυνσης D, η δεύτερη κατεύθυνση είναι αυτή της D΄(P) η οποία είναι η αντίθετη της D(P) για κάθε σημείο P. Συνεπώς η κατεύθυνση καθορίζεται από μία οποιαδήποτε θετική ημιευθεία r που μας δίνεται από σημείο O$\in l$ ώστε D(O)=r.

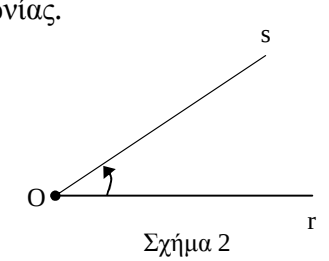
<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u>

Με τη χρήση των παραπάνω τεσσάρων αξιωμάτων της απόστασης, των τριών αξιωμάτων των ευθειών L1,L2,L4 και την αναδιατύπωση του L3: «δοθέντων τριών διαφορετικών σημείων, ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο» θεμελιώνεται η μονοδιάστατη γεωμετρία, δηλαδή η γεωμετρία της ευθείας.

<u>3η ομάδα αξιωμάτων: Τα αξιώματα του μέτρου γωνίας</u>

<u>Ορισμός:</u> Θεωρούμε τη **γωνία** $\angle rs$ ως ένα σχήμα που αποτελείται από ένα σημείο O και δύο ημιευθείες r και s από το O.

Οι γωνίες μετρούνται αντίθετα από τη φορά του ρολογιού, σε μοίρες, συνεπώς για κάθε πραγματικό αριθμό γ, γράφουμε γ^0 για τον γ(mod360). Εισάγονται τέσσερα αξιώματα του μέτρου γωνίας.



Σχήμα 2

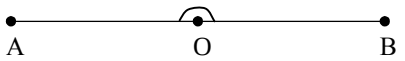
A1) Αν r και s είναι ημιευθείες από το ίδιο σημείο, $\angle rs$ είναι ένας πραγματικός αριθμός mod360

A2) Αν r, s και t είναι τρεις ημιευθείες από το ίδιο σημείο τότε $\angle rs + \angle st = \angle rt$

A3) Αν r είναι μία ημιευθεία από το O και γ ένας πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει μία ημιευθεία s από το O ώστε $\angle rs = \gamma^0$

Αν έχουμε σημεία A, O, B διαφορετικά μεταξύ τους, συμβολίζουμε με $\angle$AOB τη γωνία που σχηματίζεται από τις ημιευθείες OA και OB.

A4) Αν A≠O≠B τότε $\angle AOB = \angle BOA \neq 0^0$ αν και μόνο αν d(AB)=d(AO)+d(OB).



Σχήμα 3

Εφόσον οι γωνίες είναι προσανατολισμένες το αξίωμα A2 μας δίνει τη δυνατότητα πρόσθεσης των γωνιών. Από αυτό έπεται ότι $\angle rr = 0$ και $\angle rs = -\angle sr$ (λέγονται **αντίθετες γωνίες**). Συνεπώς $\angle AOB + \angle BOA = 360^0 = 0^0$ οπότε από το αξίωμα A4 έχουμε ότι αν $\angle AOB = \angle BOA \neq 0^0$ τότε $\angle AOB = 180^0$. Σύμφωνα με αυτά, το αξίωμα αυτό μπορεί να αντικατασταθεί με το επόμενο <u>ισοδύναμό</u> του: *Αν A≠O≠B τότε* $\angle AOB = 180^0$ *αν και μόνο αν το O βρίσκεται μεταξύ των A και B.*

<u>Θεώρημα 5:</u> Έστω r και s δύο ημιευθείες από το ίδιο σημείο O. Αν $\angle rs = 180^0$, τότε οι r και s με το O ορίζουν μία ευθεία. Αν $\angle rs = 0^0$ τότε r=s.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\angle rs = 180^0$, r≠s τότε από το πόρισμα του θεωρήματος 1 $r \cap s = 0$. Έστω ένα σημείο A∈ r και ένα B∈ s, τότε A≠O≠B και $\angle AOB = \angle rs = 180^0$. Τότε από το ισοδύναμο του αξιώματος A4 το O βρίσκεται μεταξύ των A και B στην ευθεία AB. Η ευθεία αυτή περιέχει τις r και s και μάλιστα από το θεώρημα 2, η ευθεία αυτή αποτελείται από τις ημιευθείες r, s και το σημείο O.

Έστω $\angle rs = 0^0$. Από το A3 υπάρχει ημιευθεία t από το O με $\angle st = 180^0$ συνεπώς οι s, t και O ορίζουν μία ευθεία. Τότε $\angle rt = \angle rs + \angle st = 0^0 + 180^0 = 180^0$, συνεπώς και οι r, t και O ορίζουν μία ευθεία. Είναι η ίδια ευθεία, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 2 η r θα ταυτίζεται είτε με την s είτε με την t. Εφόσον r≠t ισχύει r=s.■

<u>Πόρισμα:</u> Αν Α≠Ο η ημιευθεία ΟΑ αποτελείται από όλα τα σημεία Β≠Ο με $\angle AOB = 0^0$.

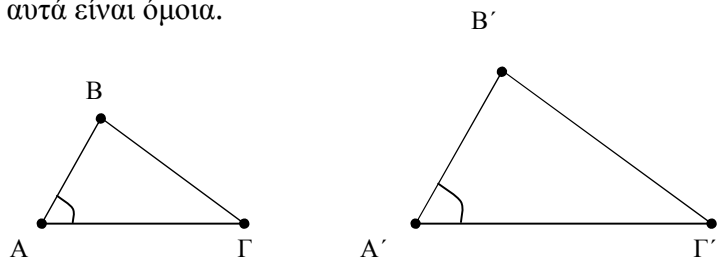
<u>Ορισμός:</u> Προσανατολισμένο τρίγωνο ΑΒΓ λέμε το σχήμα Δ**ΑΒΓ** που αποτελείται από τρία διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ (**κορυφές**), και τα.τρία διαστήματα που σχηματίζουν τα σημεία αυτά. Αρκεί να προσέχουμε πάντα τη διάταξη των κορυφών του. Τότε κάθε ένα από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζουν οι κορυφές του το ονομάζουμε **πλευρά**.

<u>Ορισμός:</u>Δύο προσανατολισμένα τρίγωνα ΔΑΒΓ και ΔΑ΄Β΄Γ΄ είναι **όμοια** αν υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός κ και ένας αριθμός ε=±1 ώστε $\angle AB\Gamma = \varepsilon\angle A'B'\Gamma'$, $\angle B\Gamma A = \varepsilon\angle B'\Gamma'A'$, $\angle \Gamma AB = \varepsilon\angle \Gamma'A'B'$, κd(ΑΒ)=d(Α'Β'), κd(ΒΓ)=d(Β΄Γ΄), κd(ΓΑ)=d(Γ΄Α΄).

<u>Ορισμός:</u> Δύο τρίγωνα είναι **ίσα ή σύμφωνα** όταν είναι όμοια με κ=1.

<u>4η ομάδα: Το αξίωμα ομοιότητας</u>

Αν για δύο προσανατολισμένα τρίγωνα ΔΑΒΓ και ΔΑ'Β'Γ' ισχύει $\angle AB\Gamma = \varepsilon\angle A'B'\Gamma'$, d(ΑΒ)=κd(Α΄Β΄) και d(ΒΓ)=κd(Β΄Γ΄) (με ε=±1 και κ θετικός πραγματικός) τότε τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια.



Σχήμα 4

Σύμφωνα με τον MacLane ο Reinhold Baer του είχε υποδείξει ένα διαφορετικό τρόπο ερμηνείας του αξιώματος ομοιότητας. Έστω ε=±1, κ>0 και δύο ημιευθείες r=ημιευθεία ΒΓ και r΄=ημιευθεία Β΄Γ΄. Τότε υπάρχει μία «κίνηση» Μ, όπου Μ ορίζεται ως ο *μετασχηματισμός* στο επίπεδο, για τον οποίο ισχύει ότι για κάθε σημείο Ρ μας δίνει Ρ΄=Μ(Ρ) με $\angle PB\Gamma = \varepsilon\angle P'B'\Gamma'$ και d(Ρ΄Β΄)=κd(ΡΒ). Από τα αξιώματα Α3 και L3 και τα θεωρήματα 1 και 5 προκύπτει ότι αυτό το σημείο Ρ΄ είναι μοναδικό. Τότε από το αξίωμα

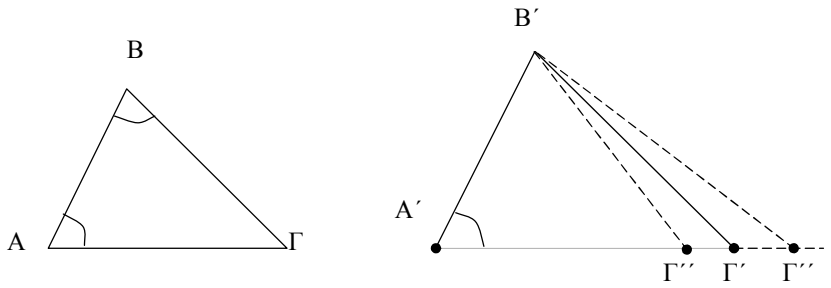
ομοιότητας έχουμε ότι ο Μ πολλαπλασιάζει τις αποστάσεις με κ και τις γωνίες με ε: d(M(P)M(Σ))=κd(PΣ), $\angle M(P)M(O)M(\Sigma) = \varepsilon\angle$PΟΣ. Αναπαριστώντας τον Μ ως σύνθεση απλούστερων «μετασχηματισμών», μπορούμε να συμπεράνουμε το γενικό αξίωμα ομοιότητας από τις ακόλουθες τρεις ειδικές περιπτώσεις: **(i)** κ=1, ε=±1, r≠r΄ (συμφωνία), **(ii)** κ=1, ε=-1, r=r΄ (ανάκλαση) και **(iii)** κ≠1, ε=1, r=r΄.

<u>Ορισμός:</u> Ένα τρίγωνο ΔΑΒΓ λέγεται **εκφυλισμένο** αν οι κορυφές του Α, Β, Γ είναι συνευθειακά σημεία.

Στην περίπτωση εκφυλισμένου τριγώνου το αξίωμα ομοιότητας προκύπτει από τα προηγούμενα αξιώματα. Συνεπώς αρκεί να θέσουμε αυτό το αξίωμα μόνο για τα μη εκφυλισμένα τρίγωνα.

<u>1ο Θεώρημα ομοιότητας:</u> Δύο μη εκφυλισμένα τρίγωνα είναι όμοια αν οι δύο γωνίες του ενός είναι ίσες ή αντίθετες με δύο γωνίες του άλλου.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω δύο τρίγωνα ΔΑΒΓ και ΔΑ΄Β΄Γ΄. Θα αποδείξω ότι αυτά είναι όμοια αν $\angle AB\Gamma = \varepsilon\angle$A'B'Γ', $\angle\Gamma$AB $= \varepsilon\angle$Γ'A'B'.



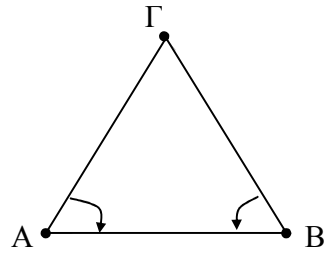
Σχήμα 5

Έστω κ ο θετικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο d(Α΄Β΄)=κd(ΑΒ). Επιλέγω σημείο Γ΄΄ στην ημιευθεία Α΄Γ΄ ώστε d(Α΄Γ΄΄)=κd(ΑΓ). Τότε από το αξίωμα ομοιότητας, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄΄ είναι όμοια. Συνεπώς $\angle AB\Gamma = \varepsilon\angle$A'B'Γ''. Άρα και $\angle A'B'\Gamma' = \angle A'B'\Gamma''$. Τότε όμως από αξίωμα Α3 οι ημιευθείες Α΄Γ΄ και Α΄Γ΄΄ ταυτίζονται. Οι ημιευθείες Α΄Γ΄ (=Α΄Γ΄΄) και Β΄Γ΄ έχουν δύο κοινά σημεία (Γ΄, Γ΄΄), οπότε από το πόρισμα του θεωρήματος 1 θα πρέπει να ταυτίζονται που είναι αδύνατον. Άρα Γ΄=Γ΄΄. Κατά συνέπεια τα τρίγωνα ΔΑΒΓ και ΔΑ΄Β΄Γ΄ είναι όμοια.■

<u>Ορισμός:</u> Ένα τρίγωνο ΑΒΓ λέγεται **ισοσκελές** αν οι δύο πλευρές του είναι ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση**.

<u>2^{ο} Θεώρημα ομοιότητας:</u> Οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι αντίθετες.

<u>Απόδειξη:</u>



Σχήμα 6

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με d(ΑΓ)=d(ΒΓ). Θεωρώ το τρίγωνο ΓΑΒ και για τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΒΑ ισχύει: d(ΓΑ)=d(ΓΒ), d(ΓΒ)=d(ΓΑ) και $\angle A\Gamma B = -\angle B\Gamma A$. Συνεπώς είναι ίσα διότι κ=1 και ε=-1, άρα $\angle \Gamma AB = -\angle \Gamma BA$.■

<u>3^{ο} Θεώρημα ομοιότητας:</u> Αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύει d(ΑΒ)=κd(Α΄Β΄), d(ΒΓ)=κd(Β΄Γ΄), d(ΑΓ)=κd(Α΄Γ΄) τότε τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια.

<u>4^{ο} Θεώρημα ομοιότητας: (Θεώρημα αθροίσματος γωνιών)</u>

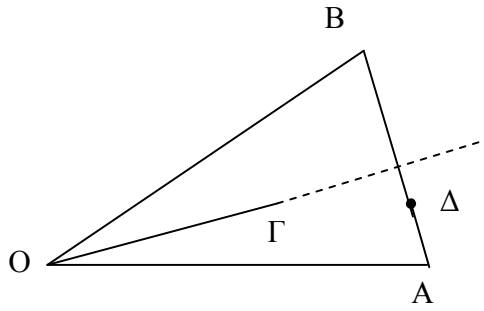
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{ο}.

Η απόδειξη των δύο τελευταίων θεωρημάτων είναι ακριβώς ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στη θεμελίωση του Birkhoff.

<u>Ορισμός:</u> Μία γωνία λέγεται **γνήσια** αν $0^{o} < \gamma < 180^{0}$ και **μη γνήσια** αν $180^{0} < \gamma < 360^{0}$.

<u>5^{η} ομάδα: Το αξίωμα συνέχειας:</u>

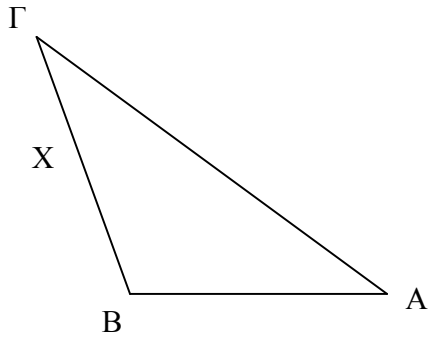
Έστω $\angle AOB$ γνήσια γωνία. Εάν Δ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β τότε $0^{0} < \angle AO\Delta < \angle AOB$. Αντίστροφα, αν $0^{0} < \angle AO\Gamma < \angle AOB$ τότε η ημιευθεία ΟΓ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



Σχήμα 7

Έστω ένα σημείο Χ που κινείται στην ευθεία ΑΒ και ένα σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία. Από το παραπάνω αξίωμα προκύπτει ότι $\angle AOX$ είναι μια μονότονη και συνεχής συνάρτηση του x=d(ΑΧ).

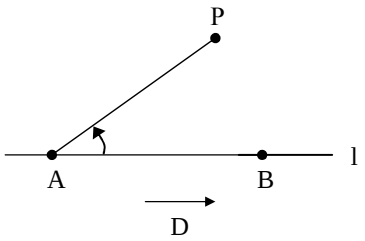
<u>Θεώρημα 6:</u> Εάν σε ένα προσανατολισμένο τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία $\angle AB\Gamma$ είναι γνήσια, τότε και οι άλλες δύο γωνίες $\angle$ΒΓΑ και $\angle$ΓΑΒ είναι γνήσιες.



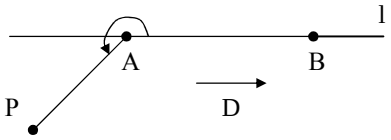
Σχήμα 8

<u>Απόδειξη:</u> Έστω Χ κείται στην $\{B\} \cup$ ημιευθεία ΒΓ και θέτω x=d(ΒΧ). Θέτω επίσης f(x)=180° - $\angle AB\Gamma - \angle XAB$. Η f(x) είναι μία συνεχής συνάρτηση. Για x>0, το θεώρημα αθροίσματος γωνιών μας δίνει f(x)= $\angle BXA$ το οποίο είναι διαφορετικό από 0° και 180°. Για x=0 f(0)= 180° - $\angle AB\Gamma$, οπότε είναι γνήσια. Έτσι η f(x) είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $0 \le x \le d(B\Gamma)$ και δεν παίρνει ποτέ την τιμή 0° και 180°. Συνεπώς η f(x)= $\angle BXA$ είναι πάντα γνήσια, συνεπώς f(d(ΒΓ))= $\angle$ΒΓΑ είναι γνήσια.■

<u>Ορισμός:</u> Παίρνω μια κατεύθυνσης D της ευθείας l, όπως περιγράφηκε στο θεώρημα 4. Αν το Α είναι πριν το Β ως προς την κατεύθυνση D , λέμε ότι το σημείο Ρ βρίσκεται **στα αριστερά της l** με κατεύθυνση D αν $\angle BAP$ είναι γνήσια και **στα δεξιά της l** με κατεύθυνση D αν $\angle BAP$ είναι μη-γνήσια.



Σχήμα 9: Ρ βρίσκεται στα αριστερά της l με κατεύθυνση D



Σχήμα 10: Ρ βρίσκεται στα δεξιά της l με κατεύθυνση D

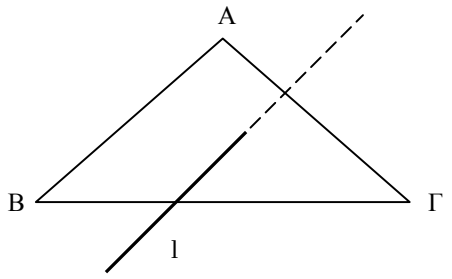
Μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος 6 δείχνει ότι αυτός ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής των σημείων Α και Β. Έτσι αν Α΄ βρίσκεται πριν από το Β΄ στην κατεύθυνση D, τότε $\angle B'A'P$ είναι γνήσια αντίστοιχα όταν $\angle BAP$ είναι γνήσια. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο «πλευρές», τη δεξιά και την αριστερή «πλευρά».

<u>Θεώρημα 7:</u> Εάν l είναι μία προσανατολισμένη ευθεία, τότε δύο σημεία Ρ και Σ τα οποία δεν κείνται στην l, βρίσκονται στην ίδια πλευρά της l, αν και μόνο αν η l δεν τέμνει το διάστημα ΡΣ.

<u>Απόδειξη:</u> ($\Rightarrow$)Πρέπει να δείξω ότι αν Ρ, Σ βρίσκονται στην ίδια πλευρά της l τότε η l δεν τέμνει το διάστημα ΡΣ. Αντί για αυτό αρκεί να δείξω το αντιθετοαντίστροφο. Έστω ότι η l τέμνει το διάστημα ΡΣ, δηλαδή $l \cap Int\text{ΡΣ} \neq 0$ και ότι το Ρ βρίσκεται στα αριστερά της ευθείας l ως προς την κατεύθυνση D. Θα αποδείξουμε ότι το Σ βρίσκεται στα δεξιά της l. Έστω Α το σημείο στο οποίο η l τέμνει το IntΡΣ και παίρνω ένα σημείο $B \in l$ με το Α να προηγείται του Β ως προς D. Τότε η $\angle BAP$ είναι γνήσια. Αλλά από το αξίωμα Α4 $\angle \Sigma AB + \angle BAP = 180^0$, συνεπώς $\angle \Sigma AB$ είναι γνήσια και $\angle BA\Sigma = -\angle \Sigma AB$ είναι improper. Έτσι το Σ είναι στα δεξιά της l ως προς την κατεύθυνση D.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $l \cap Int\text{ΡΣ} = 0$ και ότι το Ρ βρίσκεται στα αριστερά της l. Παίρνω πάλι Α να προηγείται του Β στην l ως προς την κατεύθυνση D, τότε η $\angle BAP$ γνήσια. Για $X \in Int\text{ΡΣ}$ η γωνία $\angle BAX$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του d(ΡΧ) και εφόσον $l \cap Int\text{ΡΣ} = 0$, αυτή η συνάρτηση δεν παίρνει ποτέ τις τιμές 0° και 180°. Συνεπώς η $\angle BAX$ είναι πάντα γνήσια. Δηλαδή $\angle BA\Sigma$ είναι γνήσια, άρα το Σ βρίσκεται και αυτό στα αριστερά της l.■

<u>Πόρισμα (Αξίωμα του Pasch):</u> Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ και ευθείας l με Α$\notin l$, εάν η l τέμνει το IntΒΓ τότε θα τέμνει και είτε το IntΑΒ είτε το IntΑΓ.

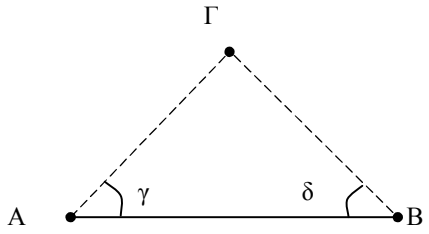


Σχήμα 11

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον η l τέμνει το IntΒΓ, τότε από το θεώρημα 7 τα Β και Γ βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της l. Εφόσον Α$\notin l$ τότε το Α βρίσκεται σε μία από τις δύο πλευρές, έστω στην πλευρά που βρίσκεται το Γ. Τότε τα Α και Β βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της l , συνεπώς από το θεώρημα 7 η l τέμνει το IntΑΒ. Αντίστοιχα, αν το Α βρίσκεται στην πλευρά που βρίσκεται και το Β τότε τα Α και Γ βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της l, άρα από το θεώρημα 7 η l τέμνει το IntΑΓ.■

<u>Β.2.2. Θεωρία παραλλήλων και καθέτων</u>

<u>Θεώρημα 8:</u> Δοθέντος διαστήματος ΑΒ και δύο αριθμών γ και δ μεταξύ του 0 και 180 ώστε γ+δ<180, υπάρχει ένα σημείο Γ ώστε το προσανατολισμένο τρίγωνο ΑΒΓ να έχει $\angle ΓΑΒ = \gamma^0$ και $\angle ΑΒΓ = \delta^0$.



Σχήμα 12

Απόδειξη: Καταρχήν θα δείξουμε ότι υπάρχει τρίγωνο με γωνίες γ και δ. Θέτω ε=180-γ-δ και κατασκευάζω τρίγωνο ΛΜΝ με $\angle ΛΜΝ = \gamma^0$.

- Εάν $\angle ΜΝΛ = \delta^0$ τελειώσαμε.

- Εάν $\angle$ΜΝΛ $> \delta^0$ από το αξίωμα συνέχειας υπάρχει Υ$\in$ I*nt*ΛΜ με $\angle$ΜΝΧ $= \delta^0$ και τότε το τρίγωνο ΜΝΧ είναι το τρίγωνο που ψάχνουμε με γωνίες γ και δ.
- Εάν $\angle$ΜΝΛ $< \delta^0$ τότε από το θεώρημα του αθροίσματος γωνιών έχω $\angle$ΝΛΜ $> \varepsilon^0$. Τότε από το αξίωμα συνέχειας υπάρχει Υ$\in$ *Int*ΜΝ με $\angle$ΥΛΜ $= \varepsilon^0$, συνεπώς $\angle$ΜΥΛ $= 180^o$-ε^0-γ^0=δ^0 .

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν υπάρχει τρίγωνο ΡΣΤ με γωνίες $\angle$*T*ΡΣ $= \gamma^0$ και $\angle$ΡΣΤ $= \delta^0$.

Έστω τώρα το διάστημα ΑΒ. Υπάρχει σημείο Γ ώστε $\angle$ΑΒΓ $= \delta^0$ και $\dfrac{d(\text{ΒΓ})}{d(AB)} = \dfrac{d(\text{ΣΤ})}{d(\text{ΣΡ})}$.

Τότε από το αξίωμα ομοιότητας τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΡΣΤ είναι όμοια, συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\angle$ΓΑΒ $= \gamma^0$ και $\angle$ΑΒΓ $= \delta^0$.■

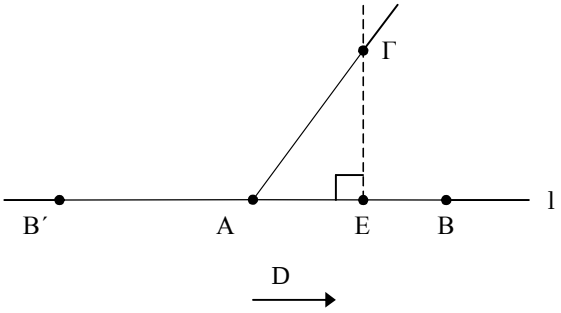
Ισοδύναμη πρόταση με το παραπάνω θεώρημα είναι η εξής: *Σε διάστημα ΑΒ, Φέρνω στο Β ημιευθεία ΒΕ' με* $\angle ABE' = \delta^0$ *και στο Α ημιευθεία ΑΕ με* $\angle$ΕΑΓ $= \gamma^0$. *Τότε οι ημιευθείες ΒΕ' και ΑΕ θα τέμνονται.*

<u>Ορισμός:</u> Δύο ευθείες που τέμνονται και σχηματίζουν γωνία 90° λέγονται **κάθετες**. Για l και m κάθετες, γράφουμε $l \perp m$.

Από το αξίωμα 3 συνεπάγεται ότι μπορούμε να φέρουμε κάθετο σε δοσμένη ευθεία από οποιοδήποτε σημείο της.

<u>Θεώρημα 9:</u> Έστω ευθεία l και σημείο Γ$\notin l$, τότε από το Γ διέρχεται μοναδική κάθετος στην l.

<u>Απόδειξη:</u> Από το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου (4° θεώρημα ομοιότητας τριγώνων) προκύπτει ότι υπάρχει το πολύ μία τέτοια κάθετος. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει πάντα μία.



Σχήμα 13

Έστω μία κατεύθυνση της l από το Α στο Β ώστε το Γ να βρίσκεται στην αριστερή πλευρά της l. Τότε η $\angle$ΒΑΓ είναι γνήσια. Αν $\angle$ΒΑΓ=90° τελειώσαμε. Αν όχι, τότε παίρνω σημείο Β΄$\in l$ ώστε η ημιευθεία ΑΒ να είναι αντίθετη της ΑΒ΄. Τότε μία από τις γωνίες $\angle BA\Gamma$, $\angle$ΓΑΒ' είναι οξεία. Εάν $\angle BA\Gamma$ είναι οξεία, τότε από το θεώρημα 8, υπάρχει τρίγωνο ΕΑΓ με $\angle$ΕΑΓ$=\angle$ΒΑΓ και $\angle$ΑΓΕ$=90^0-\angle$ΒΑΓ. Συνεπώς $\angle$ΓΕΑ$=90^0$ άρα η ΓΕ είναι η κάθετος. Όμοια αν η $\angle$ΓΑΒ' είναι οξεία.■

<u>Ορισμός:</u> Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες αν δεν τέμνονται.

<u>Θεώρημα 10:</u> Εάν l ευθεία και σημείο Γ$\notin l$, τότε από το Γ διέρχεται μοναδική παράλληλος στην l.

<u>Απόδειξη:</u> Από το θεώρημα 9, υπάρχει μοναδική ευθεία m που διέρχεται από το Γ ώστε $m \perp l$. Επίσης από το Γ διέρχεται μοναδική ευθεία n ώστε $n \perp m$. Από το θεώρημα αθροίσματος γωνιών οι ευθείες n και l δεν τέμνονται. Από το θεώρημα 8 οποιαδήποτε άλλη ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει την l.■

<u>Ορισμός:</u> Ένα τρίγωνο ονομάζεται **ορθογώνιο** όταν μία γωνία του έχει μέτρο 90°. Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή τη γωνία καλείται **υποτείνουσα**.

<u>Θεώρημα 11: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)</u>

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στην κατά Birkhoff θεμελίωση.

Πλέον είμαστε σε θέση να εισάγουμε τις ορθογώνιες συντεταγμένες, να βρίσκουμε την απόσταση δύο σημείων, καθώς και την εξίσωση της ευθείας. Εφόσον και αυτή η αξιωματική μας δίνει το καρτεσιανό επίπεδο, σημαίνει ότι είναι ισοδύναμη με την αξιωματική του Birkhoff και του Hilbert. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι το σύστημα είναι **<u>κατηγορικό</u>**, δείχνοντας ότι το μέτρο των γωνιών ταυτίζεται με το μέτρο των γωνιών όπως ορίζεται στην κλασσική επίπεδη γεωμετρία. Η απόδειξη αυτή είναι ίδια

με αυτή του Birkhoff, μόνο που εδώ χρησιμοποιείται το αξίωμα συνέχειας με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιείται το αξίωμα 3 του Birkhoff στην προηγούμενη παράγραφο.

Παρατηρήσεις:

1. Το παραπάνω αξιωματικό σύστημα αναφέρεται σε ένα προσανατολισμένο επίπεδο. Το γεγονός αυτό κάνει δύσκολη την επέκτασή του στη γεωμετρία του χώρου. Αυτό συμβαίνει διότι στον τρισδιάστατο χώρο δεν υπάρχει καθολικός τρόπος επιλογής της κατεύθυνσης όλων των γωνιών, συνεπώς δεν ισχύει το Α2 αξίωμα του αθροίσματος γωνιών.
2. Στο σύστημα αυτό είναι δυνατό η ευθεία να μη ληφθεί ως πρωταρχική έννοια δεδομένου ότι η ευθεία ΑΒ μπορεί να οριστεί ως το σύνολο όλων των σημείων Γ ώστε {Γ=Α, Γ=Β, ένα από αυτά να βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο}. Το γεγονός αυτό όμως δεν αλλάζει τον αριθμό των αξιωμάτων.

Β.2.3. Σύγκριση Birkhoff – MacLane

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι δύο αξιωματικές είναι κατηγορικές, δηλαδή είναι συνεπείς και πλήρεις. Αυτό σημαίνει ότι περιγράφουν πλήρως τη κλασσική ευκλείδεια γεωμετρία. Αξίζει να τονίσουμε ότι αυτό δε θα συνέβαινε πριν την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Συνεπώς οι δύο αξιωματικές είναι ισοδύναμες και στην ουσία προσφέρουν τον ίδιο κύκλο γνώσης.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο αξιωματικές, οι πρωταρχικές έννοιες είναι ίδιες, η θεωρία των όμοιων τριγώνων αναπτύσσεται κατά τον ίδιο τρόπο ενώ η σημαντικότερη ομοιότητά τους είναι ότι **η θεωρία παραλλήλων έπεται της θεωρίας της ομοιότητας**.

Όπως γράφει ο ίδιος ο MacLane, τα τέσσερα αξιώματα του Birkhoff μπορούν να εκφραστούν μέσα από τα αξιώματα D1, D2, D3, D4, L1, L2, A1, το αξίωμα ομοιότητας το αξίωμα συνέχειας του MacLane καθώς και τα παρακάτω δύο αξιώματα:

I. Σε κάθε ευθεία l ορίζεται μια συνάρτηση x, η οποία είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων P της l και των πραγματικών αριθμών ώστε $d(P,\Sigma)= \left| x(P) - x(\Sigma) \right|$ για κάθε $P, \Sigma \in l$.

II. Για κάθε σημείο O, ορίζεται μία συνάρτηση θ, η οποία είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των ημιευθειών r από το O και των πραγματικών αριθμών mod360 ώστε $L(r, s)=\theta(s)-\theta(r)$, για όλες τις ημιευθείες r και s από το O.

Γ΄ ΜΕΡΟΣ

Γ.1. Μια εναλλακτική διδακτική πρόταση

Σκοπός του Γ΄ μέρους της εργασίας είναι να παρουσιαστεί μία διαφορετική διδακτική πρόταση που να μπορεί να εφαρμοστεί στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την απόδειξη ενός θεωρήματος μέσα από την αξιωματική του Ευκλείδη και έπειτα μέσα από μια πιο σύγχρονη άποψη, το αξιωματικό σύστημα του Birkhoff. Για το σκοπό αυτό, επιλέχτηκε το **Πυθαγόρειο Θεώρημα** για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος είναι ότι αποτελεί το πιο ΄΄δημοφιλές΄΄ θεώρημα της μέσης εκπαίδευσης. Ο δεύτερος και πιο σημαντικός λόγος είναι ότι η απόδειξή του είναι ενδεικτική όσον αφορά τη διαφορετική προσέγγιση των βασικών εννοιών των δύο συστημάτων στην αποδεικτική διαδικασία.

Γ.1.1. Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ΄΄Στοιχεία΄΄

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αποτελεί την $47^{η}$ πρόταση του $1^{ου}$ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Στην πρόταση αυτή, ο Ευκλείδης αναφέρεται σε σύγκριση εμβαδών, συγκεκριμένα των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται πάνω στις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, σε αντίθεση με την εσφαλμένη αντίληψη των μαθητών- και όχι μόνο- που θεωρούν ότι αναφέρεται σε τετράγωνα αριθμών.

Το $1^{ο}$ βιβλίο των «Στοιχείων» έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα. Πριν όμως προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, υπενθυμίζονται στον αναγνώστη τα πέντε αιτήματα, τα οποία χρησιμοποιούνται είτε άμεσα είτε έμμεσα (μέσω προηγούμενων προτάσεων). Οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται με άμεσο τρόπο στην απόδειξη, αναφέρονται και διατυπώνονται κατά τη χρήση τους.

Μετά την απόδειξη ακολουθεί ένα διάγραμμα, το οποίο παρουσιάζει το «πλέγμα» όλων των προτάσεις που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης για την απόδειξη της $47^{ης}$ πρότασης είτε απευθείας είτε μέσω άλλων προτάσεων.

1^{ο} αίτημα: Από δύο οποιαδήποτε σημεία άγεται ευθεία γραμμή

2^{ο} αίτημα: Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκταθεί κατά συνεχή τρόπο

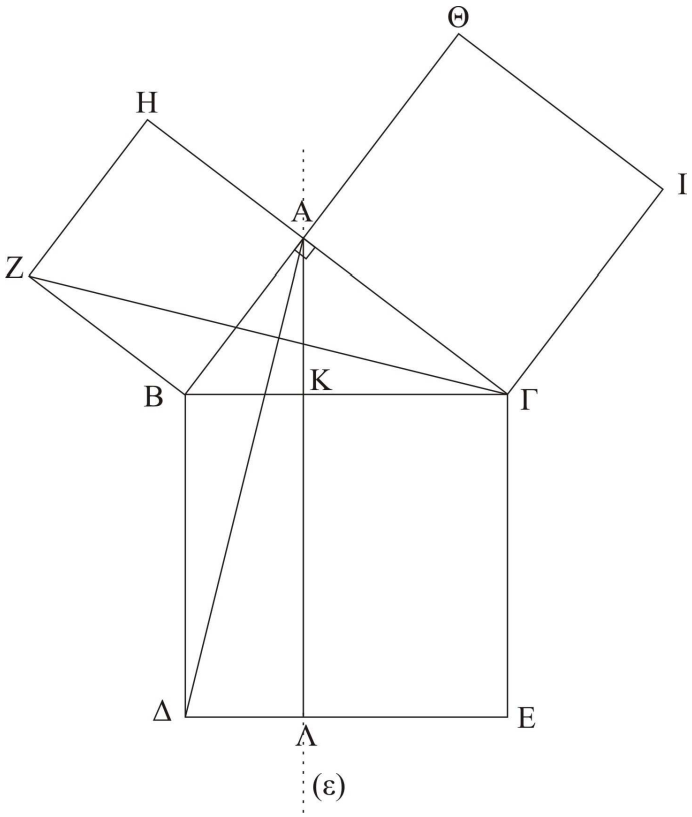
3^{ο} αίτημα: Με οποιοδήποτε κέντρο και διάστημα γράφεται κύκλος

4^{ο} αίτημα: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους

5^{ο} αίτημα: Αν μία ευθεία, η οποία συναντάει δύο ευθείες, σχηματίζει τις δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες μικρότερες-κατά το άθροισμα- από δύο ορθές, τότε οι ευθείες αυτές προεκτεινόμενες επ' άπειρο συναντιούνται στο μέρος όπου βρίσκονται οι γωνίες οι μικρότερες των δύο ορθών.

<u>Πρόταση 47:</u> Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται πάνω στην υποτείνουσα, ισούται με το άθροισμα των εμβαδών τετραγώνων που κατασκευάζονται πάνω στις δύο κάθετες πλευρές.

<u>Απόδειξη:</u>



Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή.

Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΓΕΔ, ΑΒΖΗ και ΑΓΙΘ. (πρόταση 46: *Να κατασκευαστεί τετράγωνο πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα*)

Θα δείξουμε ότι εμβ(ΒΓΕΔ)=εμβ(ΑΒΖΗ)+εμβ(ΑΓΙΘ)

Φέρνουμε από το Α ευθεία παράλληλη στην ΒΔ, την ε. (πρόταση 31: *Δίνεται ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής. Να κατασκευαστεί ευθεία, η οποία να περνάει από το σημείο και να είναι παράλληλη με τη δοσμένη*)

Η ε τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και την ΔΕ στο Λ, διότι αν δεν τις έτεμνε, τότε η ε // ΒΓ, αντίστοιχα ε// ΔΕ, και επειδή ε// ΒΔ τότε και ΒΓ// ΒΔ ,αντίστοιχα ΔΕ//ΒΔ. (πρόταση 30: *Ευθείες παράλληλες προς την ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες*)

Αυτό όμως είναι άτοπο από κατασκευή τετραγώνου.

Φέρνουμε την ΑΔ και ΓΖ ($1^{ο}$ αίτημα)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ:

ΒΖ=ΒΑ

ΒΓ=ΒΔ

$\Gamma\hat{B}Z = \Delta\hat{B}A$, διότι $\Gamma\hat{B}Z = \mathit{ορθή} + \Gamma\hat{B}A$

$$\Delta\hat{B}A = \mathit{ορθή} + \Gamma\hat{B}A$$

Οπότε από την $1^{η}$ κοινή έννοια (*αυτά που είναι ίσα ως προς το ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα*) ισχύει η ισότητα $\Gamma\hat{B}Z = \Delta\hat{B}A$

Άρα τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα. (πρόταση 4: *Αν σε δύο τρίγωνα, οι δύο πλευρές του ενός ισούνται αντίστοιχα με δύο πλευρές του άλλου και οι περιεχόμενες γωνίες που σχηματίζονται στο κάθε τρίγωνο από αυτές τις πλευρές είναι ίσες, τότε και η τρίτες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες, καθώς και οι υπόλοιπες γωνίες οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές, και τα δύο τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδό*)

Επίσης το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ είναι προέκταση του ΑΓ, διότι $B\hat{A}\Gamma + B\hat{A}H = 2\mathit{ορθές}$. (πρόταση 14: *Αν δύο γωνίες έχουν μία κοινή πλευρά και οι μη κοινές πλευρές τους βρίσκονται από διαφορετικές μεριές ως προς την κοινή, και το άθροισμα των γωνιών αυτών ισούται με 2 ορθές, τότε αυτές οι μη κοινές πλευρές είναι προέκταση η μία της άλλης*)

Άρα ΓΗ// ΒΖ.

Ισχύει εμβ (ΒΚΛΔ)=2 εμβ(ΔΒΑ)

και εμβ (ΑΒΖΗ)=2 εμβ(ΒΖΓ)

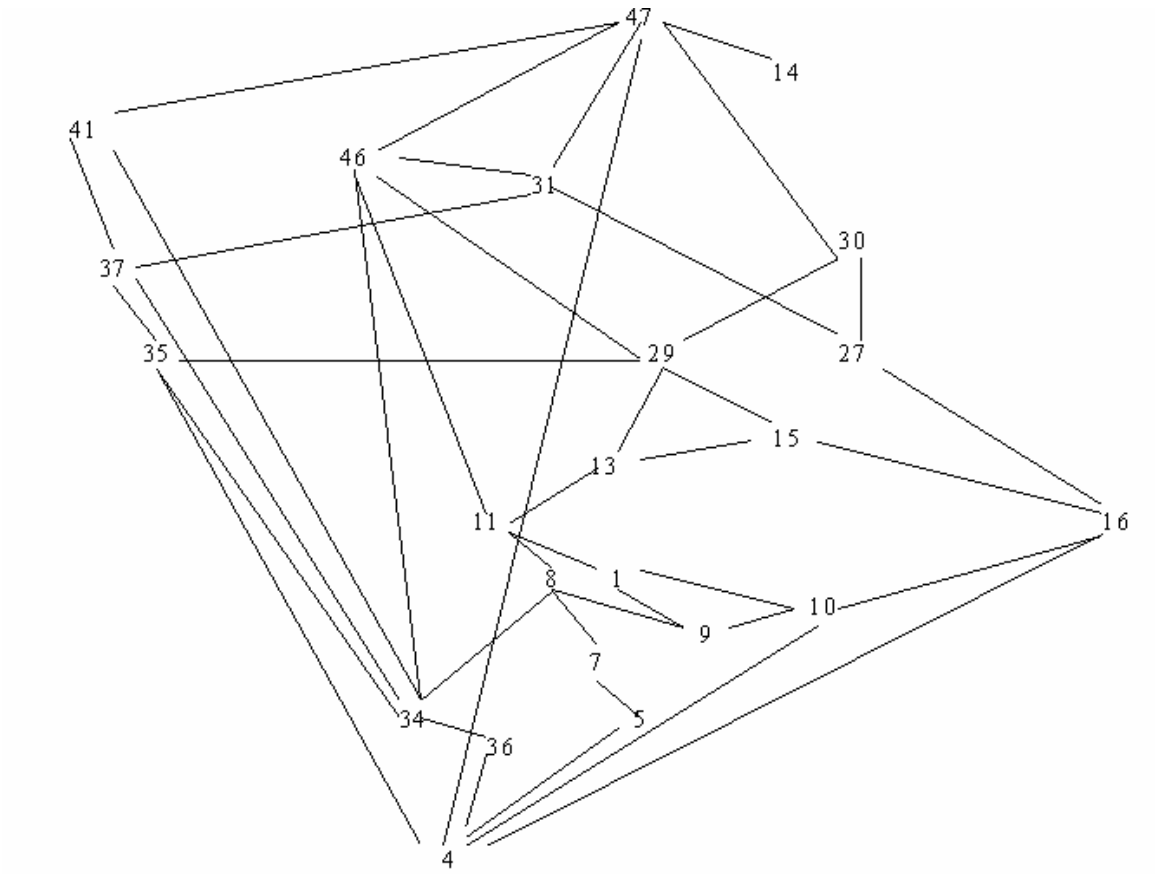
(πρόταση 41: *Αν ένα τρίγωνο και ένα παραλληλόγραμμο έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παράλληλων ευθειών, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου*)

Όμως αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΒΖΓ είναι ίσα, άρα από την 1η κοινή έννοια ισχύει: εμβ (ΒΚΛΔ)=εμβ (ΑΒΖΗ) (1)

Όμοια αποδεικνύεται ότι εμβ (ΚΓΕΛ)= εμβ (ΑΓΙΘ) (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) , (2η κοινή έννοια: *Αν σε ίσα προστεθούν ίσα, οι ολότητες είναι ίσες*) έχουμε: εμβ (ΒΚΛΔ)+ εμβ (ΚΓΕΛ)= εμβ (ΑΒΖΗ)+ εμβ (ΑΓΙΘ)

Άρα εμβ (ΒΓΕΔ)= εμβ (ΑΒΖΗ)+ εμβ (ΑΓΙΘ) ■



Επεξήγηση του διαγράμματος:

Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ποιες προτάσεις χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στην απόδειξη της πρότασης 47 είτε απευθείας είτε έμμεσα. Κάθε γραμμή του διαγράμματος ενώνει δύο προτάσεις, εκ των οποίων η μία (προφανώς με τον μικρότερο αριθμό) χρησιμοποιείται για την απόδειξη της άλλης.

Για παράδειγμα η απόδειξη της 47^{ης} πρότασης χρησιμοποιεί άμεσα τις προτάσεις 14, 41, 46, 31, 4 και 30, ενώ για την απόδειξη της 30 χρησιμοποιείται η 27 και 29, για την απόδειξη της 29 η 13 και 15 κ.ο.κ.

Παρακάτω διατυπώνονται σε ελεύθερη απόδοση όλες οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν έμμεσα στην παραπάνω απόδειξη.

Πρόταση 1: *Να κατασκευαστεί πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ισόπλευρο τρίγωνο*

Πρόταση 5: *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, και αν προεκταθούν οι ίσες πλευρές, τότε οι γωνίες που σχηματίζονται από τη βάση και τις προεκτάσεις, είναι ίσες*

Πρόταση 7: *Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ βρίσκονται από την ίδια μεριά του ΑΒ και ισχύει ΑΓ=ΑΔ και ΒΓ=ΒΔ, τότε το Γ συμπίπτει με το Δ*

Πρόταση 8: *Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα*

Πρόταση 9: *Να διχοτομηθεί δοσμένη γωνία*

Πρόταση 10: *Να διχοτομηθεί δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα*

Πρόταση 11: *Δοθέντων ευθείας και σημείου αυτής, να αχθεί από το σημείο αυτό ευθεία, η οποία να σχηματίζει με την δοθείσα ορθή γωνία*

Πρόταση 13: *Αν από ένα σημείο ευθείας φέρουμε ημιευθεία, τότε αυτή σχηματίζει με την αρχική ευθεία δύο γωνίες, το άθροισμα των οποίων είναι ίσο με δύο ορθές*

Πρόταση 15: *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες*

Πρόταση 16: *Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντί της εσωτερική*

Πρόταση 27: *Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες*

Πρόταση 29: *Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες, καθώς και οι εντός εκτός και επί τα αυτά, ενώ το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές*

Πρόταση 34: *Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και η διαγώνιος το χωρίζει σε δύο ίσα μέρη*

Πρόταση 35: *Τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν ίσο εμβαδό.*

Πρόταση 36: *Τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν ίσο εμβαδό.*

Πρόταση 37: *Τα τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν ίσο εμβαδό.*

Γ.1.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα κατά Birkhoff

Για να παρουσιάσουμε την απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος, μέσα από την αξιωματική που πρότεινε ο Birkhoff, δε θα βασιστούμε στα αξιώματα που διατυπώθηκαν στο Β΄ μέρος της παρούσας εργασίας. Προτείνεται η χρήση των αξιωμάτων που διατυπώνονται στο βιβλίο των Birkhoff και Beatley, Basic Geometry, το οποίο απευθύνεται σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η διαφορά είναι ότι σε αυτό οι γωνίες δεν είναι προσανατολισμένες, άρα ορίζεται μόνο θετική γωνία, ενώ

τα αξιώματα είναι πιο ΄΄απλοϊκά΄΄ διατυπωμένα. Ακολουθούν τα αξιώματα και στη συνέχεια η απόδειξη.

Αξίωμα 1: *Τα σημεία κάθε ευθείας μπορούν να αριθμηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία με τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς και αυτή η αριθμητική διαφορά να μετρά αποστάσεις.*

Αξίωμα 2: *Υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία η οποία διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία.*

Αξίωμα 3: *Όλες οι ημιευθείες με κοινή αρχή μπορούν να αριθμηθούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των ημιευθειών και των θετικών πραγματικών αριθμών (mod2π) ώστε η αριθμητική διαφορά τους να μετρά τις γωνίες.*

Αξίωμα 4: *Όλες οι ευθείες γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο*

Αξίωμα 5: *Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν η μία γωνία του ενός είναι ίση με τη μία γωνία του άλλου και οι πλευρές που σχηματίζουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες* (1° Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

Πυθαγόρειο θεώρημα:

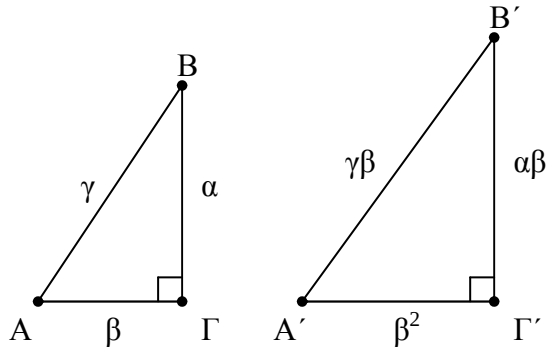
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

Απόδειξη:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία $\angle\Gamma = 90^0$

Θα αποδείξουμε ότι $(AB)^2=(A\Gamma)^2+(B\Gamma)^2$

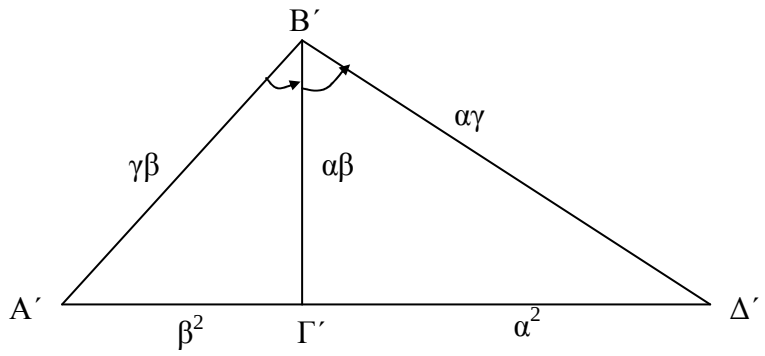
Βήμα 1°: Κατασκευάζουμε το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ όμοιο με το δοθέν, με λόγο β (**5° αξίωμα**)



Βήμα 2ο: Κατασκευάζουμε το τρίγωνο Β΄Γ΄Δ΄ ώστε $\angle Γ΄Β΄Δ΄ = \angle A$, $\angle Β΄Γ΄Δ΄ = 90^0$ και $\angle Γ΄Δ΄Β΄ = 180^0 - 90^0 - \angle A = 90^0 - \angle A$

(**πρόταση:** ***εάν έχουμε τρεις γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι 180^0 , μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με αυτές τις γωνίες***)

Τότε από το **2ο Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων** (***δύο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν δύο γωνίες τους μία προς μία ίσες***), τα τρίγωνα ΑΒΓ και Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας α.



Η γωνία Α΄Β΄Δ΄ είναι ορθή, διότι $\angle Α΄Β΄Δ΄ = \angle Α΄Β΄Γ΄ + \angle Γ΄Β΄Δ΄ = \angle B + \angle A = 90^0$

Βήμα 3ο: Εφαρμόζουμε το 2ο κριτήριο ομοιότητας στα τρίγωνα Α΄Β΄Δ΄ και ΑΒΓ:

$\angle Β΄ = \angle Γ = 90^0$

$\angle Α΄ = \angle A$

Α΄Β΄= γ ΑΓ

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας γ. Συνεπώς Α΄Δ΄=γ^2

Επίσης Α΄Δ΄=$\beta^2+\alpha^2$ άρα $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2$ ■

Γ.1.3. Συμπεράσματα

Οι εμφανείς διαφορές των δύο αποδεικτικών διαδικασιών απορρέουν από τις διαφορετικές βασικές έννοιες των δύο αξιωματικών συστημάτων οι οποίες αναφέρθηκαν σε προηγούμενη ενότητα (σύγκριση Hilbert-Birkhoff). Συγκεκριμένα στην απόδειξη του Ευκλείδη, κεντρικός άξονας είναι η έννοια της **παραλληλίας**, με τη χρήση προτάσεων που απαιτούν το 5ο αίτημα (πχ πρόταση 29) καθώς και

προτάσεων που χρησιμοποιούν το αντιθετοαντίστροφο του αιτήματος (προτάσεις 30,34), ενώ στην απόδειξη του Birkhoff κεντρικό ρόλο παίζει η έννοια της **ομοιότητας**, με τη χρήση του 5^{ου} αξιώματος(1^{ο} Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων) και του 2^{ου} κριτηρίου ομοιότητας τριγώνων.

Όπως αναφέρθηκε, σκοπός είναι να παρουσιαστεί μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση της επίπεδης γεωμετρίας και όχι να αποφανθούμε για το ποια είναι η πιο κατάλληλη για τη μέση εκπαίδευση. Για να εξεταστεί ποια προσέγγιση ανταποκρίνεται καλύτερα στις διδακτικές ανάγκες, απαιτείται να λάβουμε υπόψη μας διάφορες παραμέτρους. Το σημαντικό είναι ότι και οι δύο ανταποκρίνονται στους στόχους που θέλουν την επίπεδη γεωμετρία στη μέση εκπαίδευση, δηλαδή, συμβάλλουν στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές, ενώ παράλληλα υποδεικνύεται η λογική καθαρότητα των μαθηματικών (Παπασταυρίδης).

Αξίζει όμως να αναφερθεί ότι, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές από πολύ νωρίς έρχονται σε επαφή με την έννοια της μέτρησης (Α΄ Δημοτικού), σε αντίθεση με την έννοια της παραλληλίας η οποία εισάγεται εμπειρικά στην Β΄ Δημοτικού, με την αναγνώριση παράλληλων ευθειών.

Βιβλιογραφία:

- Birkhoff, G.: A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor, The Annals of Mathematics, vol.33, pp. 329-345, 1932.

- Birkhoff, G., Beatley R. : Basic Geometry, Chelsea Public Company, 1959.

- Blanche, R.: Αξιωματική Μέθοδος, (Θ. Παπαδελλής, μετάφραση),Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα, 1971.

- Bunt, L., Jones, Ph., Bedient, J.: Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών,(Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, μετάφραση), Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού, Αθήνα, 1981.

- Gray, J.: Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century ,Springer Undergraduate Mathematics Series, London, 2007.

- Greenberg, M.: Euclidean and Non-Euclidean Geometries- Development and History-, W.H. Freeman and Company, 1980.

- Heath, T.: The Thirteen Books of Euclid's Elements, Dover Publications, New York,1956.

- Hilbert, D.: The Foundations of Geometry, (translated by E.J. Townsend), The Open Court Publishing Company, Illinois 1950.

- Katz, V.: A History of Mathematics, An Introduction, HarperCollinsCollegePublishers, 1993.

- MacLane, S.: Metric Postulates for Plane Geometry, The American Mathematical Monthly, vol. 66, pp. 543-555, 1959.

- Mueller, J.: Philosophy of Mathematics and Deductive structure in Euclid's Elements, MIT, 1981.

- Russel, B.: The teaching of Euclid, The Mathematical Gazette 2 (33), pp.165-167, 1902.

- Young, J.W.A.: Monographs on Topics of Modern Mathematics, Dover Publication, New York, 1955.

- Ζαφείρης, Ε.: Η Επίπεδη Γεωμετρία στη Μέση Εκπαίδευση και ο Ρόλος της Μετρικής, 26^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Θεσσαλονίκη, 2009.

- Λάππας, Δ.: Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών, Παραδόσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., 2006.

- Παπασταυρίδης, Σ.: Η Αξιωματική Μέθοδος στα Μαθηματικά της Μέσης Εκπαίδευσης: μας είναι πράγματι απαραίτητη; , Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 25, 1983.

- Σπύρου, Π.: Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., 2005.

- Στράντζαλος, Χ.: Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, Μέρος Πρώτο, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1989.

- Στράντζαλος, Χ.: Στοιχεία από τη Νεότερη Ιστορία των Μαθηματικών. Η εξέλιξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών μετά το 1750, Σημειώσεις Εαρινού Εξαμήνου, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.,2002.

Δικτυακοί τόποι:

- Stanford Encyclopedia of Philosophy: Hilbert's Program, Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/ στις 31/07/2009.

- Wikipedia: Erlangen program, Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://en.wikipedia.org/wiki/Erlangen_program στις 20/10/2009.

- Wikipedia: Hilbert's program, Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_program στις 31/07/2009.

- Πλατάρος, Γ. : Η άποψη του Klein για την Γεωμετρία, Ανακτήθηκε από τη σελίδα http://www.scribd.com/doc/17542880/-Klein- στις 15/12/2009.