ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Μαθηματικών
Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας & Θεωρίας της Επιστήμης
Τμήμα Φιλοσοφίας – Παιδαγωγικής & Ψυχολογίας

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Τμήμα Επιστήμων Αγωγής

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Ειδίκευση:

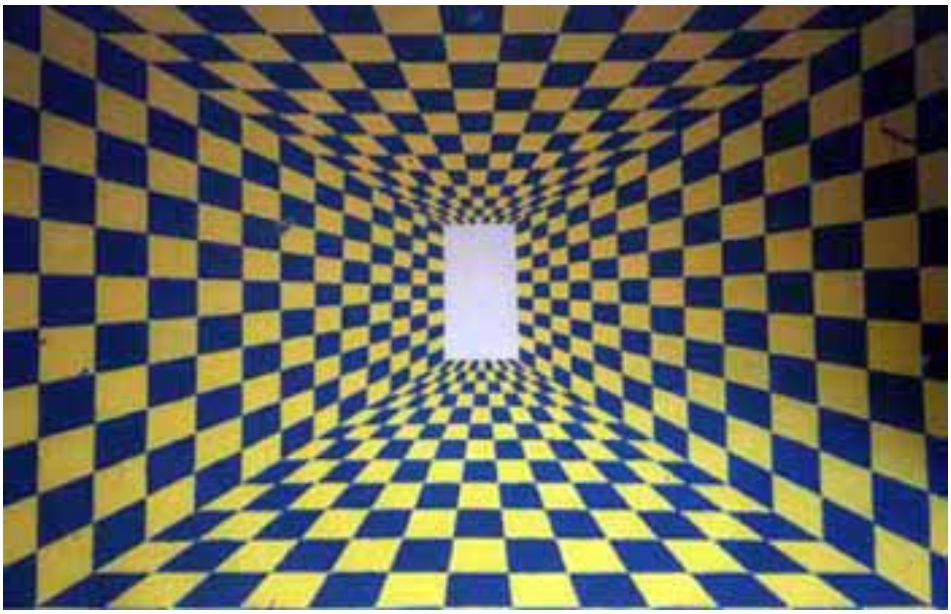
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σπηλιοπούλου Χριστίνα

(Α.Μ.227002)

Διπλωματική Εργασία:

Αντιλήψεις των μαθητών για το Άπειρο



ΙΟΥΛΙΟΣ 2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της Τριμελούς μου Επιτροπής. Ιδιαίτερα δε τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θ. Ζαχαριάδη για την πολύτιμη βοήθεια του όχι μόνο στη συγγραφή της Διπλωματικής μου εργασίας αλλά σε όλο το χρονικό διάστημα των σπουδών μου.

Ευχαριστώ πολύ όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού προγράμματός που με οδήγησαν σε νέους δρόμους και που ήταν πάντα πρόθυμοι να προσφέρουν την βοήθεια τους.

Ευχαριστώ επίσης τον κ. Π. Χριστοφόρου και την κα. Α. Παπαθανασίου χωρίς την βοήθεια των οποίων θα ήταν πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθεί η ερευνά μου.

Τέλος , ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στην κα. Κ. Κατσαρού που μας ανέχτηκε τα τελευταία 2 χρόνια και έκανε πάντα ότι ήταν δυνατό για να μας βοηθήσει και να μας διευκολύνει.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή 5

1. Βιβλιογραφική Επισκόπηση 11

1.1 Προηγούμενες Έρευνες 11

2. Έρευνα 20

2.1 Μεθοδολογία της έρευνας 20

2.2 Συμμετέχοντες 21

2.2.1 Α΄ Λυκείου 21

2.2.2 Β΄Λυκείου 21

2.2.3 Γ΄Λυκείου 21

2.2.4 Τμήμα Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης 21

3. Αποτελέσματα 22

3.1 Αποτελέσματα ανά τάξη 23

3.1.1 Α΄ Λυκείου 23

3.1.1.1 Θεωρητική Κατεύθυνση. 23

3.1.1.2 Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 26

3.1.2 Β΄ Λυκείου 29

3.1.2.1 Θεωρητική Κατεύθυνση. 29

3.1.2.2 Θετική -Τεχνολογική Κατεύθυνση 31

3.1.2.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση 33

3.1.3 Γ΄ Λυκείου 36

3.1.3.1 Θεωρητική Κατεύθυνση. 36

3.1.3.2 Θετική- Τεχνολογική Κατεύθυνση 39

3.1.3.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση 42

3.1.4 Τμήμα Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης 44

3.1.4.1 Θεωρητική Κατεύθυνση. 44

3.1.4.2 Θετική -Τεχνολογική Κατεύθυνση.....47

3.1.4.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.....49

3.1.5 Ερωτήσεις Ανοιχτού τύπου.....52

3.2 Συγκριτικά Αποτελέσματα.....53

3.2.1 Θεωρητική κατεύθυνση.....53

3.2.2 Θετική-Τεχνολογική κατεύθυνση.....54

Παράρτημα Ι.....58

Βιβλιογραφία.....69

Εισαγωγή

Η αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα οδήγησε όπως ήταν φυσικό στην αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού (Bernhard Bolzano 1815-1897, Augustin- Loius Cauchy 1789-1857, Karl Weierstrass 1815-1897). Οι σημαντικές εφαρμογές αλλά και η πληθώρα των θεωρητικών αποτελεσμάτων είχε ως αποτέλεσμα τη σταδιακή εισαγωγή του Απειροστικού Λογισμού στην εκπαίδευση.

Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση , σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα στην τελευταία τάξη του Λυκείου, διδάσκονται σε εισαγωγικό επίπεδο οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου σε όλους τους μαθητές, ενώ σε αυτούς που επιλέγουν τη θετική και τεχνολογική κατεύθυνση διδάσκεται επιπλέον και η έννοια του ολοκληρώματος (Στο παράρτημα Ι δίνεται η ύλη και των τριών τάξεων του Λυκείου). Όπως φαίνεται από τα σχολικά βιβλία αλλά και από τα θέματα των γενικών εξετάσεων , στη σύγχρονη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι έννοιες διδάσκονται με μεγαλύτερη έμφαση στο υπολογιστικό μέρος σε βάρος του θεωρητικού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να πετυχαίνουν στις εξετάσεις εισαγωγής στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, χωρίς, όμως, δυστυχώς να έχουν κατανοήσει βασικές έννοιες. Αυτό φαίνεται από τις μεγάλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές στον Απειροστικό Λογισμό, ιδιαίτερα αυτοί των Θετικών επιστημών όπου απαιτείται η εις βάθος κατανόηση των εννοιών (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992, Dubinsky & Harel, 1992, Schwingendorf, Hawks, & Beineke, 1992 Hiebert & Lefevre 1986; Schoenfeld, 1985).

Η διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια σε διεθνές επίπεδο, γιατί παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται σε όλες τις χώρες (Artigue, 1992; Cornu, 1981 1983 1991; Davis & Vinner, 1986 ; Ervynck, 1981; Li & Tall, 1993; Monaghan, Sun & Tall, 1994; Sierpinska, 1987; Tall, 1981, 1982, 1992; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991; Sierpinska, 1994; Ferrini-Mundy & Graham 1994; Tall 1996). Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να προσδιοριστεί η πηγή αυτών των δυσκολιών ώστε να καθοριστούν κατάλληλες στρατηγικές για τη διδασκαλία.

Τα τελευταία χρόνια η παιδαγωγική έρευνα ασχολείται όλο και περισσότερο με την κατανόηση του συναισθηματικού τομέα και τη σχέση του με τη μάθηση. Σε αυτό βέβαια συντέλεσε και η μετατόπιση του κέντρου βάρους από τη θεωρίας του συμπεριφορισμού κατά τη δεκαετία του 1960 με εργασίες όπως εκείνη του Simon(1967) προς τη γνωστική ψυχολογία αρχικά και στη συνέχεια προς τη θεωρία του οικοδομισμού. Οι έρευνες που ακολούθησαν (Bandura 1977, Buxton 1981, Mandler 1984,1989) έδειξαν ότι ο συναισθηματικός τομέας συνδέεται άμεσα και επηρεάζει τη διαδικασία της μάθησης. Συγκεκριμένα, οι στάσεις οι αντιλήψεις οι πεποιθήσεις, η αυτοεικόνα , η αυτοεκτίμηση και η αυτεπάρκεια είναι από τις βασικές έννοιες του συναισθηματικού τομέα που επιδρούν δραστικά στη διαδικασία της μάθησης (Schoenfeld 1981; Φιλίππου 1991; Brown, C.A. Carpenter T.P., Kouba V.L., Lindquist, M.M., Silver, E.A., & Swaffrd J.O 1988).

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις αντιλήψεις μαθητών και φοιτητών , συγκεκριμένα με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο. Με τον όρο αντιλήψεις αναφερόμαστε σε μια ειδική κατηγορία πεποιθήσεων που επηρεάζονται κατά πολύ από το στοιχείο της υποκειμενικής αξιολόγησης ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης (Φιλίππου, Χρίστου σελ 35). Οι αντιλήψεις για τα μαθηματικά μπορούμε να

θεωρήσουμε ότι αποτελούνται από το σύνολο των συνειδητών και υποσυνείδητων εννοιών, κανόνων, αναπαραστάσεων, αλγορίθμων και εμπειριών που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με τα μαθηματικά (Φιλίππου, Χρίστου σελ 36).

Για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες, η διδασκαλία δεν αρχίζει μέσα στην τάξη. Πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία για ένα θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις , που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία. Περιγράφουμε όλα τα παραπάνω , που εμφανίζονται πριν από την επίσημη διδασκαλία, ως αυθόρμητες αντιλήψεις (Cornu 1981,1983). Όταν ένας μαθητής μετέχει σε ένα μάθημα μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που πιστεύουν οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι αντιλήψεις δεν εξαφανίζονται. Αυτές οι αυθόρμητες αντιλήψεις αναμιγνύονται με την καινούρια γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται ώστε να διαμορφωθούν οι προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών (Harel & Sowder, 1998; Schoenfeld, 1985).Οι αυθόρμητες αντιλήψεις παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Οι έρευνες δείχνουν ότι μπορούν να παραμείνουν ακόμα και σε ένα προχωρημένο στάδιο μάθησης (Fischbein et al., 1979). Για παράδειγμα γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους το οποίο θα μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο το φυσικών αριθμών είναι μικρότερο από αυτό των ακεραίων.

Μπροστά στην ποικιλία αυθόρμητων εννοιών και στην αυξανόμενη συνειδητοποίηση του φορμαλισμού από το μαθητή εύκολα μπορούν να υπάρχουν ταυτόχρονα αντιφατικές ιδέες στο μυαλό ενός ατόμου, που οδηγούν σε μια σφαιρική "εννοιολογική εικόνα" που περιέχει πιθανούς συγκρουόμενους παράγοντες κατά την άποψη των Tall & Vinner (1981).

Ένα σημαντικό κομμάτι της έρευνας τις τελευταίες δεκαετίες είναι η μελέτη των αντιλήψεων των μαθητών. Αυτές οι έρευνες έχουν επισημάνει την ύπαρξη και την εμμονή αντιλήψεων (προκαταλήψεις, διαισθήσεις) που δεν συμφωνούν με τους αποδεκτούς μαθηματικούς ορισμούς (Confrey, 1990; Fischbein, 1987; Hart, 1981; Moloney and Stacey, 1997; O'Callaghan, 1998; Sierpinska, 1994; Tall, 1991).

Η μάθηση και η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών των μαθητών επηρεάζονται δραστικά από τις αυθόρμητες αντιλήψεις τους. Αν λοιπόν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε τι είναι για τους μαθητές το άπειρο και πως το αντιλαμβάνονται τότε ίσως να είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τα προβλήματα και τις παρανοήσεις που θα τους δημιουργηθούν πολύ πριν τη διδασκαλία της έννοιας.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια έρευνα που έχει σαν σκοπό να καταγράψει τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Αρχικά ερευνούμε τις αντιλήψεις μαθητών ηλικίας 15-17 χρονών για το άπειρο. Αναφερόμαστε δηλαδή σε ανθρώπους που δεν έχουν διδαχτεί πώς οι μαθηματικοί εξετάζουν τυπικά το άπειρο.

Στη συνέχεια εξετάζουμε μαθητές της τελευταίας τάξης του λυκείου. Οι μαθητές αυτοί διδάσκονται σε εισαγωγικό επίπεδο θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού και αυτό τους ξεχωρίζει από την πρώτη ομάδα. Το σημαντικό εδώ είναι το αν οι μαθητές καταφέρνουν να απορρίψουν τις αρχικές αντιλήψεις που δημιουργούν αντίφαση με την τυπική μαθηματική έννοια ή αντιθέτως προσαρμόζουν την μαθηματική έννοια στις αντιλήψεις του απορρίπτοντας τα μαθηματικά στοιχεία που αντιφάσκουν με τις προυπάρχουσες αντιλήψεις τους. Λόγω του ότι, όπως αναφέρθηκε , οι έννοιες διδάσκονται με μεγαλύτερη έμφαση στο υπολογιστικό μέρος εις βάρος του

θεωρητικού αναμένουμε οι αντιλήψεις των μαθητών αυτής της ομάδας να διαφέρουν ελάχιστα από αυτές της πρώτης ομάδας.

Τέλος εξετάζονται οι αντιλήψεις φοιτητών πρώτου έτους («Τμήμα Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης» ΜΙΘΕ) για το άπειρο μετά τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού. Εδώ πλέον είναι σημαντικό και αναμένουμε οι αντιλήψεις να έχουν αλλάξει, αφού σε πανεπιστημιακό επίπεδο οι έννοιες διδάσκονται με μεγαλύτερη έμφαση στο θεωρητικό μέρος. Στο συγκεκριμένο τμήμα υπάρχουν φοιτητές οι οποίοι στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου είχαν παρακολουθήσει διαφορετικές κατευθύνσεις.

Βέβαια έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί για αυτήν την ομάδα των νέων δείχνουν ότι δυστυχώς τα πράγματα δεν είναι έτσι. Σύμφωνα με τον Monaghan (1986) «η διδασκαλία του Απειροστικού για ένα χρόνο έχει αμελητέα επίδραση στις αντιλήψεις των φοιτητών για το άπειρο. Μην θεωρήσετε ότι στις εισαγωγικές σειρές μαθημάτων του Απειροστικού λογισμού εξετάζεται το άπειρο αυστηρά. Αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει είναι οτι παρέχεται στους φοιτητές η εμπειρία που μπορεί να συμβάλει στην αναπτυσσόμενη έννοια του απείρου. Αυτή η εμπειρία εμφανίζεται να έχει λίγη επίδραση στις αντιλήψεις των φοιτητών». Άλλες έρευνες ισχυρίζονται ότι οι αντιλήψεις για τα μαθηματικά μπορούν να επηρεάσουν δραστικά την επίδοση των φοιτητών στον Απειροστικό Λογισμό και στα ανώτερα Μαθηματικά (Harel, Sowder 1998; Schoenfeld, 1985).

Η μέχρι τώρα έρευνα παρουσιάζει σαφώς ότι οι αντιλήψεις των μαθητών ποικίλουν, και ότι κάνουν θεμελιώδη λάθη και δεν υπερνικούν απαραιτήτως τα επιστημολογικά εμπόδια. Είναι λοιπόν απαραίτητη η εκπαίδευση των καθηγητών ώστε να βοηθηθούν

και να ενημερωθούν για τα σχετικά προβλήματα. Έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικές διδασκαλίες ,στις οποίες, πριν οι μαθητές διδαχθούν κάποια έννοια , τους δόθηκαν κατάλληλες δραστηριότητες για να τους βοηθήσουν να δουν και να διαμορφώσουν τις αυθόρμητες ιδέες, εικόνες, διαισθήσεις, και τις εμπειρίες που είχαν από πριν και που παρουσιάζονταν απαραιτήτως κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού της διαδικασίας μάθησης. Αν καταφέρουμε λοιπόν να καταγράψουμε τις αντιλήψεις τους , τότε θα μπορέσουμε να σχεδιάσουμε εργασίες που θα οδηγούν τους μαθητές μας να διαμορφώσουν αντιλήψεις που θα βοηθάνε ως ένα βαθμό την κατανόηση μιας έννοιας και δεν θα τους οδηγούν σε αντιφάσεις και παρανοήσεις.

1. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

1.1 Προηγούμενες Έρευνες

Σύμφωνα με τους Fischbein Tirosh,& Hess (1979, σελ. 4-5) η εργασία των Piaget και Inhelder (1956, σελ. 125-149) μπορεί να θεωρηθεί ως αρχή των μελετών για την κατανόηση των αντιλήψεων των παιδιών για το άπειρο. Η κύρια εργασία που δόθηκε στα παιδιά από τους Piaget και Inhelder ήταν η υποδιαίρεση μιας ευθείας πολλές φορές.

Σε αναφορά με τη θεωρία της ανάπτυξης του Piaget διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά στο προσυλλογιστικό στάδιο (1,5-7 χρόνια) δεν μπορούσαν να συνεχίσουν την υποδιαίρεση για πολύ. Τα παιδιά στο στάδιο των συγκεκριμένων συλλογισμών (7-11 χρόνια) μπορούσαν να συνεχίσουν για μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό τμημάτων. Τα παιδιά στο στάδιο των αφηρημένων συλλογισμών (11 χρόνων και μετά) μπορούσαν να συνεχιστούν κατά τρόπο αόριστο. Είναι σε αυτό το στάδιο, όπως λένε οι Piaget και Inhelder, που ένα παιδί μπορεί να φανταστεί το όριο ενός σχήματος ως σημείο.

Η εργασία των Piaget και Inhelder ανέδειξε σημαντικά ζητήματα που συνδέονται με την γνωστική ανάπτυξη των παιδιών σχετικά με το όριο αλλά δεν μας έδωσε αξιόλογα αποτελέσματα όσον αφορά την κατανόηση των ιδεών των παιδιών για το άπειρο.

Ο Monaghan εξέτασε τις αντιλήψεις μαθητών για το όριο και το άπειρο (1986) (16- 18 χρονών θετικής και μη θετικής κατεύθυνσης). Η μελέτη εξέτασε τις αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών. Συγκεκριμένα εξέτασε το άπειρο ως διαδικασία και ως αντικείμενο, το άπειρο ως αριθμό, τα απειροελάχιστα, τις άπειρες ακολουθίες και σειρές, τους πραγματικούς αριθμούς, τη γλώσσα του απείρου και την επίδραση της διδασκαλίας σε αυτές τις αντιλήψεις. Στο πρώτο στάδιο της έρευνας ,54 μαθητές (27

θετικής κατεύθυνσης) από το ίδιο σχολείο συμμετείχαν σε ένα ερωτηματολόγιο και στη συνέχεια έγιναν συνεντεύξεις με 13 μαθητές. Ένα ελαφρώς αναθεωρημένο ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε στη συνέχεια σε 190 μαθητές (114 θετικής) από σχολεία με παρόμοια χαρακτηριστικά με το πρώτο σχολείο.

Όσον αφορά στο άπειρο τα κύρια συμπεράσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής :
Η πρώτη σκέψη των μαθητών όσον αφορά στο άπειρο είναι ως διαδικασία, κάτι το οποίο συνεχίζεται συνεχώς. Το άπειρο ως αντικείμενο αποδόθηκε από λίγους μαθητές, ως ένας μεγάλος αριθμός ή ως ένα σύνολο που περιέχει περισσότερα από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Ο Monaghan καταλήγει αναφέροντας ότι η έννοια των μαθητών για το άπειρο είναι εγγενώς αντιφατική και ασταθής.

Όπως πολλές μαθηματικές έννοιες, το άπειρο μπορεί να θεωρηθεί και ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο, ως μεγάλος αριθμός ή ως ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου. Η δυϊκότητα διαδικασίας-αντικειμένου στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ένας σημαντικός τομέας της έρευνας (Gray και Tall 1994, Dubinsky 1991, Sfard 1991). Ο Monaghan (1986, 280) σημειώνει ότι όταν τα παιδιά μιλούν για το άπειρο εννοούν το άπειρο ως διαδικασία: «Αυτό συνεχίζεται συνέχεια, άρα είναι άπειρο», θεωρώντας το άπειρο όχι ως αντικείμενο αλλά ως τη πράξη που συνεχίζεται για πάντα. Το άπειρο ως διαδικασία χρησιμοποιείται όχι μόνο για να καθορίσει το άπειρο, αλλά και ως αξιολογητικό μέσο για να καθοριστεί εάν μια ερώτηση έχει μια άπειρη απάντηση:
«Αυτό συνεχίζεται συνεχώς. Άπειρο σημαίνει συνεχώς .Επομένως αυτό είναι άπειρο.»
Αλλά τα παιδιά λένε επίσης ότι «πηγαίνει προς το άπειρο». Είναι το άπειρο αντικείμενο τότε ; Αυτό δεν αποκλείει το άπειρο ως διαδικασία. Μπορεί να είναι ότι επειδή κάτι συνεχίζει συνεχώς είναι άπειρο και έτσι πηγαίνει προς το άπειρο. Δεν πρέπει να υποτεθεί, ότι η χρήση της έννοιας από τους μαθητές είναι συνεπής, ότι δηλαδή

καταλαβαίνουν πότε αναφέρονται στο άπειρο ως αντικείμενο και πότε ως διαδικασία (Moreno και Waldegg, 1991, σελ. 212-213) .

Αυτή η δυϊκότητα διαδικασίας-αντικειμένου μπορεί να οδηγήσει σε αντιφατικά συμπεράσματα όταν συγκρίνουμε το πλήθος των στοιχείων συνόλων. Για παράδειγμα, οι φυσικοί αριθμοί και οι ζυγοί αριθμοί. Έχοντας οι μαθητές στο μυαλό τους το άπειρο ως διαδικασία μπορεί να οδηγηθούν σε διαφορετικές απαντήσεις:

- και τα δύο συνεχίζονται συνεχώς άρα είναι το ίδιο πράγμα
- και τα δύο συνεχίζονται συνεχώς άρα δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε

Και οι δύο απαντήσεις είναι σε διαφωνία με το άπειρο ως αντικείμενο.

Οι Falk Gassner, Ben Zoor, & Ben Simon (1986) παίξανε αριθμητικά παιχνίδια με 95 παιδιά ηλικίας 5 έως 12 ετών. Τρία παιχνίδια χρησιμοποιήθηκαν: αυξανόμενοι φυσικοί αριθμοί, «κάθε ένας από μας λέει έναν αριθμό και όποιος πει τον μεγαλύτερο αριθμό κερδίζει. Θες να πεις πρώτος ή δεύτερος;» , φθίνοντες ακέραιοι αριθμοί «νικητής είναι αυτός που θα πει τον μικρότερο αριθμό» και φθίνοντες θετικοί ρητοί. Ο σκοπός των παιχνιδιών ήταν να παραχθεί συζήτηση για το αν τελειώνουν οι αριθμών .

Οι Falk, Gassner, Ben Zoor, & Ben Simon σημειώνουν μια γενική αναπτυξιακή τάση. Τα πιο μικρά παιδιά γενικά δεν μπορούν να παίζουν συνεχώς το αυξάνων παιχνίδι.. Τα περισσότερα από τα 6-7 χρονα απέτυχαν να καταλάβουν ότι οι ακέραιοι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ. Αυτή η κατανόηση και μια δυνατότητα να εξηγηθεί γιατί πρέπει να παίξεις δεύτερος αυξήθηκε σταθερά με τα χρόνια και χαρακτήρισε την πλειοψηφία των μεγαλύτερων παιδίων. Τα παιδία δυσκολεύτηκαν περισσότερο στο παιχνίδι των φθίνων ακεραίων και ρητών αλλά αυτό οφείλεται στην άγνοια των μικρών παιδίων για τους αρνητικούς αριθμούς .

Οι ερευνητές σημειώνουν ότι κάποια στιγμή γίνεται ένα ασυνεχές πήδημα από το πολύ μεγάλο στο άπειρο. Σημειώνουν, εντούτοις, την αντιφατική φύση της σκέψης σε αυτήν την περιοχή. Π.χ. η Noga, ηλικίας 5 ετών, αποφάσισε ότι υπάρχουν περισσότεροι κόκκοι άμμου στον κόσμο από ότι τρίχες στα κεφάλια όλων των ανθρώπων. Όταν ρωτήθηκε για κόκκους άμμου ή αριθμούς επέλεξε αποφασιστικά τους αριθμούς, "επειδή οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ. .. αλλά οι κόκκοι της άμμου μένουν πάντα όπως είναι." Αυτή η συνειδητοποίηση , εντούτοις, δεν την εμπόδισε κατά την επιλογή να θέλει να απαντήσει πρώτη στα παιχνίδια!

Οι Vinner και Kidron (1985) εξέτασαν μαθητές λυκείου όσον αφορά στην κατανόηση των περιοδικών και μη, δεκαδικών αριθμών . Μόνο 4 από τους 91 μαθητές της Α τάξης και 32 από τους 97 μαθητές της Β τάξης έδειξαν να έχουν κατανοήσει την ύπαρξη των περιοδικών δεκαδικών. Δυστυχώς, οι Vinner και Kidron δεν εξέτασαν εάν οι μαθητές έχουν οποιοδήποτε πρόβλημα με οποιοδήποτε δεκαδικό με άπειρα ψηφία.

Σε μια παγκόσμια μελέτη για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα όρια και το άπειρο, η Sierpinska (1987) ανέλυσε τις εννοιολογικές εικόνες 31 μαθητών 16 χρονών που ακολουθούσαν την Θετική Κατεύθυνση πριν διδαχθούν λογισμό. Με βάση αυτή την ανάλυση τους ταξινόμησε στις παρακάτω ομάδες :

- Ο Michael και ο Christopher είναι ασυνείδητα απειριστές: Λένε "άπειρο", αλλά θεωρούν "πολύ μεγάλο"....
- Ο Γιώργος είναι συνειδητός απειριστής:

Το άπειρο είναι κάτι μεταφυσικό, δύσκολο να το ορίσεις με αυστηρό ορισμό. Αφού τα μαθηματικά είναι μια αυστηρή επιστήμη πρέπει να αποφεύγουμε να αναφερόμαστε στο

άπειρο και να μιλάμε μόνο για πεπερασμένους αριθμούς. Στη διατύπωση των γενικών νόμων μπορούμε να χρησιμοποιούμε γράμματα για να παραστήσουμε συγκεκριμένους αλλά πεπερασμένους αριθμούς.

- Ο Paul και ο Robert είναι κινητικά απειριστές:

Η ιδέα του απείρου συνδέεται με την ιδέα του χρόνου. Για να σκεφτούμε κάποια ολότητα, ένα σύνολο, μια ακολουθία πρέπει να επεξεργαστούμε κάθε στοιχείο-όρο του. Είναι αδύνατον να θεωρηθεί με αυτό το τρόπο ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία. Η κατασκευή ενός τέτοιου συνόλου δεν μπορεί ποτέ να ολοκληρωθεί. Το άπειρο ενδεχομένως, μόνο υπάρχει.. Είναι αδύνατο να γίνει ένα "άλμα στο άπειρο" με τη σκέψη: ότι το άπειρο μπορεί ενδεχομένως να υπάρχει τελικά.

Μια εξαιρετικά πολύτιμη παρατήρηση έγινε από τον Duval (1983). Παρουσίασε σε 12χρονούς και 13χρονούς με δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις τα ίδια άπειρα σύνολα (φυσικοί αριθμοί και τέλεια τετράγωνα).

Στην πρώτη , οι φυσικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 70 δόθηκαν σε 10 στήλες:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10,

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,

31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,

41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50,

51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,

61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70,

Οι μαθητές κλήθηκαν να σημειώσουν τα τέλεια τετράγωνα, και να καθορίσουν εάν το σύνολο των όλων φυσικών αριθμών και το σύνολο των τέλειων τετραγώνων τους είναι ισοδύναμα.

Στη δεύτερη αναπαράσταση , οι φυσικοί αριθμοί και τα τέλεια τετράγωνα ήταν τοποθετημένα το ένα κάτω από το άλλο, σε δύο σειρές, με τον ακόλουθο τρόπο:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . .

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, . . .

Οι μαθητές ρωτήθηκαν εάν το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών και το σύνολο όλων των τέλειων τετραγώνων ήταν ισοδύναμα. Ο Duval (1983) διαπίστωσε ότι η πρώτη αναπαράσταση ενθάρρυνε το μέρος-όλο κριτήριο ενώ η δεύτερη προκάλεσε την ένα προς ένα αντιστοιχία . Τα συμπεράσματά του προτείνουν ότι οι αποφάσεις των μαθητών σχετικά με την ισοδυναμία δύο άπειρων συνόλων καθορίζονται όχι μόνο από τη σχέση μεταξύ του ζευγαριού των άπειρων συνόλων, αλλά και από τον τρόπο με τον οποίο τα δύο σύνολα παρουσιάζονται.

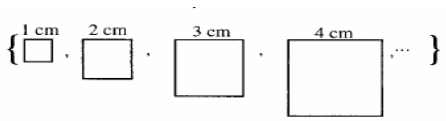
Ερευνητικά συμπεράσματα έδειξαν ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να συγκρίνουν άπειρα σύνολα επηρεάζονται κατά ένα μεγάλο μέρος από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν κατά τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων(Tall, 1990; Tsamir, & Tirosh, 1994; 1999; Tsamir 2002). Διάφορες έρευνες (Borasi, 1985; Duval, 1983; Fischbein, Tirosh - Hess, 1979; Fischbein, Tirosh -Melamed, 1981;Martin - Wheeler, 1987; Moreno - Waldegg, 1991; Nunez, 1991; Sierpinska, 1987; Tall, 1990; Tirosh - Tsamir, 1996; Tsamir - Tirosh, 1992; 1994; Tsamir, 1999). ανέφεραν ότι όταν αναθέτουμε στους μαθητές να συγκρίνουν πληθαρίθμους άπειρων συνόλων, χρησιμοποιούν πέντε κριτήρια:

- το μέρος-όλο «κάποιο υποσύνολο ενός συνόλου έχει λιγότερα στοιχεία από το ίδιο το σύνολο»
- το ενιαίο άπειρο «όλα τα άπειρα σύνολα έχουν ίδιο αριθμό στοιχείων, δεδομένου ότι υπάρχει μόνο ένα άπειρο»
- το άπειρο είναι μια ασύγκριτη ποσότητα

- 1-1 αντιστοιχία
- αποστάσεις (συγκρίνω το 1,3,5,7,…. με το 1,4,7,9,… περισσότερα στοιχεία έχει αυτό που δύο διαδοχικά στοιχεία έχουν μικρότερη διαφορά δηλαδή το 1,3,5)

Οι μαθητές εφαρμόζουν αυτά τα κριτήρια στις απαντήσεις τους χωρίς να παρατηρούν τις αντιφάσεις που προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση περισσότερων του ενός κριτηρίου (Tirosh, 1991; Tsamir, 1994; Tsamir ,Tirosh, 1999).

Μια άλλη μελέτη (Tirosh and Tsamir, 1996) ερεύνησε τον αντίκτυπο τεσσάρων αναπαραστάσεων απείρων συνόλων : οριζόντια, κάθετη, αναλυτική αριθμητική και γεωμετρική .

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ A={1,2,3,4,5,.....}B={ 1,4,9,16,25,..... }
ΚΑΘΕΤΗ A={ 1,2,3,4,5,..... }. B={ 1,4,9,16,25,..... }
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ A={ 1,2,3,4,5,..... }. B={ $1,2^2,3^2,4^2,5^2$,....}
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ Το σύνολο το τετραγώνων :  Το σύνολο των εμβαδών τους{$1^2,2^2,3^2$,.....}

Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι η απόφαση των μαθητών ως προς το εάν δύο άπειρα σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων καθορίστηκε κατά ένα μεγάλο μέρος από την αναπαράσταση των συνόλων. Συγκεκριμένα στην αναλυτική αριθμητική και γεωμετρική αναπαράσταση οι απαντήσεις βασίστηκαν στο κριτήριο της 1-1 αντιστοιχίας ενώ στην οριζόντια και στην κάθετη το κριτήριο αυτό δεν αναφέρθηκε καθόλου.

Η Tsamir (1999) μελέτησε επίσης τις αντιλήψεις φοιτητών (υποψήφιους καθηγητές μαθηματικών μέσης εκπαίδευσης) για το άπειρο καθώς και την επίδοση τους στη σύγκριση απείρων συνόλων. Τα αποτελέσματα της έδειξαν ότι οι απαντήσεις των φοιτητών που δεν είχαν παρακολουθήσει το μάθημα της Θεωρίας Συνόλων δεν διέφεραν από αυτές των μαθητών του Λυκείου.

Οι Singer και Voica (2003) μελέτησαν τις αντιλήψεις μαθητών για το άπειρο, ηλικίας 10-11 και 18-19 καθώς και φοιτητών μαθηματικών. Η ερευνά τους βασίστηκε στη θεωρία του Fischbein σύμφωνα με την οποία , η διαισθητική γνώση είναι μια αυτεξήγητη γνώση που δεχόμαστε ως αληθινή. Είναι ένας τύπος άμεσης, καταναγκαστικής, αυτονόητης γνώσης, η οποία οδηγεί στις γενικεύσεις που υπερβαίνουν τα γνωστά στοιχεία. Ο Fischbein διαφοροποιεί τις αρχικές από τις δευτεροβάθμιες διαισθήσεις. Οι αρχικές διαισθήσεις ορίζονται ως οι διαισθήσεις που αναπτύσσει το άτομο από την προσωπική του εμπειρίας του (Fischbein, 1987, p. 202). Οι δευτεροβάθμιες διαισθήσεις ορίζονται ως εκείνες που αποκτώνται μέσω κάποιας εκπαιδευτικής επέμβασης (Fischbein 1987, p. 71). Οι δευτεροβάθμιες διαισθήσεις για μια ορισμένη έννοια ή μια διαδικασία είναι συχνά ασυμβίβαστες με τις αρχικές.

Η ερευνά τους οδήγησε σε τρία συμπεράσματα . Πρώτον ότι μερικά παιδιά, υπό τους κατάλληλους όρους, είναι σε θέση να εσωτερικοποιήσουν μια μαθηματική διαίσθηση των άπειρων συνόλων. Αυτό συμβαίνει όταν μάθουν τα σύνολα των φυσικών και δεκαδικών αριθμών, ακόμη και στην ηλικία 10-11 ετών. Δεύτερον, ότι όταν τα επιχειρήματα των μαθητών είναι συνεπή, βασίζονται στη σύνδεση της αλγεβρικής και της γεωμετρικής σκέψης. Και τρίτον ότι τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών για το άπειρο είναι παρόμοια σε όλες τις ηλικίες. Καταλήγουν λέγοντας, ότι οι πτυχές που συνδέονται με την ιδέα του απείρου πρέπει να είναι, από πολύ νωρίς, μέρος της εκμάθησης των εννοιών.

2. Έρευνα

2.1 Μεθοδολογία της έρευνας

Δόθηκαν συνολικά 136 ερωτηματολόγια σε μαθητές των 3 τάξεων του Λυκείου και σε πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης. Οι μαθητές προέρχονταν από δημόσιο σχολείο μεσοαστικής περιοχής των Αθηνών. Στους μαθητές της Α Λυκείου τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στο τέλος των μαθημάτων της σχολικής χρονιάς (Μάιος 2004) , στους μαθητές της Β και Γ Λυκείου μετά το τέλος των πανελληνίων εξετάσεων (Ιούνιος 2004) και στους φοιτητές στο τέλος του εαρινού εξαμήνου (Ιούνιος 2004). Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 20 ερωτήσεις ανοιχτού και κλειστού τύπου (επισυνάπτεται στο παράρτημα). Τέλος η στατιστική ανάλυση έγινε με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS.

2.2 Συμμετέχοντες

2.2.1 Α΄ Λυκείου

Στο ερωτηματολόγιο απάντησαν 46 μαθητές. Ειδικότερα, 21 μαθητές που έχουν σκοπό να ακολουθήσουν τη Θεωρητική κατεύθυνση (45,5%) , 5 μαθητές που έχουν σκοπό να ακολουθήσουν τη Θετική κατεύθυνση (11%) και 20 μαθητές που έχουν σκοπό να ακολουθήσουν τη Τεχνολογική κατεύθυνση (43,5%). Όσον αφορά το φύλλο υπάρχει μια μικρή υπεροχή των γυναικών της τάξεως του 11%.

2.2.2 Β΄Λυκείου

Στο ερωτηματολόγιο απάντησαν 32 μαθητές. Ειδικότερα,16 μαθητές Θεωρητικής κατεύθυνσης (50%) , 3 μαθητές Θετικής κατεύθυνσης (9,5%) και 13 μαθητές Τεχνολογικής κατεύθυνσης (40,5%). Όσον αφορά το φύλλο υπάρχει μια μικρή υπεροχή των γυναικών της τάξεως του 9%.

2.2.3 Γ΄Λυκείου

Στο ερωτηματολόγιο απάντησαν 41 μαθητές. Ειδικότερα, 19 μαθητές Θεωρητικής κατεύθυνσης (46.3%) , 2 μαθητές Θετικής κατεύθυνσης (5%) και 20 μαθητές Τεχνολογικής κατεύθυνσης (48,7%). Όσον αφορά το φύλλο υπάρχει μια μικρή υπεροχή των γυναικών της τάξεως του 6%.

2.2.4 Τμήμα Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης

Στο ερωτηματολόγιο απάντησαν 17 φοιτητές. Ειδικότερα, 13 φοιτητές που στο Λύκειο είχαν ακολουθήσει τη Θεωρητική κατεύθυνση (76,4%) , 2 φοιτητές που στο Λύκειο είχαν ακολουθήσει τη Θετική κατεύθυνση (11,8%) και 2 φοιτητές που στο Λύκειο είχαν ακολουθήσει τη Τεχνολογική κατεύθυνση (11,8%). Όσον αφορά το φύλλο υπάρχει υπεροχή των γυναικών της τάξεως του 20%.

3. Αποτελέσματα

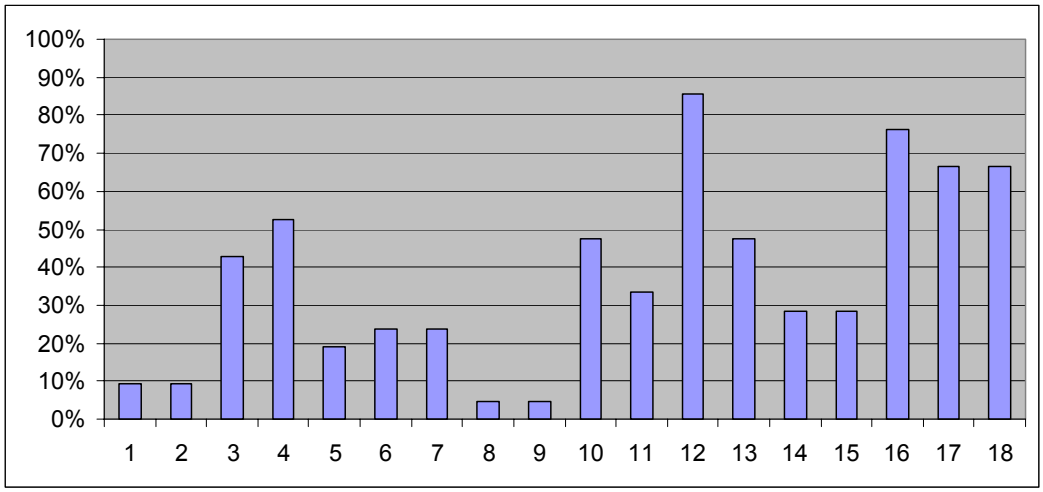
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας για κάθε τάξη και κατεύθυνση ξεχωριστά ενώ στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια συγκεντρωτική παρουσίαση καθώς και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα της Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης παρουσιάζονται ενιαία επειδή η ύλη και η διδασκαλία των μαθηματικών και στις δυο κατευθύνσεις είναι κοινή και στις 2 τελευταίες τάξεις του Λυκείου.

3.1 Αποτελέσματα ανά τάξη

3.1.1 Α΄ Λυκείου

3.1.1.1 Θεωρητική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το μεγαλύτερο και μικρότερο αριθμό που γνωρίζουν. Όπως φαίνεται από τον πίνακα μόνο το 9,5% των μαθητών φαίνεται να γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις ερωτήσεις οι περισσότεροι μαθητές (70%) δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$, ενώ αρκετοί είναι αυτοί που απαντούν ως μικρότερο αριθμό το μηδέν (12%) . Τέλος υπάρχει ένα μικρό ποσοστό μαθητών (8%) που προσπαθούν να προσδιορίσουν το μεγαλύτερο αριθμό δίνοντας ως απάντηση αριθμούς με άπειρα ψηφία.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση. Φαίνεται ότι ενώ οι περισσότεροι (80%) μπορούν να τοποθετήσουν εύκολα το 0,3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στο να

τοποθετήσουν τον $0.\overline{3}$. Οι περισσότεροι από αυτούς που δεν τοποθέτησαν το περιοδικό $0.\overline{3}$, δυστυχώς δεν ανέφεραν τι ήταν αυτό που τους δυσκόλεψε. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το 15% των μαθητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3. Επίσης ένα 5% θεωρεί ότι οι δύο αριθμοί είναι ίσοι..

Στις ερωτήσεις 6-7, σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 - 2 και του 1 – 3, βλέπουμε ότι μόνο το 24% των μαθητών απαντούν σωστά. Το 20% των μαθητών αναφέρει ότι υπάρχουν 10 και 20 αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αντίστοιχα, ενώ το 10% απαντά ότι δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί μεταξύ του 1-2 ενώ υπάρχει μόνο ένας μεταξύ του 1-3 και αυτός είναι το 2. Βλέπουμε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση 8, σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3, είναι 4,8%. Δηλαδή ενώ το 24% των μαθητών απαντά ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 το 19,2% αυτών στην επόμενη ερώτηση θεωρεί ότι οι αριθμοί μεταξύ του 1-3 είναι περισσότεροι. Φαίνεται δηλαδή ότι οδηγήθηκαν σε λάθος απάντηση επηρεασμένοι από το ότι το ένα σύνολο περιέχεται μέσα στο άλλο.

Στις τελευταίες 8 ερωτήσεις ζητήσαμε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν ως σωστές τις φράσεις που η λέξη άπειρο-ος χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια και ως λάθος αυτές που χρησιμοποιείται λανθασμένα. Βλέπουμε ότι το 68% των μαθητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το14% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς. Στις 2 τελευταίες προτάσεις τα ποσοστά σωστών απαντήσεων είναι 67% αν και θα περιμέναμε πολύ περισσότεροι μαθητές να απαντήσουν που έχουν σκοπό να ακολουθήσουν τη σωστά, αφού στην καθημερινή τους ζωή ακούνε συχνά για τον αριθμό των αυτοκινήτων που περνάνε από

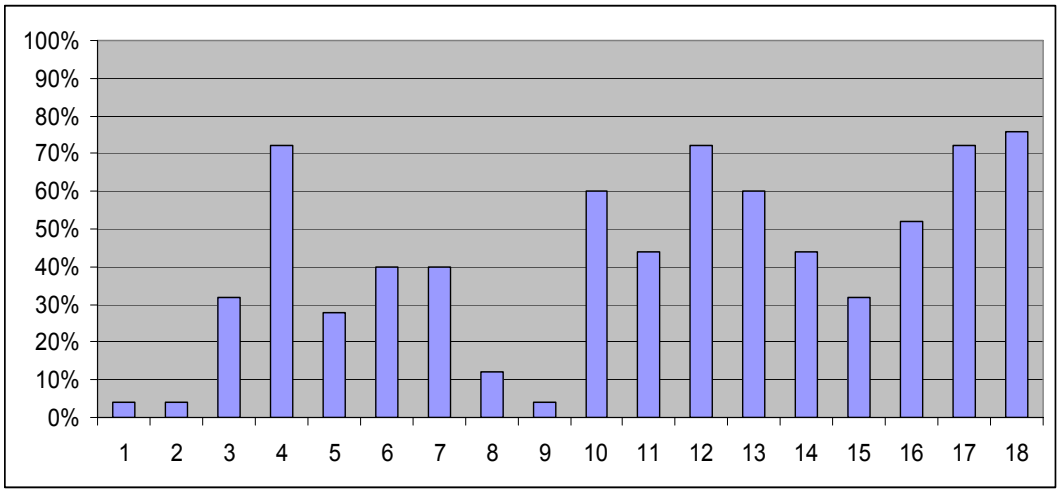
τα διόδια καθώς και για τον πληθυσμό της Ελλάδας που είναι ένας πεπερασμένος αριθμός.

Πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι ενώ το 9,5% των μαθητών δήλωσε ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός στην ερώτηση 9 που τους ζητείται να απαντήσουν για τη πλευρά του τελευταίου τετραγώνου, μόνο το 4,7% απάντησε ότι δεν μπορεί σε αυτό το σύνολο να υπάρχει τελευταίο τετράγωνο. Δηλαδή, ενώ καταλαβαίνουν ότι οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, φαίνεται ότι δεν μπορούν να κατανοήσουν ότι αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει τελευταίο τετράγωνο. Ίσως αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι τα σχήματα ανήκουν στον πεπερασμένο κόσμο μας και αυτό δεν τους αφήνει να σκεφτούν αφαιρετικά.

Όσον αφορά στη σύγκριση άπειρων συνόλων φαίνεται να επιβεβαιώνονται οι προηγούμενες έρευνες, αφού οι μαθητές δίνουν απαντήσεις έχοντας ως κριτήριο ένα από τα πέντε που προαναφέρθηκαν. Φαίνεται να υπερισχύει αυτό του μέρους-όλου, ιδιαίτερα στην 5 ερώτηση όπου απαντά σωστά μόνο το 19%, ενώ το 81% θεωρεί ότι το σύνολο Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...}περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Α={ 1,2,3,4,5,..... } αφού το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Γ. Πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι το 6,5% θεωρεί ότι το σύνολο Γ περιέχει λιγότερα στοιχεία από το Α γιατί «οι ακέραιοι είναι λιγότεροι από τους φυσικούς» Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 4 και 10 είναι 52,3% και 48% αντίστοιχα. Ενώ στην ερώτηση 4 χρησιμοποιούν το κριτήριο της 1-1 αντιστοιχίας στην ερώτηση 10 το 4,3% αυτών των μαθητών χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο. Αυτό μπορεί να συμβαίνει γιατί, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το ένα σύνολο περιέχει γεωμετρικό σχήμα και θεωρούν ότι πρέπει να έχει συγκεκριμένη πλευρά.

3.1.1.2 Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Όπως φαίνεται από τον πίνακα μόνο το 4% των μαθητών φαίνεται να γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις ερωτήσεις το 65,4% των μαθητών δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$, το 11,5% θεωρεί ότι ο μικρότερο αριθμό που υπάρχει είναι το μηδέν, ενώ το 15,4% των μαθητών προσπαθώντας να προσδιορίσει το μεγαλύτερο αριθμό δίνει ως απάντηση αριθμούς με άπειρα ψηφία.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση. Μόνο το 32% των μαθητών είναι σε θέση να τοποθετήσει τους αριθμούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Δυστυχώς, οι περισσότεροι από αυτούς δεν ανέφεραν τι ήταν αυτό που τους δυσκόλεψε στο να τοποθετήσουν τους αριθμούς στον άξονα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το 23% των μαθητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3, καθώς επίσης και ότι ένα 7,7% θεωρεί ότι οι δύο αριθμοί είναι ίσοι..

Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 2 και του 1 και του 3 βλέπουμε ότι μόνο το 40% των μαθητών απαντάει σωστά. Το 16% των μαθητών αναφέρει ότι υπάρχουν 10 και 20 αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αντίστοιχα ενώ το 28% απαντά ότι δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί μεταξύ του 1-2 ενώ υπάρχει μόνο ένας μεταξύ του 1-3 και αυτός είναι το 2. Βλέπουμε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση 8 σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 γίνεται 12%. Ενώ το 40% των μαθητών απαντά ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 το 28% αυτών στην επόμενη ερώτηση θεωρεί ότι οι αριθμοί μεταξύ του 1-3 είναι περισσότεροι.

Για τις τελευταίες 8 ερωτήσεις, βλέπουμε ότι το 56% των μαθητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το 28% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς, φαίνεται δηλαδή να μην γνωρίζουν ότι ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Αυτό που ίσως είναι ενδιαφέρον εδώ είναι ότι ενώ το 65,4% των μαθητών απάντησαν ότι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζουν είναι το $+\infty$, το 24% αυτών των μαθητών χαρακτηρίζουν ως λανθασμένη την πρόταση: «Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει». Φαίνεται δηλαδή ότι υπάρχουν ιδιαίτερα αντιφατικές σκέψεις στα μυαλά των μαθητών.

Όσον αφορά στη σύγκριση άπειρων συνόλων φαίνεται να επιβεβαιώνονται οι προηγούμενες έρευνες αφού οι μαθητές δίνουν απαντήσεις έχοντας ως κριτήριο ένα από τα πέντε που προαναφέρθηκαν και χρησιμοποιούν διαφορετικό κριτήριο σε κάθε ερώτηση.

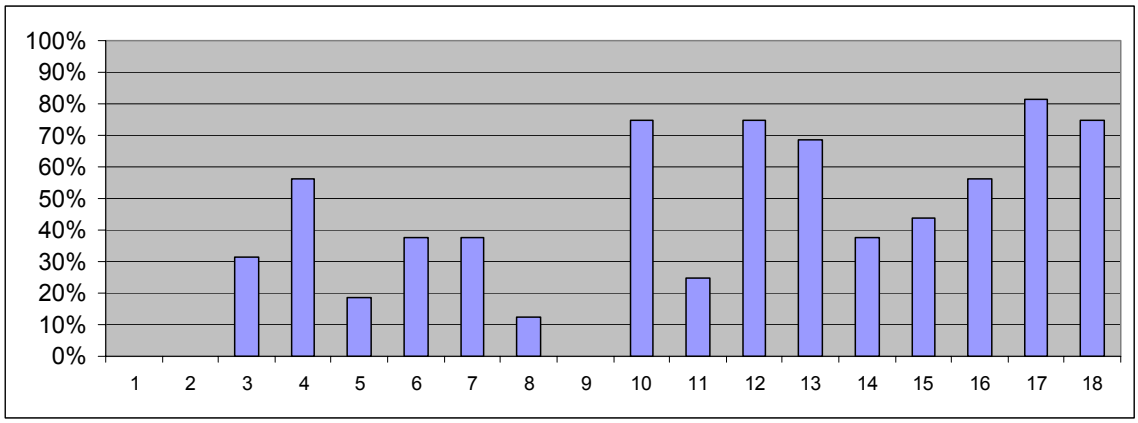
Συγκεκριμένα στην ερώτηση 4 που τους ζητείται να συγκρίνουν τους πληθαρίθμους δύο άπειρων συνόλων το 72% απαντά σωστά και δικαιολογεί την απάντηση του χρησιμοποιώντας την 1-1 αντιστοιχία ενώ το υπόλοιπο 28% θεωρεί ότι το σύνολο Α={ 1,2,3,4,5,.....} περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Β ={ 1,4,9,16,25,..} και το δικαιολογεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο μέρος-όλο. Στην επόμενη ερώτηση μόνο το 28% απαντά σωστά ενώ το υπόλοιπο 72% θεωρεί ότι το σύνολο Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...}περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Α={ 1,2,3,4,5,..... } αφού το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Γ. Στην ερώτηση 10 που τους ζητείται να συγκρίνουν το σύνολο των τετραγώνων με το σύνολο των εμβαδών τους, απαντά σωστά το 60%. Οι μαθητές αυτοί ανήκουν στο 72% των μαθητών που είχαν απαντήσει σωστά στην ερώτηση 4. Δηλαδή το 12% αυτών των μαθητών δεν χρησιμοποίησε το κριτήριο της 1-1 αντιστοιχίας όπως στην προηγούμενη απάντηση τους αλλά το κριτήριο μέρος-όλο.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το γεγονός ότι το 48% των μαθητών θεωρεί ως λανθασμένη την πρόταση: «Ονομάζουμε άπειρη διαδικασία μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ». Δικαιολογούν δε την απάντηση τους λέγοντας ότι μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ ονομάζεται είτε ατέρμονη, είτε συνεχόμενη, είτε αέναη.

3.1.2 Β΄ Λυκείου

3.1.2.1 Θεωρητική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών της θεωρητικής κατεύθυνσης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το μεγαλύτερο και μικρότερο αριθμό που γνωρίζουν. Όπως φαίνεται από τον πίνακα κανένας μαθητής δεν γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις ερωτήσεις οι περισσότεροι μαθητές (68,75%) δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$, ενώ αρκετοί είναι αυτοί που απαντάν ως μικρότερο αριθμό το μηδέν (12,5%) . Τέλος υπάρχει ένα ποσοστό μαθητών (18,75%) που προσπαθούν να προσδιορίσουν το μεγαλύτερο αριθμό δίνοντας ως απάντηση αριθμούς με άπειρα ψηφία.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση. Φαίνεται ότι ενώ οι περισσότεροι (75%) μπορούν να τοποθετήσουν εύκολα το 0,3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στο να τοποθετήσουν τον $0.\overline{3}$. Οι περισσότεροι δυστυχώς από αυτούς που δεν τοποθέτησαν το περιοδικό $0.\overline{3}$ δεν ανέφεραν τι ήταν αυτό που τους δυσκόλεψε. Αξίζει εδώ να

σημειωθεί ότι το 18,75% των μαθητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3.

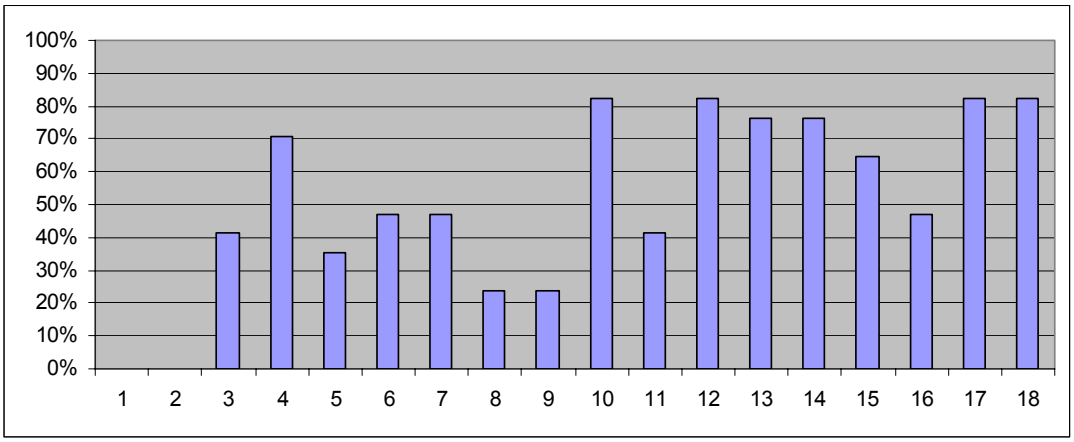
Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 - 2 και του 1 - 3 βλέπουμε ότι μόνο το 37,5% των μαθητών απαντάει σωστά. Το 25% των μαθητών αναφέρει ότι υπάρχουν 9 και 19 αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αντίστοιχα. Και εδώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στη ερώτηση 8 μειώνεται (12,5%) , δηλαδή για άλλη μια φορά οι μαθητές βρίσκουν ότι το ένα σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία από το άλλο, πιθανώς γιατί το 1-2 περιέχεται στο 1-3.

Όσον αφορά στο χαρακτηρισμό των προτάσεων ως σωστές ή λανθασμένες βλέπουμε ότι το 75% των μαθητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το 25% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς. Στις 2 τελευταίες προτάσεις τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 81,3% και 75% αντίστοιχα. Αν και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι υψηλά θα περιμέναμε όπως προαναφέρθηκε ακόμα μεγαλύτερα.

Όσον αφορά τη σύγκριση άπειρων συνόλων βλέπουμε πάλι ότι η ερώτηση 4 ευνοεί την 1-1 αντιστοιχία, αφού περισσότεροι από τους μισούς μαθητές (56,25%) απαντάνε σωστά, ενώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων γίνεται 18,75% στην ερώτηση 5 όπου υπερισχύει το κριτήριο μέρος-όλο. Στη σύγκριση των συνόλων στην ερώτηση 10 φαίνεται πάλι να υπερισχύει το κριτήριο του 1-1 και έχουμε μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων (75%). Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι κανείς μαθητής δεν απάντησε σωστά για το τελευταίο τετράγωνο του συνόλου. Αυτό όμως δεν τους εμπόδισε να συγκρίνουν τους πληθάριθμους των δύο άπειρων συνόλων και να τους βρουν ίσους.

3.1.2.2 Θετική -Τεχνολογική Κατεύθυνση

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Όπως φαίνεται από τον πίνακα κανένας μαθητής δεν γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις ερωτήσεις το 65,6% των μαθητών δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$, ενώ το 18,75% των μαθητών προσπαθώντας να προσδιορίσει το μεγαλύτερο αριθμό δίνει ως απάντηση αριθμούς με άπειρα ψηφία. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι ένα μικρό ποσοστό (6,25%) αναφέρει ως μεγαλύτερο αριθμό το $+\infty^{+\infty}$ και ως μικρότερο το $-\infty^{\infty}$.

Κοιτάζοντας τις σωστές απαντήσεις της τρίτης ερώτησης βλέπουμε ένα μικρό ποσοστό (41,2%). Το 87,5% των μαθητών είναι σε θέση να τοποθετήσει το 0,3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές έγραψαν ότι δυσκολεύονται να τοποθετήσουν τον $0.\overline{3}$ γιατί «δεν φαίνεται» ή «δεν μπορώ να τον προσδιορίσω γιατί δεν είναι σταθερός αριθμός». Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το 18,75% των μαθητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3.

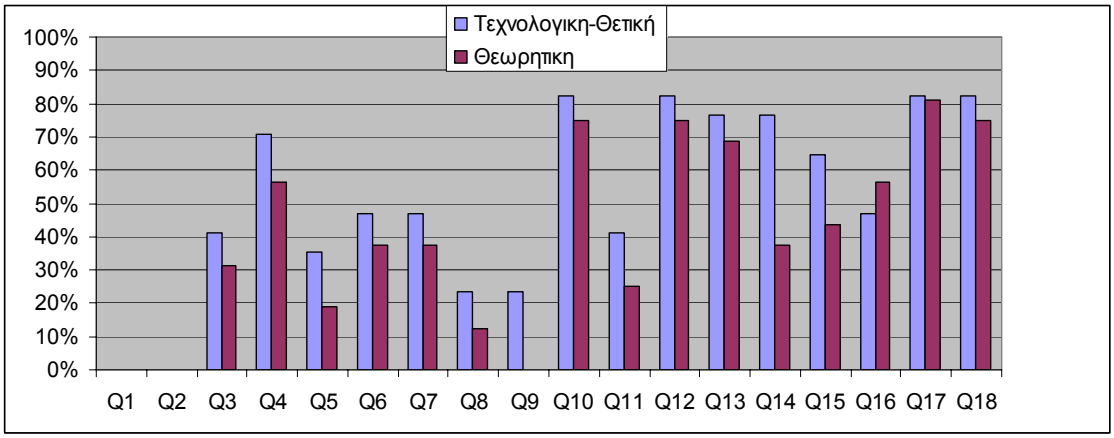
Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 2 και του 1 και του 3 βλέπουμε ότι μόνο το 47,1% των μαθητών απαντάει σωστά. Το 25% απαντά ότι δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί μεταξύ του 1-2 ενώ υπάρχει μόνο ένας μεταξύ του 1-3 και αυτός είναι το 2. Θα σημειώσουμε εδώ ότι ένα μικρό ποσοστό (12,5%) απάντησε ότι υπάρχουν «πολλοί» αριθμοί μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση 8 σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 γίνεται 23,5%. Δηλαδή το 23,6% των μαθητών θεωρεί ότι το ένα σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία από το άλλο, πιθανώς γιατί το 1-2 περιέχεται στο 1-3.

Μπορούμε επίσης να σημειώσουμε ότι ενώ είδαμε ότι το 65,6% των μαθητών απαντάει ότι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζουν είναι το άπειρο , το 82% αυτών χαρακτηρίζουν λανθασμένη την πρόταση «Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει» και δικαιολογούν την απάντησή τους γράφοντας ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός.

Στη σύγκριση απείρων συνόλων πάλι βλέπουμε ότι οι ερωτήσεις 4 και 8 ευνοούν την 1-1 αντιστοιχία γι’αυτό και έχουμε υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων (70,6% και 82,4% αντίστοιχα) ενώ για την ερώτηση 5 υπερισχύει το κριτήριο μέρος-όλο.

3.1.2.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Μια γενική εικόνα δίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Όπως αναφέραμε η ύλη των μαθηματικών των κατευθύνσεων είναι διαφορετική και φαίνεται όπως αναμενόταν ότι τα ποσοστά σωστών απαντήσεων της Θεωρητικής Κατεύθυνσης είναι χαμηλότερα από αυτά της Τεχνολογικής-Θετικής. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι οι διαφορές του δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Βέβαια δεν αναμένουμε οι αντιλήψεις των μαθητών να έχουν αλλάξει δραστικά μέσα σε μια χρονιά. Φαίνεται επίσης ότι στην ερώτηση 16 («Ονομάζουμε άπειρη διαδικασία μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ.») η Θεωρητική κατεύθυνση έχει μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων από τις άλλες 2.

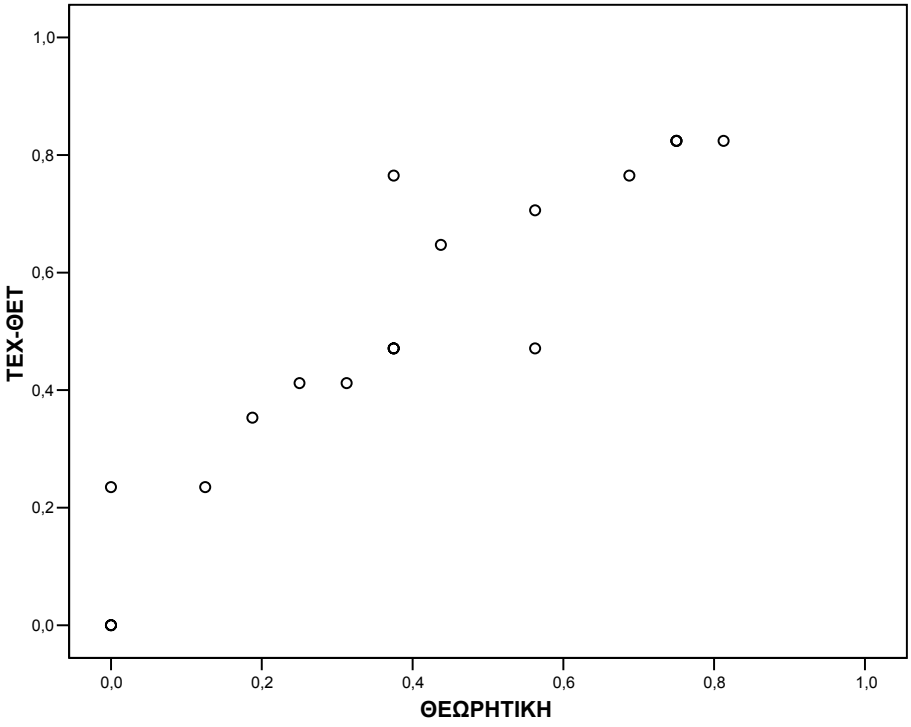
Η συσχετική ανάλυση (Correlation Analysis) είναι η στατιστική μέθοδος που επιλέξαμε για να δούμε κατά πόσο σχετίζονται οι αντιλήψεις των δύο ομάδων Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman' (correlation coefficient) δείχνει αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Ο συντελεστής με τιμή κοντά στο 1 δηλώνει ότι υπάρχει μεγάλη συσχέτιση των δύο μεταβλητών. Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει το συντελεστή συσχέτισης των μαθητών της Θετικής κατεύθυνσης και των μαθητών της Τεχνολογικής- Θετικής Κατεύθυνσης.

			ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ -ΘΕΤΙΚΗ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
Spearman's rho	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ-ΘΕΤΙΚΗ	Correlation Coefficient	1,000	,959(**)
	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	Correlation Coefficient	,959(**)	1,000

** Correlation is significant at the 0.01 level (1-tailed).

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,959 γεγονός που δηλώνει ότι κατά μέσο όρο οι αντιλήψεις των μαθητών δεν μεταβάλλονται σημαντικά κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι η σύγκριση είναι σχετική καθώς το δείγμα είναι διαφορετικό.

Το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς (scatter plot) φαίνεται στη συνέχεια



Αναφέρουμε εδώ όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι υψηλός (> 0,6) τότε μπορούμε να χαράξουμε μια ευθεία στο διάγραμμα διασποράς με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να περνά όσο το δυνατόν πιο κοντά από τις παρατηρήσεις . Η ευθεία αυτή που ονομάζεται ευθεία παλινδρόμησης (regression line) χαράσσεται με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων από την ευθεία να είναι

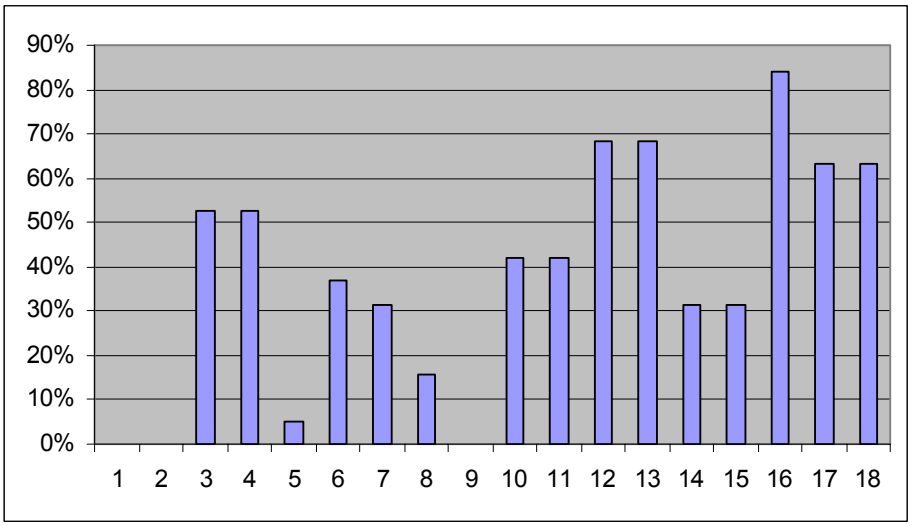
ελάχιστο Όπως βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών.

3.1.3 Γ΄ Λυκείου

Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι τα παιδία της Γ λυκείου που πήραν μέρος στο ερωτηματολόγιο είχαν πάρει μέρος στις γενικές εξετάσεις εισαγωγής στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Είναι δηλαδή ένα μικρό δείγμα των πρωτοετών φοιτητών της ακαδημαϊκής χρονιάς 2004-2005

3.1.3.1 Θεωρητική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Όπως φαίνεται από τον πίνακα κανένας μαθητής δεν γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτές τις ερωτήσεις το 84.2% των μαθητών δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$, το 10,5% των μαθητών προσπαθώντας να προσδιορίσει το μεγαλύτερο αριθμό δίνει ως απάντηση αριθμούς με άπειρα ψηφία, ενώ το 11,5% θεωρεί ότι ο μικρότερο αριθμό που υπάρχει είναι το μηδέν.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση την οποία απαντά σωστά μόνο το 52,6% των μαθητών. Φαίνεται ότι ενώ οι περισσότεροι (84%) μπορούν να τοποθετήσουν εύκολα το 0,3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στο να τοποθετήσουν τον $0.\overline{3}$. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το 26,3% των μαθητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3.

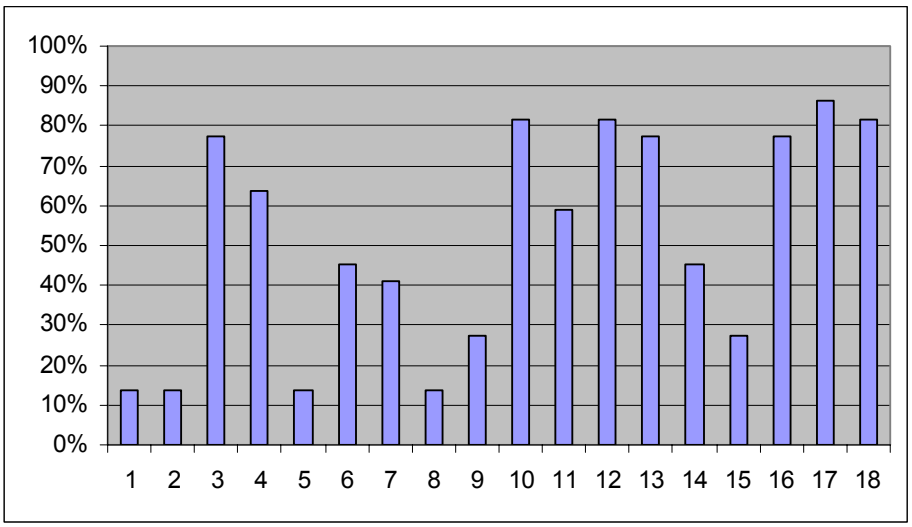
Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 - 2 και του 1 - 3 βλέπουμε ότι απαντάει σωστά το 36,8% και το 31,6% των μαθητών αντίστοιχα . Το 21,5% των μαθητών αναφέρει ότι υπάρχουν 10 και 20 αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αντίστοιχα ενώ το 31,6% απαντά ότι δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί μεταξύ του 1-2 ενώ υπάρχει μόνο ένας μεταξύ του 1-3 και αυτός είναι το 2. Βλέπουμε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση 8 σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 είναι 15,8%. Ενώ το 36,8% των μαθητών απαντά ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 το 21% αυτών στην επόμενη ερώτηση θεωρεί ότι οι αριθμοί μεταξύ του 1-3 είναι περισσότεροι.
Στις τελευταίες 8 ερωτήσεις ζητήσαμε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν ως σωστές τις φράσεις που η λέξη άπειρο-ος χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια και ως λάθος αυτές που χρησιμοποιείται λανθασμένα. Βλέπουμε ότι το 58% των μαθητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το31,58% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς. Παρατηρούμε επίσης ότι το 31,6% των μαθητών χαρακτηρίζει ως λανθασμένη την πρόταση: «Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει». Αν συγκρίνουμε την ερώτηση για τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει με την παραπάνω βλέπουμε ότι το 30% των μαθητών θεωρεί ότι το άπειρο είναι και δεν είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που υπάρχει. Όταν

δηλαδή τους ζητάμε να μας πουν ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζουν απαντάνε το άπειρο και στην συνέχεια χαρακτηρίζουν λανθασμένη την συγκεκριμένη πρόταση.

Όσον αφορά στη σύγκριση άπειρων συνόλων βλέπουμε ότι στην ερώτηση 4 σχεδόν οι μισοί χρησιμοποιούν το κριτήριο της 1-1 αντιστοιχίας ενώ οι υπόλοιποι το κριτήριο μέρος-όλο. Στην ερώτηση 5 το 94,8% θεωρεί ότι το σύνολο Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...} περιέχει περισσότερα στοιχεία αφού το σύνολο Α={ 1,2,3,4,5,..... } είναι υποσύνολο του συνόλου Γ.

3.1.3.2 Θετική- Τεχνολογική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των μαθητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Όπως φαίνεται από τον πίνακα μόνο το 13,65% των μαθητών φαίνεται να γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλοι οι υπόλοιποι μαθητές (86,35%) δίνουν ως απάντηση το $\pm\infty$.

Συγκρίνοντας τις σωστές απαντήσεις της πρώτης ερώτησης με τις σωστές τις 9, βλέπουμε ότι στην ερώτηση 9 έχουν απαντήσει σωστά περισσότεροι μαθητές (27,3%). Μόνο το 33,3% αυτών που απάντησαν σωστά στην 1 απάντησαν σωστά και στην 9. Δηλαδή βλέπουμε ότι το 26,3% αυτών που απάντησαν λάθος στην πρώτη ερώτηση απάντησαν σωστά στην 9. Οι σωστές απαντήσεις τους όμως είναι πιθανό να προέρχονται από παρανόηση αφού λένε ότι δεν θα υπάρχει τελευταίο τετράγωνο, όχι γιατί οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ αλλά γιατί δεν μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά $+\infty$.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη ερώτηση. Σχεδόν όλοι (91%) τοποθετούν σωστά το 0,3. Υπάρχει ένα μικρό ποσοστό (9%) που δεν τοποθέτησε κανέναν από τους 2 αριθμούς χωρίς να το δικαιολογήσει, ενώ ένα 10% θεώρησε ότι το 0,3 είναι μικρότερο από το $0.\overline{3}$. Αναφέρουμε επίσης ότι ένα 5% περίπου τοποθέτησε και τους 2 αριθμούς στο ίδιο σημείο του άξονα λέγοντας ότι είναι τόση μικρή η διαφορά τους που δεν μπορεί να απεικονιστεί.

Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 2 και του 1 και του 3 βλέπουμε ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές απαντάνε σωστά (45,5% και 41% αντίστοιχα) . Το 13,6% των μαθητών αναφέρει ότι υπάρχουν 9 και 19 αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αντίστοιχα ενώ το 23% απαντά ότι δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί μεταξύ του 1-2 ενώ υπάρχει μόνο ένας μεταξύ του 1-3 και αυτός είναι το 2. Βλέπουμε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση 8 σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 γίνεται 13,65%. Όταν ζήτησα από έναν μαθητή να μου εξηγήσει γιατί το ένα άπειρο είναι μεγαλύτερο από το άλλο μου απάντησε ως εξής:

«Αν θεωρήσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε μεταξύ του 1-2 υπάρχουν άπειρα σημεία, έστω χ άπειρα σημεία , ενώ μεταξύ του 1-3 θα υπάρχουν 2χ άπειρα σημεία.»

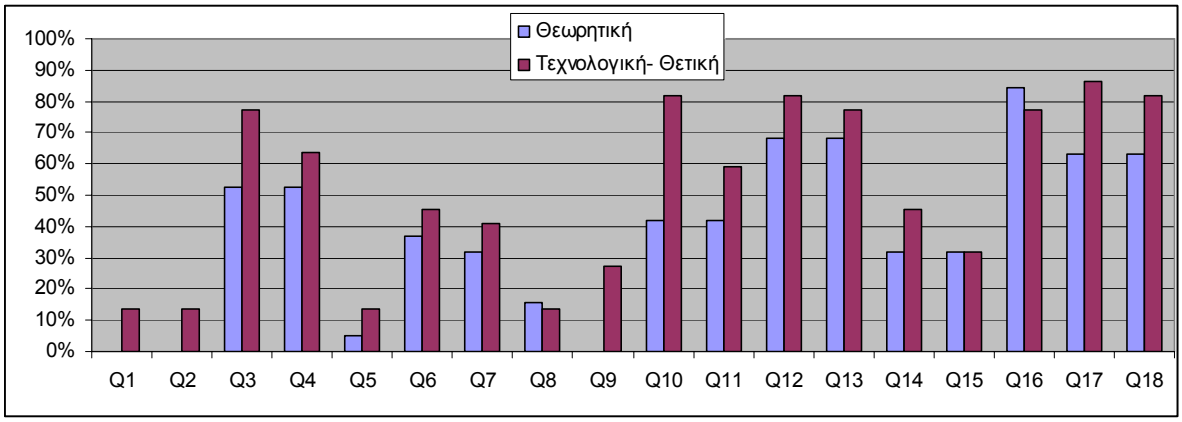
Για τις τελευταίες 8 ερωτήσεις, βλέπουμε ότι το 40% των μαθητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το 18% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς, φαίνεται δηλαδή να μην γνωρίζουν ότι ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Αυτό που είναι επίσης ενδιαφέρον εδώ είναι ότι ενώ το 86,35% των μαθητών απάντησαν ότι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζουν είναι το $+\infty$, το 37% αυτών που απάντησαν σωστά στην προηγούμενη ερώτηση χαρακτηρίζει ως λανθασμένη την πρόταση: «Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει». Φαίνεται δηλαδή ότι υπάρχουν ιδιαίτερα αντιφατικές σκέψεις στα μυαλά των μαθητών.

Όσον αφορά τη σύγκριση άπειρων συνόλων παρατηρούμε ότι την ερώτηση 4 απαντάει σωστά το 64% των μαθητών και υπάρχουν αρκετοί μαθητές που δικαιολόγησαν την απάντηση τους αναφέροντας την 1-1 αντιστοιχία. Σημειώνουμε εδώ ότι οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί Θεωρία Αριθμών, οπότε είναι πολύ σημαντικό το ότι καταφέρνουν και κάνουν τέτοιους συλλογισμούς. Το υπόλοιπο 36% των μαθητών απάντησε ότι Α={ 1,2,3,4,5,.....} περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Β ={ 1,4,9,16,25,..} αφού το Β είναι υποσύνολο του Α. Στην επόμενη ερώτηση μόνο το 13,6% απαντάει σωστά ενώ το υπόλοιπο 86,40% θεωρεί ότι το σύνολο Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...}περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Α={ 1,2,3,4,5,..... } αφού το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Γ. Στην ερώτηση 10 που τους ζητείται να συγκρίνουν το σύνολο των τετραγώνων με το σύνολο των εμβαδών τους, απαντάει σωστά το 82%. Εξετάζοντας αυτές τις 3 ερωτήσεις βλέπουμε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν συνεχώς διαφορετικά κριτήρια για να συγκρίνουν άπειρα σύνολα.

3.1.3.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Μια γενική εικόνα δίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Όπως αναφέραμε η ύλη των μαθηματικών των κατευθύνσεων είναι διαφορετική και φαίνεται όπως αναμενόταν ότι τα ποσοστά σωστών απαντήσεων της Θεωρητικής Κατεύθυνσης είναι χαμηλότερα από αυτά της Τεχνολογικής-Θετικής. Βέβαια δεν αναμένουμε οι αντιλήψεις των μαθητών να έχουν αλλάξει δραστικά μέσα σε μια χρονιά. Φαίνεται επίσης ότι στις ερωτήσεις 8 και 16 η Θεωρητική κατεύθυνση έχει μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων από τις άλλες 2 κατευθύνσεις .

Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει το συντελεστή συσχέτισης των μαθητών της Θετικής κατεύθυνσης και των μαθητών της Τεχνολογικής- Θετικής Κατεύθυνσης

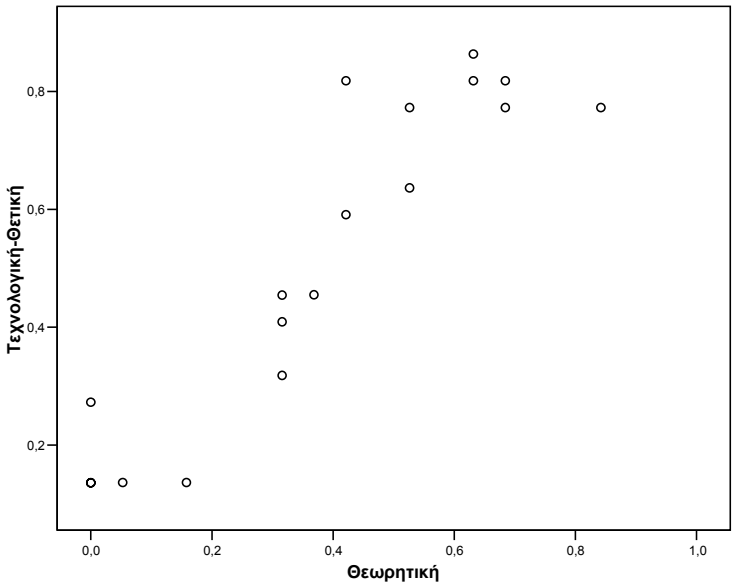
			Τεχνολογική-Θετική	Θεωρητική
Spearman's rho	Τεχνολογική-Θετική	Correlation Coefficient	1,000	,897(**)
	Θεωρητική	Correlation Coefficient	,897(**)	1,000

** Correlation is significant at the 0.01 level (1-tailed).

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,897 γεγονός που δηλώνει ότι κατά μέσο όρο οι αντιλήψεις των μαθητών δεν έχουν μεταβληθεί σημαντικά κατά τη

διάρκεια των σπουδών τους. Θυμίζουμε εδώ ότι ο ίδιος συντελεστής για την Β Λυκείου ήταν 0,959.

Το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς (scatter plot) φαίνεται στη συνέχεια



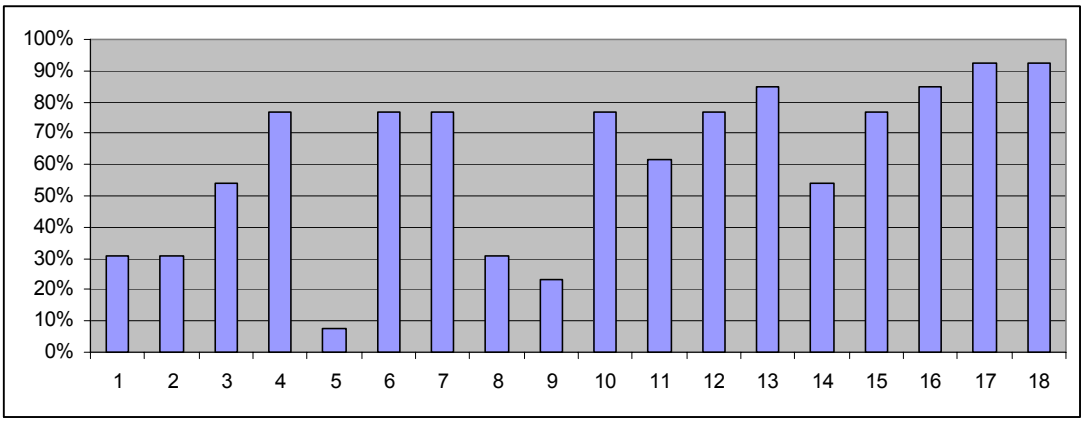
Όπως βλέπουμε και εδώ, όπως στη Β Λυκείου, υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών.

3.1.4 Τμήμα Μεθοδολογίας Θεωρίας & Ιστορίας της Επιστήμης

Στα ερωτηματολόγια απάντησαν πρωτοετείς φοιτητές στο τέλος του Ακαδημαϊκού Έτους 2003-2004, κατά το οποίο διδάχθηκαν Απειροστικό Λογισμό (η ύλη που διδάχθηκαν αναφέρεται στο Παράρτημα Ι).

3.1.4.1 Θεωρητική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των φοιτητών της θεωρητικής κατεύθυνσης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι γενικά έχουμε υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων.

Όσον αφορά στις 2 πρώτες ερωτήσεις βλέπουμε ότι περίπου το 31% των φοιτητών γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός, θυμίζω εδώ ότι το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών της Γ Λυκείου που έχουν επιλέξει τη Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση ήταν 13,65%. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το 23% των φοιτητών απάντησε ότι αφού το άπειρο δεν είναι πραγματικός αριθμός ο μεγαλύτερος αριθμός θα είναι κάποιος που τείνει στο άπειρο. Όμοια σκεπτόμενος ένας φοιτητής απάντησε σαν μεγαλύτερο αριθμό τον $+\infty-1$ ενώ σαν μικρότερο τον $-\infty+1$.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των φοιτητών στην τρίτη ερώτηση. Φαίνεται ότι ενώ οι περισσότεροι (93%) μπορούν να τοποθετήσουν εύκολα το 0,3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, αντιμετωπίζουν δυσκολία στο να τοποθετήσουν τον $0.\overline{3}$. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το 23,7%% των φοιτητών θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3. Ορισμένοι δικαιολογούν την απάντηση τους γράφοντας: « σίγουρα και οι δύο αριθμοί είναι μεγαλύτεροι του μηδέν το $0.\overline{3}$ όμως είναι άπειρο ενώ το 0,3 τείνει στο 0.» Ένας φοιτητής τοποθέτησε και τους δύο αριθμούς στο ίδιο σημείο γράφοντας: « Το $0.\overline{3}$ κανονικά είναι ελάχιστα παραπάνω από το 0,3 αν και μπορούμε να πούμε ότι οι δυο αριθμοί είναι ίσοι και να τους τοποθετήσουμε στο ίδιο ακριβώς σημείο.»

Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 - 2 και του 1 - 3 βλέπουμε ότι το 77% των φοιτητών απαντάει σωστά. Το 23% των φοιτητών που απάντησε λάθος έγραψε ότι υπάρχουν και άλλοι αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 αλλά δεν απάντησε καθόλου στο πόσοι.. Παρατηρούμε επίσης ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 είναι 23%. Ενώ το 77% των φοιτητών απαντά ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 και 1-3 το 54% αυτών στην επόμενη ερώτηση θεωρεί ότι οι αριθμοί μεταξύ του 1-3 είναι περισσότεροι.

Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ενώ το 31% των φοιτητών δήλωσε ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός στην ερώτηση 9 που τους ζητείται να απαντήσουν για τη πλευρά του τελευταίου τετραγώνου, μόνο το 25% αυτών απάντησε ότι δεν υπάρχει τελευταίο τετράγωνο στο σύνολο μας. Το 75% αυτών δήλωσε ότι τελευταίο θα είναι το

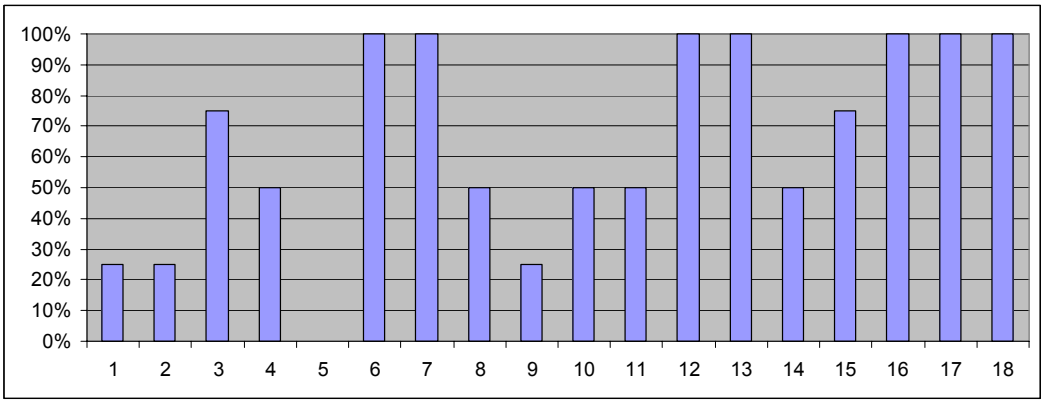
τετράγωνο με πλευρά ν. Βλέπουμε δηλαδή ότι ενώ δέχονται ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός θεωρούν ότι το τετράγωνό πρέπει να έχει ένα συγκεκριμένο μήκος πλευράς.

Στις τελευταίες 8 ερωτήσεις ζητήσαμε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν ως σωστές τις φράσεις που η λέξη άπειρο-ος χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια και ως λάθος αυτές που χρησιμοποιείται λανθασμένα. Βλέπουμε ότι το 38% των φοιτητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ το23% θεωρεί ότι ο αριθμός π είναι ίσος με 3,14 ακριβώς.

Όσον αφορά στη σύγκριση άπειρων συνόλων παρατηρούμε πάλι ότι οι ερωτήσεις που οδηγούν στο κριτήριο 1-1 αντιστοιχίας (δηλ 4,10) έχουν μεγάλα ποσοστά σωστών απαντήσεων, ενώ για την 5 χρησιμοποιείται το κριτήριο μέρος-όλο και γι΄αυτό το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι μόλις 7,7%. Θα σημειώσουμε εδώ ότι οι φοιτητές που απάντησαν σωστά σε αυτή την ερώτηση δικαιολόγησαν την απάντηση τους γράφοντας ότι «έχουμε 2 άπειρα σύνολα άρα δεν συγκρίνονται»

3.1.4.2 Θετική -Τεχνολογική Κατεύθυνση.

Η αναπαράσταση των απαντήσεων των φοιτητών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :



Όσον αφορά στις 2 πρώτες ερωτήσεις βλέπουμε ότι περίπου το 25% των φοιτητών γνωρίζει ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος και μικρότερος αριθμός. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το 50% των παιδίων απάντησαν ότι αφού το άπειρο δεν είναι πραγματικός αριθμός ο μεγαλύτερος αριθμός θα είναι κάποιος που τείνει στο άπειρο.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των φοιτητών στην τρίτη ερώτηση. Το 75% των φοιτητών τοποθέτησε σωστά και τους 2 αριθμούς ενώ το 25% θεωρεί ότι το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερος αριθμός από το 0,3, δικαιολογούν δε την απάντηση τους γράφοντας: « το $0.\overline{3}$ είναι μικρότερο του 0,3 κατά 0,033333… Επομένως θα βρίσκεται πιο αριστερά από το 0,3.»

Στις ερωτήσεις 6-7 σχετικά με το πόσοι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1 - 2 και του 1 - 3 βλέπουμε ότι όλοι οι φοιτητές απαντάνε σωστά. Παρατηρούμε επίσης ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην επόμενη ερώτηση σχετικά με το αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1-2 ή του 1-3 γίνεται 50%. Πάλι δηλαδή είχαμε σύγκριση άπειρων συνόλων και υπερίσχυσε το κριτήριο μέρος-όλο.

Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι φοιτητές που δήλωσαν ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός δήλωσαν επίσης ότι το σύνολο των τετραγώνων δεν θα έχει τελευταίο τετράγωνο. Ενώ αυτοί που απάντησαν ότι ο μεγαλύτερος αριθμός είναι κάποιος που τείνει στο άπειρο, στην ερώτηση 9 απάντησαν ως τελευταίο τετράγωνο αυτό του οποίου η πλευρά τείνει στο άπειρο.

Όσον αφορά τη σύγκριση άπειρων συνόλων παρατηρούμε πάλι ότι οι ερωτήσεις που οδηγούν στο κριτήριο 1-1 αντιστοιχίας (δηλ 4,10) έχουν απαντηθεί σωστά από τους ίδιους φοιτητές, οι οποίοι δίνουν την ίδια δικαιολόγηση και στις 2.Δηλαδή και στις 2 οι φοιτητές απάντησαν με βάση το κριτήριο της 1-1 αντιστοιχίας. Στην ερώτηση 5 όμως υπερίσχυσε σε όλους το κριτήριο μέρος-όλο και δεν απάντησε κανένας σωστά.

Στις τελευταίες 8 ερωτήσεις ζητήσαμε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν ως σωστές τις φράσεις που η λέξη άπειρο-ος χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια και ως λάθος αυτές που χρησιμοποιείται λανθασμένα. Βλέπουμε ότι το 50% των φοιτητών θεωρεί ως άπειρο αριθμό έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ενώ φαίνεται όλοι να γνωρίζουν ότι ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Όσον αφορά το κατά πόσο είναι σωστή η πρόταση «ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει» το 75% των φοιτητών την χαρακτήρισε λανθασμένη και δικαιολόγησε γράφοντας: Το άπειρο δεν είναι αριθμός. Το άπειρο δεν είναι αριθμός αλλά έννοια. Δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός.. Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι όλοι οι φοιτητές χαρακτήρισαν λανθασμένες τις προτάσεις :

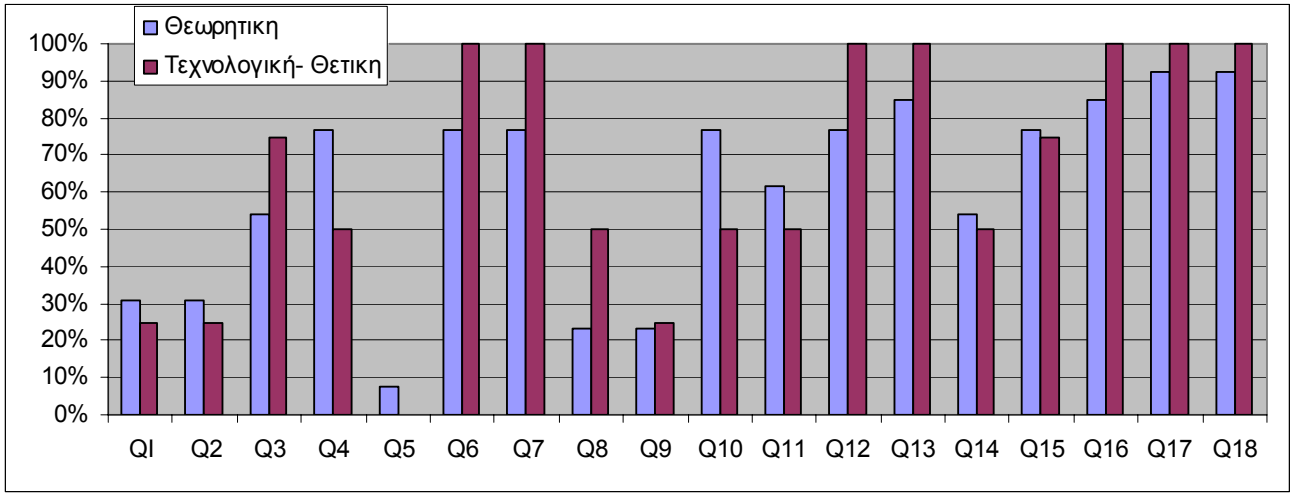
- Στα κεφάλια των περισσότερων ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες.
- Ονομάζουμε άπειρη διαδικασία μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ.
- Από τα διόδια της Αττικής Οδού περνάνε καθημερινά άπειρα αυτοκίνητα.
- Στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες.

Όλοι δικαιολόγησαν αναφέροντας ότι οι παραπάνω αριθμοί είναι πεπερασμένοι.

3.1.4.3 Σύγκριση Θεωρητικής με Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

Όπως προαναφέρθηκε οι φοιτητές παρακολουθούν τις ίδιες σειρές μαθημάτων , δεδομένου όμως ότι τα παιδία της Θεωρητικής Κατεύθυνσης έρχονται σε επαφή με κάποιες έννοιες (όπως αυτοί του απείρου) πρώτη φορά, είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν σημαντικές διαφορές.

Μια γενική εικόνα των σωστών απαντήσεων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Με μια πρώτη ματιά παρατηρούμε ότι τα συγκριτικά αποτελέσματα δεν είναι αυτά που θα αναμέναμε, θα τονίσουμε εδώ ότι το δείγμα μας είναι πάρα πολύ μικρό και η αναλογία Θεωρητικής ,Θετικής –Τεχνολογικής είναι 3,25:1. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η Θεωρητική Κατεύθυνση έχει δώσει περισσότερες σωστές απαντήσεις στο 44,5% των ερωτήσεων.

Ίσως αυτό οφείλεται στο ότι η Θεωρητική Κατεύθυνση έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια, και τη διδάσκεται με έμφαση στο θεωρητικό μέρος σε αντίθεση με τη διδασκαλία του Λυκείου. Οι φοιτητές της Τεχνολογικής –Θετικής Κατεύθυνσης

έχουν διδαχθεί την έννοια, και ίσως να αντιμετωπίζουν την διδασκαλία αδιάφορα μια και θεωρούν ότι είναι μια έννοια που έχουν κατανοήσει και μπορούν να την χειριστούν με ευκολία, δεδομένου ότι κατάφεραν να την χειριστούν επιτυχημένα στις Εισαγωγικές Εξετάσεις.

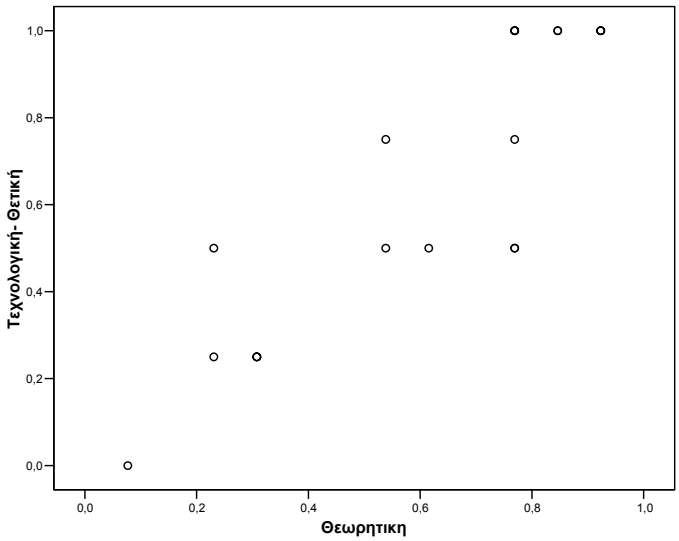
Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει το συντελεστή συσχέτισης των φοιτητών της Θετικής κατεύθυνσης και αυτών της Τεχνολογικής- Θετικής Κατεύθυνσης

			Τεχνολογική- Θετική	Θεωρητική
Spearman's rho	Τεχνολογική- Θετική	Correlation Coefficient	1,000	,853(**)
	Θεωρητικη	Correlation Coefficient	,853(**)	1,000

** Correlation is significant at the 0.01 level (1-tailed).

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,853 γεγονός που δηλώνει ότι κατά μέσο όρο οι αντιλήψεις των φοιτητών δεν διαφέρουν κατά πολύ. Στη Γ Λυκείου ο αντίστοιχος συντελεστής ήταν 0,918.

Το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς (scatter plot) φαίνεται στη συνέχεια



Όπως βλέπουμε υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών, βέβαια δεν είναι τόσο έντονη όσο στις τάξεις του Λυκείου.

3.1.5 Ερωτήσεις Ανοιχτού τύπου

Στη συνέχεια σχολιάζονται οι απαντήσεις όλων των συμμετεχόντων στις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου.

Στην ερώτηση που τους ζητούσε να εξηγήσουν σε κάποιο μικρότερο τους την πρόταση: Από ένα σημείο περνάνε άπειρες ευθείες , οι μαθητές και οι φοιτητές απέδωσαν το «άπειρες ευθείες» με το «αμέτρητες ευθείες» είτε με το «πάρα πολλές». Υπήρχαν επίσης αρκετοί που ζωγράφισαν το σχήμα. Σε γενικές γραμμές όλοι ήταν σε θέση να εξηγήσουν σωστά το νόημα της πρότασης με εξαίρεση ίσως αυτών που το απέδωσαν με το πάρα πολλές αν και δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το κατά πόσο είχαν τη σωστή έννοια στο μυαλό τους.

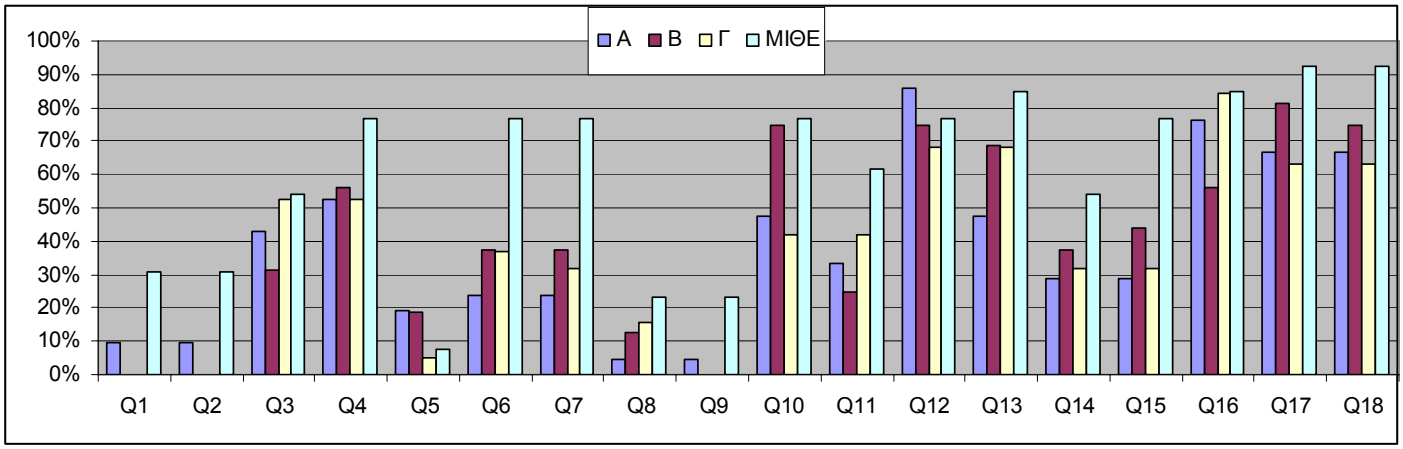
Στην πρόταση: «Ο αριθμός 0,444... έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία» απάντησε περίπου το 60% των συμμετεχόντων γράφοντας ότι τα 4 του αριθμού αυτού δεν τελειώνουν ποτέ, συνεχίζονται συνεχώς, επαναλαμβάνεται για πάντα ή ότι ο περιοδικός αριθμός 0,4 έχει άπειρα 4 μετά το κόμμα.

Στην τελευταία ερώτηση οι προτάσεις που κάνανε οι συμμετέχοντες χρησιμοποιώντας τη λέξη άπειρο προέρχονταν όλες από τον κόσμο των μαθηματικών. Ιδιαίτερα αυτοί της Θετικής και της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης χρησιμοποιούσαν εκφράσεις όπως : όταν το χ τείνει στο άπειρο, το όριο της συνάρτησης είναι άπειρο κ.τ.λ.

3.2 Συγκριτικά Αποτελέσματα

3.2.1 Θεωρητική κατεύθυνση

Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το κατά πόσο σχετίζονται μεταξύ τους οι αντιλήψεις κάθε ομάδας.

			A	B	Γ	ΜΙΘΕ
Spearman's rho	A	Correlation Coefficient	1,000	,887(**)	,941(**)	,813(**)
	B	Correlation Coefficient	,887(**)	1,000	,835(**)	,884(**)
	Γ	Correlation Coefficient	,941(**)	,835(**)	1,000	,820(**)
	ΜΙΘΕ	Correlation Coefficient	,813(**)	,884(**)	,820(**)	1,000

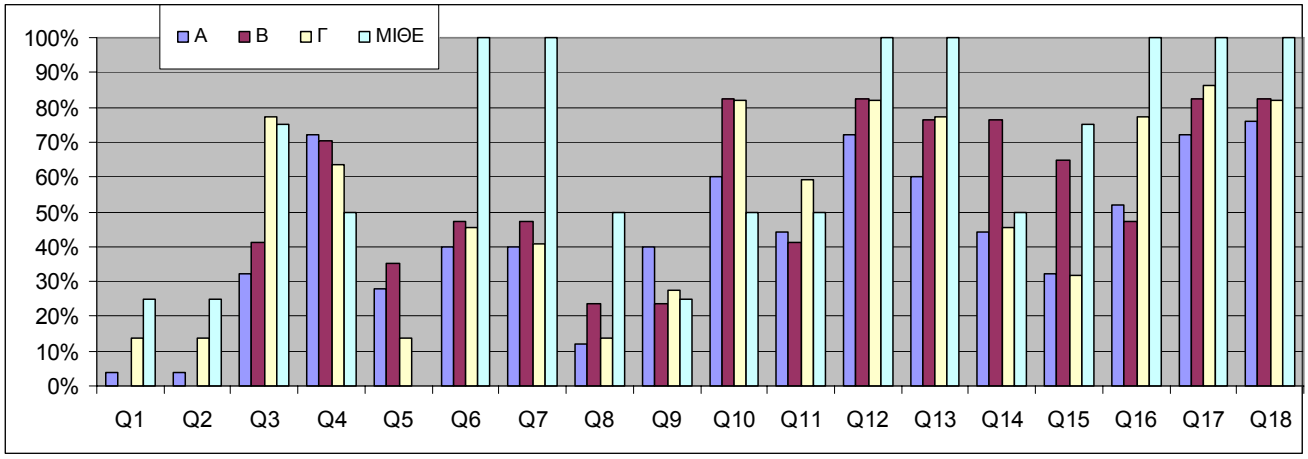
** Correlation is significant at the 0.01 level (1-tailed).

Σε γενικές γραμμές φαίνεται ότι καλύτερα αποτελέσματα έχουμε από τους φοιτητές του ΜΙΘΕ ενώ στην συνέχεια ακολουθούν οι μαθητές της Β Λυκείου. Παρατηρούμε επίσης ότι όλες οι ομάδες σχετίζονται θετικά μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι οι αντιλήψεις δεν αλλάζουν σημαντικά από τάξη σε τάξη. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι μεγαλύτερος μεταξύ της Α και της Γ Λυκείου, ενώ μικρότερος μεταξύ του ΜΙΘΕ και της Α Λυκείου. Αυτό ίσως δείχνει ότι οι αυθόρμητες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές στην Α Λυκείου αρχίζουν να κλονίζονται μετά το

τέλος του πρώτου έτους στο πανεπιστήμιο. Διευκρινίζουμε εδώ ότι αν και αν στο τμήμα ΜΙΘΕ οι περισσότεροι φοιτητές προέρχονται από την Θεωρητική Κατεύθυνση διδάσκονται μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο. Πιθανόν αν κάναμε την έρευνα σε Θεωρητικές σχολές να βλέπαμε ότι οι αντιλήψεις τους παραμένουν αναλλοίωτες.

3.2.2 Θετική-Τεχνολογική κατεύθυνση

Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



Παρατηρούμε ότι οι φοιτητές του ΜΙΘΕ έχουν μια υπεροχή έναντι των μαθητών του Λυκείου.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το κατά πόσο σχετίζονται μεταξύ τους οι αντιλήψεις κάθε ομάδας.

			A	B	Γ	ΜΙΘΕ
Spearman's rho	A	Correlation Coefficient	1,000	,878(**)	,880(**)	,597(**)
	B	Correlation Coefficient	,878(**)	1,000	,855(**)	,648(**)
	Γ	Correlation Coefficient	,880(**)	,855(**)	1,000	,698(**)
	ΜΙΘΕ	Correlation Coefficient	,597(**)	,648(**)	,698(**)	1,000

** Correlation is significant at the 0.01 level (1-tailed).

Όσον αφορά την συσχέτιση των αντιλήψεων βλέπουμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι υψηλός μεταξύ των τάξεων του Λυκείου και του ΜΙΘΕ. Φαίνεται δηλαδή ότι οι

αντιλήψεις των μαθητών αλλάζουν από χρονιά σε χρονιά και επηρεάζονται αρκετά από τη διδασκαλία. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης μικραίνει και παίρνει τη μικρότερη τιμή του, μεταξύ της Α Λυκείου και του ΜΙΘΕ που είναι 0,597, γεγονός που δείχνει ότι οι αντιλήψεις τους αρχίζουν να διαφέρουν. Φαίνεται δηλαδή ότι στους μαθητές της Θετικής-Τεχνολογικής κατεύθυνσης η διδασκαλία επιδρά δραστικά στις αντιλήψεις τους.

4. Συμπεράσματα

Στην μελέτη αυτή προσπαθήσαμε να καταγράψουμε τις αντιλήψεις μαθητών και των τριών τάξεων του Λυκείου καθώς και φοιτητών σχετικά με το άπειρο και να δούμε πώς μεταβάλλονται (αν μεταβάλλονται).

Όσον αφορά στις αντιλήψεις τους για το άπειρο βλέπουμε ότι γενικά στο μυαλό τους υπάρχουν αντιφατικές σκέψεις. Θεωρούν το άπειρο ως τον μεγαλύτερο αριθμό ενώ συγχρόνως δηλώνουν ότι το άπειρο δεν είναι αριθμός. Άλλες φορές επίσης χρησιμοποιούν τη λέξη άπειρο για να δηλώσουν κάτι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο και άλλες για να δηλώσουν κάτι αμέτρητο. Βέβαια η πλειονότητα των μαθητών είναι σε θέση να αναγνωρίζει πότε η λέξη άπειρο χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματικής της έννοια και πότε όμως δεν μπορούν να δημιουργήσουν μόνοι τους σωστές και τα λανθασμένες προτάσεις. Φαίνεται ότι είναι πολύ λίγοι αυτοί που έχουν σχηματίσει μια σωστή εικόνα για το άπειρο Παρατηρήσαμε επίσης ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χειριστούν δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία, καθώς και ότι ένα μεγάλο ποσοστό θεωρεί τον αριθμό π ίσο με 3,14. Αναφέρουμε εδώ ότι οι μαθητές μαθαίνουν τον αριθμό π στη Β Γυμνασίου όπου στο βιβλίο τους ο αριθμός εμφανίζεται σε σχήμα σαλιγκαριού που μεγαλώνει συνεχώς.

Όσον αφορά στη σύγκριση απείρων συνόλων τα αποτελέσματα μας συμφωνούν με τις προηγούμενες έρευνες. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να συγκρίνουν άπειρα σύνολα είναι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιούν κατά τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων. Οι μαθητές εφαρμόζουν τα 5 κριτήρια στις απαντήσεις τους χωρίς να παρατηρούν τις αντιφάσεις που προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση περισσότερων του ενός κριτηρίου. Επίσης παρατηρήσαμε ότι η απόφαση των μαθητών

ως προς το εάν δύο άπειρα σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων εξαρτάτο κατά ένα μεγάλο μέρος από την αναπαράσταση των συνόλων .

Αν και το δείγμα των φοιτητών ήταν μικρό είδαμε ότι οι αντιλήψεις τους επηρεάζονται δραστικά από τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού, ιδιαίτερα των φοιτητών της Θετικής- Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την άποψη του Monaghan, που θεωρεί ότι οι αντιλήψεις των φοιτητών επηρεάζονται ελάχιστα. Βέβαια δεν μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα της ερευνάς μας μια και όπως προαναφέρθηκε το δείγμα μας ήταν πολύ μικρό.

Γενικά φαίνεται ότι αν και οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο είναι λανθασμένες και τις περισσότερες φορές αντιφατικές με τη μαθηματική έννοια κατά τη διάρκεια των σπουδών τους μεταβάλλονται σημαντικά αλλά δεν καταφέρνουν να εξαλειφθούν. Ίσως αυτό να συμβαίνει μόνο στους μαθητές της Θεωρητικής –Τεχνολογικής κατεύθυνσης κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

Παράρτημα Ι

Παρακάτω αναφέρεται η ύλη των Μαθηματικών των τριών τάξεων του Λυκείου ενώ στη συνέχεια η ύλη του Απειροστικού Λογισμού του ΜΙΘΕ

<u>Τάξη Α΄</u>

Ι. ΄Αλγεβρα :

1. Πραγματικοί αριθμοί

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους. Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο. Βασικές ταυτότητες. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Λύση της εξίσωσης $\alpha\chi+\beta=0$. Παραμετρικές εξισώσεις. Λύση προβλημάτων με εξισώσεις. Διάταξη και πράξεις. Λύση των ανισώσεων $\alpha\chi+\beta>0$, $\alpha\chi+\beta<0$. Απόλυτη τιμή (ορισμός, ιδιότητες). Η έννοια της απόστασης δύο αριθμών. Ρίζες πραγματικών αριθμών (ορισμός, ιδιότητες). Η εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$.

2. Συναρτήσεις

Σύνολα (έννοια, παράσταση). Ίσα σύνολα. Υποσύνολο συνόλου. Κενό σύνολο. Διαγράμματα VENN. Πράξεις με σύνολα (ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα συνόλου). Η έννοια της συνάρτησης (ορισμός, πεδίο ορισμού). Καρτεσιανές συντεταγμένες. Απόσταση σημείων. Γραφική παράσταση συνάρτησης. Η συνάρτηση $F(\chi)=\alpha\chi+\beta$ και η γραφική της παράσταση. Εξίσωση ευθείας. Συντελεστής διεύθυνσης. Συνθήκη παραλληλίας και καθετότητας ευθειών. Μελέτη των συναρτήσεων $F(\chi)=\alpha\chi^2$ και $F(\chi)=\alpha/\chi$. Μονοτονία. Ακρότατα. Οριακές τιμές. Ασύμπτωτες. Άρτια και περιττή συνάρτηση.

3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους. Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων. Ισοδύναμα συστήματα. Γενική λύση του συστήματος πρώτου βαθμού με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους. Χρήση οριζουσών. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερες από δύο εξισώσεις και ισάριθμους αγνώστους.

4. Εξισώσεις και ανισώσεις β΄ βαθμού

Λύση της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Διακρίνουσα. Άθροισμα και γινόμενο ριζών. Εξισώσεις και απλά συστήματα που ανάγονται σε λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Τριώνυμο β΄ βαθμού. Μορφές τριωνύμου. Πρόσημο τριωνύμου. Μελέτη της συνάρτησης $F(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi+\gamma$, με βάση τη μελέτη της $\varphi(\chi)= \alpha\chi^2$. Επίλυση ανισώσεων β΄ βαθμού. Ανισώσεις της μορφής $A(\chi).\ B(\chi).\ \Gamma(\chi)...=0$ και $A(\chi)/B(\chi) = 0$. Συναληθεύουσες ανισώσεις.

5. Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας. Τριγωνομετρικός κύκλος. Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις. Ταυτότητες. Αναγωγή στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο. Σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών, αντίθετων γωνιών και γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $90^{ο}$, $180^{ο}$, $270^{ο}$, $360^{ο}$.

ΙΙ. Γεωμετρία :

1. Βασικές γεωμετρικές έννοιες.
   Οι αρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο. Ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα. Σύγκριση τμημάτων. Πράξεις μεταξύ τμημάτων. Μήκος τμήματος. Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο. Η έννοια της γωνίας. Σύγκριση γωνιών. Είδη γωνιών. Πράξεις με γωνίες. Κάθετες ευθείες. Κάθετος από σημείο σε ευθεία. Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα. Η έννοια του κύκλου. Θέση σημείου ως προς κύκλο. Επίκεντρη γωνία. Μέτρο τόξου και γωνίας.
2. Τρίγωνα.
   Η έννοια του πολυγώνου. Είδη πολυγώνων. Τρίγωνα. Είδη τριγώνων. Στοιχεία τριγώνων. Κριτήρια ισότητας. Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου. Ιδιότητες τόξων και αντίστοιχων χορδών. Ιδιότητες μεσοκαθέτου τμήματος και διχοτόμου γωνίας. Συμμετρικά σχήματα. Σχέσεις εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας τριγώνου. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου. Κάθετες και πλάγιες ευθείες. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου. Ιδιότητες της εφαπτομένης κύκλου. Σχετικές θέσεις δυο κύκλων. Στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές: Γωνίας ίσης με δοθείσα, μεσοκάθετης τμήματος, κάθετης από σημείο σε ευθεία, διχοτόμου γωνίας, τριγώνου.
3. Παράλληλες ευθείες - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια.
   Γωνίες δυο ευθειών που τέμνονται από τρίτη. Θεώρημα ύπαρξης παράλληλων ευθειών. Το $5^{ο}$ αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη. Ιδιότητες παράλληλων ευθειών. Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες. Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου. Παραλληλόγραμμα. Είδη παραλληλογράμμων. Βασικές ιδιότητες παραλληλογράμμων. Βασικές ιδιότητες ορθογωνίου, ρόμβου και τετραγώνου. Ιδιότητες του τμήματος που συνδέει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου. Ιδιότητες της διαμέσου ορθογώνιου τριγώνου. Ορθόκεντρο. Βαρύκεντρο. Τραπέζιο. Βασικές ιδιότητες τραπεζίου.
4. Εγγεγραμμένα τετράπλευρα
   Εγγεγραμμένη γωνία. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης. Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης. Ορισμός και χαρακτηριστικές ιδιότητες εγγεγραμμένου τετράπλευρου σε κύκλο.
5. Γεωμετρικοί τόποι και κατασκευές.
   Έννοια γεωμετρικού τόπου. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Χρησιμοποίηση γεωμετρικών τόπων για την κατασκευή: τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του, ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνεται η υποτείνουσα και η μία κάθετη πλευρά του, εφαπτομένης κύκλου από ένα σημείο εκτός αυτού, κοινής εφαπτομένης δυο κύκλων.
6. Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα
   Αναλογίες τμημάτων. Θεώρημα του Θαλή. Θεώρημα των διχοτόμων τριγώνου. Απολλώνιος κύκλος. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα. Κατασκευή όμοιων πολυγώνων. Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων. Εφαρμογές όμοιων τριγώνων.

<u>Τάξη Β΄</u>

α. Διδακτέα Ύλη Γενικής Παιδείας

Κεφ. $1^{ο}$: Τριγωνομετρία

Παρ. 1.1 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
Παρ. 1.2 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Παρ. 1.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών
Παρ. 1.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α.

Κεφ. 2^{O}: <u>Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις</u>.

Παρ. 2.1 Πολυώνυμα.
Παρ. 2.2 Διαίρεση πολυωνύμων.
Παρ. 2.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις,.
Παρ. 2.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές. (Απλές μόνον εφαρμογές)

Κεφ. 3°: <u>Πρόοδοι</u>

Παρ. 3.1 Ακολουθίες.(Θα διδαχθεί **μόνο** η υποπαράγραφος: "Η έννοια της ακολουθίας")
Παρ. 3.2 Αριθμητική πρόοδος.
Παρ. 3.3 Γεωμετρική πρόοδος.

Κεφ. 4°: <u>Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση</u>

Παρ. 4.1 Εκθετική συνάρτηση.
Παρ. 4.2 Λογάριθμοι, **χωρίς** εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε λογάριθμους με βάση διαφορετική του 10 και του e.
Παρ. 4.3. Λογαριθμική συνάρτηση. (Θα διδαχθούν **μόνο** η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 και η λογαριθμική συνάρτηση με βάση e).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφ. 9°: <u>Μετρικές Σχέσεις</u>

Παρ. 9.1 Ορθές προβολές.
Παρ. 9.2 Πυθαγόρειο θεώρημα.
Παρ. 9.3 Γεωμετρικές κατασκευές.
Παρ. 9.4 Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος,
Παρ. 9.5 Θεωρήματα διαμέσων.
Παρ. 9.7 Τέμνουσες κύκλου

Κεφ. 10°: <u>Εμβαδά</u>

Παρ. 10.1 Πολυγωνικά χωρία.
Παρ. 10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος – Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα.
Παρ. 10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων.
Παρ. 10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου
Παρ. 10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων

Κεφ. 11°: <u>Μέτρηση κύκλου</u>

Παρ. 11.1 Ορισμός Κανονικού Πολυγώνου.
Παρ. 11.2 Ιδιότητες και στοιχεία Κανονικών Πολυγώνων
Παρ. 11.3 Εγγραφή βασικών Κανονικών Πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους.
Παρ. 11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα.
Παρ. 11.5 Μήκος τόξου.
Παρ. 11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα.
Παρ. 11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.

β. Διδακτέα Ύλη Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Κεφ. 1^{O}: Διανύσματα

Παρ. 1.1. Η έννοια του διανύσματος.
Παρ. 1.2. Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων.
Παρ. 1.3. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα,
Παρ. 1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο,
Παρ. 1.5. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Κεφ.2^{O}: Η ευθεία στο επίπεδο

Παρ. 2.1. Εξίσωση ευθείας.
Παρ. 2.2. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας.
Παρ. 2.3. Εμβαδόν τριγώνου, χωρίς τις αποδείξεις των τύπων: α) «της απόστασης σημείου από ευθεία» και β) «του υπολογισμού εμβαδού τριγώνου».

Κεφ. 3°: Κωνικές Τομές

Παρ. 3.1. Ο κύκλος, χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου
Παρ. 3.2 Η παραβολή
Παρ. 3.3 Η έλλειψη
Παρ. 3.4 Η υπερβολή

Κεφ. 4°: Θεωρία Αριθμών

Παρ. 4.1. Η μαθηματική επαγωγή.
Παρ. 4.2. Ευκλείδεια διαίρεση, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος 1.
Παρ. 4.3. Διαιρετότητα.

Τάξη Γ΄

α) Διδακτέα Ύλη Γενικής Παιδείας

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής:

Κεφ. 1Ο: Διαφορικός Λογισμός
Παρ. 1.1. Συναρτήσεις.
Παρ. 1.2. Η έννοια της παραγώγου.
Παρ. 1.3. Παράγωγος συνάρτησης
Παρ. 1.4 Εφαρμογές των Παραγώγων

Κεφ. 2Ο: Στατιστική
Παρ. 2.1 Βασικές έννοιες
Παρ. 2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων,
Παρ. 2.3 Μέτρα Θέσης και Διασποράς,

Κεφ. 3Ο: Πιθανότητες
Παρ. 3.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα.
Παρ. 3.2 Έννοια της Πιθανότητας.

β) Διδακτέα Ύλη Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφ. 2^{O}: **Μιγαδικοί αριθμοί**

Παρ. 2.1 Η έννοια του Μιγαδικού Αριθμού.
Παρ. 2.2 Πράξεις στο σύνολο C των Μιγαδικών.
Παρ. 2.3 Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού.

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφ. 1°: **Όριο - Συνέχεια συνάρτησης**

Παρ. 1.1 Πραγματικοί αριθμοί.
Παρ. 1.2 Συναρτήσεις.
Παρ. 1.3 Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση.
Παρ. 1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$
Παρ.1.5 Ιδιότητες των ορίων,
Παρ. 1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$
Παρ. 1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο.
Παρ. 1.8 Συνέχεια συνάρτησης.

Κεφ. 2^{0}: **Διαφορικός Λογισμός**

Παρ. 2.1 Η έννοια της παραγώγου
Παρ. 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτηση.
Παρ. 2.3 Κανόνες παραγώγισης,
Παρ. 2.4 Ρυθμός μεταβολής.
Παρ. 2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.
Παρ. 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
Παρ. 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης,.
Παρ. 2.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης.
Παρ. 2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital.
Παρ. 2.10 Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Κεφ. 3^{0}: **Ολοκληρωτικός Λογισμός**

Παρ. 3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα.
Παρ. 3.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης,.
Παρ. 3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα
Παρ. 3.5. Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$
Παρ. 3.7 Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Ύλη ΜΙΘΕ

Από το βιβλίο: Απειροστικός Λογισμός – Συναρτήσεις μιας μεταβλητής και Αναλυτική Γεωμετρία των George B. Thomas και Ross L. Finney, οι φοιτητές διδάσκονται:

Χειμερινό Εξάμηνο

Κεφάλαιο 1- Ρυθμός μεταβολής μιας Συνάρτησης

- Συντεταγμένες στο επίπεδο
- Μετατοπίσεις και απόσταση
- Κλίση ευθείας
- Εξισώσεις ευθειών
- Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις
- Κλίση καμπύλης y=f(x)
- Όριο
- Ιδιότητες ορίων
- Το άπειρο σαν όριο
- Συνεχείς συναρτήσεις.

Εαρινό Εξάμηνο

Κεφάλαιο 2- Παράγωγοι

- Διαφόριση
- Οι πολυωνυμικές Συναρτήσεις και οι παραγωγοί τους
- Γινόμενα δυνάμεις και πηλίκα
- Κλασματικές δυνάμεις
- Ο κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης
- Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Κεφάλαιο 3-Εφαρμογές των παραγώγων

- Σχεδιασμός καμπυλών. Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου
- Κοιλότητα και σημεία καμπής
- Μέγιστα και ελάχιστα

Κεφάλαιο 4-Ολοκληρώματα

- Αόριστα ολοκληρώματα
- Προσδιορισμός σταθερών της ολοκλήρωσης
- Ορισμένα ολοκληρώματα. Εμβαδά
- Τα θεμελιώδη θεωρήματα του ολοκληρωτικού Λογισμού

Παράρτημα ΙΙ

Παρακάτω δίνονται οι ερωτήσεις με τη σειρά που εμφανίζονται στα αποτελέσματα της

έρευνας και στην συνέχεια το ερωτηματολόγιο όπως ακριβώς δόθηκε στα παιδία

1. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζεις;
2. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που γνωρίζεις ;
3. Τοποθέτησε στον παρακάτω άξονα τους αριθμούς 0.33333..., 0.3, .

4. Α={ 1,2,3,4,5,..... } Β={ 1,4,9,16,25,..... }
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Β
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Β
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Β

5. Α={ 1,2,3,4,5,..... }Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...}.
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Γ
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Γ
   Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Γ

6.Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 2; Αν έχεις απαντήσει ότι υπάρχουν, πόσοι υπάρχουν; Μπορείς να γράψεις μερικούς;.

7.Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 3; Αν έχεις απαντήσει ότι υπάρχουν, πόσοι υπάρχουν; Μπορείς να γράψεις μερικούς;

8. Υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1 και 2 ή μεταξύ του 1και 3;

9. Έστω Α το σύνολο όλων των τετραγώνων με πλευρές 1,2,3,….Θα μπορούσες να πεις ποιο είναι το τελευταίο τετράγωνο του συνόλου.

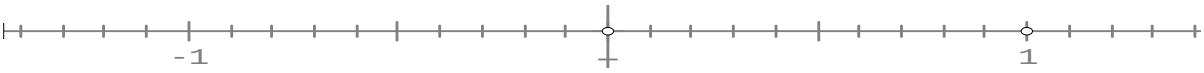
10. Β={1^2,2^2,3^2,.....}= {1,4,9,.....}.
    Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Β
    Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Β
    Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Β

11. Ο αριθμός 0,22222.... είναι ένας άπειρος αριθμός.
12. Ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
13. Στα κεφάλια των περισσότερων ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες.
14. Οι κόκοι της άμμου σε μια παραλία είναι άπειροι.
15. Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει.
16. Ονομάζουμε άπειρη διαδικασία μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ.
17. Από τα διόδια της Αττικής Οδού περνάνε καθημερινά άπειρα αυτοκίνητα.
18. Στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες

ΗΛΙΚΙΑ.....
ΚΟΡΙΤΣΙ □ ΑΓΟΡΙ □
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ.....

1. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που γνωρίζεις;
2. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που γνωρίζεις ;

3. Τοποθέτησε στον παρακάτω άξονα τους αριθμούς 0.33333..., 0.3, . Αν χρειαστεί να κάνεις αλλαγές στον άξονα μπορείς να τις κάνεις (π.χ. να τον μεγαλώσεις)



Πώς σκέφτηκες για να τους τοποθετήσεις;
……
……
……
……
…….

4. Δημιουργούμε το σύνολο Α που περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 0, δηλαδή Α={ 1,2,3,4,5,..... }.Δημιουργούμε το σύνολο Β που περιέχει όλα τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 0, δηλαδή Β={ 1,4,9,16,25,..... }.Σημείωσε το σωστό τετραγωνάκι και δικαιολόγησε την επιλογή σου :

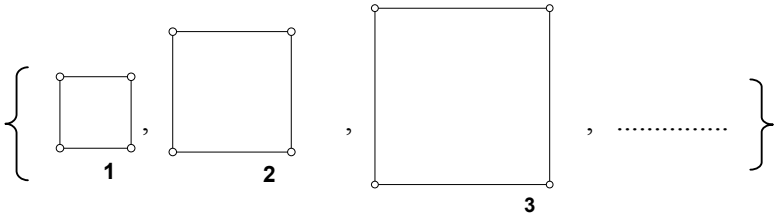
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Β□
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Β□
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Β □
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5.Δημιουργούμε το σύνολο Α που περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 0 δηλαδή Α={ 1,2,3,4,5,..... }. Δημιουργούμε το σύνολο Γ που περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή Γ={.....-2,-1,0,1,2,3...}.Σημείωσε το σωστό τετραγωνάκι και δικαιολόγησε την επιλογή σου:
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Γ □
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Γ □
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Γ □
.....
.....
.....
.....
.....

6.α)Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 2; ..... Αν έχεις απαντήσει ότι υπάρχουν, πόσοι υπάρχουν; .....Μπορείς να γράψεις μερικούς; ..... Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 3; .....Αν έχεις απαντήσει ότι υπάρχουν, πόσοι υπάρχουν; .....Μπορείς να γράψεις μερικούς;.....

β) Υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί μεταξύ του 1 και 2 ή μεταξύ του 1και 3;

7. Έστω Α το σύνολο όλων των τετραγώνων με πλευρές 1,2,3,…., δηλαδή ,

A= 

α)Θα μπορούσες να πεις ποιο είναι το τελευταίο τετράγωνο του συνόλου.
.....
.....
.....

β) Έστω σαν Β το σύνολο που περιέχει τα εμβαδά των παραπάνω τετραγώνων, δηλαδή Β={1^2,2^2,3^2,.....}= {1,4,9,.....}. Σημείωσε το σωστό τετραγωνάκι και δικαιολόγησε την επιλογή σου:

Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του Β☐
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του Β ☐
Το πλήθος των στοιχείων του Α είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων του Β ☐

.....
.....
.....
.....

8.Πώς θα εξηγούσες σε κάποιον μικρότερο σου τι σημαίνουν οι φράσεις :

α)Από ένα σημείο περνάνε άπειρες ευθείες
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

β) Ο αριθμός 0,444... έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

9. α)Σημείωσε ένα ΝΑΙ στο τετραγωνάκι των φράσεων που η λέξη άπειρο-ος χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια και ένα ΟΧΙ στο τετραγωνάκι που χρησιμοποιείται λανθασμένα. Στο χώρο που υπάρχει μετά από κάθε φράση δικαιολόγησε την απάντηση σου.

i. Ο αριθμός 0,22222.... είναι ένας άπειρος αριθμός. ☐

.....
.....
.....
.....

ii. Ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. ☐

.....
.....
.....

iii. Στα κεφάλια των περισσότερων ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες. ☐

.....
.....
.....

iv. Οι κόκοι της άμμου σε μια παραλία είναι άπειροι. ☐

.....
.....
.....
.....

v. Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει.

.....
.....
.....
.....

vi. Ονομάζουμε άπειρη διαδικασία μια διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ. ☐

.....
.....
.....
.....

vii. Από τα διόδια της Αττικής Οδού περνάνε καθημερινά άπειρα αυτοκίνητα. ☐

.....
.....
.....
.....

viii. Στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες ☐

.....
.....
.....
.....

β) Κάνε δύο <u>δικές σου</u> προτάσεις με τη λέξη άπειρο-ος όπου στη πρώτη η λέξη να χρησιμοποιείται με τη σωστή μαθηματική της έννοια ενώ στη δεύτερη να χρησιμοποιείται λανθασμένα.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Βιβλιογραφία

- Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Towards a unifying theory of behavioural Change. Psychological Review, 84 191-215
- Borasi, R.: 1985, 'Errors in the enumeration of infinite sets', Focus on Learning Problems in Mathematics 7, 77–89
- Breidenbach D. D., Dubinsky Ed , Hawks J., & Nichols D. 1992.. Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23 , 247 -- 285,
- Brown, C.A. Carpenter T.P., Kouba V.L., Lindquist, M.M., Silver, E.A., & Swaffrd J.O 1988 Secondary School Results for the Fourth NAEP Mathematics Assessment: Algebra, Geometry, Mathematical Methods, and Attitudes. Mathematics Teacher May 1988, 337-347, 397
- Buxton, L. 1981 Do you panic about mathematics? London: Heinemann
- Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. In R. B. Davis, C. A. Maher & N. Noddings (eds.), Constructivist views on the teaching and learning of mathematics (JRME monograph 4) (pp. 107-122). Reston, VA :NCTM.
- Cornu B. 1981 : 'Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propres', Actes due Cinquième Colloque du Groupe International P.M.E., Grenoble 322-326.
- Cornu B. 1983 : 'Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles', Thèse de doctorat, Grenoble. Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking (pp.253–166). Kluwer.
- Davis R.B. (1982). Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Croom-Helm, London.

- Davis R.B. and Vinner S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. Journal of Mathematical Behaviour, 5, 3, 281-303.
- Dubinsky, E.: 1991, 'Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D.Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 95–123.
- Dubinsky E & Harel,E., G. The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25). Washington: Mathematical Association of America, pp. 1-16.
- Duval, R.: 1983, 'L'Obstacle du dédoublement des objets mathématiques', Educational Studies in Mathematics 14, 385–414.
- Ervynck G. 1981: 'Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function', Actes due Cinquième Colloque du Groupe International P.M.E., Grenoble, 330-333.
- Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F. and Ben Simon, K.: 1986, 'How do children cope with the infinity of numbers?', in Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, London, pp. 13–18.
- Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In Kaput, J. J. & Dubinsky, E. (Eds.), Research issues in undergraduate mathematics learning. Preliminary analyses and results. MAA notes number 33, 31-45. Washington: The Mathematical Association of America.
- Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P.: 1979, 'The intuition of infinity', Educational Studies in Mathematics 10, 3–40.
- Fischbein, E., Tirosh, D. and Melamed, U.: 1981, 'Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?' Educational Studies in Mathematics 12, 491–512.
- Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dodrecht, Holland: Reidel

- Fischbein, E., Jehiam, R. and Cohen, D.: 1995, 'The concept of rational numbers in high school students and prospective teachers', Educational Studies in Mathematics 29, 29– 44.
- Gray, E. and Tall, D.: 1994, 'Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic', Journal for Research in Mathematics Education 25(2), 116–134.
- Harel G., Sowder L. (1998) Students' proof schemes. Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III, E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), American Mathematical Society
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Li, L. & Tall, D. O. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. Proceedings of PME XVII, Tsukuba, Japan, II, 41–48.
- Mandler , G 1984 Mind and body: psychology of emotion and stress. New York:Norton
- Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 3-19). New York: Springer-Verlag.
- Martin, G. and Wheeler, M.: 1987, 'Infinity concepts among preservice elementary school teachers', Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, Canada, Vol. 3, 362–368
- Moloney, K. & Stacey, K. (1997). Changes with Age in Students' Conceptions of Decimal Notation. Mathematics Education Research Journal, 9(1), 25-38.
- Monaghan, J.: 1986, Adolescents' Understanding of Limits and Infinity, Unpublished PhD thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK

- Monaghan, J., Sun, S. and Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system, in the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3, pp.279-286. Lisbon
- Moreno, A. and Waldegg, G.: 1991, 'The conceptual evolution of actual mathematical infinity', Educational Studies in Mathematics 22, 211–231.
- Nunez, R.: 1991, 'A 3-dimensional conceptual space of transformations for the study of the intuition of infinity in plane geometry', Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, Italy, Vol. 3, 362–368.
- O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 21–40.
- Piaget, J. and Inhelder, B.: 1956, The Child's Conception of Space, Routledge and Kegan Paul, London (originally published in 1948).
- Schwingendorf K., Hawks J& Beineke J.. (1992). Horizontal and Vertical Growth of the Students'Conception of Function, in G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes Series No. 25 (pp. 133-149).
- Schoenfeld, A.H. 1982 Sex grade level and the relationship between mathematics attitude and achievement in children. Journal of Educational Psychology,75 (5) 280-284
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.
- Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin', Educational Studies in Mathematics 22, 1–36.
- Sierpinska A. 1987: "Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits", Educational Studies in Mathematics, 18,4, 371-87.
- Sierpinska, A. (1987) "Humanities students and epistemological obstacles related to limits". Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

- Sierpinska, A. (1994). Understanding in mathematics. London: The Falmer Press
- Singer ,M. & Voica C 2003 Perception of infinity: does it really help in problem solving? The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education Brno, Czech Republic
- Tall& Vinner 1981a) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12 151-169.
- Tall, D 1981b Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus, For the Learning of Mathematics, 2, 2 16-21.
- Tall, D 1982a The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere, Mathematical Gazette, 66 11-22.
- Tall, D 1982b Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus, Bulletin of the IMA, 18, 43-48.
- Tall, D.: 1990, 'Inconsistencies in the learning of calculus and analysis', Focus on Learning Problems in Mathematics 12, 49–64.
- Tall, D. O. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 495 – 511). New York: MacMillan Publishing.
- Tall, D 1996Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking, L'Enseignement des Mathématiques, 42, 395– 415.
- Tsamir, P. and Tirosh, D.: 1992, 'Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity', Proceedings of the 16th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, Durham, USA, 3, pp. 90–97.
- Tsamir, P. and Tirosh, D.: 1994, 'Comparing infinite sets: intuitions and representations', Proceedings of the 18th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, Vol IV, pp. 345–352.

- Tsamir, P & Tirosh, D.: 1996, 'The role of representations in students' intuitive thinking about infinity', International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 27, 33–40.
- Tsamir, P. and Tirosh, D.: 1999, 'Consistency and representations: The case of actual infinity', Journal for Research in Mathematics Education 30(2), 213–219.
- Tsamir, P. 1999, 'Consistency and representations: The case of actual infinity', Journal for Research in Mathematics Education 30(2), 213–219.
- Tsamir, P 1999 The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers Educational Studies in Mathematics 38: 209–234,
- Tsamir, P. (2002). Primary And Secondary Intuitions: Prospective Teachers' Comparisons Of Infinite Sets, in CERME 2
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65 – 81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Vinner, S. and Kidron, I.: 1985, 'The concept of repeating and non-repeating decimals at the senior high level', in the Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Noordwijkerhout, The Netherlands, pp.357–361.
- Φιλίππου Γιώργος- Χρίστου Κωνσταντίνος (2001). Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών . Εκδόσεις: Ατραπός.
- Φιλίππου, Γ.Ν. 1991 Οι μαθηματικές γνώσεις των τελειόφοιτων του Γυμνασίου. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα