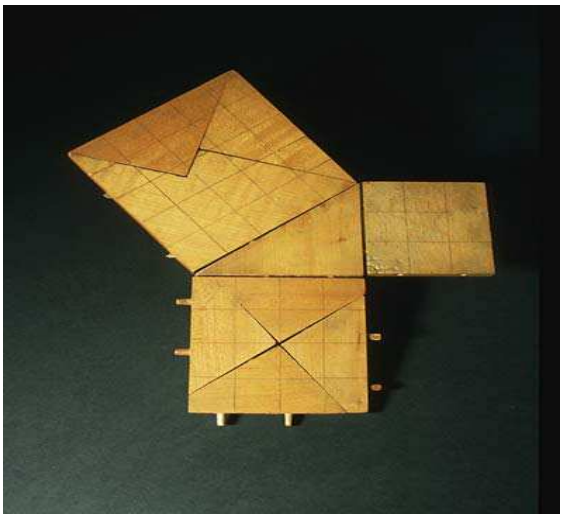
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (EMBODIED MATHEMATICS)"



ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΔΗΜΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Σπύρου Παναγιώτης

Αθήνα, 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …… από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Σπύρου Παναγιώτη (επιβλέπων)	Επίκουρος καθηγητής	…….
2) Λάππα Διονύσιο	Αναπληρωτής καθηγητής	…….
3) Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια καθηγήτρια	…….

“Ονειρεύομαι ένα μάθημα όπου οι μαθητές θα μπαίνουν στην αίθουσα με λαχτάρα και θα φεύγουμε όλοι με κάποιο κέρδος.”

Αφιερώνεται:

στους Γονείς μου,

στη Θεία μου,

στη Σοφία.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

- Τον επιβλέποντα επίκουρο καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη, για την άμεση και ουσιαστική βοήθειά του, καθώς και για την αποτελεσματική καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.
- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Λάππα Διονύσιο, για τη συμβολή του και τις παρατηρήσεις του.
- Την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα, για τις χρήσιμες υποδείξεις της στην οργάνωση της έρευνας.
- Τους μαθητές που πρόθυμα και εθελοντικά συμμετείχαν στην έρευνα.
- Τους καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που δίδασκαν στα σχολεία στα οποία πραγματοποιήθηκε η έρευνα και διευκόλυναν την πραγματοποίησή της.
- Την οικογένειά μου, τους φίλους μου και τη Σοφία, οι οποίοι πίστεψαν στην προσπάθειά αυτήν και μου συμπαραστάθηκαν όποτε τους χρειάστηκα.

ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (EMBODIED MATHEMATICS)

Τριανταφύλλου Δήμος

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει
το Μαθηματικό Τμήμα

Αθήνα, Ελλάδα
Οκτώβριος, 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **ΣΕΛΙΔΑ**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

1.1 Από το τελευταίο θεώρημα του Fermat στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.....11
1.2 Ιστορική επισκόπηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.....14
1.3 Βαβυλωνιακά Μαθηματικά.....18
1.3.1 Η Πλάκα YBC 7289.....18
1.3.2 Η Πινακίδα PLIMPTON 322.....21
1.3.3 Άλλα Βαβυλωνιακά κείμενα.....25
1.4 Οι Αιγύπτιοι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.....26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

2.1 Η Πυθαγόρεια Σχολή.....30
2.2 Ο Πυθαγόρας και η μουσική.....32
2.3 Οι Πυθαγόρειοι αριθμοί.....34
2.4 Η Γεωμετρία των αριθμών – Σχηματικοί αριθμοί.....36
2.5 Πυθαγόρειες τριάδες.....41
2.6 Πυθαγόρειο Θεώρημα – Άρρητοι αριθμοί.....42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή.....47
3.2 Γνωσιακή επιστήμη (cognitive science) και ενσωμάτωση (embodiment).....48
3.3 Η γνωσιακή επιστήμη στη μελέτη εκμάθησης των μαθηματικών.....50
3.4 Ο ρόλος της Γνωσιακής Νευροεπιστήμης (Cognitive Neuroscience).....52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Η ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ

4.1 Εισαγωγή.....54
4.2 Η θεωρία των Ενσώματων Μαθηματικών.....55
4.3 Σχέση μεταξύ πολιτισμού και Ενσώματων Μαθηματικών.....56
4.4 Ενσώματες ιδιότητες μαθηματικών.....57
4.5 Η ενσωμάτωση και η ανάλυση των εννοιολογικών δομών.....58
4.5.1 Μεταφορικές έννοιες.....59
4.5.2 Εννοιολογικές μεταφορές.....60
4.5.3 Εικονό-σχήματα.....61
4.5.4 Εννοιολογικά μίγματα (conceptual blends).....63
4.6 Έλεγχος κίνησης και μαθηματικές ιδέες.....63
4.6.1 Καθρεφτικοί νευρώνες.....66
4.7 Γνωστική γλωσσολογία.....67

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ – ΧΩΡΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

5.1 Η κατανόηση του χώρου.....68
5.2 Η αντίληψη των εννοιών του χώρου από το παιδί.....69
5.3 Η ταξινόμηση των χωρικών σχέσεων.....71
5.4 Κατακόρυφος-Κάθετη Ευθεία.....72
5.5 Συστήματα αναφοράς και οριζόντιων-κάθετων συντεταγμένων.....73

5.6 Οριζόντιοι-Κάθετοι άξονες 73
5.7 Αρχέτυπα αποτελέσματα, Αντικειμενικότητα και Πυθαγόρειο Θεώρημα.....75
5.8 Επίπεδα Van Hiele και ενσώματα αντικείμενα 76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

6.1 Το πρόβλημα 78
6.1.1 Περίληψη.....78
6.1.2 Διατύπωση του προβλήματος.....78
6.1.3 Σκοπός της έρευνας.....81
6.1.4 Αναγκαιότητα έρευνας.....82
6.1.5 Σημαντικότητα έρευνας.....82
6.2 Μεθοδολογία 84
6.2.1 Περίληψη.....84
6.2.2 Ποιοτική έρευνα 84
6.2.3 Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας 84
6.2.4 Ο υπό μελέτη πληθυσμός.....85
6.2.5 Μέσα συλλογής δεδομένων.....86
6.3 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα σχολικά εγχειρίδια.....87
6.4 Οι διδακτικές δραστηριότητες του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσα
από τις Πυθαγόρειες τριάδες, με αξιοποίηση της ιδέας των ενσώματων
μαθηματικών (embodied mathematics).....89

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

7.1 Αποτελέσματα διδασκαλίας 95
7.1.1 Το παιχνίδι ως κίνητρο για μάθηση 95
7.1.2 Η έννοια της κατακόρυφου 96
7.1.3 Εξαντικειμενίκευση (objectification) της ορθής γωνίας με αναφορά στην
πρωτογενή ιδέα.....98
7.1.4 Γωνίες.....100
7.1.5 Το ορθογώνιο τρίγωνο στο μιλιμετρέ χαρτί.....101
7.1.6 Η ισχύς του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.....101
7.1.7 Σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers) 104
7.1.8 Εξαγωγή Πυθαγόρειων τριάδων.....104
7.2 Αποτελέσματα συνεντεύξεων.....106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII: ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

8.1 Συσχέτιση αποτελεσμάτων με το θεωρητικό πλαίσιο 113
8.2 Ερμηνεία αποτελεσμάτων 114
8.2.1 Γενικά.....114
8.2.2 Ως προς την κατακόρυφο 115
8.2.3 Ως προς την εξαντικειμενίκευση (objectification) της ορθής γωνίας 115
8.2.4 Ως προς τις γωνίες.....117
8.2.5 Ως προς τους σχηματικούς αριθμούς (figurative numbers) 118
8.2.6 Ως προς τις Πυθαγόρειες τριάδες.....119
8.3 Θεμελίωση των ευρημάτων της έρευνας.....120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ

9.1 Περίληψη.....122
9.2 Συμπεράσματα.....122
9.3 Εισηγήσεις.....128

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Φύλλο εργασίας 129

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Ερωτήσεις συνεντεύξεων……135

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Συνεντεύξεις……136

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 152

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνάται εάν η επανενεργοποίηση της αρχέγονης πράξης της εξαντικειμενίκευσης (objectification) στα μαθηματικά θα μπορούσε να συμβάλλει σε μία ενεργητική διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος βασισμένη στη σωματική εμπειρία των μαθητών. Για να διερευνηθεί το παραπάνω ζήτημα, αρχικά γίνεται αναφορά στην ιστορία του Πυθαγορείου Θεωρήματος στη συνέχεια προσεγγίζεται η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών (embodied mathematics), και τέλος παρουσιάζεται μία έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε σχολεία της Αθήνας.

Στο πρώτο κεφάλαιο εξετάζεται κατά πόσο το Θεώρημα ήταν γνωστό σε πολιτισμούς που αναπτύχθηκαν αρκετά χρόνια πριν από τους Πυθαγόρειους, όπως ο Βαβυλωνιακός και ο Αιγυπτιακός. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια στοιχεία για την Πυθαγόρεια φιλοσοφία και τη συσχέτιση αυτής με τα μαθηματικά, όπου οι μύστες της σχολής επινοώντας τους σχηματικούς αριθμούς (figurative numbers), οδηγήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος και στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο ρόλος που έχει η γνωσιακή επιστήμη (cognitive science) στην εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών και στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών. Στο πέμπτο κεφάλαιο προσεγγίζεται ο τρόπος με τον οποίον αρχίζει ο άνθρωπος από μικρό παιδί να κατανοεί και ν' αντιλαμβάνεται το χώρο γύρω του, οργανώνοντας συστήματα οριζόντιων και κάθετων συντεταγμένων.

Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρεται το πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η έρευνα, η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τη διεξαγωγή της, όπως επίσης και η διδακτική δραστηριότητα που ακολουθήθηκε στα πλαίσια αυτής. Παρουσιάζεται επίσης το Πυθαγόρειο Θεώρημα όπως συναντάται στα σχολικά εγχειρίδια. Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται όλα τα δεδομένα της έρευνας που συγκεντρώθηκαν από τη διδασκαλία και τις συνεντεύξεις. Στο όγδοο κεφάλαιο ερμηνεύονται τα αποτελέσματα της έρευνας και στο ένατο κεφάλαιο συζητιόνται τα συμπεράσματα αυτής. Τέλος, στα παραρτήματα προστίθενται τα φύλλα εργασίας, οι ερωτήσεις και οι απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Ιστορική πλαισίωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

1.1 Από το τελευταίο θεώρημα του Fermat στο Πυθαγόρειο Θεώρημα[1]

«Αυτή είναι η πιο σπουδαία τέχνη.
Τίποτα περισσότερο, τίποτα λιγότερο.
Να κάνεις με απλότητα τα πάντα».

Piet Hein

Οι μαθηματικές ειδήσεις υπάρχουν σπάνια σε τίτλους, πόσο μάλλον η κάλυψη πρώτων σελίδων. Η 24η Ιουνίου 1993 όμως ήταν μια εξαίρεση. Εκείνη την ημέρα, οι New York Times έγραψαν μια ιστορία στο πρωτοσέλιδο, με τίτλο: *«Επιτέλους, η κραυγή του "εύρηκα" στο ιστορικό μαθηματικό μυστήριο.»* Πέρα από τον Ατλαντικό μια ημέρα πριν, ένας σαραντάχρονος Άγγλος μαθηματικός ανακοίνωσε ότι είχε λύσει το δημοφιλέστερο μαθηματικό πρόβλημα, μία απλή πρόταση που είχε κρατήσει πολυάσχολους τους μαθηματικούς για τα προηγούμενα 350 έτη.

Ο μαθηματικός αυτός ήταν ο Dr.Andrew Wiles, που καταγόταν από το Cambridge της Αγγλίας και ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Princeton στο New Jersey. Η συγκλονιστική του ανακοίνωση πραγματοποιήθηκε στο τέλος τριών σειρών διαλέξεων με τίτλους *«Modular Forms, Elliptic Curves, and Galois Representations.»* Το θέμα δεν ήταν ένας οικείος όρος, ακόμη και μεταξύ των μαθηματικών, πόσο μάλλον για τους υπόλοιπους. Υπήρξαν όμως φήμες ότι ο ομιλητής θα είχε μια έκπληξη, γεγονός που έκανε τους ακροατές να γεμίσουν την αίθουσα διάλεξης. Καθώς η συζήτηση έφτανε στο συμπέρασμά της, η ένταση στο ακροατήριο ήταν προφανής. Ήταν τότε που, σχεδόν άνετα, ο Dr.Wiles τελείωσε τη διάλεξή του με αυτές τις λέξεις: *«Και επί τη ευκαιρία, αυτό σημαίνει ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat ήταν αληθινό. Ο.Ε.Δ.»* (Αυτή είναι μια ελεύθερη μετάφραση βασισμένη σε άρθρο των New York Times της 24ης Ιουνίου 1993, σελ.22, οι ακριβείς λέξεις του Wiles δεν αναφέρονται). Κατόπιν, υπήρξε μια βιασύνη προς τον κοντινότερο τερματικό υπολογιστή, και εκείνοι που είχαν πρόσβαση στην υπηρεσία του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου - μια καινοτομία για το 1993 - μετέφεραν τις ειδήσεις σε όλη την υδρόγειο.

[1] Η παράγραφος αυτή αναφέρεται στον πρόλογο του βιβλίου *"The Pythagorean Theorem"* του Eli Maor (2007).

Οι περιστάσεις πίσω από την ανακοίνωση του Wiles είχαν όλες τις σφραγίδες ενός ανθρώπινου δράματος. Ο Pierre de Fermat (1601-1665), ένας Γάλλος, δικηγόρος στο επάγγελμα που άσκησε τα μαθηματικά ως χόμπι, έκανε μια υπόθεση το 1637 για τις πιθανές λύσεις της φαινομενικά απλής εξίσωσης $x^n + y^n = z^n$, όπου όλες οι μεταβλητές συμπεριλαμβανομένου και του εκθέτη n, παίρνουν θετικές ακέραιες τιμές.

- Όταν $n = 1$ η εξίσωση είναι τετριμμένη: το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο ακέραιων αριθμών είναι προφανώς ένας τρίτος ακέραιος αριθμός, έτσι έχουμε $x^1 + y^1 = z^1$.
- Η περίπτωση όπου $n = 2$ είναι μεγαλύτερου ενδιαφέροντος. Υπάρχουν πολλές τριάδες ακέραιων αριθμών (x,y,z) για τις οποίες $x^2 + y^2 = z^2$. Δύο παραδείγματα είναι (3,4,5) και (5,12,13).

Τέτοιες τριάδες, φυσικά, αμέσως μας θυμίζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αντιπροσωπεύουν τα ορθογώνια τρίγωνα στα οποία και οι τρεις πλευρές έχουν μήκη ακέραιων αριθμών. Έτσι ήταν φυσικό ότι μόνο οι μαθηματικοί θα προσπαθούσαν να προχωρήσουν στο επόμενο βήμα. Να βρουν δηλαδή ακέραιες λύσεις των εξισώσεων $x^3 + y^3 = z^3$, $x^4 + y^4 = z^4$, κ.ο.κ. Κανείς όμως δεν τις έβρισκε πάντα.

Ο Fermat σκέφτηκε ότι είχε μια απόδειξη που καμία λύση ακέραιων αριθμών της εξίσωσης $x^n + y^n = z^n$ δεν υπάρχει για οποιαδήποτε τιμή του n μεγαλύτερη από 2. Στα περιθώρια του αντιγράφου του, από τις εργασίες του μαθηματικού Διόφαντου, από την Αλεξάνδρεια, τον τρίτο αιώνα π.Χ., ο Fermat κατέγραψε μερικές λέξεις που θα γίνονταν αθάνατες: *«Για να διαιρέσεις έναν κύβο σε δύο κύβους, μια τέταρτη δύναμη, ή γενικά οποιαδήποτε δύναμη σε οποιεσδήποτε δύο δυνάμεις της ίδιας κατηγορίας επάνω από τη δευτέρα είναι αδύνατο. Έχω βρει μια αξιοθαύμαστη απόδειξη αυτού, αλλά το περιθώριο είναι πάρα πολύ στενό για να το περιλάβω εδώ»*. Το διάσημο σημείωμα του Fermat είναι γραμμένο στα λατινικά και έχει εμφανιστεί σε πολυάριθμες εκδόσεις.

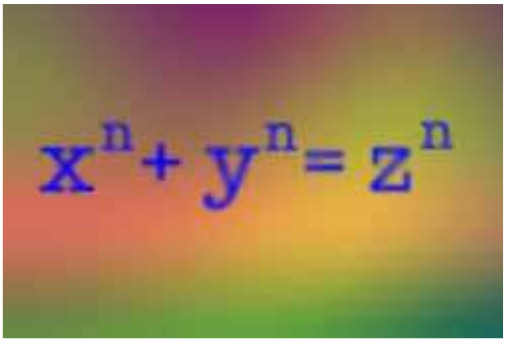
Για τα επόμενα 350 έτη, πολυάριθμοι μαθηματικοί, καθημερινοί άνθρωποι, αλλά και εκκεντρικοί χαρακτήρες προσπαθούσαν να αναδημιουργήσουν την «αξιοθαύμαστη απόδειξη» του Fermat. Όλοι τους απέτυχαν. Δύο τεράστια νομισματικά βραβεία, ένα από τη Γαλλική Ακαδημία των Επιστημών, και ένα άλλο αντίστοιχο από τη Γερμανία, προσφέρθηκαν στον πρώτο άνθρωπο που θα ανακάλυπτε μια έγκυρη απόδειξη. Και τα δύο παρέμειναν χωρίς δικαιούχο. Το Γαλλικό βραβείο, ένα χρυσό μετάλλιο και 300 φράγκα, προσφέρθηκε 2 φορές. Το 1815 και το 1860. Το Γερμανικό χρηματικό έπαθλο αναγγέλθηκε το 1908 και έφτανε τα 100.000 μάρκα – υπέρογκο ποσό για την εποχή εκείνη – . Αυτό το ποσό μειώθηκε μέχρι το 1929, εξαιτίας του γερμανικού πληθωρισμού, στα 7.500 μάρκα (περίπου $4.400 στη σημερινή αξία). Τα δύο βραβεία έφεραν χιλιάδες αξιώσεις σε πολλούς ερασιτέχνες με ελάχιστη ή καμία γνώση μαθηματικών.

Όχι ότι η αναζήτηση για μια απόδειξη ήταν εξ' ολοκλήρου ανώφελη. Ο μεγάλος Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707-1783) το 1753 απέδειξε την εικασία του Fermat για $n = 3$. Άλλες ειδικές περιπτώσεις ακολούθησαν, και με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών όλες οι περιπτώσεις για το n κάτω από 100.000 αποδείχθηκαν ως σωστές. Αλλά αυτό δεν είναι το ίδιο με το να το αποδείξεις αυτό για όλες τις τιμές n**.** Το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat» (FLT), όπως έγινε γνωστό, παρέμεινε άλυτο.

Όταν ο Wiles πέρασε στο προκείμενο, είχε ήδη κάτι για να αρχίσει: το 1954, ένας Ιάπωνας μαθηματικός, ο Yutaka Taniyama (1927-1958), έκανε μια υπόθεση για μια κατηγορία αντικειμένων που αποκάλεσε ελλειπτικές καμπύλες. Σε επόμενη

εργασία, ιδιαίτερα ο Dr. Gerhard Frey του Πανεπιστημίου του Saarland στη Γερμανία και ο Dr.Kenneth Ribet του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Berkeley, παρουσίασαν μία σαφής σύνδεση μεταξύ της υπόθεσης του Taniyama και του τελευταίου θεωρήματος του Fermat: εάν το πρώτο είναι αληθινό τότε θα είναι και το τελευταίο. Ο Wiles, αφού εργάστηκε στη σοφίτα του, απομονωμένος για επτά χρόνια, έδειξε ότι η υπόθεση του Taniyama ήταν πρακτικά αληθινή και σχεδόν εκ των υστέρων, έτσι ίσχυε και για το FLT. Αλλά δεν ήταν όλα καλά. Αφού προσκόμισε μια μακριά απόδειξη 200 σελίδων και ενώ οι μαθηματικοί ήταν πρόθυμοι να τη διερευνήσουν και να την κοσκινίσουν, ένα μικροσκοπικό κενό στη λογική βρέθηκε. Κατόπιν ο Wiles επέστρεψε στην απομόνωση, και μετά από άλλο ένα έτος σκληρής εργασίας, με τη βοήθεια του ομιλητή του Cambridge, Richard Taylor, κατάφερε να διορθώσει το κενό. Το FLT θεωρείται τώρα αποδεδειγμένο, και τελικά αντάξια πλέον καλείται θεώρημα[2].

Αλλά γιατί ήταν αυτό το πρόβλημα που επιλέχτηκε ως το διασημότερο άλυτο πρόβλημα στα μαθηματικά; Γιατί απλά, υπήρξε η απλότητά του που σε εξαπατάει: κάθε μαθητής γυμνασίου θα ήταν σε θέση να το καταλάβει. Και το μυστήριο της αινιγματικής σημείωσης του Fermat πρόσθεσε μόνο το καρύκευμα στην ιστορία (οι περισσότεροι μαθηματικοί είναι πεπεισμένοι ότι αυτός δεν είχε μια έγκυρη απόδειξη γιατί τα εργαλεία που χρειαζόταν για να λύσει το πρόβλημα απλά δεν ήταν διαθέσιμα στην εποχή του). Αλλά πέρα από αυτούς τους λόγους, το FLT μας αφήνει μια αίσθηση ότι η ιστορία έκλεινε έναν κύκλο. Ο ίδιος ακριβώς τύπος της εξίσωσης που ο Fermat ερευνούσε είχε μελετηθεί ήδη από τους Βαβυλώνιους σχεδόν τέσσερις χιλιετίες νωρίτερα. Είναι εδώ που η ιστορία μας ξεκινάει.



Σχ.1 Η εξίσωση του Fermat

[2] Για μια περισσότερο λεπτομερή περιγραφή, δείτε το βιβλίο του Simon Singh's, το αίνιγμα του Fermat: *The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, New York: Walker, 1997.

1.2 Ιστορική επισκόπηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

«Έστιν ουν πρόνοια
η μεν ανωτάτω
και πρώτη του πρώτου θεού
νόησις είτε και βούλησις
ούσα ευεργέτις απάντων,
καθ' ην πρώτως έκαστα των θείων
δια παντός άριστά τε
και κάλλιστα κεκόσμηται».

Πλούταρχος, «Ηθικά», Τόμος 15, Περί Ειμαρμένης, 572F.

Ένα από τα πιο συναρπαστικά και ασφαλώς πιο φημισμένα και χρήσιμα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το λεγόμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι *«σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών»*. Αν υπάρχει ένα θεώρημα του οποίου η γέννηση δικαιούται να θεωρηθεί μια μεγάλη στιγμή στα μαθηματικά, τότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι το πιο κατάλληλο, γιατί είναι ίσως το πρώτο πραγματικά μεγάλο Θεώρημα των μαθηματικών. Όταν όμως αρχίζουμε να εξετάζουμε την προέλευση του Θεωρήματος, τότε είναι σαν να ψάχνουμε σε θολά νερά (Maor, 2007).

Αν και η παράδοση έχει αποδώσει το περίφημο θεώρημα στον Πυθαγόρα, η εξέταση πήλινων πινάκων με σφηνοειδή γραφή, που βρέθηκαν στην Μεσοποταμία τον $20^{ο}$ αιώνα, αποκαλύπτει ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που έζησαν πάνω από χίλια χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, γνώριζαν το Θεώρημα. Το θεώρημα γνώριζαν επίσης οι αρχαίοι Ινδοί και Κινέζοι της εποχής του Πυθαγόρα ή και νωρίτερα, όπως αποδεικνύεται από σχετικές εργασίες τους (Van der Waerden, 2000). Αυτές οι μη ελληνικές και πιθανόν προελληνικές αναφορές στο Θεώρημα δεν περιέχουν όμως αποδείξεις του, και ίσως είναι αλήθεια ότι ο Πυθαγόρας ή κάποιο μέλος της διάσημης αδελφότητας του ήταν ο πρώτος που έδωσε μια λογική απόδειξη στο θεώρημα (Maor, 2007).

Αν και οι ρίζες του είναι στη Γεωμετρία, το Θεώρημα που αποδίδεται παγκοσμίως στον Πυθαγόρα έχει βρει εφαρμογή σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης, καθαρό ή εφαρμοσμένο. Ευρέως πάνω από τετρακόσιες αποδείξεις του είναι γνωστές, και ο αριθμός τους μεγαλώνει ακόμα. Ο κατάλογος περιλαμβάνει μια αρχική απόδειξη από τον μελλοντικό αμερικανό Πρόεδρο Garfield, μια άλλη από τον δωδεκάχρονο τότε Albert Einstein, από το Leonardo da Vinci, ακόμα μία από ένα νεαρό τυφλό κορίτσι, και ο κατάλογος συνεχίζεται. Μερικές από αυτές τις αποδείξεις είναι συναρπαστικές στην απλότητά τους, ενώ άλλες είναι απίστευτα σύνθετες (Maor, 2007).

Το ίδιο το Θεώρημα είναι γνωστό με διάφορα ονόματα: το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», το «Θεώρημα της υποτείνουσας», το «Θεώρημα της εκατόμβης» ή απλά «Ευκλείδης Ι. 47», αποκαλούμενο έτσι επειδή παρατίθεται ως πρόταση 47 στο βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Σχ.2 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ο Maor (2007) λέει ότι είναι γνωστό σε μερικές παραδόσεις ως «ανεμόμυλος», σε άλλες ως «Bride's chair» και έχει προταθεί ως κοσμική κάρτα ταυτότητας με την οποία ίσως επικοινωνήσουμε με εξωγήινα όντα, εάν και όταν εμείς τα βρούμε. Αναφέρει επίσης ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα διαδραματίζει κεντρικό ρόλο σε πολυάριθμες εφαρμογές, κάπου-κάπου βέβαια έχει καταχραστεί, ακόμη και άσχημα. Και ίσως μεμονωμένα, δεν είναι γνωστό για τη δημοφιλή έκκλησή του, αλλά έχει βρει τον τρόπο του στην καθημερινή μας κουλτούρα. Εμφανίζεται στα γραμματόσημα και στις μπλούζες, στα έργα τέχνης και στη λογοτεχνία, ακόμη και στους στίχους διάσημων μουσικών. Από οποιοδήποτε μέτρο κι αν το δει κάποιος, δεν μπορεί να αμφισβητήσει το γεγονός ότι είναι το διασημότερο θεώρημα σε όλα μαθηματικά, μια πρόταση που κάθε μαθητής, ανεξάρτητα από το πόσο μαθοφοβικός είναι, μπορεί να το θυμηθεί από τις ημέρες του γυμνασίου.

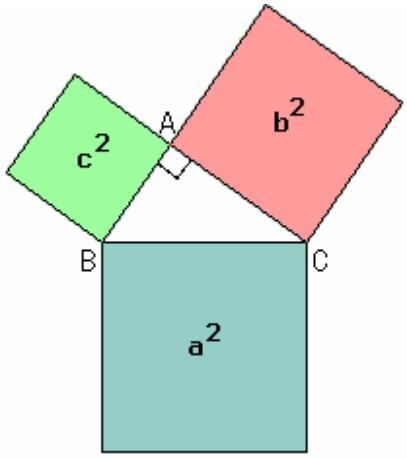
Σήμερα σκεφτόμαστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως αλγεβρική σχέση $a^2 + b^2 = c^2$, από την οποία το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να βρεθεί, λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των άλλων δύο πλευρών. Αλλά ο Πυθαγόρας δεν την αντιλήφθηκε έτσι. Γι' αυτόν ήταν μια γεωμετρική δήλωση για τα εμβαδά. Ήταν μόνο με την ανάπτυξη της σύγχρονης άλγεβρας, περίπου το 16° αιώνα, όταν το Θεώρημα εξοικειώθηκε στην αλγεβρική του μορφή (Heath, 1956). Είναι σημαντικό να αντέξει αυτό στο μυαλό, εάν πρόκειται να επισημάνουμε την εξέλιξη του Θεωρήματος κατά τη διάρκεια των 2.500 ετών από τότε που ο Πυθαγόρας υποθετικά το απέδειξε πρώτος και το έκανε αθάνατο. Και δεν ήταν ούτε καν ο πρώτος που ανακάλυψε το Θεώρημα. Ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους και ενδεχομένως στους Κινέζους, τουλάχιστον χίλια έτη πριν από αυτόν (Van der Waerden, 2000).

Ο Maor αναφέρει ότι πολλοί είναι οι συγγραφείς που έχουν σχολιάσει την ομορφιά του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Ο Charles Lutwidge Dodgson, που είναι γνωστός καλύτερα με το λογοτεχνικό του όνομά, Lewis Carroll, έγραψε το 1895: *«Είναι τόσο εκθαμβωτικά όμορφο τώρα, όπως ήταν την ημέρα που το πρωτοανακάλυψε ο Πυθαγόρας.»* (*A New Theory of Parallels, London, 1895).* Ήταν βεβαίως κατάλληλος στο να πει κάτι τέτοιο, αφού εκτός από τη φήμη που είχε αποκτήσει ως συγγραφέας ήταν και ταλαντούχος μαθηματικός. Αλλά ποιος πρόκειται

να πει τι είναι όμορφο; Το 2004, το περιοδικό *Physics World* ζήτησε από τους αναγνώστες του να ορίσουν τις είκοσι ομορφότερες εξισώσεις στην επιστήμη. Η κορυφαία νικήτρια ήταν η εξίσωση του Euler $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$, ακολουθούν στη σειρά οι τέσσερις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις του Maxwell, ο δεύτερος νόμος κίνησης του Newton $F = m \cdot a$, και το Πυθαγόρειο Θεώρημα $a^2 + b^2 = c^2$ κέρδισε μόνο την τέταρτη θέση (New York Times, Ideas and Trends,October 24, 2004, σελ.12).

Σημειώστε ότι ο διαγωνισμός ήταν για τις ομορφότερες εξισώσεις, όχι για τους νόμους ή τα θεωρήματα που αντιπροσωπεύουν. Η ομορφιά, φυσικά, είναι μια υποκειμενική ιδιότητα, αλλά εκεί είναι μια αρκετά ευρεία συναίνεση μεταξύ των μαθηματικών ως προς το τι αντιπροσωπεύει ένα θεώρημα ή η απόδειξη του, για να κληθεί όμορφο. Ένα κυρίαρχο κριτήριο είναι η συμμετρία.

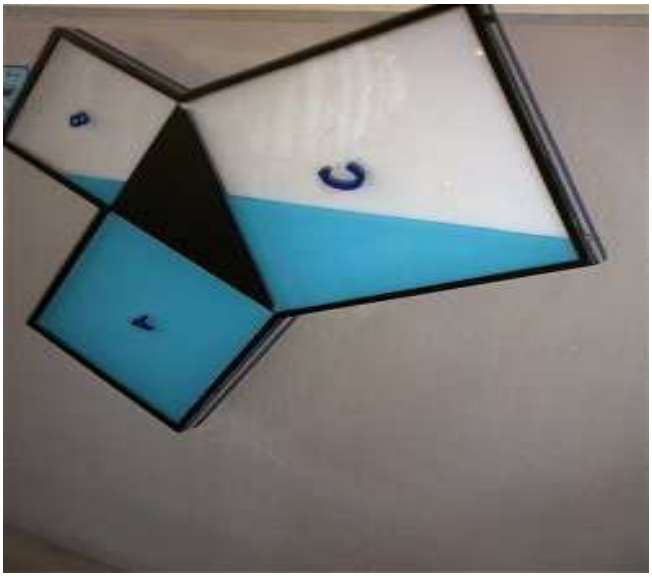
Από αυτή την άποψη, το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι οριστικά μη κομψό. Από μια πρώτη ματιά, αυτό ισχύει μόνο για μια πολύ ειδική περίπτωση, αυτή ενός ορθογώνιου τριγώνου και ακόμα και τότε επιλέγει μια πλευρά, την υποτείνουσα, η οποία παίζει ευδιάκριτα διαφορετικό ρόλο από τις άλλες δύο πλευρές (Maor, 2007). Η λέξη υποτείνουσα προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις «υπό», που σημαίνει «κάτω» και «για να τεντώσει». Αυτό έχει νόημα εάν βλέπουμε το τρίγωνο με την υποτείνουσα στο κατώτατο σημείο, τρόπος που εμφανίζεται στα στοιχεία του Ευκλείδη (βλέπε σχήμα 3). Ο Van der Waerden (2000) αναφέρει ότι, οι Κινέζοι την υποτείνουσα την καλούν «*hsien*», δηλαδή μια χορδή που τεντώνεται μεταξύ δύο σημείων (όπως σε ένα λαούτο). Η εβραϊκή λέξη για την υποτείνουσα είναι «*yeter*», το οποίο μπορεί να αντληθεί είτε από το *mei'tar*, «μια χορδή», είτε από το *yo'ter* «περισσότερο από» (το μήκος κάθε ποδιού). Ένα όμορφο θεώρημα; Ίσως….



Σχ.3 Εμβαδά και Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Εάν όχι κομψότητα, τότε τι είναι αυτό που δίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα μια καθολική έφεση; Μέρος αυτής, χωρίς καμία αμφιβολία, έχει να κάνει με το μεγάλο αριθμό αποδείξεων που έχει παρουσιαστεί κατά τη διάρκεια των αιώνων. Ο Maor (2007) αναφέρει ότι, ο Elisha Scott Loomis (1852-1940), ένας εκκεντρικός δάσκαλος μαθηματικών από το Οχάιο, ξόδεψε μια ολόκληρη ζωή συλλέγοντας όλες τις γνωστές αποδείξεις – 371 από αυτές – και στηριζόμενος σε αυτές έγραψε το *The Pythagorean Proposition (1927).* Ο Loomis υποστήριξε ότι στο Μεσαίωνα, απαιτήθηκε πως όταν ένας σπουδαστής παίρνει το μεταπτυχιακό του στα μαθηματικά θα πρέπει να προσφέρει μία νέα και πρωτότυπη απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Αυτό είχε κεντρίσει το ενδιαφέρον των σπουδαστών και των δασκάλων, οδηγώντας τους να βρίσκουν πάντα νέες και καινοτόμες αποδείξεις. Μερικές από αυτές είναι βασισμένες στην ομοιότητα των τριγώνων, άλλες στη

διαμέριση, άλλες ακόμα και σε αλγεβρικούς τύπους και μερικές χρησιμοποιούν τα διανύσματα. Υπάρχουν ακόμη και «αποδείξεις» («οι επιδείξεις» θα ήταν μια καλύτερη λέξη) βασισμένες σε φυσικές συσκευές. Σε ένα επιστημονικό μουσείο στο Τελ Αβίβ στο Ισραήλ, υπάρχει μια τέτοια επίδειξη (βλ. σχήμα 4), ένα κατασκευασμένο ορθογώνιο τρίγωνο από πλεξιγκλάς, στο οποίο χρωματιστό υγρό που ρέει ελεύθερα μεταξύ των τετραγώνων που στηρίζονται στην υποτείνουσα και στις δυο κάθετες πλευρές, δείχνει ότι ο όγκος του υγρού στο πρώτο τετράγωνο είναι ίσος με το συνδυασμένο όγκο στα άλλα δύο.



Σχ.4 Η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια χρωματιστού υγρού

Ο Maor (2007) υποστηρίζει ότι υπάρχει ένας άλλος λόγος για την καθολική έφεση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, για το ότι είναι αναμφισβήτητα το πιο συχνά χρησιμοποιημένο θεώρημα σε όλα τα μαθηματικά. Προτρέποντας να ανοίξουμε οποιοδήποτε εγχειρίδιο μαθηματικών τύπων, λέει πως η έκφραση $x^2 + y^2$ συναντάται σχεδόν σε κάθε κεφάλαιο, και πτυχώνεται συχνά μέσα σε μια μεγαλύτερη έκφραση που είναι σχεδόν πάντα της μορφής $x^2 + y^2$ και όχι της μορφής $x^3 + y^3$ ή οποιασδήποτε άλλης δύναμης των μεταβλητών. Άμεσα ή έμμεσα, αυτή η έκφραση μπορεί να επισημανθεί στο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Πάρτε, παραδείγματος χάριν, την τριγωνομετρία, ένα θέμα πασίγνωστο για το φαινομενικά ατελείωτο ανεφοδιασμό των τύπων. Εκεί, η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και πολλές άλλες ακόμα μοιάζουν να είναι απόρροιες του Πυθαγορείου Θεωρήματος (πράγματι, καλούνται Πυθαγόρειες ταυτότητες). Το ίδιο πράγμα συμβαίνει σχεδόν σε κάθε κλάδο των μαθηματικών, από τη θεωρία αριθμών και την άλγεβρα ως τους υπολογισμούς και τις πιθανότητες. Σε όλους τους τομείς, το Πυθαγόρειο Θεώρημα βασιλεύει ανώτατο.

1.3 Βαβυλωνιακά Μαθηματικά

«Το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες.»

Γαλιλαίος

Η απέραντη έκταση περιοχών από τους ποταμούς του Ευφράτη και του Τίγρη στην ανατολή ως τα βουνά του Λιβάνου στη δύση είναι γνωστά ως εύφορη ημισέληνος. Ήταν εδώ, στο σύγχρονο Ιράκ, που ο ένας από τους μεγάλους πολιτισμούς της αρχαιότητας, αυτός της Μεσοποταμίας, ανήλθε τέσσερις χιλιετίες πριν. Εκατοντάδες χιλιάδες πλάκες αργίλου, που βρέθηκαν κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δύο αιώνων, βεβαιώνουν τους ανθρώπους που άκμασαν στο εμπόριο και την αρχιτεκτονική, τα διατηρημένα ακριβή αρχεία αστρονομικών γεγονότων, που υπερέχουν στις τέχνες και τη λογοτεχνία, και, σύμφωνα με τον κανόνα του Hammurabi, δημιούργησαν τον πρώτο νομικό κώδικα στην ιστορία. Μόνο ένα μικρό μέρος αυτού του απέραντου αρχαιολογικού θησαυρού έχει μελετηθεί από τους μελετητές. Η μεγάλη πλειοψηφία των πλακών στα υπόγεια των μουσείων σε όλο τον κόσμο, αναμένει την αποκρυπτογράφησή τους για να μας δώσουν μια αναλαμπή στην καθημερινή ζωή των αρχαίων Βαβυλωνίων (Maor, 2007).

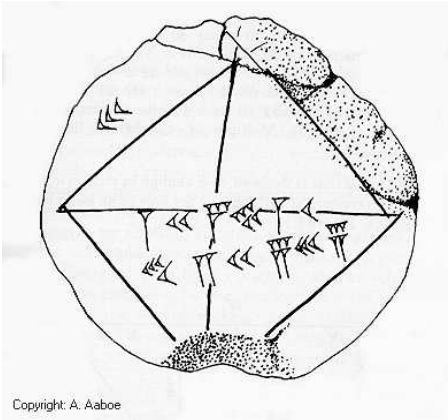
1.3.1 Η Πλάκα YBC 7289

Μεταξύ των πλακών που έχουν λάβει πρόσθετη διερεύνηση είναι μια με τον προσδιορισμό «YBC 7289», που σημαίνει ότι είναι η πλάκα αριθμός 7289 στη Βαβυλωνιακή Συλλογή *"Sterling Memorial Library"* του πανεπιστημίου του Yale (Van der Waerden, 2000).

Σχ.5 YBC 7289. Σφηνοειδές κείμενο που δείχνει την προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

Οι ημερομηνίες των πλακών χρονολογούνται από την παλαιά περίοδο των Βαβυλωνίων, από τη δυναστεία του Hammurabi, κατά προσέγγιση το 1800-1600 π.Χ. Αυτή παρουσιάζει ένα γραμμένο τετράγωνο και τις δύο διαγώνιές του, με μερικά σημάδια που χαράσσονται εμπρός από τη μια πλευρά και κάτω από την οριζόντια

διαγώνιο. Τα σημάδια είναι σε σφηνοειδή μορφή, χαραγμένα με γραφίδα σε ένα κομμάτι του μαλακού αργίλου που έπειτα ήταν ξεραμένος στον ήλιο ή ψημένος σε ένα φούρνο. Αποδεικνύεται ότι είναι αριθμοί, γραπτοί στο ιδιαίτερο σύστημα αρίθμησης των Βαβυλωνίων που χρησιμοποιούσαν ως βάση το 60. Σε αυτό το εξηκονταδικό σύστημα, οι αριθμοί μέχρι το 59 γράφονται ουσιαστικά όπως στο δικό μας σύγχρονο σύστημα αρίθμησης, δηλαδή με βάση το δέκα, αλλά χωρίς ένα μηδέν. Οι μονάδες γράφτηκαν ως οι κάθετες Υ-διαμορφωμένες εγκοπές, ενώ οι δεκάδες μαρκαρίστηκαν με τις παρόμοιες εγκοπές που είναι γραμμένες οριζόντια. Δείτε αυτά τα σύμβολα από κοντά και κατ' αντιστοιχία.



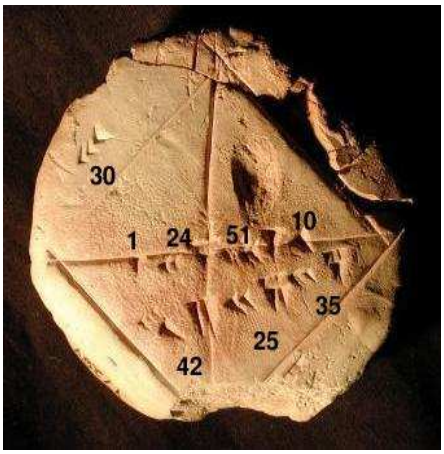
Σχ.6 Τα σύμβολα της πλάκας YBC, αποτυπωμένα με μολύβι.

Όταν ένας αριθμός υπερέβη το 59, στρογγυλοποιείται στις ομάδες των 60 με τον ίδιο σχεδόν τρόπο όπως στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς στις ομάδες των δεκάδων στο δεκαδικό μας σύστημα. Κατά συνέπεια, ο 253 στο εξηκονταδικό σύστημα γράφεται $4 \cdot 60 + 13$ (συχνά μια ομάδα από διάφορα ίδια σύμβολα συσσωρευόντουσαν, για να δώσουν προφανώς το διάστημα).

Επειδή οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν ένα σύμβολο για τη «κενή αυλάκωση» - το δικό μας σύγχρονο μηδέν - εκεί υπάρχει συχνά μια ασάφεια ως προς τον τρόπο με τον οποίο οι αριθμοί πρέπει να είναι ομαδοποιημένοι. Στο παράδειγμα που δίνεται παραπάνω, οι αριθμοί θα μπορούσε να είναι $4 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 = 15.180$ ή θα μπορούσε να σημαίνει $\frac{4}{60} + 13 = 13,067$ ή οποιοσδήποτε άλλος συνδυασμός δυνάμεων του 60 με το 4 και το 13. Σε τέτοιες περιπτώσεις η σωστή ερμηνεία πρέπει να συναχθεί από το πλαίσιο, που παρουσιάζει μια πρόσθετη πρόκληση στους σχολιαστές που προσπαθούν να αποκρυπτογραφήσουν αυτά τα αρχαία έγγραφα (Heath, 1956).

Ευτυχώς, στην περίπτωση YBC 7289 ο στόχος ήταν σχετικά εύκολος (Maor, 2007). Ο αριθμός κατά μήκος της ανώτερης αριστερής πλευράς αναγνωρίζεται εύκολα ως 30. Ένας ακριβώς κάτω από την οριζόντια διαγώνιο είναι 1;24,51,10 (χρησιμοποιούμε εδώ τη σύγχρονη σημείωση για το γράψιμο των βαβυλωνιακών αριθμών, στην οποία τα κόμματα χωρίζουν τα εξηκοστά «ψηφία» και το ερωτηματικό χωρίζει το αναπόσπαστο τμήμα ενός αριθμού από το κλασματικό μέρος). Γράφοντας αυτόν τον αριθμό στο δεκαδικό σύστημα, παίρνουμε $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414213$, ο οποίος δεν είναι κανένας άλλος εκτός από την τιμή $\sqrt{2}$ με ακρίβεια εκατομμυριοστού! Και όταν αυτός ο αριθμός πολλαπλασιαστεί με 30, παίρνουμε 42.426389, ο οποίος είναι ο εξηνταδικός αριθμός 42;25,35 – ο αριθμός στη δεύτερη

γραμμή κάτω από τη διαγώνιο. Το συμπέρασμα είναι αναπόφευκτο: οι Βαβυλώνιοι ήξεραν τη σχέση μεταξύ του μήκους της διαγωνίου ενός τετραγώνου και της πλευράς του, $d = a\sqrt{2}$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι αυτοί ήταν εξοικειωμένοι με το Πυθαγόρειο Θεώρημα – ή στο ελάχιστο με την ειδική περίπτωση της διαγωνίου τετραγώνου ($d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$) – περισσότερα από χίλια χρόνια πριν το μεγάλο σοφό από τον οποίο πήρε το όνομα.



Σχ.7 Ανάλυση της πλάκας YBC 7289

Δύο πράγματα για αυτήν την πλάκα είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτα. Κατ' αρχάς, αποδεικνύει ότι οι Βαβυλώνιοι ήξεραν πώς να υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού με αξιοσημείωτη ακρίβεια. Στην πραγματικότητα, μια ακρίβεια ίση με αυτήν ενός σύγχρονου οκταψήφιου υπολογιστή (Van der Waerden, 2000). Αλλά ακόμα πιο αξιοπρόσεκτος είναι ο πιθανός σκοπός αυτού του ιδιαίτερου εγγράφου. Από όλη την πιθανότητα προορίστηκε, για παράδειγμα, το πώς να βρίσκουμε τη διαγώνιο οποιουδήποτε τετραγώνου. Απλά πολλαπλασιάζουμε το μήκος της πλευράς με το 1;24,51,10. Οι περισσότεροι άνθρωποι, όταν τους δοθεί αυτό, θα ακολουθούσαν «την προφανή» αλλά περισσότερο κουραστική διαδρομή: ξεκινάς με 30, το τετραγωνίζεις, διπλασιάζεις το αποτέλεσμα, και παίρνεις την τετραγωνική ρίζα $d = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} = 42,4264$ στρογγυλεμένη σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Αλλά υποθέστε ότι έπρεπε να κάνετε αυτό επανειλημμένως για τα τετράγωνα των διαφορετικών μεγεθών. Θα έπρεπε να επαναλάβετε τη διαδικασία κάθε φορά με έναν νέο αριθμό, ένας μάλλον κουραστικός στόχος. Ο ανώνυμος γραφέας που χάραξε αυτούς τους αριθμούς σε μία πλάκα αργίλου, σχεδόν τέσσερις χιλιάδες έτη πριν, μας έδειξε έναν απλούστερο τρόπο: απλά πολλαπλασιάστε την πλευρά του τετραγώνου με το $\sqrt{2}$.Τέτοια απλοποίηση!

Αλλά παραμένει μια αναπάντητη ερώτηση: γιατί ο γραφέας επέλεξε μία πλευρά 30 για το παράδειγμά του; Υπάρχουν δύο πιθανές εξηγήσεις (Van der Waerden, 2000): ή αυτή η πλάκα αναφέρεται σε κάποια ιδιαίτερη κατάσταση, ίσως έναν τετραγωνικό τομέα πλευράς 30 για την οποία απαιτήθηκε να βρεθεί το μήκος της διαγωνίου ή – και αυτό είναι περισσότερο εύλογο – επέλεξε 30 επειδή είναι το μισό του 60 και επομένως έχει εύκολους πολλαπλασιασμούς. Στο δεκαδικό μας σύστημα, πολλαπλασιάζοντας έναν αριθμό με το 5 μπορούμε γρήγορα να κάνουμε την πράξη με τη διχοτόμηση του αριθμού και μετακινώντας την υποδιαστολή μία

θέση προς τα δεξιά. Παραδείγματος χάριν, $2,86 \cdot 5 = \left(\frac{2,86}{2}\right) \cdot 10 = 1,43 \cdot 10 = 14,3$. Ομοίως, στο εξηνταδικό σύστημα πολλαπλασιάζοντας έναν αριθμό με το 30 μπορεί να γίνει απλά με τη διχοτόμηση του αριθμού και μετακινώντας το «εξηκοστό σημείο» μια θέση προς τα δεξιά.

Δείτε πώς δουλεύει αυτό στην περίπτωση YBC 7289. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός 1;24,51,10 είναι συντομογραφία του $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414213$. Διαιρώντας με το 2 παίρνουμε $\frac{1}{2}$ 12 $25 + \frac{1}{2}$ 5 που πρέπει να ξαναγράψουμε έτσι ώστε κάθε συντελεστής των δυνάμεων του 60 να είναι ακέραιος. Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε το $\frac{1}{2}$ στον πρώτο και τρίτο όρο από το $\frac{30}{60}$. Τότε θα έχουμε $\frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{25 + \frac{30}{60}}{60^2} + \frac{5}{60^3} = \frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{30}{60^3} + \frac{5}{60^3}$ που μας δίνει 0;42,25,35. Τέλος, μετακινώντας το εξηνταδικό σημείο μία θέση προς τα δεξιά μας δίνει τον αριθμό 42;25,35. το μήκος της διαγωνίου. Έτσι φαίνεται ότι ο γραφέας επέλεξε το 30 απλά για πρακτικούς λόγους, απλά έκανε τους υπολογισμούς του πολύ ευκολότερους.

1.3.2 Η Πινακίδα PLIMPTON 322

Ο Maor (2007) επισημαίνει ότι εάν το YBC 7289 είναι ένα αξιοπρόσεκτο παράδειγμα της κυριότητας των βαβυλωνιακών στοιχείων στη γεωμετρία, μια άλλη πλάκα αργίλου από την ίδια περίοδο μας πηγαίνει ακόμα περαιτέρω και μας δείχνει ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν εξοικειωμένοι με τις αλγεβρικές διαδικασίες επίσης. Ο Maor (1998) στο βιβλίο του *"Trigonometric Delights"*, αναφερόμενος στον Otto Neugebauer λέει ότι, η γνωστή ως Plimpton 322 (ονομάζεται έτσι επειδή είναι ο αριθμός 322 στο G.A.Plimpton Collection στο Πανεπιστήμιο της Columbia) είναι η πιο πολυφωτογραφημένη πινακίδα στον κόσμο από άργιλο. Αυτό που την κάνει ξεχωριστή, σε αντίθεση με όλες τις άλλες πινακίδες που έχουν ανακαλυφθεί στην Μεσοποταμία, είναι ότι δεν υπάρχει ούτε μία λέξη! Υπάρχουν αποκλειστικά αριθμοί!

Σχ.8 Η Βαβυλωνιακή πινακίδα Plimpton 322 που χρονολογείται γύρω στο 1800π.Χ.

Η πλάκα αυτή ανακαλύφθηκε και δημοσιεύθηκε από τους Neugebauer και Sachs στο έργο τους "*Mathematical Cuneiform Texts*" (New Haven, Conn. 1945). Είναι ένας πίνακας τεσσάρων στηλών, όπου με μια πρώτη ματιά φαίνεται να είναι ένα αρχείο κάποιας εμπορικής συναλλαγής. Μια στενή διερεύνηση, εντούτοις, έχει αποκαλύψει κάτι εξ ολοκλήρου διαφορετικό: η πλάκα είναι ένας κατάλογος Πυθαγόρειων τριάδων, θετικοί ακέραιοι αριθμοί (a, b, c) έτσι ώστε $a^2 + b^2 = c^2$. Παραδείγματα τέτοιων τριάδων είναι (3, 4, 5), (5, 12, 13), και (8, 15, 17). Λόγω του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, κάθε τέτοια τριάδα αντιπροσωπεύει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τις πλευρές του μήκη ακέραιων αριθμών. Ακριβέστερα, το αντίστροφο του. Εάν οι πλευρές ενός τριγώνου ικανοποιούν την εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$ τότε το τρίγωνο είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Δυστυχώς, λείπει ένα μέρος της αριστερής άκρης της πλάκας, αλλά ίχνη σύγχρονης κόλλας, που βρίσκεται στις άκρες, αποδεικνύει ότι το ελλείπον μέρος χάθηκε αφού η πλάκα είχε ανακαλυφθεί, αυξάνοντας την ελπίδα ότι μια ημέρα μπορεί να παρουσιαστεί στην αγορά αρχαιοτήτων. Χάρη στη λεπτομερής και σχολαστική έρευνα, το χαμένο μέρος έχει αναδημιουργηθεί μερικώς, και μπορούμε τώρα να διαβάσουμε την πλάκα με σχετική ευκολία. Ο πίνακας 1 αναπαράγει το κείμενο στη σύγχρονη σημείωση. Υπάρχουν τέσσερις στήλες, εκ των οποίων η δεξιότερη, τιτλοφορείται από τις λέξεις «το όνομά του» στο αρχικό κείμενο, δίνει μόνο το διαδοχικό αριθμό των γραμμών από την 1 έως την 15. Οι δεύτερες και τρίτες στήλες (που μετρούν από δεξιά προς τα αριστερά) έχουν ως επικεφαλίδα «επίλυση αριθμού από τη διαγώνιο» και «επίλυση αριθμού από το πλάτος» αντίστοιχα, δηλαδή δίνουν το μήκος της διαγωνίου και της πλευράς ενός τετραγώνου, ή ισοδύναμα, το μήκος της υποτείνουσας και την κάθετη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου. Θα ονομάσουμε αυτές τις στήλες με τα γράμματα c και b, αντίστοιχα.

	πλάτος	διαγώνιος	
1:59:00:15	1:59	2:49	1
1:56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
1:55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
1:53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
1:48:54:01:40	1:05	1:37	5
1:47:06:41:40	5:19	8:01	6
1:43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
1:41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
1:38:33:36:36	8:01	12:49	9
1:35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
1:33:45	45	1:15	11
1:29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
1:27:00:03:45	2:41	4:49	13
1:25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
1:23:13:46:40	56	1:46	15

Πίνακας 1. Ανακατασκευή της πινακίδας Plimpton 322. Οι αριθμοί είναι διορθωμένοι.

Παραδείγματος χάριν, η πρώτη γραμμή δείχνει ότι έστω $b = 1,59$ και $c = 2,49$ που αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς $1 \cdot 60 + 59 = 119$ και $2 \cdot 60 + 49 = 169$. Ένας

γρήγορος υπολογισμός μας δίνει την άλλη πλευρά $a=\sqrt{169^2-119^2}=\sqrt{14400}=120$, ως εκ τούτου η $(119,120,169)$ είναι μια Πυθαγόρεια τριάδα. Επίσης, στην τρίτη γραμμή διαβάζουμε
$b=1,16,41=1\cdot 60^2+16\cdot 60+41=4601$ και $c=1,50,49=1\cdot 60^2+50\cdot 60+49=6649$. Έτσι $a=\sqrt{6649^2-4601^2}=\sqrt{23.040.000}=4800$. Παίρνουμε λοιπόν άλλη μια πυθαγόρεια τριάδα, την $(4601,4800,6649)$.

Ο πίνακας περιέχει κάποια προφανή λάθη. Στη γραμμή 9 βρίσκουμε $b=9,1=9\cdot 60+1=541$ και $c=12,49=12\cdot 60+49=769$ οι οποίοι δεν αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα αφού ο τρίτος αριθμός a δεν είναι ακέραιος. Αλλά αν αντικαταστήσουμε το 9,1 από το 8,1=481 θα πάρουμε μια ακέραιη τιμή για τον $a=600$, και έχουμε την Πυθαγόρεια τριάδα $(481,600,769)$. Ο Maor (2007) θεωρεί ότι αυτό το λάθος ήταν απλά «τυπογραφικό».Ο γραφέας μπορεί να ήταν στιγμιαία αποσπασμένος και χάραξε εννέα σημάδια στο μαλακό άργιλο αντί οκτώ. Και καθώς η πλάκα ξεράθηκε στον ήλιο, η παράλειψή του έγινε μέρος της καταγεγραμμένης ιστορίας.

Στη γραμμή 13 πάλι έχουμε $b=7,12,1=7\cdot 60^2+12\cdot 60+1=25921$ και $c=4,49=4\cdot 60+49=289$, όπου οι αριθμοί αυτοί δεν αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα. Αλλά παρατηρούμε ότι ο 25921 είναι το τετράγωνο του 161, και οι αριθμοί 161 και 289 κάνουν την Πυθαγόρεια τριάδα $(161,240,289)$. Φαίνεται ότι ο γραφέας απλά ξέχασε να βάλει την τετραγωνική ρίζα του 25921. Και στη γραμμή 15 βρίσκουμε $c=53$ ενώ το σωστό θα έπρεπε να ήταν το διπλάσιο αυτού του αριθμού, δηλαδή το $106=1,46$ παράγοντας έτσι την τριάδα $(56,90,106)$. Παρατηρούμε εδώ ότι αυτή δεν είναι μια πρωτεύουσα Πυθαγόρεια τριάδα, δεδομένου ότι τα μέλη της έχουν κοινό διαιρέτη, το 2. Έτσι, μπορεί να μειωθεί στην απλούστερη τριάδα $(28,45,53)$. Οι δύο αυτές τριάδες αντιπροσωπεύουν τα όμοια τρίγωνα.

Αυτά τα λάθη, όπως λέει ο Maor (2007), αφήνουν κάποιον με μια αίσθηση ότι η ανθρώπινη φύση δεν έχει αλλάξει κατά τη διάρκεια των προηγούμενων τεσσάρων χιλιάδων ετών. Ένα τέταρτο λάθος εμφανίζεται στη γραμμή 2, όπου η είσοδος 3,12,1 πρέπει να είναι 1,20,25, παράγοντας την τριάδα (3367, 3456, 4825). Αυτό το λάθος παραμένει ανεξήγητο.

Η πιο αριστερή στήλη είναι η πιο μυστηριώδης από όλες. Ο τίτλος της πάλι αναφέρει τη λέξη «διαγώνιος», αλλά η ακριβής έννοια του υπόλοιπου κειμένου δεν είναι εξ' ολοκλήρου καθαρή. Εντούτοις, όταν κάποιος εξετάσει τις καταχωρήσεις του έρχεται στο φως ένα γεγονός που τρομάζει (Maor, 2007). Αυτή η στήλη δίνει το τετράγωνο της αναλογίας $\frac{c}{a}$, δηλαδή την τιμή $\csc^2 A$. Όπου Α είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά α και csc είναι η συντέμνουσα συνάρτηση που μελετάται στην τριγωνομετρία. Ας ελέγξουμε αυτό για τη γραμμή 1. Έχουμε $b=1,59=119$ και $c=2,49=169$ απ' όπου παίρνουμε $a=120$. Ως εκ τούτου ο λόγος $\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{169}{120}\right)^2=1,983$, στρογγυλοποιημένος σε τρία δεκαδικά ψηφία. Και αυτός είναι πράγματι ο αντίστοιχος αριθμός της τέταρτης στήλης: $1,59,0,15=1+\frac{59}{60}+\frac{0}{60^2}+\frac{15}{60^3}=1,983$. Πρέπει να σημειωθεί πάλι ότι οι Βαβυλώνιοι δεν χρησιμοποιούσαν ένα σύμβολο για το «κενό» και επομένως ένας αριθμός θα μπορούσε να ερμηνευθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σωστή ερμηνεία βέβαια πρέπει να συναχθεί από το όλο πλαίσιο. Στο παράδειγμα που αναφέρθηκε,

υποτέθηκε ότι οι πρώτοι αριθμοί ταιριάζουν περισσότερο για μονάδες παρά για εξηντάδες. Οι αναγνώστες μπορούν να ελέγξουν κι άλλες καταχωρήσεις σε αυτές τις στήλες και να συμπεράνουν ότι είναι ίσες με $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ (Maor, 2007).

Διάφορες ερωτήσεις προκύπτουν αμέσως. Είναι η διάταξη των καταχωρήσεων στον πίνακα τυχαία ή ακολουθεί κάποιο κρυμμένο αλγόριθμο; Πώς οι Βαβυλώνιοι βρήκαν αυτούς τους ιδιαίτερους αριθμούς που διαμορφώνουν τις Πυθαγόρειες τριάδες; Και γιατί ενδιαφέρθηκαν για αυτούς τους αριθμούς και ιδιαίτερα για την αναλογία $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ σε πρωτεύοντα ρόλο? Η πρώτη ερώτηση είναι σχετικά εύκολο να απαντηθεί. Εάν συγκριθούν οι τιμές του $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ από γραμμή σε γραμμή, ανακαλύπτουμε ότι μειώνονται σταθερά από το 1,983 στο 1,387, έτσι φαίνεται πιθανόν ότι η διάταξη των καταχωρήσεων καθορίστηκε από αυτήν την ακολουθία (Maor, 2007). Επιπλέον, εάν υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα κάθε καταχώρησης στη στήλη 4 - αυτός είναι ο λόγος $\frac{c}{a} = \csc A$ - και έπειτα βρούμε την αντίστοιχη γωνία A, διαπιστώνουμε ότι η γωνία A αυξάνεται σταθερά από 45° σε 58°. Επομένως φαίνεται ότι ο συντάκτης αυτού του κειμένου ενδιαφέρθηκε όχι μόνο για να βρει Πυθαγόρειες τριάδες, αλλά επίσης και για τον καθορισμό της αναλογίας $\frac{c}{a}$ των αντίστοιχων ορθογώνιων τριγώνων. Αυτή η υπόθεση μπορεί μια ημέρα να επιβεβαιωθεί εάν το ελλείπον μέρος της πλάκας παρουσιαστεί, δεδομένου ότι μπορεί να περιέχει τις ελλείπουσες στήλες για το a και το $\frac{c}{a}$. Σε αυτή την περίπτωση, το Plimpton 322 θα γραφεί στην ιστορία ως ο πρώτος τριγωνομετρικός πίνακας.

Ως προς τον τρόπο με τον οποίο οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί βρήκαν αυτές τις Πυθαγόρειες τριάδες – συμπεριλαμβανομένων τέτοιων πάρα πολύ μεγάλων αριθμών όπως (4601, 4800, 6649) – υπάρχει μόνο μια εύλογη εξήγηση. Πρέπει να ήξεραν έναν αλγόριθμο που, 1.500 έτη αργότερα, θα τυποποιούταν στα στοιχεία του Ευκλείδη. Ας δούμε πώς λειτουργεί αυτός. Έστω το u και το v να είναι οποιοιδήποτε δύο θετικοί αριθμοί με $u > v$, τότε οι τρεις αριθμοί $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ και $c = u^2 + v^2$ (1) διαμορφώνουν μία Πυθαγόρεια τριάδα (Νεγρεπόντης, 2005). Εάν επιπλέον απαιτήσουμε το u και το v να είναι – ο ένας μονός και ο άλλος ζυγός – και ότι δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από το 1, τότε η (a,b,c) είναι μία αρχική (παράγουσα) Πυθαγόρεια τριάδα, δηλαδή τα a,b,c δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από το 1. Είναι εύκολο στο να συμπεράνουμε ότι οι αριθμοί a,b,c όπως δίνονται από τις εξισώσεις (1) ικανοποιούν την εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2uv)^2 + \left(u^2 - v^2\right)^2 \\ &= 4u^2v^2 + u^2 - 2u^2v^2 + v^4 \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\ &= \left(u^2 + v^2\right)^2 \\ &= c^2 . \end{aligned}$$

Το αντίστροφο αυτής της πρότασης - ότι κάθε Πυθαγόρεια τριάδα μπορεί να βρεθεί με αυτόν τον τρόπο - είναι λίγο δυσκολότερο να αποδειχθεί.

Το Plimpton 322 μας δείχνει λοιπόν ότι οι Βαβυλώνιοι δεν ήταν μόνο εξοικειωμένοι με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά ότι ήξεραν τα στοιχεία της θεωρίας αριθμών και είχαν τις υπολογιστικές δεξιότητες για να κάνουν τη θεωρία πράξη, κάτι εντελώς αξιοπρόσεκτο για έναν πολιτισμό που έζησε χίλια έτη πριν εμφανιστούν οι πρώτοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί (Van der Waerden, 2000).

1.3.3 Άλλα Βαβυλωνιακά κείμενα

Σύμφωνα με τον Van der Waerden (2000, σελ.78) το παλαιό-βαβυλωνιακό κείμενο BM 85196 περιέχει το πρόβλημα που ακολουθεί: *«ένας δοκός? μήκους 0,30 ακουμπά κατακόρυφα πάνω σε έναν τοίχο. Το επάνω άκρο γλιστράει προς τα κάτω κατά μία απόσταση 0,6. Πόσο απομακρύνεται το κάτω άκρο?»*. Είναι φανερό ότι στο πρόβλημα αυτό δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 0,30 και μία κάθετη πλευρά ίση με 0,24.

Το πόσο πιστά διατήρησαν οι Βαβυλώνιοι, επί 1.500 έτη, την παράδοση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, αποδεικνύεται από ένα κείμενο της περιόδου των Σελευκιδών, το BM 34568, που περιέχει μεταξύ άλλων ασήμαντων προβλημάτων που αφορούν σε μήκη, πλάτη, και διαγώνιους ορθογωνίων, την εξής μικρή άσκηση *(ΜΚΤ, τόμ.ΙΙΙ,σελ.22) «ένα καλάμι ακουμπά κατακόρυφα σε έναν τοίχο. Αν το κατεβάσω κατά 3 κύβιτα (στο επάνω άκρο) το (κάτω) άκρο απομακρύνεται κατά 9 κύβιτα. Πόσο είναι το μήκος του καλαμιού? Πόσο είναι το ύψος του τοίχου?*

Σε όλα αυτά τα προβλήματα η μόνη δυσκολία είναι στην ουσία αλγεβρική. Η μόνη γεωμετρική ιδιότητα που χρησιμοποιείται κατ' επανάληψη είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Van der Waerden, 2000). Θα ήταν λάθος να νομίζουμε ότι σε όλα αυτά τα προβλήματα οι λόγοι μήκους, πλάτους και διαγωνίου είναι (3,4,5). Συναντούμε και άλλους λόγους, όπως (5,12,13) και (8,15,17) και (20,21,29). Εκτός από το τελευταίο, όλα τα υπόλοιπα παραδείγματα ορθογωνίων τριγώνων με ρητές πλευρές, ανευρίσκονται επίσης στα γραπτά του Ήρωνος από την Αλεξάνδρεια.

1.4 Οι Αιγύπτιοι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Οι Αιγύπτιοι πρέπει να έχουν χρησιμοποιήσει τον τύπο $a^2 + b^2 = c^2$ ***αλλιώς δε θα μπορούσαν να έχουν χτίσει τις πυραμίδες τους, αλλά δεν το έχουν εκφράσει ποτέ ως μία χρήσιμη θεωρία.***

Joy Hakim, The Story of Science, σελ. 78

Πεντακόσια μίλια νοτιοδυτικά της Μεσοποταμίας, κατά μήκος της κοιλάδας του Νείλου, αναπτύχθηκε ένας δεύτερος μεγάλος αρχαίος πολιτισμός, ο Αιγύπτιος. Τα δύο έθνη συνυπήρχαν σε σχετική ειρήνη για πάνω από τρεις χιλιετίες, από το 3500 π.Χ. περίπου. Και οι δύο είχαν αναπτύξει προηγμένες δεξιότητες σύνταξης εγγράφων, ήταν έντονοι παρατηρητές του ουρανού, και διατηρούσαν λεπτομερή αρχεία των στρατιωτικών τους νικών, των εμπορικών τους συναλλαγών, και της πολιτιστικής τους κληρονομιάς. Αλλά ενώ οι Βαβυλώνιοι κατέγραφαν όλα αυτά σε πλάκες αργίλου – ουσιαστικά ένα ακατάλυτο υλικό για το γράψιμο – οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν πάπυρους, ένα ιδιαίτερα εύθραυστο μέσο. Δεν ήταν κατάλληλο για το ξηρό κλίμα των ερήμων καθώς οι γραφές τους θα είχαν αποσυντεθεί πολύ. Ακόμα κι έτσι, η γνώση μας για την αρχαία Αίγυπτο είναι λιγότερο εκτενής από αυτήν για τη σύγχρονη Μεσοποταμία. Ό,τι ξέρουμε προέρχεται κυρίως από τα χειροποίητα αντικείμενα που βρίσκονται στις περιοχές ενταφιασμών των κυβερνώντων δυναστειών της Αιγύπτου, από μια χούφτα τυλιγμένων διασωθέντων παπύρων, και από τις ιερογλυφικές επιγραφές στους ναούς και τα μνημεία τους (Maor, 2007).

Ο διασημότερος όλων των αιγυπτιακών ιερών τόπων είναι οι πυραμίδες, που χτίζονται για πάνω από 1.500 έτη για να δοξάσουν τους κυβερνήτες Φαραώ κατά τη διάρκεια των ζωών τους, και ακόμα περισσότερο μετά από τους θανάτους τους. Ένας τεράστιος όγκος της βιβλιογραφίας ήταν γραμμένος στις πυραμίδες. Δυστυχώς, ένα μεγάλο μέρος αυτής της λογοτεχνίας είναι περισσότερο μυθιστοριογραφία παρά πραγματικότητα. Οι πυραμίδες έχουν προσελκύσει ένα κοινό προσκυνητών που βρήκε σε αυτά τα μνημεία κρυφές συνδέσεις για τα πάντα στον κόσμο, από τις αριθμητικές τιμές του π μέχρι και για τη χρυσή αναλογία της ευθυγράμμισης των πλανητών και των αστεριών. Αναφέρει ο Αιγυπτιολόγος Gillings (1982, σελ.237): «Συντάκτες, μυθιστοριογράφοι, δημοσιογράφοι, και συγγραφείς μυθιστορημάτων βρήκαν κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα ένα νέο θέμα (τις πυραμίδες), μία νέα ιδέα αναπτύχθηκε, και αυτοί που ήξεραν λιγότερα πράγματα και δεν κατανοούσαν καθαρά το θέμα, θα μπορούσαν πιο ελεύθερα να δώσουν τα ηνία στη φαντασία τους».

Οι Δακανάλης και Θεοδοσίου αναφέρουν ότι ο Legon μελέτησε εκτενώς και επέκτεινε την πρώτη τοπογραφική μελέτη που έγινε στην Γκίζα από τον W.M.F.Petrie (1883). Τα αποτελέσματα της εργασίας του Legon έχουν δημοσιευθεί στα περιοδικά της Αρχαιολογικής κοινότητας, Discussions in Egyptology και στο Gottinger Miszelen. Οι τρεις πυραμίδες στην Γκίζα περιγράφονται με ένα ορθογώνιο με πλευρές $1000\sqrt{2}$ και $1000\sqrt{3}$. Ο Legon παρατήρησε ότι η τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιήθηκε εκτενώς από τους κτίστες, γεγονός που δεν προκαλεί έκπληξη, διότι είναι γενικά αποδεκτό πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι τη γνώριζαν. Ο τρόπος όμως με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε στο όλο σχέδιο, προτείνει τη γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Βεβαίως, χτίζοντας ένα τέτοιο τεράστιο μνημείο όπως είναι η μεγάλη πυραμίδα του Χέοπα – 756 πόδια η κάθε πλευρά και το ύψος να αγγίζει τα 481 πόδια

– απαιτεί πολλή μαθηματική γνώση, και σίγουρα αυτή η γνώση πρέπει να συμπεριλαμβάνει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αλλά το ήξεραν;

Υπάρχουν αρχεία, όπως ο πάπυρος Berlin 6619 που χρονολογείται περίπου στο 1850 π.Χ., που παρουσιάζει τη γνώση των Πυθαγόρειων τριάδων από τους Αιγυπτίους. Εντούτοις, κανένα τρίγωνο δεν αναφέρεται εδώ ή κάπου αλλού. Ο Van der Waerden (2000) προτείνει ότι οι Αιγύπτιοι μπορεί να είχαν μάθει για τις Πυθαγόρειες τριάδες από τους Βαβυλώνιους. Υπέρ αυτής της άποψης, οι Boyer & Merzbach (1991) έγραψαν: *«συχνά λέγεται ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν εξοικειωμένοι με τις Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά δεν υπάρχει κανένας υπαινιγμός αυτού στους παπύρους που έχουν έρθει στα χέρια μας»*.

Η κύρια πηγή πληροφοριών για τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά προέρχεται από τον πάπυρο Rhind, μια συλλογή από ογδόντα τέσσερα προβλήματα που ασχολούνται με την αριθμητική, τη γεωμετρία και τη στοιχειώδη άλγεβρα. Ανακαλύφθηκε το 1858 από τον Σκωτσέζο Αιγυπτιολόγο A. Henry Rhind. Έχει 18 πόδια μήκος και 13 ίντσες πλάτος. Επέζησε κάτω από εντυπωσιακά καλές συνθήκες και είναι το παλαιότερο εγχειρίδιο μαθηματικών που έφθασε σε μας σχεδόν άθικτο (τώρα βρίσκεται στο βρετανικό μουσείο στο Λονδίνο) (Maor, 2007).[3]

Ο πάπυρος γράφτηκε περίπου το 1650 π.Χ. από έναν γραφέα που ονομαζόταν A'h-mose, όνομα γνωστότερο στη δύση ως Ahmes. Αλλά δεν ήταν δική του εργασία (Van der Waerden, 2000) δεδομένου ότι ο A'h-mose μας λέει ότι το αντέγραψε από ένα παλαιότερο έγγραφο που χρονολογείται περίπου το 1800 π.Χ. Κάθε ένα από τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα ακολουθείται από μια λεπτομερή λύση βήμα προς βήμα. Επίσης, μερικά από τα προβλήματα συνοδεύονται από σχέδια. Πιθανότατα η εργασία ήταν ένα εγχειρίδιο κατάρτισης για χρήση σε κάποιο σχολείο γραφέων. Για αυτόν το λόγο υπήρχε η αίρεση των βασιλικών γραφέων στους οποίους όλοι οι λογοτεχνικοί στόχοι ήταν ορισμένοι. Ανάγνωση, γραφή και αριθμητική, τα σύγχρονα σε μας «τρία Ρ».

Σχ.9 Ο πάπυρος Rhind.

[3] Δείτε επίσης Arnold Chace, The Rhind Mathematical Papyrus: Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Transcriptions, Transliterations and Literal Translations (Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1979).

Ο Maor (1998, σελ.6-9) αναφέρει ότι, από τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα στον πάπυρο Rhind, τα είκοσι είναι γεωμετρικής φύσεως. Εξετάζουν ζητήματα, όπως το να βρίσκουν τον όγκο μιας κυλινδρικής σιταποθήκης ή το εμβαδόν ενός χωραφιού δεδομένων διαστάσεων (αυτό το τελευταίο πρόβλημα ήταν υψίστης σημασίας για τους Αιγυπτίους, των οποίων οι οικονομικοί πόροι εξαρτώνταν από τον ετήσιο κατακλυσμό του Νείλου). Πέντε από αυτά τα συγκεκριμένα προβλήματα αφορούν τις πυραμίδες. Για ακόμα μια φορά δεν υπάρχει ούτε εκεί κάποια αναφορά στο Πυθαγόρειο Θεώρημα, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Μια έννοια που εμφανίζεται επανειλημμένα είναι η *κλίση* της πλευράς μιας πυραμίδας, ένα θέμα ιδιαίτερης σημασίας για τους οικοδόμους, οι οποίοι έπρεπε να εξασφαλίσουν ότι και τα τέσσερα πρόσωπα διατηρούσαν μία ίση και ομοιόμορφη κλίση. Αλλά το Πυθαγόρειο Θεώρημα; Καμιά φορά.

Φυσικά, η απουσία στοιχείων δεν είναι στοιχείο της απουσίας, όπως οι αρχαιολόγοι επιθυμούν να επισημάνουν. Επιπλέον, κατά πάσα πιθανότητα ο πάπυρος Rhind αντιπροσώπευε μια περίληψη του είδους μαθηματικών που ένα μορφωμένο πρόσωπο – ένας γραφέας, ένας αρχιτέκτονας, ή κάποιος έφορος – ίσως αντιμετώπιζε στη σταδιοδρομία του, και η απουσία οποιασδήποτε αναφοράς στο Πυθαγόρειο Θεώρημα μας κάνει να υποθέσουμε έντονα ότι οι Αιγύπτιοι δεν ήξεραν κάτι για αυτό. Σύμφωνα με τον Smith, όπως λέει ο Maor (2007), ένας πάπυρος της δωδέκατης δυναστείας, περίπου το 2000 π.Χ., που ανακαλύφθηκε στο Kahun, αναφέρεται σε τέσσερις Πυθαγόρειες τριάδες, μία από τις οποίες είναι 12 + (3⁄4)2 = (11⁄4)2 η οποία είναι ισοδύναμη με την τριάδα (3, 4, 5) όταν απαλλαχθεί από τα κλασματικά μέρη. Δεν είναι βέβαια γνωστό εάν αυτές οι τριάδες αναφέρονται σε πλευρές ορθογωνίων τριγώνων.

Συχνά λέγεται ότι οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν ένα σχοινί με κόμπους που έδεναν σε ίσα διαστήματα για να μετρήσουν τις αποστάσεις. Το λεγόμενο 3 – 4 – 5 δεμένο σχοινί ή «αρπεδόνη». Αυτό ήταν ένα κλειστό κορδόνι χωρισμένο σε 12 ίσα τμήματα. Με αυτό, οι «αρπεδονάπτες» (αυτοί που ‘άπτονται΄ της αρπεδόνης) κατασκεύαζαν την ορθή γωνία (Νεγρεπόντης, 2005). Στο σημείο αυτό πρέπει να πούμε ότι, με το ίδιο αυτό εργαλείο, από την εποχή των αρπεδοναπτών μέχρι σήμερα, οι οικοδόμοι «γωνιάζουν» όπως λένε χαρακτηριστικά τα οικόπεδα ή τα κτίρια που θέλουν να κατασκευάσουν σε σχήμα ορθογωνίου, χρησιμοποιώντας 12 μέτρα της πολύμετρης κορδέλας τους κι ας μη γνωρίζουν πολλοί από αυτούς το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Έτσι η λογική πρέπει να οδήγησε τους Αιγυπτίους να ανακαλύψουν ότι ένα τρίγωνο 3 – 4 – 5 είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο και έτσι, πιθανώς, στο γεγονός ότι $3^2 + 4^2 = 5^2$. Αλλά δεν υπάρχει κανένα στοιχείο που να ενισχύει αυτήν την υπόθεση. Είναι πιο εύλογο ότι χρησιμοποίησαν το 3 – 4 – 5 δεμένο σχοινί για να κατασκευάσουν μια ορθή γωνία. Μερικοί συντάκτες έχουν δηλώσει ότι ήταν πολύ ευκολότερο να χρησιμοποιήσουν μια γραμμή βαριδιών για εκείνο τον σκοπό. Όπως αναφέρει ο Maor (2007), η περίπτωση αυτή συνοψίζεται καλύτερα με την αναφορά σε τρεις διαπρεπείς μελετητές των αρχαίων μαθηματικών:

Στο 90% όλων των βιβλίων (στην ιστορία των μαθηματικών), κάποιος βρίσκει τη δήλωση των Αιγυπτίων ότι ήξεραν το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5, και ότι το χρησιμοποίησαν για την παρουσίαση ορθών γωνιών. Πόση αξία έχει αυτή η δήλωση; Καμία!

- *Bartel Leendert van der Waerden (Science Awakening, Arnold Dresden, μετάφραση, New York: John Wiley, 1963, σελ.6.).*

Δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι οι Αιγύπτιοι είχαν οποιαδήποτε ιδέα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παρά τις μερικές αβάσιμες ιστορίες για τους «αρπεδονάπτες», οι οποίοι υποθετικά κατασκεύασαν ορθογώνια τρίγωνα με ένα σχοινί από $3+4+5=12$ *κόμπους.*

- *Dirk Jan Struik (Concise History of Mathematics, New York: Dover, 1967, σελ. 24).*

Δεν φαίνεται να υπάρχει κανένα στοιχείο ότι αυτοί ήξεραν πως το τρίγωνο (3, 4, 5) είναι ορθογώνιο. Πράγματι, σύμφωνα με την πιο πρόσφατη αρχή (T. Eric Peet, ο μαθηματικός πάπυρος Rhind , 1923), τίποτα στα Αιγύπτια μαθηματικά δεν υποδεικνύει ότι οι Αιγύπτιοι είχαν εξοικειωθεί με αυτό ή με οποιεσδήποτε πρόσθετες περιπτώσεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

- *Sir Thomas Little Heath (The Thirteen Books of Euclid's Elements, τεύχος 1, London: Cambridge University Press, 1962, σελ. 352).*

Φυσικά, ίσως οι αρχαιολόγοι κάποια ημέρα ξεθάψουν ένα έγγραφο που να παρουσιάζει ένα τετράγωνο με τα μήκη των πλευρών του και τις διαγώνιους του που εγγράφονται μεταξύ αυτών, όπως στο YBC 7289. Αλλά έως ότου συμβεί κάτι τέτοιο, δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι Αιγύπτιοι ήξεραν για τη σχέση μεταξύ των πλευρών και της υποτείνουσας σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Συσχέτιση του Θεωρήματος με την Πυθαγόρεια φιλοσοφία

2.1 Η Πυθαγόρεια Σχολή

«Όχι, δε θα προδώσω,
μα τον Πυθαγόρα,
που παρέδωσε στη γενιά μας την τετρακτύν,
που περιέχει τη ρίζα της αέναης φύσης.»

Όρκος των Πυθαγορείων

Την εικόνα του Πυθαγόρα θα τη βρείτε σε κάθε βιβλίο στην ιστορία των μαθηματικών, μία μορφή με μακριά γενειάδα και μια σοφή έκφραση στα μάτια του. Αλλά ποιο ήταν αυτό το σεβαστό πρόσωπο; Η αλήθεια είναι ότι δεν ξέρουμε. Ο Πυθαγόρας είναι μία από τις πιο μυστήριες προσωπικότητες στην ιστορία. Τα λίγα που ξέρουμε γι' αυτόν είναι περισσότερο μυθιστορήματα παρά πραγματικότητα, γραμμένα από ιστορικούς που έζησαν εκατοντάδες χρόνια αργότερα.

Σύμφωνα με το μύθο, ο Πυθαγόρας γεννήθηκε περίπου το 570 π.Χ. στο νησί της Σάμου στο Αιγαίο Πέλαγος, ακριβώς δίπλα στην ακτή της Μικράς Ασίας. Όχι μακριά από την ανατολή, στην παράκτια πόλη της Μιλήτου, έζησε ο διάσημος φιλόσοφος Θαλής, ο πρώτος της μακροχρόνιας πορείας των Ελλήνων μελετητών που θα διαμόρφωναν τον κόσμο της διανόησης για τα επόμενα χίλια έτη. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε – αν και δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι – ότι ο νεαρός Πυθαγόρας μελέτησε κάτω από το μεγάλο κύριο, ο οποίος του άναψε το πάθος για τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Έπειτα ο Πυθαγόρας ταξίδεψε στα σημαντικότερα κέντρα του πολιτισμού του αρχαίου κόσμου, μεταξύ των οποίων η Αίγυπτος και η Περσία, που απορροφούσαν όσο μπορούσαν ανθρώπους της λογοτεχνίας, της θρησκείας, της φιλοσοφίας και των μαθηματικών. Ό,τι έμαθε κατά τη διάρκεια της παραμονής του, άφησε στο νεαρό μελετητή μια βαθιά εντύπωση.

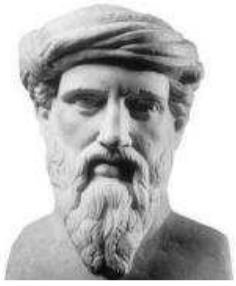
Όταν ο Πυθαγόρας επέστρεψε στο εγγενές νησί του, το βρήκε κάτω από τη σκληρή βασιλεία του κυβερνήτη Πολυκράτη, έτσι περίπου το 530 π.Χ. αποχώρησε από τη Σάμο και εγκαταστάθηκε στην ελληνική αποικία του Κρότωνα, στη νοτιοανατολική ακτή της σύγχρονης Ιταλίας. Εκεί αυτός ίδρυσε μία σχολή που επρόκειτο να ασκήσει τεράστια επιρροή στις επόμενες γενεές των μελετητών. Υπό την καθοδήγηση του κυρίου τους, οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν κάθε διανοητική επιστήμη. Ιδιαίτερα, τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά και την αστρονομία. Ο Πυθαγόρας

κοιτούσε τα μαθηματικά με πιο θεωρητικό τρόπο απ' ότι οι προηγούμενοι μαθηματικοί, τα έβλεπε *«αύλως και νοερώς»*. Για να αποκτήσει κάποιος ενιαία γνώση των μαθηματικών έπρεπε να μελετήσει γεωμετρία, αστρονομία, αρμονία (μουσική) και λογισμό (αριθμητική). Αλλά δικά τους ήταν πολύ περισσότερα από ακριβώς αυτήν τη σχολή, αυτοί διαμόρφωσαν μια αίρεση, μια αδελφοσύνη που δεσμεύθηκε από μια υποχρέωση υποταγής που ήταν αυστηρά επιβεβλημένη επάνω στα μέλη της (Νεγρεπόντης, 2005).

Η εισδοχή των νέων μαθητών στη σχολή του Πυθαγόρα. γινόταν μετά από αυστηρή και πολύχρονη άσκηση. Ο υποψήφιος έπρεπε να παραμένει σιωπηλός, να είναι εγκρατής, να έχει ισχυρό χαρακτήρα. Ταυτόχρονα ήταν απαραίτητο να συνδέεται με στενή φιλία με τους άλλους μαθητές. Ο Πυθαγόρας. υποστήριζε ότι *"φίλος εστίν άλλος εγώ"* και *"φιλίαν τ' είναι εναρμόνιον ισότητα"*. Διάφορα ρητά ήταν γραμμένα στις αίθουσες της σχολής, όπως *"επί χοίνικος μη καθίζειν"* (να μη φροντίζεις για το μέλλον), *"τας λεωφόρους μη βαδίζειν"* (να μην παρασύρεσαι από τη γνώμη του πλήθους, αλλά μόνο τη γνώμη των "επαϊόντων" να θεωρείς σεβαστή). Πριν από το βραδινό τους ύπνο, οι μαθητές έπρεπε να ελέγχουν όσα έγιναν ή δεν έγιναν κατά την ημέρα που πέρασε. Γενικά όμως η ηθική διδασκαλία των Πυθαγορείων περιέχεται μέσα σε 71 στίχους που είναι γνωστοί ως *"χρυσά έπη"* του Πυθαγόρα.

Οι Πυθαγόρειοι ορκίστηκαν να κρατήσουν όλες τις συζητήσεις τους μυστικές, ίσως για να αποφύγουν την περιφρόνηση από τους εχθρούς τους, οι οποίοι ήταν πολλοί. Ή ίσως αυτό το σύμφωνο κατέστησε ευκολότερο για αυτούς να μείνουν σε απόσταση από τις καθημερινές εργασίες που ήταν βασικό μέρος της μεγάλης πλειοψηφίας των συγχωριανών τους. Οποιοσδήποτε κι αν ήταν ο λόγος, η μυστικότητά τους είχε άτυχες ιστορικές συνέπειες. Απέτρεψε οποιεσδήποτε από τις συζητήσεις τους να φτάσουν σε ένα ευρύτερο ακροατήριο, τουλάχιστον αρχικά. Ό,τι ξέρουμε για τους Πυθαγορείους προέρχεται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από πιο πρόσφατες γενιές συγγραφέων, οι οποίοι προσπάθησαν συχνά να δοξάσουν ακόμα μία φορά το μεγάλο τους δάσκαλο.

Στη σπανιότητα των αρχικών πηγών προστέθηκε το γεγονός ότι οι Πυθαγόρειοι ακολούθησαν την ασιατική παράδοση προφορικής μετάδοσης της γνώσης. Τα υλικά γραψίματος ήταν λιγοστά. Ο αιγυπτιακός πάπυρος εισήχθη στην Ελλάδα γύρω στο 650 π.Χ. αλλά στα χρόνια του Πυθαγόρα ήταν ακόμα μικρός στον αριθμό. Η περγαμηνή δεν ήταν ακόμα γνωστή και οι πλάκες αργίλου ήταν μετά βίας ένα κατάλληλο μέσο στο οποίο θα μπορούσε κάποιος να γράψει μακροσκελείς φιλοσοφικές ομιλίες. Κατά συνέπεια, η γνώση πέρασε από τη μια γενιά στην επόμενη κυρίως προφορικά, αφήνοντας από λίγα έως καθόλου γραμμένα αρχεία. Επιπλέον, από σεβασμό στον ηγέτη τους, πολλές από τις ανακαλύψεις που γίνονταν από τους Πυθαγορείους αποδίδονταν στον Πυθαγόρα τον ίδιο, έτσι ο αληθινός τους εφευρέτης δε θα μπορέσει ποτέ να μαθευτεί.



Σχ. 10 Προτομή του Πυθαγόρα

2.2 Ο Πυθαγόρας και η μουσική

Η πρώτη σημαντική ανακάλυψη του Πυθαγόρα ήταν σε ένα απίθανο θέμα, την ακουστική. Όπως λέει μια ιστορία (Νεγρεπόντης, 2005), ενώ περπατούσε στο δρόμο μια ημέρα, άκουσε τον ήχο που προέρχονταν από το κατάστημα ενός σιδηρουργού. Σταματώντας για να ερευνήσει, ανακάλυψε ότι ο ήχος προέρχεται από τις δονήσεις των μεταλλικών φύλλων που χτυπιούνται από το σφυρί του σιδηρουργού. Παρατήρησε δε, ότι ο ήχος είχε σχέση με τον όγκο του σφυριού. Ο Πυθαγόρας πήρε τότε αντίγραφα των σφυριών για να τα μελετήσει σπίτι του. Πειραματίστηκε έπειτα με κουδούνια και ποτήρια γεμισμένα με νερό και βρήκε την ίδια γενική σχέση: *όσο πιο ογκώδης είναι ένα αντικείμενο, τόσο χαμηλότερος ο τόνος του ήχου του.*

Σχ.11 Ο Πυθαγόρας ανακαλύπτει τους νόμους της αρμονίας

Ο Πυθαγόρας, εντούτοις, δεν ήταν ικανοποιημένος με μια μόνο ποιοτική σχέση. Πήγε να ερευνήσει τις δονήσεις των σχοινιών και ανακάλυψε ότι ο τόνος του ήχου τους είναι αντιστρόφως ανάλογος προς το μήκος τους. Φανταστείτε δύο σχοινιά ίδιου υλικού και πάχους, κρατημένα κάτω από την ίδια ένταση, όπου το ένα σχοινί είναι διπλάσιο σε μήκος από το άλλο. Τότε το μικρότερο σχοινί θα δονηθεί δύο φορές στη συχνότητα του μεγαλύτερου. Βρήκε λοιπόν την αρμονία μέσα από σύριγγες αυλών συγκρίνοντας τις διαμέτρους ανάλογα με την ευρύτητα και τη μακρότητα. Σε μουσικούς όρους, οι δυο χορδές ηχούν μια οκτάβα χώρια. Ομοίως, μια αναλογία μήκους 3:2 αντιστοιχεί σε ένα διάστημα πέμπτης, μια αναλογία 4:3 σε ένα διάστημα τετάρτης κ.ο.κ. (τα ονόματα «οκτάβα» «πέμπτη» και «τετάρτη» προέρχονται από τη θέση αυτών των διαστημάτων στη μουσική κλίμακα). Αυτή ήταν μια σημαντική ανακάλυψη, η πρώτη φορά που ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφηκε με όρους μιας ακριβής ποσοτικής έκφρασης. Από μία άποψη, χαρακτήρισε την απαρχή της μαθηματικής φυσικής.

Η επόμενη ανακάλυψη του Πυθαγόρα απείχε μόνο ένα βήμα από αυτήν. Εάν τα δυο σχοινιά τα αφήσουμε να δονηθούν ταυτόχρονα, τότε παράγουν μια μουσική χορδή. Προς μεγάλη του τέρψη ο Πυθαγόρας διαπίστωσε ότι απλές αναλογίες των μηκών των σχοινιών παράγουν ευχάριστες χορδές ή συμφωνίες, με κυρίαρχο ρόλο μεταξύ τους να έχουν τα διαστήματα που προαναφέραμε: η οκτάβα, η πέμπτη και η τετάρτη, τα οποία ο Πυθαγόρας αποκάλεσε «τέλεια διαστήματα». Οι πιο περίπλοκες αναλογίες αντιστοιχούν σε λιγότερο ευχάριστες χορδές. Για παράδειγμα, η αναλογία 9:8 παράγει μια ευδιάκριτα ασύμφωνη χορδή. Ο Πυθαγόρας επομένως κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι αριθμητικές αναλογίες κυβερνούν τους νόμους της μουσικής

αρμονίας και κατ' επέκταση ολόκληρο τον κόσμο. Επρόκειτο να γίνει το αποτύπωμα των Πυθαγορείων, ο ακρογωνιαίος λίθος της παγκόσμιας εικόνας τους.

Σχ.12 Οι μουσικές αναλογίες

Για να καταλάβουμε αυτό το γιγαντιαίο άλμα της πίστης πρέπει, όπως επισημαίνει και ο Νεγρεπόντης (2005), να θυμηθούμε ότι στην Αρχαία Ελλάδα η μουσική ήταν ταξινομημένη σε ισάξια σημασία με την αριθμητική (ειδικότερα, την αριθμοθεωρία), τη γεωμετρία, και την αστρονομία. Πράγματι, αυτά τα τέσσερα αντικείμενα θα γίνονταν ο πυρήνας του προγράμματος σπουδών κάθε μορφωμένου προσώπου όπως αναμενόταν από το δάσκαλο. Και επειδή η μουσική τέθηκε σε μια ισάξια θέση με τα μαθηματικά, δε μας εκπλήσσει το ότι το κάθε ένα άσκησε βαθιά επιρροή στο άλλο (απλά σκεφτείτε το συχνό περιστατικό της λέξης «αρμονική» στα μαθηματικά – αρμονικός μέσος, αρμονική σειρά, και αρμονική συνάρτηση είναι μερικές από τις χρήσεις της). Έτσι, οι Πυθαγόρειοι διαλογίστηκαν πως εάν οι αριθμοί κυβερνούν τους νόμους της μουσικής αρμονίας, θα πρέπει επίσης να κυβερνούν και όλα τα άλλα στον κόσμο.

2.3 Οι Πυθαγόρειοι αριθμοί

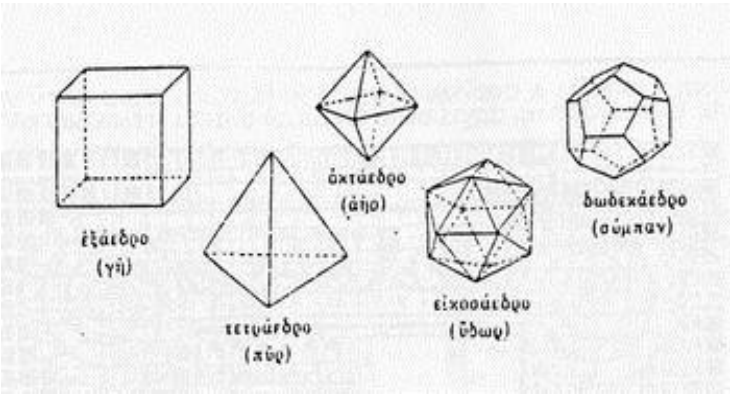
«Οι αριθμοί κυβερνούν τα πάντα.»

Πυθαγόρειο ρητό

Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία στηριζόταν στην υπόθεση ότι οι ακέραιοι αριθμοί είναι η αιτία των διάφορων ποιοτήτων του ανθρώπου και της ύλης. Με λίγα λόγια οι ακέραιοι αριθμοί ρυθμίζουν το σύμπαν και ποιοτικά και ποσοτικά. Αυτή η έννοια και η εξύψωση των ακέραιων αριθμών οδήγησε στη βαθιά μελέτη τους. Αποκαλύπτοντας τις εσωτερικές τους ιδιότητες, ίσως μπορούσαν σε κάποιο βαθμό να καθορίσουν ή να βελτιώσουν το πεπρωμένο τους. Έτσι, οι αριθμοί αλλά και η γεωμετρία, εξαιτίας της στενής σχέσης της μ' αυτούς, αποτελούσαν διαρκώς αντικείμενο μελέτης. (Αναπολιτάνος, 1985).

Η Πυθαγόρεια τοποθέτηση στο θέμα των αριθμών είχε διάφορες συνέπειες, κάποιες ευεργετικές για την πρόοδο της επιστήμης, κάποιες άλλες καταστροφικές. Από τη μια πλευρά, αυτό τους κέντρισε το ενδιαφέρον να μελετήσουν τις μαθηματικές ιδιότητες των αριθμών (να πούμε εδώ ότι μιλάμε για θετικούς ακέραιους αριθμούς) και κάνοντας κάτι τέτοιο φύτεψαν τους σπόρους για την ανάπτυξη της σύγχρονης θεωρίας αριθμών. Αλλά όπως κάθε ιδεοληψία όταν αυτή ακολουθείται φανατικά, οδήγησε σε παρεκκλίσεις. Η ασυμβίβαστη πίστη τους στην υπεροχή των αριθμών – είτε στη μουσική αρμονία είτε στο φυσικό κόσμο – τύφλωσε τους Πυθαγόρειους σε άλλες ιδέες, ότι ίσως έχουν τη δύναμη να εξηγήσουν καλύτερα τα έργα της φύσης.

Οι Πυθαγόρειοι διέκριναν ως βασικότερο όλων των μαθημάτων τους την Αριθμητική, εξαιτίας του ότι δεν υπάρχουν αιτήματα παρά μόνο ορισμοί. Γι' αυτό και τη θεωρούσαν μία επιστήμη τέλεια, καθαρή, μη αμφισβητήσιμη (Νεγρεπόντης, 2005). Υποστήριζαν ότι οι αρχές των μαθηματικών είναι και αρχές όλων των όντων, αρχές των πάντων. Ο Αναπολιτάνος (1985) αναφέρει ότι η Πυθαγόρεια μελέτη των αριθμών άρχισε σαν πνευματική αναζήτηση. Για τους Πυθαγόρειους, κάθε αριθμός έφερε μια συμβολική ταυτότητα. Ο 1 ήταν ο γεννήτορας όλων των αριθμών, επειδή κάθε αριθμός μπορεί να δημιουργηθεί από αυτόν από την επαναλαμβανόμενη προσθήκη. Συνεπώς, είχε μια ιδιαίτερη θέση και δε θεωρήθηκε αριθμός. Ο 2 και ο 3 αντιπροσώπευαν τους θηλυκούς και αρσενικούς χαρακτήρες, αντίστοιχα, και ο 5 την ένωσή τους. Πέντε ήταν επίσης ο αριθμός των κανονικών πολύεδρων, στερεά των οποίων οι όψεις τους είναι κανονικά πολύγωνα



Σχ. 13 Τα 5 Πλατωνικά στερεά

Τα σχήματα αυτά έχουν αποτελέσει αντικείμενο πολλών μελετών, ήδη από την αρχαιότητα, από γεωμετρική, μαθηματική, φιλοσοφική ή και μεταφυσική άποψη. Το τετράεδρο, με τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα, ο κύβος (έξι τετράγωνα), το οκτάεδρο (οκτώ τρίγωνα), το δωδεκάεδρο (δώδεκα πεντάγωνα), και το εικοσάεδρο (είκοσι τρίγωνα). Αυτά τα πέντε στερεά, σύμφωνα με τους Πυθαγορείους, αντιπροσώπευαν τα πέντε στοιχεία από τα οποία πιθανόν δημιουργήθηκε ο κόσμος: τετράεδρο - φωτιά, κύβος - γη, οκτάεδρο - αέρας, δωδεκάεδρο - σύμπαν και το εικοσάεδρο - νερό. Συνεπώς, ο πέντε απέκτησε κάτι σαν ιερή θέση, και υπό μορφή πεντάλφα έγινε το Πυθαγόρειο έμβλημα.

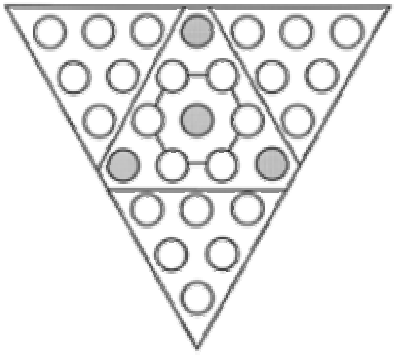
Ακόμα πιο ιερός από το πέντε ήταν ο έξι, ο πρώτος τέλειος αριθμός. Ένας αριθμός είναι τέλειος εάν γράφεται σαν το άθροισμα όλων των γνήσιων διαιρετών του (συμπεριλαμβανομένου του 1 αλλά αποκλειόμενου του ιδίου) (Van der Waerden, 2000). Οι γνήσιοι διαιρέτες του 6 είναι 1, 2, και 3, και έτσι 1+2+3=6, ο έξι είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός. Οι επόμενοι τρεις είναι

ο αριθμός 28 (=1+2+4+7+14),

ο αριθμός 496 (=1+2+4+8+16+31+62+124+248) και

ο αριθμός 8.128 (=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1.016+2.032+4.064).

Αυτοί οι τέσσερις ήταν οι μόνοι τέλειοι αριθμοί που ήταν γνωστοί στους Έλληνες. Ο πέμπτος, ο 33.550.336, ανακαλύφθηκε μόλις το 1456. Κατά την διάρκεια που γράφεται αυτή η εργασία, 43 τέλειοι αριθμοί είναι γνωστοί, και ακόμα δεν είναι γνωστό εάν αυτοί είναι οι μόνοι. Ούτε αν υπάρχει κάποιος περιττός τέλειος αριθμός, ούτε εάν το πλήθος των τέλειων αριθμών είναι πεπερασμένο ή άπειρο.



Σχ.14 Αναπαράσταση του αριθμού 28

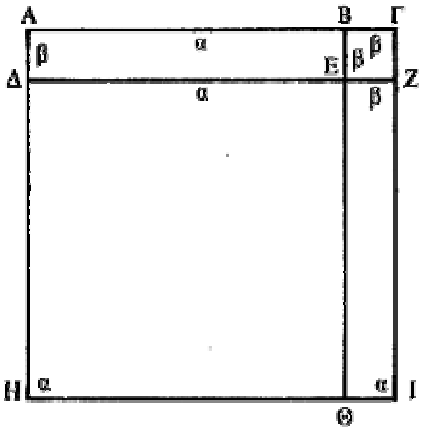
2.4 Η Γεωμετρία των αριθμών – Σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers)

Η γεωμετρία, όπως λέει ο Σωκράτης στην Πολιτεία του Πλάτωνα, αναγκάζει την ψυχή να αντικρίσει την ουσία των όντων. Έλκει την ψυχή προς την αλήθεια και αναπτύσσει το φιλοσοφικό εκείνο πνεύμα που εξυψώνει τα βλέμματά μας προς τα ανώτερα πράγματα. Ο Πρόκλος από τη μεριά του στο έργο του πάνω στην Πλατωνική θεολογία προσθέτει ότι ο πρώτος τρόπος αποκάλυψης των θείων αρχών, με τη βοήθεια συμβόλων, ανήκει στον Ορφέα και γενικά σε αυτούς που αποδίδουν με γραπτό τρόπο τους θείους μύθους. Ο δεύτερος τρόπος, με τη βοήθεια εικόνων, ανήκει στον Πυθαγόρα, διότι όπως λέει ο Πρόκλος *«η ανακάλυψη των μαθηματικών έγινε από τους Πυθαγόρειους με σκοπό την ανάμνηση των θείων αρχών που με τη βοήθειά τους επεδίωκαν να αναχθούν στις ανώτερες αιτίες. Γι' αυτό αφιέρωσαν στους θεούς αριθμούς και γεωμετρικά σχήματα»*.

Ο στοχασμός των Πυθαγορείων εκτείνεται και στα γεωμετρικά σχήματα. Μπορούμε να αναφέρουμε, για παράδειγμα, το τρίγωνο το οποίο οι Πυθαγόρειοι αποκαλούσαν «ιερό» και του οποίου οι ιδιότητες ήταν ήδη γνωστές χάρη στους Αιγυπτίους. Πρόκειται για το μόνο τρίγωνο του οποίου οι τιμές των πλευρών αποτελούν διαδοχή ακεραίων αριθμών, 3 και 4 για τις κάθετες πλευρές και 5 για την υποτείνουσα, και το οποίο διαθέτει κυρίως την πολύτιμη ιδιότητα να είναι ορθογώνιο εφόσον $3^2 + 4^2 = 5^2$. Η ιδιαιτερότητα αυτή παρέχει σ' έναν αρχιτέκτονα, εξοπλισμένο μ' ένα σκοινί, το οποίο φέρει 12 κόμπους σε ίση απόσταση μεταξύ τους, να χαράξει εύκολα στο έδαφος μια ορθή γωνία και άρα ένα, εγγραφόμενο σε ημικύκλιο, ορθογώνιο τρίγωνο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους Πυθαγορείους παρουσίαζαν οι σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers), αριθμοί που μπορούν να αντιπροσωπευθούν ως τελείες τακτοποιημένες σε ένα κανονικό σχέδιο. Ειδικότερα, ο Πυθαγόρας ανέπτυξε τη «σχηματική γεωμετρία». Έχτισε τις γεωμετρικές δομές από τα σημεία, από τις μικρές πέτρες. Με τη μέθοδο αυτή δινόταν πρωταρχική σημασία στη λειτουργία της όρασης, γιατί τα σχήματα ήταν τα πιο κατάλληλα για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και η μόνη αίσθηση που μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε ένα σχήμα ή έναν τύπο από ένα οποιοδήποτε αντικείμενο – έναν τύπο μάλιστα που είναι δυνατό να χρησιμοποιείται επανειλημμένα – είναι η όραση. Έτσι ο οπτικός τύπος οδηγεί στην αφαίρεση και εξυπηρετεί την ανάπτυξη των μαθηματικών σαν επιστήμη. Η πορεία, μάλιστα, της αφαίρεσης μπορεί να βαίνει συνεχώς σταδιακά, πράγμα που είναι φανερό αν σκεφτούμε πώς εξελίχθηκε ο αριθμός από το απλό σύμβολο που χρησιμοποιούταν για τη μέτρηση, ως τον ασύμμετρο, τον φανταστικό άπειρο αριθμό.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του αριθμού ήταν πολύ κατάλληλη για να ερευνηθούν οι σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους. Αυτό γίνεται κατανοητό αν αφήσουμε κατά μέρος όλον το συμβολισμό της άλγεβρας που χρησιμοποιούμε σήμερα και καταφύγουμε σε σχήματα. Δεν θα γράψουμε λ.χ. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ αλλά θα σχηματίσουμε ένα τετράγωνο ως έξης:



Σχ.15 Γεωμετρική απόδειξη της $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρόγονος της πρότυπης κατάστασης των ψηφιακών-αναλογικών δομών μας. Οι γραμμές, τα τετράγωνα, τα επίπεδα, οι κύβοι και οι τρισδιάστατες πολλαπλότητες είναι συνεχείς, καταγεγραμμένα ως «αναλογικά». Αλλά η αριθμητική είναι «ψηφιακή» ή ασυνεχής αποτελούμενη από «γνώμονες», ακριβώς όπως ο υπολογιστής αποτελείται από τα βασικά μικροσκοπικά σημεία των εικονοκυττάρων.

Ο Αναπολιτάνος (1985) αναφέρει ότι για να απεικονίσουν τους περιττούς αριθμούς οι Πυθαγόρειοι, ξεκινούσαν με τον αριθμό 1 που τον αναπαρίσταναν με ένα χαλίκι. Τοποθετούσαν ύστερα το γνώμονα, ο οποίος κάλυπτε τις δύο πλευρές του χώρου γύρω από το χαλίκι. Μετά τοποθετούσαν 3 χαλίκια. Ένα σε κάθε πλευρά του γνώμονα και ένα στην κορυφή, κ.ο.κ. Ανάλογη ήταν και η αναπαράσταση των άρτιων αριθμών, μόνο που ξεκινούσαν τοποθετώντας δύο χαλίκια. Θεωρήστε το άθροισμα των πέντε πρώτων ακέραιων αριθμών, 1+2+3+4+5. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτό το άθροισμα ως τελείες τακτοποιημένες σε μια κλίμακα :

•
••
•••
••••
•••••
$1+2+3+4+5$

Για να βρούμε το συνολικό αριθμό αυτών των τελείων, γεμίζουμε τα ελλείποντα διαστήματα ώστε να προκύψει ορθογώνιο

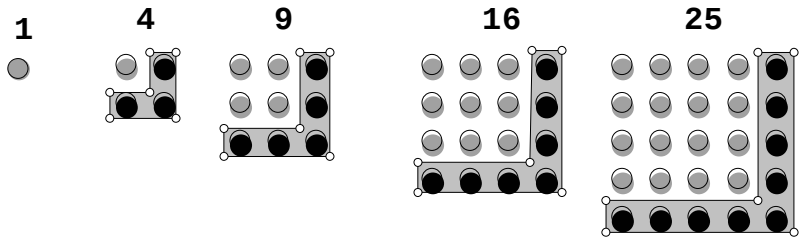
•×××××
••××××
•••×××
••••××
•••••×
$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}=15$

Αυτό το ορθογώνιο έχει $5 \cdot 6 = 30$ τελείες και επειδή αυτό είναι το διπλάσιο του αριθμού των μαύρων τελείων, το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με το μισό του 30, δηλαδή 15. Γενικεύοντας στους πρώτους n ακέραιους αριθμούς, παίρνουμε τον τύπο

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Ένα ακόμα πιο ενδιαφέρον μοντέλο περιλαμβάνει το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)$. Παρατηρούμε ότι $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, κ.ο.κ. Ανεξάρτητα από το πόσους περιττούς ακέραιους αριθμούς προσθέτουμε, το άθροισμά τους είναι πάντα ένα τέλειο τετράγωνο: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = n^2$.

Αυτό καθίσταται σαφές από το παρακάτω σχέδιο με τις τελείες:

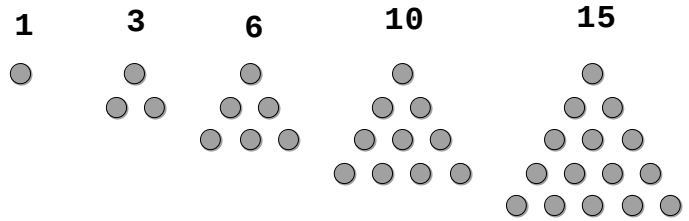


Σχ.16 Τετράγωνοι αριθμοί

Για τους αριθμούς 4, 9, 16, 25… χρησιμοποιούμε τη λέξη «τετράγωνα», επειδή ο Πυθαγόρας τους «έχτισε» ως τετράγωνα των σημείων. Μας δίδαξε τη λέξη «κύβος», για τους αριθμούς 1, 8, 27, 64, 125… από την τρισδιάστατη δομή που μπορεί να χτιστεί από τα βασικά στοιχεία. Παρατηρούμε, όπως διαπιστώνει ο Νεγρεπόντης (2005), ότι κάθε τετράγωνος σχηματίζεται από τον προηγούμενο αν προσθέσουμε τον λεγόμενο γνώμονα, δηλαδή μια μπάντα από αριθμούς όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η λέξη γνώμονας είναι στη γεωμετρία ένα «αλφάδι», ένα εργαλείο με το οποίο κατασκευάζει κανείς μια ορθή γωνία. Είναι εκείνο το εργαλείο, όπως έλεγε και ο Ήρωνας, με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε σχήματα ή αριθμούς όμοιους με κάποιους άλλους. Έτσι στο παραπάνω σχήμα, αν στο 1 προσθέσω το γνώμονα των τριών πετυχαίνω το τέσσερα, αν στο τέσσερα προσθέσω το γνώμονα των 5, τότε έχω το 9 κ.ο.κ. Αμέσως τώρα, από τα παραπάνω, προκύπτει η γνωστή πρόταση: $1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)=n^2$ και αυτό γιατί: $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$ κ.ο.κ .

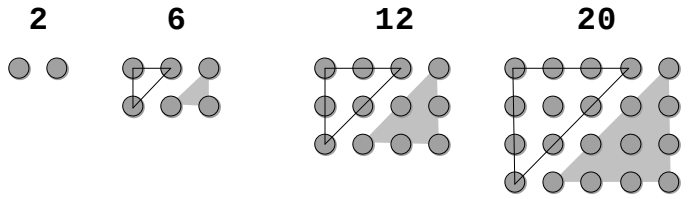
Ας δούμε μερικά παραδείγματα ακόμα:

- Οι τριγωνικοί αριθμοί με πλευρά ν, είναι της μορφής:



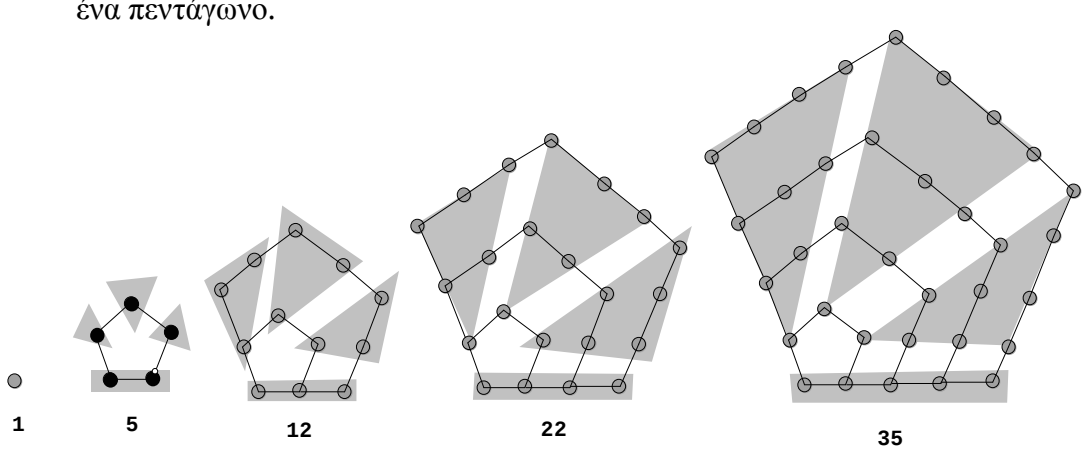
και έχουν τη γενική μορφή: $T_\nu=1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

- Οι ετερομήκεις αριθμοί με πλευρά ν, είναι της μορφής:



Παρατηρούμε ότι κάθε ορθογώνιο διαιρείται σε δύο τρίγωνα. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι κάθε ετερομήκης αριθμός περιέχει δύο τρίγωνους αριθμούς.

- Οι πεντάγωνοι αριθμοί με πλευρά ν, είναι αυτοί που σχηματίζουν ένα πεντάγωνο.



Παρατηρεί κανείς στο παραπάνω σχήμα τριγωνικούς αριθμούς και έτσι μπορεί να συμπεράνει τη μορφή που θα έχουν οι πεντάγωνοι αριθμοί στη γενική τους περίπτωση.

Κατασκευάζοντας τους τετραγωνικούς (1,4,9,16,…) και τους τριγωνικούς αριθμούς (1,3,6,10,…) σαν επέκταση σημειοσειρών, οι Πυθαγόρειοι και οι διάδοχοί τους προσπάθησαν να κάνουν το ίδιο πράγμα με τα πεντάγωνα, κ.λπ. Αυτό όμως δεν επιλύεται αρκετά τακτοποιημένα, δεδομένου ότι τα σημεία δεν μπορούν να διαμορφώσουν ένα ισοδιάστατο, κανονικό δικτυωτό πλέγμα. Τις θαυμάσιες ιδιότητες αυτών των αριθμών μπορεί να τις διαβάσει κάποιος στο κείμενο του Νικόμαχου (Van

der Waerden, 2000). Προκύπτουν από τα αθροίσματα των όρων απλών αριθμητικών προόδων, όπως π.χ.

$1+2+3+.....+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (τρίγωνος αριθμός)

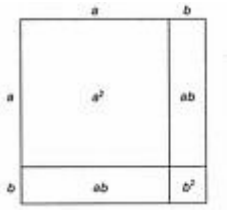
$1+2+3+.....+(2n-1)=n^2$ (τετράγωνος αριθμός)

$2+4+6+.....+2n=n(n+1)$ (ορθογώνιος αριθμός)

$1+4+7+.....+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$ (πεντάγωνος αριθμός)

Κατά συνέπεια ο συνολικός αριθμός σημείων σε έναν πολυγωνικό αριθμό είναι το ποσό μιας πεπερασμένης αριθμητικής προόδου, και κατά αυτόν τον τρόπο οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν σε μερικούς από τους τύπους αθροίσματος που αντιμετωπίζουμε σήμερα στα βιβλία υπολογισμού ως παραδείγματα των λειτουργιών των οποίων τα ποσά Riemann μπορούν να αξιολογηθούν ακριβώς, ή σε άλλα εγχειρίδια ως παραδείγματα των αποδείξεων της μαθηματικής επαγωγής. Ο Van der Waerden (2000) λέει ότι τα διαγράμματα των πενταγωνικών και εξαγωνικών αριθμών στον Allen (σελ. 16) και στον Heath μπορεί να μοιάζουν με 3-διάστατα αντικείμενα (πυραμίδες ή χριστουγεννιάτικα δέντρα), αλλά δεν προορίζονται υπό αυτήν τη μορφή. Οι μετέπειτα των Πυθαγορείων Έλληνες (Νικόμαχος, γ.100 ΑΔ), εντούτοις, συνέδεσαν τους αριθμούς με 3-διάστατες μορφές, ειδικότερα με κύβους και πυραμίδες (πάρτε ένα σημείο, προσθέστε ένα τρίγωνο 3-σημείων, έπειτα ένα τρίγωνο 6-σημείων, κ.ο.κ. ομοίως για την ακολουθία ν-γωνων αριθμών για οποιοδήποτε ν). Αυτό το παιχνίδι επέκτεινε περαιτέρω τη συλλογή της πεπερασμένης σειράς, της οποίας ποσά ήταν γνωστά.

Τέτοιες έρευνες οδήγησαν τους Πυθαγορείους να αναπτύξουν ένα είδος πρωτόγονης άλγεβρας, βασισμένη στην αμοιβαία σχέση διάφορων σχημάτων. Παραδείγματος χάριν, ο πασίγνωστος τύπος $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ αποδεικνύεται γεωμετρικά με την εξέταση ενός τετραγώνου πλευράς $a+b$ όπως διακρίνεται παρακάτω.



Μπορούμε να διαμερίσουμε αυτό το τετράγωνο σε δύο μικρότερα τετράγωνα εμβαδών a^2 και b^2 και σε δύο ορθογώνια εμβαδών $a\cdot b$ και $b\cdot a$. Αλλά τα δύο ορθογώνια είναι ισοδύναμα, έτσι τα εμβαδά τους είναι ίσα. Κατά συνέπεια το συνολικό εμβαδόν των διαμερισμένων κομματιών είναι $a^2+2ab+b^2$, και αυτό είναι ίσο με το αρχικό εμβαδόν $(a+b)^2$. Άλλοι τύποι, όπως $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ή $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ μπορούν να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο. Αυτό το είδος της γεωμετρικής άλγεβρας ήταν ένας πρόδρομος στη δική μας σύγχρονη συμβολική άλγεβρα.

2.5 Πυθαγόρειες τριάδες

Και έπειτα υπήρξαν οι Πυθαγόρειες τριάδες. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, αυτοί είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί (a,b,c) τέτοιοι ώστε $a^2+b^2=c^2$. Οι Πυθαγόρειοι ήταν φυσικά πρόθυμοι να ανακαλύψουν ορθογώνια τρίγωνα και με τις τρεις πλευρές τους να είναι ακέραιοι αριθμοί, αλλά σύντομα συνειδητοποίησαν ότι αυτό ήταν ευκολότερο να το λες παρά να το κάνεις. Κάποιος μπορεί αυθαίρετα να επιλέξει δύο πλευρές με ακέραιο μήκος, αλλά η τρίτη πλευρά πιθανότατα να μην είναι ένας ακέραιος αριθμός. Στις σπάνιες περιπτώσεις, εντούτοις, όπως στις Πυθαγόρειες τριάδες, όταν πράγματι τους έβρισκαν, η απόλαυση της κοινότητας ήταν μεγάλη. Ο μύθος λέει ότι γιόρταζαν αυτές τις περιπτώσεις με μια γιορτή στην οποία θυσίαζαν εκατό βόδια, αν και κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα αμφισβητήσιμο, δεσμευμένοι από τον ασκητικό κώδικα δεοντολογίας τους, όπου οι Πυθαγόρειοι απεχθάνονταν τη σφαγή των ζώων (Maor, 2007).

Ως προς τον τρόπο με τον οποίο οι Πυθαγόρειοι βρήκαν αυτά τα τρίγωνα, δεν έχουμε καμία άμεση απόδειξη. Ο Νεγρεπόντης (2005) υποστηρίζει ότι σύμφωνα με μια θεωρία, χρησιμοποίησαν τον τύπο $\left(n^2\right)^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$ (1) δείχνοντας ότι οι αριθμοί n^2, $\frac{n^2-1}{2}$ και $\frac{n^2+1}{2}$ διαμορφώνουν μια Πυθαγόρεια τριάδα (στην πράξη, μια πρωτεύουσα τριάδα) για κάθε περιττή τιμή του n. Παραδείγματος χάριν, για n=3 παίρνουμε την τριάδα (3, 4, 5), την πρώτη ζωογονική τριάδα. Για n=5 , την τριάδα (5, 12, 13), κ.ο.κ.

Είναι εύκολο, φυσικά, να αποδειχθεί η εξίσωση (1) χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη άλγεβρα, αλλά οι Έλληνες δεν το έκαναν έτσι. Κατά πάσα πιθανότητα χρησιμοποίησαν μια γεωμετρική απόδειξη βασισμένη στην ακόλουθη παρατήρηση (δες το παραπάνω σχήμα). Φανταστείτε μια σειρά από m^2 τελείες διατεταγμένες σε m σειρές και m στήλες. Έξω από αυτήν την σειρά (του τετράγωνου) μπορούμε να τοποθετήσουμε $2m+1$ πρόσθετες τελείες. (m τελείες κατά μήκος των δύο παρακείμενων πλευρών και μία τελεία στη γωνία), καταλήγοντας σε ένα επεκταμένο τετράγωνο από $(m+1)^2$ τελείες. Παραδείγματος χάριν, εάν $m=4$, τότε $2m+1=9$, έτσι από μία διάταξη των $4^2=16$ τελείων πήραμε μια νέα διάταξη των $5^2=16+9=25$ τελείων. Έτσι φτάνουμε στον τύπο $m^2+(2m+1)=(m+1)^2$, (2) τον οποίο αναγνωρίζουμε από τη στοιχειώδη άλγεβρα. Υποθέτουμε τώρα ότι ο $2m+1$ είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Έστω λοιπόν ότι $2m+1=n^2$. Τότε η εξίσωση (2) θα γίνει $m^2+n^2=(m+1)^2$, παράγοντας την Πυθαγόρεια τριάδα $(m,n,m+1)$. Λύνοντας την εξίσωση $2m+1=n^2$ παίρνουμε $m=\frac{n^2-1}{2}$. Έτσι η εξίσωση (2) γίνεται $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2+n^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)$ που είναι η εξίσωση (1).

Ο Πρόκλος επίσης στα σχόλιά του κάνει μία ενδιαφέρουσα αναφορά στον Πλάτωνα, στην «Πολιτεία» 546C και περιγράφει τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βρούμε Πυθαγόρειες τριάδες αριθμών. Αναφέρει δύο μεθόδους, μία του Πυθαγόρα και μία του Πλάτωνα. Οι Πυθαγόρειοι λοιπόν μας κληροδότησαν τη σχέση $\left(n^2\right)^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$ που αποδίδεται προσωπικά στον Πυθαγόρα ενώ ο δε

μυημένος στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία, Πλάτωνας, μας παρέδωσε τη σχέση $m^2 + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{m^2}{4} + 1\right)^2$ (Νεγρεπόντης, 2005).

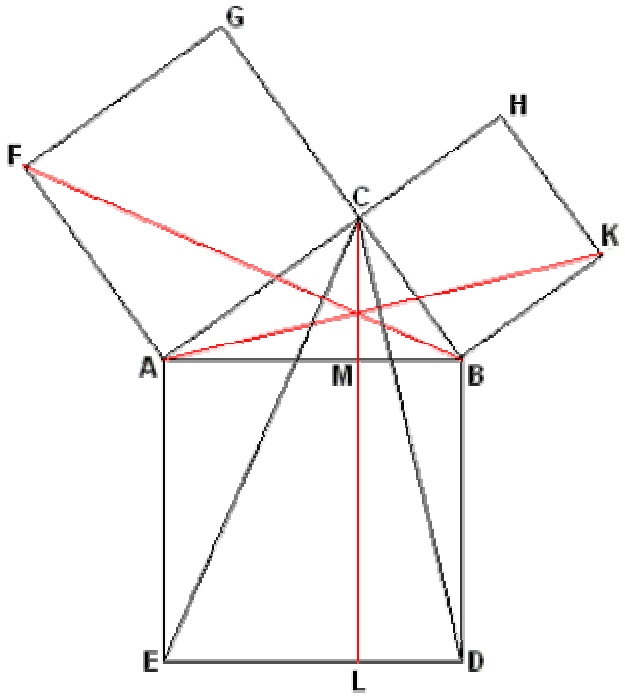
2.6 Πυθαγόρειο Θεώρημα – Άρρητοι αριθμοί

Αλλά το σημαντικότερο με αυτές τις ανακαλύψεις ήταν ότι ωχριούν σε σύγκριση με δύο γεγονότα που είχαν βαθιές επιπτώσεις στη μελλοντική εξέλιξη των μαθηματικών, την απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, και την ανακάλυψη ενός νέου είδους αριθμού που δεν μπορεί να γραφτεί ως αναλογία δύο ακέραιων αριθμών, του άρρητου αριθμού. Ούτε η απόδειξη ούτε οι λεπτομέρειες της ανακάλυψης δεν έχουν επιζήσει, έτσι το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να στηριχτούμε στις γραφές από τους μετέπειτα συγγραφείς και να προσθέσουμε τα δικά μας σχόλια (Νεγρεπόντης, 2005).

Όταν ο Ευκλείδης έγραψε τα στοιχεία του γύρω στο 300 π.Χ., έδωσε δύο αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η μία είναι η πρόταση 47 του βιβλίου Ι των Στοιχείων, που στηρίζεται εξ' ολοκλήρου σε σχέσεις εμβαδών που είναι αρκετά περίπλοκες. Η άλλη είναι η πρόταση 31 του βιβλίου VI, που βασίζεται στην έννοια της αναλογίας και είναι πολύ απλούστερη (Νεγρεπόντης, 2005).

<u>Πρόταση Ι.47</u>

«Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο που αναγράφεται από την πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία, είναι ίσο προς τα τετράγωνα που αναγράφονται από τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου.»



Ισχυρισμός

Έστω τρίγωνο ABC με ορθή τη $B\hat{C}A$.

Ισχυρίζομαι ότι το τετράγωνο πλευράς AB είναι ίσο με (το άθροισμα) τα τετράγωνα πλευρών BC και CA.

Κατασκευή

Γράφουμε τετράγωνο πλευράς AB, έστω $ABDE$, και στις BC, CA τα $BCHK$ και $ACGF$. Φέρουμε από το A παράλληλη στις AE, BD, έστω τμήμα CL. Φέρουμε επίσης τις CE και BF.

Απόδειξη

Αφού οι γωνίες ACB και ACG είναι ορθές, οι BC και CG είναι εφεξής με άθροισμα γωνιών δύο ορθές. Άρα οι BC, CG βρίσκονται έπ' ευθείας. Για τον ίδιο λόγο βρίσκονται έπ' ευθείας και οι AC, CH. Ακόμα, οι $E\hat{A}B$ και $F\hat{A}C$ είναι ίσες ως ορθές. Άρα, προστιθέμενη και στις δύο, η $C\hat{A}B$ δίνει ότι η $E\hat{A}C$ είναι ίση με την $F\hat{A}B$. Επίσης η EA είναι ίση με την AB και η FA με την AC. Άρα το τρίγωνο CAE είναι ίσο με το FAB. Ακόμα, το $AMLE$ παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του ACE τριγώνου γιατί έχουν την ίδια βάση και είναι μεταξύ των ίδιων παραλλήλων AE, CL. Το $AFGC$ τετράγωνο είναι διπλάσιο του τριγώνου FAB γιατί πάλι έχουν την ίδια βάση AF και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων AF, GB. Αφού διπλάσια ίσων είναι ίσα έπεται ότι το $AMLE$ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το τετράγωνο $AFGC$. Όμοια, αν φέρουμε τις CD και AK δείχνουμε ότι το $BMLD$ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το τετράγωνο $BCHK$. Και είναι τότε το $ABDE$ με πλευρά την AB ίσο με τα $ACGF$ και $BCKH$ με πλευρές AC, BC. Άρα το τετράγωνο πλευράς AB είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων με πλευρές AC, BC.

Συμπέρασμα

Δηλαδή στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία, ***όπερ έδει δείξαι***.

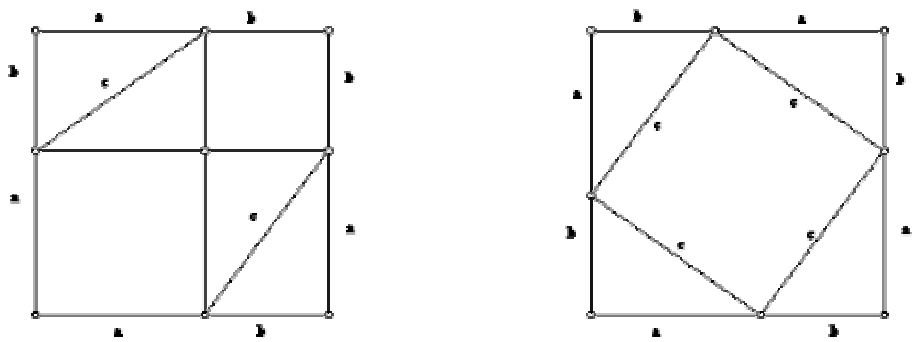
Όπως αναφέρει ο Πρόκλος (426.6-426.9), η πρόταση I.47 ανάγεται στους Πυθαγόρειους. *«των μεν ιστορείν τα αρχαία βουλωμένων ακούοντας το θεώρημα τούτο εις Πυθαγόραν αναπεμπόντων εστίν ευρείν και βουθύτην λεγόντων αυτόν επί τη ευρέσει»*. Ήταν αυτές αποδείξεις του ίδιου του Πυθαγόρα; Βεβαίως ο ίδιος ο Πυθαγόρας δε θα μπορούσε να έχει χρησιμοποιήσει την I.47, όπως ισχυρίζεται ο Νεγρεπόντης (2005), γιατί πολύ απλά η γεωμετρία δεν ήταν τόσο προηγμένη στα χρόνια του. Μπορεί να είχε χρησιμοποιήσει την VI.31, αλλά σε αυτή την περίπτωση, η απόδειξή του ήταν ανεπαρκής, επειδή η πλήρης θεωρία των αναλογιών αναπτύχθηκε από τον Εύδοξο, ο οποίος έζησε σχεδόν δύο αιώνες μετά από τον Πυθαγόρα.

Η απόδειξη που συναντάει κανείς στα Στοιχεία του Ευκλείδη φαίνεται πως είναι αρκετά διαφορετική από την αρχική. Σύμφωνα με τα σχόλια του Πρόκλου, η απόδειξη αυτή είναι εναργέστερη. Ο Νεγρεπόντης (2005) ισχυρίζεται πως στην παραπάνω απόδειξη υπάρχει ένα κενό. Για να δικαιολογηθεί το γεγονός πως το τετράγωνο $ABDE$ είναι ίσο με το άθροισμα των $ACGF$ και $BCKH$ πρέπει να είναι γνωστή η πρόταση II.2. Αυτή είναι μία ένδειξη πως το Πυθαγόρειο Θεώρημα πρέπει να βρίσκεται στο δεύτερο βιβλίο. Κι αυτό γιατί οι οχτώ πρώτες προτάσεις του δευτέρου βιβλίου σχετίζονται με το γνώμονα, χωρίς όμως να χρησιμοποιείται πουθενά το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ενώ χρησιμοποιείται στις προτάσεις II.9 – II.14.

Είναι λοιπόν πολύ πιθανόν το Πυθαγόρειο Θεώρημα να βρίσκεται μεταξύ της πρότασης ΙΙ.8 και ΙΙ.9. Η υποψία αυτή γίνεται ακόμα πιο ισχυρή αφού το Θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί βάσει των προτάσεων ΙΙ.7 και ΙΙ.8. Επίσης το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπάρχει σε πολύ καλύτερη μορφή στις προτάσεις ΙΙ.12 και ΙΙ.13 (η γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.). Όλα λοιπόν τείνουν προς ένα στόχο, την παραβολή χωρίων.

Απ' την άλλη πλευρά, υπάρχει κάποιος λόγος να θεωρηθεί ότι ο Πυθαγόρας απέδειξε πρώτα την ειδική περίπτωση ενός ορθογώνιου ισοσκελούς τριγώνου, δηλαδή ένα τρίγωνο 45-90-45 μοιρών. Αυτή η απόδειξη ήταν ήδη γνωστή στους Ινδούς, και ο Πυθαγόρας μπορεί να το είχε ακούσει κατά τη διάρκεια των ταξιδιών του γύρω από τη Μεσόγειο. Μπορούμε άλλωστε να την ανασύρουμε και από τον «Μένων» στον Πλάτωνα, όπου ο Σωκράτης βοηθάει ένα δούλο να *θυμηθεί* τη γνώση του. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Σε τετράγωνο ABCD ενώνουμε τα μέσα των διαδοχικών καθώς επίσης και των απέναντι πλευρών. Το εσωτερικό τετράγωνο KLMN τεμαχίζεται σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα 45-45-90-μοιρών. Οποιαδήποτε δύο από αυτά έχουν μια συνδυασμένη περιοχή ίση με αυτήν ενός τετραγώνου πλευράς MC ή NC του τριγώνου MCN, έτσι το συνολικό εμβαδόν του τετραγώνου KLMN είναι ίσο με το εμβαδόν των τετραγώνων που δημιουργούνται στις δύο πλευρές. Η άποψη αυτή υποστηρίζεται και από τον Bretschneider (Heath, 1956).

Απέδειξε όμως ο Πυθαγόρας τη γενική περίπτωση; Δεν έχουμε κανένα άμεσο στοιχείο, αλλά είναι δύσκολο να θεωρηθεί ότι, καταδεικνύοντας την ειδική περίπτωση, δεν έχει προχωρήσει να καθιερώσει το γενικό θεώρημα επίσης. Η παράδοση αποδίδει σε αυτόν μια απόδειξη που ήταν γνωστή ήδη στους Κινέζους. Με την κλίση του εσωτερικού τετραγώνου από τη θέση των 45 μοιρών, παίρνουμε το διαμορφωμένο σχήμα που παρουσιάζεται παρακάτω

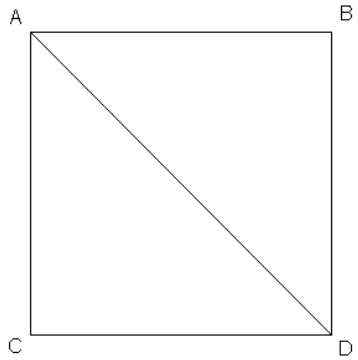


Το αρχικό τετράγωνο τεμαχίζεται τώρα σε ένα εσωτερικό τετράγωνο και τέσσερα ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα.. Με την εκ νέου ανακατανομή από τα ορθογώνια τρίγωνα στο σχήμα, βλέπουμε ότι η υπολειπόμενη περιοχή είναι το άθροισμα των εμβαδών των άλλων δύο τετραγώνων, δηλαδή τα τετράγωνα που γίνονται με πλευρές αυτές των ορθογωνίων τριγώνων.

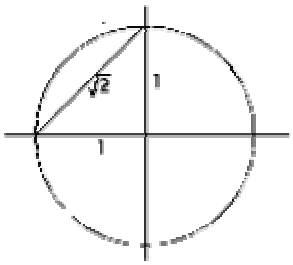
Δε θα μάθουμε ποτέ εάν αυτή ήταν η απόδειξη του Πυθαγόρα που είχε χρησιμοποιήσει πραγματικά. Ο βαθμός στον οποίον οι μελετητές είναι αβέβαιοι ως προς το είδος της απόδειξής που ο Πυθαγόρας είχε χρησιμοποιήσει προσεγγίζεται από διαφορετικές απόψεις. Ο Maor (2007) αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Eves «είναι γενικά αποδεκτό ότι πιθανώς ήταν ένας τύπος γενικής απόδειξης». Ο Heath (1956, σελ.355), από την άλλη μεριά, είναι της άποψης ότι «είναι δύσκολο να υποτεθεί ότι ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε μια γενική απόδειξη αυτού του είδους». Ο Heath

εντούτοις δεν αποκλείει τη δυνατότητα ότι ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε μια τέτοια απόδειξη στην περίπτωση των τριγώνων με ρητά μήκη πλευρών. Σε κάθε περίπτωση, η απόδειξη ανακοίνωσε μια θεμελιώδη αλλαγή στον τρόπο που σκεφτόμαστε για τα μαθηματικά. Δε θα μπορούσε πλέον κάποιος που απλά ανακαλύπτει μια νέα σχέση μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων να μην την αποδείξει με κάποια λογικά και συνεπή επιχειρήματα. Αυτή η αλλαγή χαρακτήρισε τη μετάβαση από την εμπειρική φύση των προ-ελληνικών μαθηματικών στη παραγωγική αξιωματική θεμελίωση που επικρατεί μέχρι και σήμερα.

Το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οδήγησε τους Πυθαγορείους στο ακόλουθο πρόβλημα: λαμβάνοντας υπόψη ένα τετράγωνο ABCD πλευράς ίσης με μια μονάδα, βρείτε το μήκος της διαγωνίου του AD.



Υποθέτοντας αυτό το μήκος ως d και χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, έτσι (σε σύγχρονες σημειώσεις) $d = \sqrt{2}$. Αλλά τι είδους αριθμός είναι ο $\sqrt{2}$; Μια απλή γεωμετρική κατασκευή, που χρησιμοποιεί κανόνα και διαβήτη δείχνει ότι η τιμή $\sqrt{2}$ είναι κάπου μεταξύ του 1 και του 2, έτσι αυτό πρέπει να είναι ένα μέρος – μια αναλογία δύο ακέραιων αριθμών.



Ανεξάρτητα από το πόσο σκληρά οι Πυθαγόρειοι προσπάθησαν να βρουν αυτήν την αναλογία, απέτυχαν. Πολλές αναλογίες ήρθαν κοντά, αλλά καμία δεν ήταν ακριβώς ίση με $\sqrt{2}$. Εξ' ου και το όνομα άρρητος, σημαίνοντας «όχι ρητός» (υπό τη μαθηματική έννοια). Σημειώστε, εντούτοις, τη διπλή έννοια της λέξης: σημαίνει επίσης «μη κυβερνημένος από το λόγο» που δείχνει ακριβώς πώς αντέδρασαν οι Έλληνες όταν ανακάλυψαν ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι μια αναλογία ακέραιων αριθμών.

Οι ακριβείς περιστάσεις αυτής της ανακάλυψης, όπως όλες οι άλλες που έγιναν από τους Πυθαγόρειους, περιπλέκονται από μυστήριο. Δεν ξέρουμε εάν ήταν ο Πυθαγόρας ο ίδιος ή ένας από τους μαθητές του που πρέπει να πάρουν την πίστωση, ούτε ξέρουμε ποια απόδειξη χρησιμοποίησαν. Σε κάθε περίπτωση, η ανακάλυψη αυτή τους προκάλεσε σύγχυση (Νεγρεπόντης, 2005). Υπήρξε μια γεωμετρική ποσότητα – η διαγώνιος ενός τετραγώνου – της οποίας το μήκος δεν μπόρεσε να εκφραστεί ως αναλογία δύο ακέραιων αριθμών. Αυτό αμέσως κατέστρεψε την πίστη τους στην υπεροχή των ρητών αριθμών, και είχε βαθύ αντίκτυπο. Μην ξέροντας πώς να

εξετάσουν αυτό το νέο είδος μεγέθους, οι Πυθαγόρειοι αρνήθηκαν να το θεωρήσουν ως αριθμό, στην πραγματικότητα αντιμετώπισαν τη διαγώνιο ενός τετραγώνου ως μη μετρήσιμη ποσότητα. Κατά συνέπεια δημιουργήθηκε ένα χάσμα μεταξύ της γεωμετρίας και της αριθμητικής και κατ' επέκταση μεταξύ της γεωμετρίας και της άλγεβρας. Αυτή η ρωγμή θα ενέμενε για τα επόμενα δύο χιλιάδες χρόνια και θα γινόταν ένα σημαντικό εμπόδιο στην περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών. Ήταν μόλις τον δέκατο έβδομο αιώνα, όπου με την εφεύρεση της αναλυτικής γεωμετρίας από τον Καρτέσιο, το χάσμα τελικώς γεφυρώθηκε.

Σύμφωνα με το μύθο, οι Πυθαγόρειοι ταρακουνήθηκαν τόσο πολύ από την ανακάλυψη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος που ορκίστηκαν να το κρατήσουν ως ένα φρουρούμενο μυστικό επειδή φοβήθηκαν ότι ίσως είχε τη δύναμη να φέρει δυσμενή αποτελέσματα στο λαό. Αλλά ένας από αυτούς, ο Ίππασος, αποφάσισε να αποκαλύψει την ανακάλυψη στον κόσμο. Εξοργισμένοι από αυτήν την παραβίαση της πίστης, οι σύντροφοί του τον πέταξαν από μια βάρκα ενώ αυτή έπλεε, και το σώμα του από αυτήν την ημέρα ξεκουράζεται στο κατώτατο σημείο της Μεσογείου (Νεγρεπόντης, 2005).

Η Πυθαγόρεια κληρονομιά διήρκεσε για τα καλά πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια, και σε μερικούς ο βαθμός επιρροής της συνεχίζεται ακόμα και σήμερα. Η Πυθαγόρεια αντίληψη με το συμβολισμό των αριθμών και το μυστικισμό των αριθμών επηρέασε αμέτρητους συγγραφείς, καλλιτέχνες και φιλόσοφους. Οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και της μουσικής, που πρώτα ανακαλύφθηκαν από τον Πυθαγόρα, είχαν τον αντίκτυπο τους στην Αναγέννηση στην Ευρώπη, όπου οι καθεδρικοί ναοί ήταν σχεδιασμένοι σύμφωνα με τις μουσικές αναλογίες 2:1, 3:2, και 4:3. Μία απεικόνιση από ένα βιβλίο που δημοσιεύτηκε το 1617 παρουσιάζει το χέρι του Θεού που συντονίζει ένα γιγάντιο μονόχορδο, ένα σχοινί που τεντώνεται κατά μήκος ενός πίνακα που ηχεί, επάνω στο οποίο οι πλανητικές τροχιές επιβάλλονται πέρα από τα διαστήματα της μουσικής κλίμακας. Η φράση «η μουσική των σφαιρών» έγινε μια έμπνευση για πολλούς επιστήμονες της Αναγέννησης. Ένας από τους τελευταίους Πυθαγορείους ήταν ο αστρονόμος Johannes Kepler (1570-1631). Ένας επιστήμονας της υψηλότερης βαθμίδας και αδιάλλακτος αποκρυφιστής, ο Kepler ξόδεψε – μερικοί θα έλεγαν ότι έχασε – τα καλύτερα τριάντα χρόνια της ζωής του επιδιώκοντας να ανακαλύψει τους νόμους της κίνησης των πλανητών της μουσικής αρμονίας. Ο Kepler πίστεψε ότι κάθε πλανήτης παίζει έναν ορισμένο τόνο σύμφωνα με την απόστασή του από τον ήλιο, όσο κοντινότερος είναι ο πλανήτης στον ήλιο, τόσο υψηλότερες οι νότες του. Ακόμα, ο Kepler ήταν εκείνος που στηρίχτηκε στις παλιές ελληνικές κυκλικές τροχιές, αντικαθιστώντας τις από τις ελλειπτικές και με αυτόν τον τρόπο έθεσε την αστρονομία στη σύγχρονη σειρά μαθημάτων.

Τα φαντάσματα της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας χρονοτριβούν ακόμη και σήμερα. Αμέσως μετά τη δεσποτική διατύπωση του Einstein της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, η ιδέα ότι η απλότητα και η συμμετρία διαδραματίζουν έναν ρόλο στους νόμους της φύσης κέρδισε έδαφος για ακόμα μια φορά. Ο φυσικός Paul A.M. Dirac (1902-1984) στο άρθρο του *“The Evolution of the Physicist’s Picture of Nature,”Scientific American (1963)* έβαλε τον δικό του τόνο με τη διάσημη παροιμία, *«είναι σημαντικότερο να υπάρχει ομορφιά στις εξισώσεις κάποιου απ' το να είναι ταιριαστή στο πείραμα»*. Αυτή τη στιγμή, διάφοροι διακεκριμένοι θεωρητικοί αφιερώνουν τις σταδιοδρομίες τους σε ένα εσωτερικό θέμα αποκαλούμενο θεωρία χορδών, η οποία ισχυρίζεται να εξηγήσει τα πάντα στον κόσμο - από το μεγάλο κτύπημα (Big Bang) μέχρι τις εσωτερικές ενέργειες των υποατομικών μορίων - με όρους των χορδών που δονούνται μέσα στον ενδεκαδιάστατο χώρο. Δονούμενες χορδές; Ο Πυθαγόρας θα ήταν ευχαριστημένος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Θεωρητική Πλαισίωση
της
Ενσωμάτωσης

«Τα προβλήματα της μάθησης
είναι προβλήματα της ψυχολογίας
και για να βελτιώσουμε
τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών
πρέπει να μάθουμε πολύ περισσότερα πράγματα
για το πώς μαθαίνονται τα μαθηματικά.»

Skemp

3.1 Εισαγωγή

Η γνωσιακή επιστήμη στέκεται στο σταυροδρόμι όπου συναντώνται οι φυσικές και οι ανθρώπινες επιστήμες. Το ένα της πρόσωπο είναι να γυρίσει προς την ανθρώπινη φύση και να εξετάσει τη συμπεριφορά των γνωστικών λειτουργιών. Το άλλο είναι να στραφεί προς τον ανθρώπινο κόσμο και ν' αντιμετωπίσει τη γνώση ως εμπειρία (Varela, Thompson & Rosch, 1999, σελ.13). Στην καθημερινή μας εμπειρία άλλωστε είναι συχνά βασισμένη και η μαθηματική γνώση (Lakoff & Nunez, 2000, σελ.29).

Έχουν αναπτυχθεί πολλές απόψεις που εστιάζουν στην κοινωνική φύση της γνώσης και χαρακτηρίζονται ως «ενταγμένες σε πλαίσιο» (situated) (Nunez, Edwards & Matos,1999). Αυτές εξετάζουν τις διαδικασίες αλληλεπίδρασης ως βασικές και εξηγούν τις μεμονωμένες γνωστικές λειτουργίες σε σχέση με τη συνεισφορά τους στα αλληλεπιδραστικά συστήματα (Greeno, 1997). Οι Lave & Wegner (1991, σελ.33) επισημαίνουν ότι ο μεσολαβητής, η δραστηριότητα και ο κόσμος συγκροτούν αμοιβαία ο ένας τον άλλον.

Σύμφωνα με τους Nunez et al.(1999) αυτές οι προσεγγίσεις έχουν δώσει πολλά σημαντικά αποτελέσματα και έχουν βοηθήσει στο να προχωρήσει η ανάλυση της μάθησης πέρα από μια στενή εστίαση στις μεμονωμένες και «εσωτερικές» γνωστικές διαδικασίες. Μία προσέγγιση της γνωσιακής επιστήμης που αναπτύχθηκε τα τελευταία χρόνια υποστηρίζει ότι η γνώση είναι πλήρως αναπαραστασιακή (Varela et al., σελ. 9). Πίσω από αυτήν την αντίληψη βρίσκονται τρεις υποθέσεις. Ότι:

- Κατοικούμε σε έναν κόσμο με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως μήκος, χρώμα, κίνηση, ήχος κ.ο.κ.

- Συλλέγουμε ή ανακαλύπτουμε τα χαρακτηριστικά δίνοντάς τους κάποιες αναπαραστάσεις με μια εσωτερική διεργασία.
- Υπάρχει ένα ιδιαίτερο υποκειμενικό *«εμείς»* που δημιουργεί όλα αυτά.

Αυτές οι τρεις υποθέσεις ισοδυναμούν με μία ισχυρή (και συχνά σιωπηρή) δήλωση για το πώς αντιλαμβανόμαστε τον τρόπο που έχει δημιουργηθεί ο κόσμος, τι είμαστε εμείς και πώς εμείς θα κατανοήσουμε τον κόσμο αυτόν.

Ποια είναι η επίδραση του περιβάλλοντος και της βιολογικής δομής του σώματος γενικά, και του εγκεφάλου ειδικά, στη μαθηματική γνώση? Με το θέμα αυτό ασχολούνται ερευνητές από διαφορετικούς επιστημονικούς χώρους, όπως είναι ο χώρος της γνωστικής ψυχολογίας και γενικότερα της γνωσιακής επιστήμης, της νευροφυσιολογίας, της γλωσσολογίας, των μαθηματικών και ειδικότερα της διδακτικής των μαθηματικών κ.α.

Πριν αναφερθούμε λοιπόν στα ενσώματα μαθηματικά (embodied mathematics) οφείλουμε να μιλήσουμε για τη φιλοσοφική και θεωρητική υπόθεση που βρίσκεται πίσω από αυτά.

3.2 Γνωσιακή επιστήμη (cognitive science) και ενσωμάτωση (embodiment).

Η ψυχολογία είναι μια εμπειρική επιστήμη που χρησιμοποιεί την παρατήρηση και κυρίως το πείραμα, για να αναπτύξει θεωρίες για τη συμπεριφορά και τις νοητικές διεργασίες, κυρίως του ανθρώπου. Η ψυχολογία αρχίζει ως μία μελέτη της συνειδητής εμπειρίας μέσω της πειραματικής μεθόδου της ενδοσκόπησης (Βοσνιάδου, 2002). Πολλοί ήταν αυτοί που προσπάθησαν να βγάλουν μαθηματικά συμπεράσματα μέσω αυτής. Οι Lakoff και Nunez (2000, εισαγωγή, σελ.xiii) λένε πως «μια τόσο πολύτιμη μέθοδος όπως μπορεί να είναι αυτή, μπορεί στην καλύτερη περίπτωση να μας περιγράψει μερικώς και όχι πλήρως μια ιστορία.»

Όπως αναφέρει η Βοσνιάδου (2005), ο Bruner και οι συνεργάτες, όταν δημοσίευσαν το βιβλίο με τίτλο *A Study of Thinking (1956)*, παρουσίασαν τα αποτελέσματα των ερευνών τους σχετικά με τις στρατηγικές διαδικασίες επεξεργασίας πληροφοριών που ακολουθούν τα άτομα. Το μοντέλο αυτό ανέπτυξε κι ο Broadbent (1958), στο οποίο οι πληροφορίες που έρχονται στο γνωστικό σύστημα από τα αισθητήρια όργανα περνούν σε μια βραχύχρονη αποθήκευση όπου και φιλτράρονται επιλεκτικά, πριν ενταχθούν σε ένα περιορισμένης χωρητικότητας αντιληπτό σύστημα. Κάπως έτσι, επισημαίνει η Βοσνιάδου (2005) ότι, ξεκίνησε η γνωστική ψυχολογία, υιοθετώντας την άποψη ότι η σκέψη μπορεί να θεωρηθεί ως μία λογική διαδικασία πάνω σε συμβολικές αναπαραστάσεις.

Η γνωστική ψυχολογία, λοιπόν, αναπτύχθηκε κυρίως ως η πειραματική μελέτη των νοητικών διαδικασιών (αντίληψη, προσοχή, μνήμη, σκέψη, γλώσσα, μάθηση) που προετοιμάζουν τον άνθρωπο να συμπεριφερθεί με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Έτσι, σύμφωνα με τη Βοσνιάδου (2002) «η βασική θέση της γνωστικής ψυχολογίας είναι ότι δεν μπορούμε να εξηγήσουμε την ανθρώπινη συμπεριφορά μόνο με αναφορά σε εξωτερικά ερεθίσματα αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε και τις εσωτερικές νοητικές διεργασίες». Η μελέτη των γνωστικών διαδικασιών έχει εμπλουτιστεί μέσα στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης, η οποία βασίζεται στην ιδέα

- Ότι ο νους είναι ένα σύστημα το οποίο επεξεργάζεται σύμβολα, και
- Ότι είναι δυνατόν να έχουμε μία υπολογιστική θεωρία του νου.

Όπως αναφέρει ο Gardner (1985, σελ. 6), στη δεκαετία του 1970 οι ερευνητές της παραδοσιακής γνωστικής ψυχολογίας υποστήριζαν ότι για την εξήγηση της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας, ήταν απαραίτητο (και επαρκές) να «προϋποτεθεί ένα επίπεδο ανάλυσης εντελώς ξεχωριστό από το βιολογικό ή το νευρολογικό, αφ' ενός, και από το κοινωνιολογικό ή πολιτιστικό, αφ' ετέρου». Αυτή η σχολή της γνωσιακής επιστήμης πρέσβευε τον Καρτεσιανό δυϊσμό ο οποίος υποστηρίζει ότι ο νους είναι μια αφηρημένη οντότητα, ξεχωριστή από το σώμα και υπερέχουσα του σώματος. Ο συλλογισμός (συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής σκέψης) είναι επίσης ασώματος, άχρονος, και καθολικός. Οι έννοιες, που είναι τα προϊόντα του συλλογισμού, είναι κι αυτές αφηρημένες και δεν περιορίζονται από τις φυσικές ή σωματικές πραγματικότητες. Η Βοσνιάδου (2005) λέει ότι αυτή η άποψη της γνωστικής λειτουργίας κατέστη κυρίαρχη στις απαρχές της γνωστικής ψυχολογίας (Sanford, 1985; Eysenk & Keane, 1992). Υπό τη συγκεκριμένη άποψη κάποιος θα υποστήριζε, λόγου χάρη, ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι αληθές και έγκυρο σε οποιοδήποτε σύμπαν, ανεξάρτητα από την ύπαρξη των ανθρώπινων όντων.

Οι Nunez et al. (1999) τονίζουν ότι τη δεκαετία του 1980 εμφανίστηκε μέσα στη γνωσιακή επιστήμη ένα πλήθος εναλλακτικών απόψεων, που προέρχονταν από διαφορετικές επιστήμες. Το πρόσφατο θεωρητικό πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας και της γνωσιακής επιστήμης είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς σημαντικών ανακαλύψεων σε πολλούς επιστημονικούς τομείς, όπως νευροεπιστήμες, γλωσσολογία, μαθηματικά, φιλοσοφία, πληροφορική κ.α. Όλες αυτές οι επιστήμες είχαν την κοινή δέσμευση να διερευνήσουν τη γνωστική λειτουργία ως ένα φυσικό ενσώματο φαινόμενο το οποίο πραγματοποιείται μέσα από μια διαδικασία που εμπλέκει τον οργανισμό..

Πλέον, σύμφωνα με το Nunez (2000), η γνωσιακή επιστήμη έχει αρνηθεί ρητά τη διάσπαση μυαλού-σώματος (δυϊσμός). Θεωρεί ότι για τις ενσώματες προσανατολισμένες προσεγγίσεις οποιαδήποτε θεωρία του μυαλού πρέπει να λάβει υπόψη τις ιδιαιτερότητες των εγκεφάλων, τους οργανισμούς, και το περιβάλλον στο οποίο υπάρχουν. Με τη βοήθεια λοιπόν της νευρολογίας και μιας αληθινά εμπειρικής γνωστικής γλωσσολογίας, η γνωσιακή επιστήμη έχει ξεπεράσει τις a priori φιλοσοφικές αρχές της. Μια νέα κατανόηση του μυαλού έχει προκύψει, εμπειρικά βασισμένη και απελευθερωμένη από τα ιστορικά και φιλοσοφικά κατάλοιπα. Έτσι λοιπόν, κατά τη νέα άποψη, η σκέψη είναι κατά ένα μεγάλο μέρος ***ασυνείδητη***, ***ενσώματη*** και ***μεταφορική***, όπου οι ιδιαίτερες δομές των εννοιών απεικονίζουν τις ιδιαιτερότητες των οργανισμών μας, της διαπροσωπικής ζωής μας και των εμπειριών μας.

Οι Johnson & Rohrer (2006) αναφέρουν ότι στη σύγχρονη γνωσιακή επιστήμη ο όρος "ενσωμάτωση" (embodiment) χρησιμοποιείται με πλήθος διαφορετικών τρόπων. Αυτές οι ποικίλες χρήσεις αντανακλούν, κατά περιόδους, θεμελιώδεις θεωρητικές διαφορές. Η σημασία της ενσωμάτωσης στη γνώση εκτιμάται τώρα ευρέως από τους γνωστικούς επιστήμονες, όμως ακόμα γίνεται ιδιαίτερη συζήτηση ως προς το τι ο όρος *«ενσωμάτωση»* σημαίνει πραγματικά (Rohrer 2001a; Ziemke 2003; Anderson 2003).

Οι Lakoff & Nunez (2000) λένε ότι, για μερικούς η "ενσωμάτωση" αναφέρεται στις φαινομενολογικές απόψεις της ανθρώπινης σωματικής εμπειρίας (Merleau - Ponty, 1945, DiSessa, 1983) και τις προκύπτουσες ψυχολογικές εκδηλώσεις (Rosch, 1994). Ορισμένοι τονίζουν τις ασυνείδητες απόψεις της σωματικής εμπειρίας που αποτελούν τη βάση της γνωστικής δραστηριότητας και της γλωσσικής έκφρασης (Johnson, 1987, Lakoff, 1987). Άλλοι δίνουν έμφαση στο βιολογικό-δομικό συμπροσδιορισμό, που υφίσταται μεταξύ των οργανισμών και του

μέσου στο οποίο αυτοί υπάρχουν, από τον οποίο προκύπτει η γνωστική λειτουργία ως ενεργητική (enactive) διαδικασία (Maturana & Varela, 1987).

Όλοι αυτοί οι μελετητές έχουν κοινή εστίαση στη στενή σχέση μεταξύ της γνωστικής λειτουργίας του νου και της ζώσης σωματικής εμπειρίας στον κόσμο. Δηλαδή, στους τρόπους με τους οποίους η συμπεριφορά προκύπτει από τη φυσική εμπειρία σε βιολογικά συστήματα. Η ενσωμάτωση παρέχει βαθιά κατανόηση του τι είναι οι ανθρώπινες ιδέες, και πώς είναι οργανωμένες σε μεγάλα (κυρίως ασυνείδητα) εννοιολογικά συστήματα θεμελιωμένα στη φυσική, βιωμένη πραγματικότητα. (Nunez et al., 1999).

Αυτό λοιπόν που κάνει η γνωσιακή επιστήμη είναι να μελετά τον τρόπο που οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται και καταλαβαίνουν τα μαθηματικά, τον τρόπο που αναπαριστούν τα μαθηματικά στο μυαλό τους, τον τρόπο που μπορούν να τα μάθουν, τον τρόπο που συμβαίνουν νέες ανακαλύψεις. Η γνωσιακή επιστήμη είναι αυτή που στοχεύει στο να ξεκαθαρίσει πώς είναι δυνατόν να σκεφτόμαστε με ένα μη-σχηματικό τρόπο.

3.3 Η γνωσιακή επιστήμη στη μελέτη εκμάθησης των μαθηματικών.

Οι Varela et al. (1999) λένε ότι, σε μία προσπάθεια ν' αναζητηθεί η προέλευση και η φύση της μαθηματικής γνώσης αναπτύχθηκε, στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης, η θεωρία της ενσώματης γνώσης (embodied cognition). Σύμφωνα με την ενσώματη γνώση, οι ανθρώπινες έννοιες και η ανθρώπινη λογική δομούνται σύμφωνα με τη φύση του σώματος, του μυαλού και του τρόπου λειτουργίας μέσα στον κόσμο. Στις παραπάνω έννοιες συμπεριλαμβάνονται και οι μαθηματικές έννοιες και η μαθηματική λογική. Επέκταση της ενσώματης γνώσης μπορούν να θεωρηθούν τα ενσώματα μαθηματικά (embodied mathematics).

Για να προσεγγιστεί η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών μέσα από την οπτική της γνωσιακής επιστήμης πρέπει να βρεθούν:

- Ποιες είναι οι μαθηματικές ιδέες που σχετίζονται με τη γνωστική ψυχολογία,
- Ποια γνωστική διαδικασία χρησιμοποιούν τα μαθηματικά,
- Ποιες είναι οι μαθηματικές ιδέες που μπορούμε να αντλήσουμε από την εμπειρία μας, όπως επίσης και
- Ποιος είναι εκείνος ο γνωστικός μηχανισμός που ενισχύει την ικανότητα να παράγουμε νέες μαθηματικές ιδέες.

Κι αυτό, γιατί όπως αναφέρουν οι Lakoff & Nunez (2000) τα ανθρώπινα μαθηματικά (το μόνο είδος των μαθηματικών που γνωρίζουν οι άνθρωποι) δεν μπορούν να είναι υποσύνολα μιας αφηρημένης, υπερβατικής μαθηματικής ιδέας. Άντ' αυτού, φαίνεται ότι τα μαθηματικά, όπως τα ξέρουμε, αναδύονται από τη φύση των εγκεφάλων μας και από τη σωματική μας εμπειρία. Η μαθηματική επιστήμη επίσης είναι κατά κάποιο τρόπο υπέρτατη και ζωντανή, ενσωματώνει οτιδήποτε έχουν ανακαλύψει και έχουν αποδείξει οι άνθρωποι (σύμφωνα με τις μαθηματικές αποδείξεις).

> *«Τα μαθηματικά έτσι όπως τα γνωρίζουμε είναι τ΄ ανθρώπινα μαθηματικά, το προϊόν του ανθρώπινου μυαλού. Από πού προέρχονται τα μαθηματικά? Από εμάς. Εμείς τα δημιουργούμε αλλά όχι αυθαίρετα, ούτε απλά ιστορικά ως μία τυχαία κοινωνική κατασκευή. Αυτό που κάνει τα μαθηματικά να μην είναι αυθαίρετα είναι ότι χρησιμοποιούν το*

βασικό εννοιολογικό μηχανισμό του ενσώματου ανθρώπινου μυαλού όπως αυτό έχει εξελιχθεί μέσα στον πραγματικό κόσμο. Τα μαθηματικά είναι προϊόν των νευρολογικών ικανοτήτων του εγκεφάλου μας, της φύσης του σώματός μας, της εξέλιξής μας, του περιβάλλοντός μας και της μακρόχρονης κοινωνικής και πολιτισμικής μας ιστορίας.» (Lakoff & Nunez, 2000, σελ.9)

Ο Benett (2008) λέει ότι πολλοί είναι αυτοί που θεωρούν ότι συχνά ο εγκέφαλος οπτικοποιείται σαν ένας υπολογιστής και το σώμα ως εργαλείο για κάθε χρήση του. Σύμφωνα όμως με τον Bennett (2008), νέες έρευνες προτείνουν ότι πρόκειται για κάτι πιο συνεργάσιμο, ότι δηλαδή σκεφτόμαστε όχι μόνο με τους εγκεφάλους μας αλλά και με τα σώματά μας. Αναφέρεται επίσης και στα λόγια του Gallagher (διευθυντή του τομέα της γνωσιακής επιστήμης στο πανεπιστήμιο της Φλώριδας), σύμφωνα με τον οποίον: *«Κατά την ενσώματη άποψη, εάν πρόκειται να εξηγήσουμε τη γνώση δεν είναι αρκετό να κοιτάξουμε ακριβώς μέσα στον εγκέφαλο. Σε οποιαδήποτε ιδιαίτερη περίπτωση, ότι συμβαίνει μέσα στον εγκέφαλο κατά ένα μεγάλο μέρος μπορεί να εξαρτηθεί από το τι συμβαίνει στο σώμα συνολικά, και από το πώς το σώμα είναι τοποθετημένο στο περιβάλλον του.»*

Η θεωρία της ενσώματης γνώσης προτείνει ότι η πηγή πολλών ιδεών, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών, βρίσκεται στην κοινή φυσική εμπειρία των ανθρώπινων όντων. Οι ιδέες αυτές στηρίζονται στους καθημερινούς γνωστικούς και σωματικούς μηχανισμούς, επομένως κάνουν τα μαθηματικά ανθρώπινα, όχι μια πλατωνική και υπερβατική οντότητα. Όπως λέει και το ρητό στο *University of Wisconsin's Laboratory of Embodied Cognition* **“ago ergo cogito”**, δηλαδή **«ενεργώ, άρα σκέφτομαι»**.

Μια τέτοια θεωρία πρέπει να επισύρει την προσοχή στις πρωταρχικές αντιλήψεις και στους μηχανισμούς, που δεν είναι μοναδικοί στη μαθηματική σκέψη. Ο Pfeifer (διευθυντής του τομέα τεχνητής νοημοσύνης στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης) υποστηρίζει ότι *«εάν ενδιαφερόμαστε για την κατανόηση της πραγματικής νοημοσύνης πρέπει να εξετάσουμε το σώμα»* (Benett, 2008).

Ο Nunez (2000) επισημαίνει ότι μεταξύ των νέων ιδεών που διαποτίζουν τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών και αλλάζουν την οπτική μας σε σχέση με την κατανόηση των μαθηματικών, είναι:

- **Η ενσωμάτωση του νου (the embodiment of mind)**. Η συγκεκριμένη φύση των οργανισμών μας, των εγκεφάλων μας και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο κτίζουν τις ανθρώπινες έννοιες και τον ανθρώπινο λόγο. Συνεπώς και τις μαθηματικές έννοιες και τη μαθηματική λογική.
- **Το γνωστικό ασυνείδητο (the cognitive unconscious).** Η μαθηματική σκέψη υπάρχει και λειτουργεί ασυνείδητα, χωρίς να έχουμε πρόσβαση στην άμεση ενδοσκόπηση. Δεν μπορούμε δηλαδή μέσω της ενδοσκόπησης να εξετάσουμε άμεσα τα εννοιολογικά μας συστήματα και τις χαμηλού επιπέδου γνωστικές διαδικασίες μας. Αυτό περιλαμβάνει περισσότερη μαθηματική σκέψη.
- **Η μεταφορική σκέψη (metaphorical thought)**. Οι αφηρημένες έννοιες συνήθως γίνονται αντιληπτές με διακριτούς όρους που βασίζονται στο αισθητικό-κινητικό σύστημα. Ο γνωστικός μηχανισμός από τον οποίον η αφηρημένη έννοια κατανοείται

καλύτερα καλείται εννοιολογική μεταφορά. Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε συχνά εννοιολογικές μεταφορές. Για παράδειγμα, αντιστοιχούμε τους αριθμούς με σημεία πάνω σε μια ευθεία.

3.4 Ο ρόλος της Γνωσιακής Νευροεπιστήμης (Cognitive Neuroscience).

Η Βοσνιάδου (2005) διαπιστώνει πως τα τελευταία χρόνια, διάφορες επαναστάσεις στο χώρο της γνωσιακής επιστήμης (όπως η ανάπτυξη του συνδετισμού) και στο χώρο της νευροεπιστήμης (όπως η ανάπτυξη μεθόδων απεικόνισης του εγκεφάλου) αλλάζουν τη σύλληψη της σχέσης ανάμεσα στην ψυχολογία και τη βιολογία και δημιουργούν σημαντικές γέφυρες ανάμεσα στις δύο επιστήμες. Μία από αυτές είναι και η γνωσιακή νευροεπιστήμη (Kandel, Schwartz & Jessel 1995,1997). Όπως λένε συγκεκριμένα στο βιβλίο τους Essentials of Neural Science and Behavior (1995)[4], *«η γνωσιακή ή γνωστική νευροεπιστήμη, αποτελεί μια προσπάθεια να δημιουργηθεί μια σύγχρονη επιστήμη του νου με το συγκερασμό της γνωστικής ψυχολογίας και της νευροεπιστήμης»*.

Ο Κολιάδης (2003) λέει λοιπόν ότι ένας από τους επιμέρους κλάδους της γνωσιακής επιστήμης είναι η γνωσιακή νευροεπιστήμη (cognitive neuroscience), η οποία προσπαθεί να ερμηνεύσει τις γνωστικές λειτουργίες του ανθρώπου με βάση τη νευροφυσιολογική οργάνωση και λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου και του νευρικού συστήματος. Βασίζεται στην αποδοχή της θέσης ότι η κυτταρική προσέγγιση δεν είναι από μόνη της επαρκής για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας του εγκεφάλου. Αν θέλουμε να κατανοήσουμε σύνθετα συστήματα αντίληψης θα πρέπει να κατανοήσουμε όχι μόνο τις ιδιότητες των κυττάρων αλλά και τη συνδεσμολογία τους.

Η Βοσνιάδου (2005) αναφέρει ότι ο κύριος στόχος της γνωσιακής νευροεπιστήμης, σύμφωνα με τους Kandel et al. (1995/1999), είναι η μελέτη των εσωτερικών αναπαραστάσεων των νοητικών γεγονότων. Αναπαραστάσεις οι οποίες μπορούν να τροποποιηθούν με την εμπειρία και οι οποίες μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Τέτοιες αναπαραστάσεις δημιουργεί το άτομο κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης μιας γνωστικής δραστηριότητας, όπως π.χ. όταν καταπιάνεται με την επίλυση κάποιου προβλήματος. Έτσι, οι ερευνητές ψυχολόγοι απομακρύνονται από το συμπεριφορικό πρότυπο ερμηνείας των ψυχολογικών φαινομένων. Το ενδιαφέρον τους πλέον στρέφεται στη διερεύνηση των εσωτερικών διεργασιών του ατόμου, που διεξάγονται μέσα στον ανθρώπινο νου.

Η Edwards (1998) αναφέρει πως μέσα από την οπτική των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών, διαφαίνεται η διάθεση της διασύνδεσης της έννοιας της ενσωμάτωσης με την έννοια της αναπαράστασης. Δηλαδή, τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων που να παρέχουν κατάλληλες αναπαραστάσεις που θα λαμβάνουν υπόψη τον τρόπο που ενσωματώνεται η μαθηματική έννοια που θέλουμε κάθε φορά να μελετήσουμε.

Η Manno (2006) επισημαίνει ότι για να μάθουμε καλύτερα το ανθρώπινο μυαλό βοηθούμαστε από τη γνωσιακή επιστήμη και τη νευροφυσιολογία. Το μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας του εγκεφάλου εθίζεται στη θέα, στην κίνηση, στο χωρικό συντονισμό, στη διαπροσωπική αλληλεπίδραση, στη γλώσσα, στη σκέψη. Οι ανθρώπινες έννοιες και η γλώσσα δεν είναι αυθαίρετες, αλλά δομημένες και

[4] Ελληνική μετάφραση με τίτλο Νευροεπιστήμη και Συμπεριφορά,1997, σελ.338

περιορισμένες από τον εγκέφαλο, το σώμα και τον κόσμο. Τα μαθηματικά λοιπόν είναι ένα προϊόν της νευρικής ικανότητας του εγκεφάλου, των οργανισμών μας, της εξέλιξής μας, της συμπεριφοράς μας, της πολιτιστικής και κοινωνικής ιστορίας μας.

Οι Lakoff & Nunez (2000, σελ.4) λένε *ότι «οι μόνες μαθηματικές ιδέες που μπορούν να έχουν οι άνθρωποι είναι αυτές που επιτρέπονται να έχουν από τον ανθρώπινο εγκέφαλο»*. Πολύ παλαιότερα βέβαια, ο φιλόσοφος Dewey είχε πει ότι *«για να δούμε τον οργανισμό μέσα στη φύση, το νευρικό σύστημα μέσα στον οργανισμό, και τον εγκέφαλο μέσα στο νευρικό σύστημα, ο φλοιός μέσα στον εγκέφαλο είναι η απάντηση στα προβλήματα που στοιχειώνουν τη φιλοσοφία»*. Η ορθολογιστική ικανότητά μας λοιπόν προκύπτει από την ενσώματη φύση μας. Οι άνθρωποι λαμβάνουν τις έννοιες των μαθηματικών χάρη στο μυαλό, το σώμα και τον εγκέφαλο. Και τα τρία αυτά όργανα δημιουργούν ιδέες που είναι φυσικά δομημένες στο νευρικό σύστημα. Αυτή είναι και η φύση των μαθηματικών που έχουμε στόχο να μελετήσουμε.

Όπως είδαμε μέσω αυτής της συνοπτικής περιγραφής της σύγχρονης επιστημονικής τάσης και της πορείας που αυτή ακολούθησε προκειμένου να καταλήξει εδώ που είναι σήμερα, παύει πια να υφίσταται αυτός ο δυϊσμός του ανθρώπου. Πλέον, ο άνθρωπος δε χωρίζεται σε *'νου'* και *'σώμα'*, αλλά μελετάται ολικά. Η μελέτη τόσο της φυσιολογίας όσο και της ψυχολογίας του ανθρώπου, αποσκοπεί στην κατανόηση της σφαιρικής λειτουργικότητάς του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Η ενσωμάτωση
και
η ανάλυση
των εννοιολογικών δομών

«Ακόμα και οι πιο αφηρημένοι στόχοι
θα γίνονταν μη αισθητικοί
εάν αποσυνδέονταν
από το έδαφός τους
στην ανθρώπινη ενσωμάτωση.»

Albert Einstein

4.1 Εισαγωγή

Οι Nunez et al. (1999) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση της σκέψης, που εμπλέκεται όταν κάνουμε κι όταν μαθαίνουμε μαθηματικά, αποτελεί σημαντικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει ευρέως αποδεκτό ότι η μάθηση και η εφαρμογή των μαθηματικών δεν είναι καθαρώς διανοητικές δραστηριότητες, απομονωμένες από κοινωνικούς, πολιτιστικούς, και γενικού πλαισίου παράγοντες (Lave, 1988; Collins, 1989; Cobb, 1994; Confrey, 1995). Άντ' αυτού, έχει αναγνωριστεί ότι η μάθηση και η διδασκαλία πραγματοποιούνται, και πάντα πραγματοποιούνταν, μέσω της ένταξης σε κοινωνικά πλαίσια που όχι μόνο επηρεάζουν, αλλά ουσιαστικά καθορίζουν τα είδη γνώσης και εφαρμογής που κατασκευάζονται (Lave & Wenger, 1991; Rogoff, 1990; Walkerdine, 1982).

Κι όμως, οι Nunez et al. (1999) θα υποστήρίζαν ότι η φύση της ενταγμένης σε πλαίσιο μάθησης και γνωστικής λειτουργίας δεν μπορεί να κατανοηθεί πλήρως με την εξέταση μόνο των παραγόντων γενικού πλαισίου ή των κοινωνικών παραγόντων. Η σκέψη και η μάθηση είναι επίσης ένθετες σε βιολογικά και εμπειρικά πλαίσια που έχουν διαμορφώσει, μ' έναν μη αυθαίρετο τρόπο, τους χαρακτηριστικούς τρόπους που κατανοούμε τον κόσμο. Οι Changeux & Connes (1995) αναφέρουν ότι *«στον ανθρώπινο εγκέφαλο η σκέψη οικοδομείται ταυτόχρονα με τον ίδιο τον εγκέφαλο, τις συνάψεις των νευρώνων και σε άμεση αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του»*.

Τι θα μπορούσε να ειπωθεί για τη φύση της γεωμετρικής σκέψης, η οποία έχει άμεση επιρροή στη διδασκαλία των μαθηματικών; Είναι προϊόν εργασίας του κόσμου των πλατωνικών αντικειμένων ή περιλαμβάνεται σε ένα ευρύτερο φάσμα συλλογικών ενεργειών;

4.2 Η θεωρία των Ενσώματων Μαθηματικών

Τα τελευταία χρόνια έχει αναγνωριστεί από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα, τη γνωστική ψυχολογία, τη νευροβιολογία, τη γλωσσολογία και άλλες επιστήμες πως η εκμάθηση των μαθηματικών, όπως επίσης και η πρακτική ενασχόληση με αυτά, έχει απελευθερωθεί από το πλαίσιο της διανοητικής δραστηριότητας το οποίο είχε εγκαταλείψει τους κοινωνικούς, πολιτισμικούς και εμπλαισιομένους παράγοντες. Τα στοιχεία της θεωρίας εστιάζουν στο πώς η ανθρώπινη γνωστική λειτουργία είναι σωματικά θεμελιωμένη, *"ενσώματη" (embodied)* σ' ένα κοινό βιολογικό και φυσικό πλαίσιο. Εξετάζονται επίσης οι τρόποι με τους οποίους αυτή η ενσωμάτωση βοηθά να καθοριστεί η φύση της μαθηματικής κατανόησης και σκέψης.

Οι Varela, Thompson και Rosch (1999, σελ.172-173) επισημαίνουν ότι πρέπει να μελετήσουμε τη γνώση ως μία *«ενσώματη δράση» (embodied action)*. Λέγοντας ενσώματη (embodied) εννοούν ότι η γνώση εξαρτάται από τα είδη της εμπειρίας που έχει ένα σώμα με τις διάφορες αισθησιοκινητικές ικανότητες. Αυτές οι ατομικές αισθησιοκινητικές ικανότητες είναι ενσώματες σε ένα βιολογικό, φυσικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Με τον όρο δράση (action) επιθυμούν να τονίσουν ότι οι αισθητικές και κινητικές διαδικασίες, δηλαδή η αντίληψη και η δράση είναι θεμελιωδώς αδιάσπαστες στην ζώσα γνώση (lived cognition).

Η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών προτάθηκε πρόσφατα από τους Nunez et al. (1999) και τους Lakoff & Nunez (2000). Ο Lakoff (1987, σελ.364) άρχισε να συζητάει για τα ενσώματα μαθηματικά πολύ νωρίς. Αυτά εμφανίστηκαν όταν αυτός δήλωσε ότι *«τα μαθηματικά βασίζονται σε οικοδομήματα μέσα στο ανθρώπινο εννοιολογικό σύστημα, οικοδομήματα τα οποία οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται ως συνηθισμένη εμπειρία.»*. Αυτό δηλαδή που ουσιαστικά εξετάζουν τα ενσώματα μαθηματικά είναι πώς μία μαθηματική γνώση (εννοιολογική) μπορεί να γεννηθεί μέσω μιας καθημερινής εμπειρίας. Επομένως, τα ανθρώπινα μαθηματικά είναι ενσώματα, δεν είναι ούτε υποκειμενικά ούτε θέμα απλών κοινωνικών συμβάσεων.

Ένας από τους σκοπούς της θεωρίας προσανατολίζεται στην αντιμετώπιση του κύριου προβλήματος της επιστημολογίας των μαθηματικών που αφορά το ζήτημα των πηγών της έγκυρης και καθολικής γνώσης (Σπύρου, 2005). Ένα πρόβλημα που ξεκινάει από τον πλατωνισμό και οι Lakoff & Nunez (2000, σελ.348-365) προτείνουν την απομυθοποίησή του, λέγοντας ότι *«Τα ανθρώπινα μαθηματικά είναι ενσώματα, είναι ανεπτυγμένα σύμφωνα με τη συλλογική εμπειρία του κόσμου…όχι αμιγώς υποκειμενικά…Χρησιμοποιούν τις πολύ οριοθετημένες κι εξαναγκαστικές πηγές της ανθρώπινης βιολογίας. Διαμορφώνονται από τη φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων και από τις ανησυχίες των ανθρώπινων κοινωνιών και κουλτουρών»*.

Για πάνω από δύο χιλιετίες, οι φιλόσοφοι έβλεπαν συνήθως το μυαλό ως μη-ενσώματο. Το μη-ενσώματο μυαλό δεν ήταν μια εμπειρική ανακάλυψη, αλλά μάλλον ένα φιλοσοφικό δημιούργημα, ένα *a priori* φιλοσοφικό δόγμα που έχει διαμορφώσει την κατανόηση για τον εαυτό μας και τον κόσμο μας. Η παλαιά ρομαντική μυθολογία των μαθηματικών ήταν κάπως έτσι: *«Τα μαθηματικά είναι αφηρημένα, μη-ενσώματα, και ξεπερνούν το ανθρώπινο μυαλό, όμως είναι πραγματικά. Έχουν έναν αντικειμενικό, κυριολεκτικό ανεξάρτητο λόγο ύπαρξης - οποιωνδήποτε όντων - από τα μυαλά. Πράγματι, τα μαθηματικά κτίζουν τον κόσμο, και χαρακτηρίζουν την ίδια την φύση της ορθολογιστικής ικανότητας μέσω της μαθηματικής λογικής, καθώς επίσης και την ίδια*

την φύση της ευφυούς σκέψης, μέσω της τεχνητής νοημοσύνης. (Lakoff & Nunez, σελ.339-340)».

Η θεωρία του λειτουργικού δυϊσμού πιστεύει ότι οι νοητικές λειτουργίες πρέπει να κατανοούνται μέσα σε ένα πλαίσιο που δε συνδέει το νου με υλικές διεργασίες. Θα πρέπει να εγκαταλείψουμε το *«ειδύλλιο των μαθηματικών»* που θέλει τα μαθηματικά ανεξάρτητα από το νου (mind-free), ως αιώνιες, άχρονες αλήθειες. Από την ενσώματη πλευρά, η έννοια κάποιων αντικειμενικών μαθηματικών, ανεξάρτητων από την ανθρώπινη κατανόηση δεν έχει πλέον νόημα. Θα πρέπει επίσης να περιγράψουμε τα μαθηματικά που βασίζονται στο νου από την πλευρά των θεμελιωμένων εννοιολογικών συστημάτων από τα οποία προκύπτουν τα εν λόγω μαθηματικά. Μια τέτοια περιγραφή θα είναι χρήσιμη για την κατανόηση των προβλημάτων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, όπως επίσης και για το σχεδιασμό μιας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας.

Ο Lakoff (2001) λέει ότι ήταν ένας συμπαθητικός μύθος όσο διήρκεσε, αλλά κάτι τέτοιο δεν είναι αληθινό. Όταν καταλαβαίνουμε τις μαθηματικές ιδέες μέσω της γνωσιακής επιστήμης, κάθε μέρος του παλαιού *«ειδυλλίου»* χάνεται. Τα μαθηματικά είναι ενσώματα, όμως δεν είναι κυριολεκτικά στηριγμένα στην ενσώματη εμπειρία αλλά μεταφορικά. Τα μαθηματικά δεν είναι το μέτρο του κόσμου ή της ορθολογιστικής ικανότητας, αλλά κάτι ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον, ομορφότερο, προκλητικότερο και ακόμα πιο προσιτό και κατανοητό.

Η μαθηματική γνώση δομείται πλέον σε ενσωματωμένα πλαίσια. Εστιάζει στην κοινωνική φύση της γνώσης, η οποία συντελείται από το ενσώματο βιολογικό και φυσικό πλαίσιο, οδηγώντας μας με αυτόν τον τρόπο στη δημιουργία εννοιών και αφαιρετικών μαθηματικών σχέσεων. Η ενσωμάτωση συνεπάγεται μια εκ νέου αντίληψη της φύσης της γνωστικής λειτουργίας και των ίδιων των μαθηματικών, με αντίστοιχες επιπτώσεις στη διδασκαλία (Lakoff & Nunez, 2000).

Το πρόβλημα της γνώσης είναι να εξηγηθεί πώς δομές και σχέδια της αλληλεπίδρασης οργανισμού-περιβάλλοντος μπορούν να προσαρμοστούν και να μετασχηματιστούν για να βοηθήσουν να ασχοληθούμε δημιουργικά με τις μεταβαλλόμενες περιστάσεις που δημιουργούν νέα προβλήματα, προκλήσεις, και ευκαιρίες για τον οργανισμό. Σε αυτήν την άποψη, το μυαλό δεν είναι ποτέ χωρισμένο από το σώμα, γιατί είναι πάντα μια σειρά σωματικών δραστηριοτήτων που βυθίζονται στην τρέχουσα ροή των αλληλεπιδράσεων οργανισμού-περιβάλλοντος που αποτελεί την εμπειρία. Αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει είναι η κατανόηση του κόσμου (και κατ' επέκταση των μαθηματικών) μέσα από τα εννοιολογικά συστήματα που το σώμα και ο εγκέφαλος έχουν τη δυνατότητα να ενεργοποιήσουν (Varela et al., 1999).

4.3 Σχέση μεταξύ πολιτισμού και Ενσώματων Μαθηματικών

Σύμφωνα με την ενσώματη άποψη κατά κάποιο τρόπο τα μαθηματικά εξαρτώνται από τον πολιτισμό ενώ κατά κάποιον τρόπο όχι. Από τη μια πλευρά μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά εξαρτώνται από τον πολιτισμό όταν συγκεκριμένες πολιτιστικές ιδέες, ιστορικά σημαντικές, που έρχονται από ένα κατάλληλο πλαίσιο μαθηματικών, βρουν εφαρμογή σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Τέτοιες ιδέες μπορούν να αλλάξουν το περιεχόμενο των ίδιων των μαθηματικών, όπως π.χ. η στάση να αντιληφθούμε την ανθρώπινη δραστηριότητα της σκέψης ως έναν τρόπο της μαθηματικής σκέψης, την οποία ονομάζουμε λογική. Από την άλλη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από τον πολιτισμό,

γιατί μόλις μια επιστημονική κοινότητα ανακαλύψει και θέσει μερικές ιδέες μαθηματικών, αυτές είναι αληθείς, άσχετα από οποιοδήποτε πολιτισμικό περιβάλλον. Μία τέτοια προσέγγιση όμως καταρρέει όταν απαντήσουμε στην ερώτηση «από πού προέρχονται τα μαθηματικά?». Προέρχονται από τον ανθρώπινο πολιτισμό και την ιστορία. Πολλές από τις σημαντικότερες ιδέες των μαθηματικών γεννιούνται από τις γενικές πτυχές του πολιτισμού παρά από τα μαθηματικά τα ίδια, τα οποία είναι μέρος του μεγαλύτερου πολιτιστικού περιβάλλοντος (Manno, 2006).

Τα μαθηματικά συνεχίζουν έτσι να αναπτύσσονται, παίρνοντας μορφή στα σώματα και στα μυαλά, λόγω των ανθρώπινων γνωστικών δεξιοτήτων και των καθημερινών δραστηριοτήτων. Οι ιδέες των μαθηματικών είναι μια γνωστική ενσώματη λειτουργία. Είναι βιολογικά θεμελιωμένες σε άτομα που αλληλεπιδρούν. Οπότε προέρχονται από τους ανθρώπους που ζουν σε ένα πολιτιστικό περιβάλλον, άρα είναι κοινωνικές και πολιτιστικές. Επομένως «τα μαθηματικά έχουν μια απολύτως φυσική πολιτιστική διάσταση σύμφωνα με την ενσώματη προοπτική» (Nunez et al.,1999).

Από την ενσώματη προοπτική υπάρχουν κι άλλα αποτελέσματα της ιστορίας και του πολιτισμού στα μαθηματικά. Οι μαθηματικοί ζουν σε ένα καθορισμένο ιστορικό πλαίσιο και βασίζουν την εργασία τους στην παλαιότερη εργασία αυτών. Έτσι αναπτύσσονται τα μαθηματικά. Σκεφτείτε την έννοια του αριθμού στο πέρασμα των αιώνων. Πρώτα οι αριθμοί περιορίζονταν στους θετικούς ακεραίους. Μετά επεκτάθηκαν έτσι ώστε να συμπεριλάβουν τους ρητούς αριθμούς, και αργότερα μέσα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ανακαλύφθηκαν οι άρρητοι (Lakoff & Nunez, 2000).

Ότι έχει ειπωθεί δεν υπονοεί ότι τα μαθηματικά είναι μόνο ένα πολιτιστικό θέμα. Η θεωρία ενσωμάτωσης αναγνωρίζει τη δράση της ιστορίας και του πολιτισμού στα μαθηματικά αλλά αρνείται οποιοδήποτε πολιτιστικό σχετικισμό, απορρίπτοντας οποιαδήποτε δήλωση που ισχυρίζεται ότι τα μαθηματικά γεννιούνται μόνο από την ιστορία και τον πολιτισμό. Επιπλέον πραγματοποιούν το σημαντικό ρόλο του γνωστικού κόσμου και της εμπειρίας. Είναι η μη αυθαίρετη ιδιοκτησία της ενσωμάτωσης που την καθιστά διαφορετική από τη μεταμοντέρνα προσέγγιση.

4.4 Ενσώματες ιδιότητες μαθηματικών

Όλες οι νέες μελέτες που πραγματοποιούνται στη νευροφυσιολογία, τη γνωσιακή επιστήμη και την ιστορία των μαθηματικών συμφωνούν σχετικά με τις ενσώματες ιδιότητες των μαθηματικών. Παραθέτουμε παρακάτω τις παραδοχές που γίνονται από τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών:

- Τα μαθηματικά είναι ένα *προϊόν των ανθρώπων*. Οι παράγοντες που συντελούν στο σχηματισμό τους είναι: η φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων και των ενδιαφερόντων των ανθρώπινων κοινωνιών και πολιτισμών, που χρησιμοποιούν τα περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας.
- Η ανθρώπινη γνωστική πλευρά παράγει τα ανώτερα μαθηματικά χάρη στις μέσες *γνωστικές δεξιότητες*, όπως η δυνατότητα να σκεφτεί με τις εννοιολογικές μεταφορές. Γι' αυτό και ο καθένας θα μπορούσε ενδεχομένως να κάνει μαθηματικά.
- Η έννοια του "*Subitizing*." Η απλή απαρίθμηση (subitizing) είναι έμφυτη στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Οι άνθρωποι (όπως και πολλά άλλα

θηλαστικά) μπορούν να αναγνωρίσουν με ακρίβεια το πλήθος ενός μικρού συνόλου.

- Η γεωμετρία, η αριθμητική και άλλες θεματικές περιοχές των μαθηματικών γεννιούνται από τις *ανθρώπινες δραστηριότητες* (απαρίθμηση, μέτρηση, αρχιτεκτονική).
- Ένας από τους χαρακτήρες των μαθηματικών είναι η *ακρίβειά* τους. Αυτή γίνεται πιθανή λόγω της δυνατότητας που έχουν οι άνθρωποι να διακρίνουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, να ταξινομούν τα πράγματα (σύμφωνα με κριτήρια) και να τα ανακαλούν (όπως τα σχήματα και οι αριθμοί).
- Η ακρίβεια βελτιώνεται από την ανθρώπινη *ικανότητα χειρισμού συμβόλων*, κάνοντας έτσι τον υπολογισμό πολύ ευκολότερο.
- Η *εννοιολογική μεταφορά* είναι ένας ενσώματος νευρικός και γνωστικός μηχανισμός τεράστιας σημασίας. Επιτρέπει να κάνουμε συμπεράσματα σε ένα πλαίσιο και να τα μεταφέρουμε μέσα σε ένα άλλο πλαίσιο.
- Η μονιμότητα των φυσιολογικών μηχανισμών της εγκεφαλικής και σωματικής δομής έχει ως αποτέλεσμα τη *σταθερότητα* των μαθηματικών.
- Τα μαθηματικά δεν είναι μονολιθικά στη γενική θεματική περιοχή τους. Δεν υπάρχει δηλαδή μόνο η γεωμετρία, η αριθμητική, η τυπική λογική, αλλά υπάρχουν *αμοιβαία ασυνεπείς εκδοχές* αυτών.
- Τα μαθηματικά είναι το αποτέλεσμα της συνύπαρξης της φυσιολογίας μας με τον κόσμο που ζούμε. Η *βιολογική* μας *εξέλιξη*, μας επιτρέπει να εναρμονίζουμε τη γνωστική μας λειτουργία με τον τρόπο που βιώνουμε τον κόσμο.

(Lakoff & Nunez,2000, σελ.351-352)

Εξετάζοντας όλα τα ανωτέρω προκύπτει το συμπέρασμα ότι σύμφωνα με τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών, η πρόσβασή μας στα μαθηματικά επιτυγχάνεται μέσω εννοιών του μυαλού μας οι οποίες μορφοποιούνται από το σώμα μας. Επαναλαμβάνοντας όλες αυτές τις ιδιότητες θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ενσώματα μαθηματικά είναι ***καθολικά, συνεπή, γενικευμένα, ακριβή, συμβολικά, σταθερά, αποτελεσματικά.***

4.5 Η ενσωμάτωση και η ανάλυση των εννοιολογικών δομών

Στην εξέταση της φύσης της μαθηματικής σκέψης, οι Lakoff & Nunez (2000) προσφέρουν ένα σύνολο μηχανισμών και γνωστικών παραγουσών που προέρχονται από την υπάρχουσα εργασία στη γνωστική γλωσσολογία και την ενσώματη γνώση. Οι εννοιολογικοί μηχανισμοί που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά είναι

- Οι εννοιολογικές μεταφορές (conceptual metaphors)
- Τα εικονό-σχήματα (image schemas)
- Τα εννοιολογικά μίγματα (conceptual blends)

«Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ενσώματα αντικείμενα, δηλαδή, ιδέες που στηρίζονται τελικά στην ανθρώπινη εμπειρία και τίθενται μαζί μέσω των κανονικών ανθρώπινων εννοιολογικών μηχανισμών, όπως οι

εννοιολογικές μεταφορές, τα εικονό-σχήματα και τα εννοιολογικά μίγματα. Η μαθηματική αλήθεια είναι όπως οποιαδήποτε άλλη αλήθεια. Μια δήλωση είναι αληθινή εάν η ενσώματη κατανόησή μας της δήλωσης συμφωνεί με την ενσώματη κατανόησή μας του περιεχομένου και της κατάστασης. Η αλήθεια, συμπεριλαμβανομένης και της μαθηματικής αλήθειας, εξαρτάται έτσι από την ενσώματη ανθρώπινη γνώση.» (Lakoff & Nunez, 2000, σελ. 366).

4.5.1 Μεταφορικές έννοιες

Ο Lakoff (2001) θεωρεί ότι ίσως η ριζικότερη ανακάλυψη που άλλαξε τη θεωρία του μυαλού έγινε από τους Reddy (1977) και τον ίδιο (1978) (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον). Ο Reddy έδειξε ότι η ίδια η έννοια της επικοινωνίας είναι μεταφορική. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στη γνωσιακή επιστήμη είναι ότι οι αφηρημένες έννοιες γίνονται τυπικά κατανοητές μέσω της μεταφοράς. Μια μεταφορά είναι μια συστηματική εννοιολογική χαρτογράφηση από μία εννοιολογική περιοχή (πηγή) σε μια άλλη (στόχος). Αποτελεί μια κεντρική διαδικασία στις καθημερινές σκέψεις. Είναι η βασική διαδικασία από την οποία η αφηρημένη σκέψη γίνεται πιθανή. Λειτουργεί πρώτιστα για να επιτρέψει την αισθητήρια κίνηση, αιτιολογώντας την εφαρμογή της στις υποκειμενικές κρίσεις και μπορεί να εισαγάγει την εννοιολογική δομή.

Οι εκατοντάδες των εννοιολογικών μεταφορών έχουν μελετηθεί λεπτομερώς. Είναι εξαιρετικά κοινές στην καθημερινή σκέψη και τη γλώσσα. Χρησιμοποιούνται ασυναίσθητα, αβίαστα, και αυτόματα στις καθημερινές ομιλίες. Δηλαδή είναι μέρος του γνωστικού ασυνείδητου. Τρεις σημαντικές μεταφορές για τις ιδέες είναι αυτές:

- *Η σκέψη είναι γλώσσα*, με παραδείγματα όπως «είναι ένα ανοικτό βιβλίο για μένα», «μπορώ να διαβάσω τη σκέψη», κ.ο.κ.
- *Η σκέψη είναι μαθηματικός υπολογισμός*, με εκφράσεις όπως «ποια είναι η κατώτατη γραμμή;», «δε θα μετρήσουμε αυτήν», κ.ο.κ.
- *Το μυαλό είναι μια μηχανή*, συμπεριλαμβανομένων εκφράσεων όπως «αισθάνομαι ελάχιστα σκουριασμένος σήμερα», «είχε μια διακοπή», κ.ο.κ..

Οι μεταφορικές γλωσσικές εκφράσεις είναι έτσι μόνο εκδηλώσεις επιφάνειας της μεταφορικής σκέψης. Αυτές οι θεωρητικές αξιώσεις, όπως αναφέρει ο Lakoff (2001), είναι βασισμένες στα ουσιαστικά εμπειρικά στοιχεία από ποικίλες πηγές, που περιλαμβάνουν μεταξύ των άλλων, τα ψυχογλωσσολογικά πειράματα (Gibbs, 1994), τις γενικεύσεις πέρα από τα σχέδια συμπεράσματος (Lakoff, 1987), τις γενικεύσεις πέρα από συμβατικές και νέες γλώσσες (Lakoff & Turner, 1989), τη μελέτη της γλωσσικής απόκτησης (Johnson, 1997), των αυθόρμητων χειρονομιών (McNeill, 1992) και της νοηματικής γλώσσας (Taub, 1997).

Όπως δήλωσαν οι Lakoff & Nunez (2000, σελ.364) *«ένας μεγάλος αριθμός των πιο βασικών, καθώς επίσης και περιπλοκότερων, μαθηματικών ιδεών είναι μεταφορικής φύσης»*. Επιπλέον, ο Lakoff (1987) τονίζει τη γλωσσική λειτουργία των μεταφορών που επεμβαίνουν στα εννοιολογικά συστήματά μας. Κατά συνέπεια το μυαλό είναι κατανοητό σαν μία *«μηχανή μεταφοράς»*. Οι Lappas & Spyrou (2006) επισημαίνουν ότι σύμφωνα με την άποψη αυτή, ένας γλωσσικός όρος ο οποίος έχει εισαχθεί, έχει το ρόλο ενός αρχέτυπου, όπως αναφέρει ο Rosch (1978).

4.5.2 Εννοιολογικές μεταφορές

"Εννοιολογική μεταφορά είναι ένας γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ένα είδος πράγματος σαν να ήταν κάτι άλλο. Είναι θεμελιωμένο συμπέρασμα ότι συντηρεί την εγκάρσια τομή -περιοχή χαρτογράφησης- του νευρικού μηχανισμού που επιτρέπει σε μας να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική δομή μιας αντιληπτικής περιοχής (πέστε, γεωμετρία) και να βγάλουμε συμπεράσματα για κάποια άλλη (πέστε, αριθμητική)."

Where Mathematics Comes From,
σελίδα 6

Παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι ένα από τα ομορφότερα ανθρώπινα αποτελέσματα, εμφανίζεται συχνά δύσκολο για το καθέναν από μας να τα καταλάβουμε. Αυτό ίσως να οφείλεται στη μη πλήρη ανάπτυξη των γνωστικών δομών. Οι Lakoff & Nunez (2000) πιστεύουν πως ένα βήμα προς τα μαθηματικά που θα προορίζονται για όλους θα μπορούσε να τελειώσει με την ανακάλυψη των ενσώματων εννοιολογικών μεταφορών τις οποίες έχει κάθε άνθρωπος.

Μια σημαντική εύρεση στη γνωστική γλωσσολογία είναι ότι οι έννοιες οργανώνονται συστηματικά μέσω των απέραντων δικτύων των εννοιολογικών χαρτογραφήσεων, που εμφανίζονται στα ιδιαίτερα συντονισμένα συστήματα και που συνδυάζονται με σύνθετους τρόπους. Στο μεγαλύτερο μέρος τους αυτές οι εννοιολογικές χαρτογραφήσεις χρησιμοποιούνται ασυναίσθητα και αβίαστα στην καθημερινή επικοινωνία. Ένα σημαντικό είδος χαρτογράφησης είναι η εννοιολογική μεταφορά.

Η εννοιολογική μεταφορά, λοιπόν, είναι ένας σημαντικός (αλλά όχι ο μόνος) μηχανισμός που προτείνεται για να εξηγήσει πώς οι μαθηματικοί όροι συνδέονται με τον κόσμο και ο ένας όρος με τον άλλον. Είναι μια ασυναίσθητη χαρτογράφηση μεταξύ μιας καλά-κατανοητής περιοχής πηγής σε μια λιγότερο καλά-κατανοητή περιοχή στόχων. Μεταφέρει μαζί της την επαγωγική δομή της περιοχής πηγής και επιτρέπει την κατανόηση της περιοχής στόχων που κατασκευάζεται (Edwards, 2002).

Αντίθετα σε αυτό που μερικοί άνθρωποι σκέφτονται, οι εννοιολογικές μεταφορές (και οι εννοιολογικές χαρτογραφήσεις) δεν είναι γενικά αυθαίρετες κοινωνικές συμβάσεις. Δεν είναι αυθαίρετες, επειδή κτίζονται από το χαρακτηριστικό του είδους που συναντούμε στην καθημερινή μας εμπειρία (ειδικά τη σωματική εμπειρία). Οι μεταφορές δεν είναι απλά μια γλωσσική οντότητα αλλά μια γνωστική διαδικασία που αντιμετωπίζει την ανθρώπινη σκέψη για ένα θέμα σαν να ήταν ένα άλλο πράγμα. Νέες τάσεις στις νευροεπιστήμες αντιμετωπίζουν το μυαλό ως βαθιά ριζοβολημένο στα σώματα (Lakoff & Johnson, 1998).

Στην πραγματικότητα το δυσκολότερο πράγμα για τα μαθηματικά είναι ότι δε θεωρούμε τις εννοιολογικές μεταφορές κυριολεκτικά ως μεταφορές αλλά αντιμετωπίζουμε τη μεταφορική έννοια που έχουν. Οι εννοιολογικές μεταφορές έχουν ένα ρόλο εστίασης στη μαθηματική σκέψη, όχι όμως μόνο έναν τρόπο για να ξεκαθαρίσουμε και να κάνουμε κατανοητές τις έννοιες. Σκεφτείτε για παράδειγμα τη μεταφορά των αριθμών ως σημεία πάνω σε μια γραμμή. Αυτή δεν είναι η μοναδική μεταφορά για τους αριθμούς. Είναι όμως η πιο σχετική, χωρίς την οποία δε θα υπήρχε η αναλυτική γεωμετρία.

Είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψη ότι οι εννοιολογικές μεταφορές δεν είναι μόνο σχήματα λόγου ή παιδαγωγικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να επεξηγήσουν κάποιο εκπαιδευτικό υλικό. Οι εννοιολογικές μεταφορές είναι στην πραγματικότητα θεμελιώδεις γνωστικοί μηχανισμοί που προωθούν την επαγωγική δομή από μια περιοχή πηγής σε μια περιοχή στόχου. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής αυτής επιτρέπεται η χρήση του χαρακτηριστικού του είδους, που βασίζεται στο σώμα για να βγάλουμε το συμπέρασμα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι απεικονίσεις που διατηρούν τη συμπερασματική δομή ανάμεσα στις δύο περιοχές (Nunez, 2000).

Μέσα στα μαθηματικά, ένα απλό παράδειγμα της εννοιολογικής μεταφοράς θα ήταν η μεταφορά της «αριθμητικής ως συλλογή αντικειμένων», όπου η κοινή, ενσώματη εμπειρία μας για τη συλλογή ή την ομαδοποίηση των αντικειμένων χρησιμεύει ως η περιοχή πηγής για την κατασκευή της αριθμητικής των φυσικών αριθμών.

Πηγαίο πεδίο (source domain) **Συλλογή αντικειμένων**	**Πεδίο στόχος (target domain)** **Αριθμητική**
Αντικείμενα ίδιου μεγέθους	Αριθμοί
Μέγεθος συλλογής	Μέγεθος αριθμού
Περισσότερο	Μεγαλύτερος
Λιγότερο	Μικρότερος

Πρέπει να διευκρινιστεί ότι δεν σύρονται όλες οι εννοιολογικές χαρτογραφήσεις από την άμεση φυσική εμπειρία, ούτε σχετίζονται με το χειρισμό των αντικειμένων. Στην πραγματικότητα, μόνο το πιο βασικό επίπεδο μαθηματικών κατασκευάζεται από τις μεταφορές που συνδέονται με τη φυσική εμπειρία. Οι μεταφορές που χρησιμοποιούνται σε αυτό το επίπεδο καλούνται «θεμελιακές μεταφορές» (grounding metaphors). Η εννοιολογική μεταφορά είναι μόνο μια από τις δομικές μονάδες που προτείνονται θεωρητικά από τα ενσώματα μαθηματικά.

4.5.3 Εικονό-σχήματα

Η πρώτη σημαντική διορατικότητα των εικονό-σχημάτων προήλθε το καλοκαίρι του 1975 από τον Talmy (Lakoff, 2001). Ο Talmy, όταν εξέταζε μια ευρεία ποικιλία γλωσσών έκανε μια σημαντική ανακάλυψη. Διαπίστωσε ότι οι χωρικοί όροι σχέσεων μπορούν να αναλυθούν σε αρχέτυπες χωρικές σχέσεις, όπου κάθε γλώσσα χρησιμοποιεί τις ίδιες αρχέτυπες σχέσεις, αλλά με διαφορετικούς τρόπους. Οι ιδέες του Talmy οδήγησαν στις αποσυνθέσεις των χωρικών σχέσεων στα αρχέτυπα εικονό-σχήματα με τοπολογικές, προσανατολιστικές και δυναμικές ιδιότητες. Αλλά ο Talmy και άλλοι γνωστικοί γλωσσολόγοι σταμάτησαν λίγο πριν να εξηγήσουν πώς τα εικονό-σχήματα θα μπορούσαν να εξυπηρετήσουν μια αντιληπτική και εννοιολογική λειτουργία.

Κάθε γλώσσα έχει ένα χωρικό σύστημα σχέσης, το οποίο αλλάζει σύμφωνα με τη γλώσσα που χρησιμοποιούμε. Οι χωρικές αυτές σχέσεις συνίστανται από εικονό-σχήματα, τα οποία αντιστοιχούν σε μαθηματικές σχέσεις. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τη φράση

*"το βιβλίο είναι **πάνω** στο γραφείο"*

Η λέξη *πάνω* συνίσταται στα εξής αρχέτυπα εικονό-σχήματα

(α) Επιφανειακό (above) σχήμα (…είναι πάνω από…)
(β) Σχήμα επαφής (…αγγίζει…)
(γ) Σχήμα υποστήριξης (…στηρίζεται στο…)

Η συσχέτιση των ανωτέρω εικονό-σχημάτων με τα μαθηματικά είναι πως

- το (α) είναι σχήμα προσανατολισμού, δηλαδή διευκρινίζει την κατεύθυνση στο χώρο
- το (β) είναι τοπολογικό σχήμα, δηλαδή δηλώνει την απουσία του κενού
- το (γ) είναι δυναμικό, δηλαδή φανερώνει την κατεύθυνση και τη φύση μιας δύναμης.

Οι Varela et al. (1999, σελ.176) αναφέρουν ότι ο Mark Johnson στο βιβλίο του *The Body in the Mind (1987)* υποστήριξε πως οι άνθρωποι έχουν πολύ γενικά γνωστικά οικοδομήματα, τα οποία και κάλεσε κιναισθητικά εικονό-σχήματα (kinesthetic image schemas). Τέτοια παραδείγματα εικονό-σχημάτων είναι

- το περιέχον (container) σχήμα,
- το μέρος – όλον σχήμα (part-whole) και
- το σχήμα πηγή – πορεία – στόχος (source-path-goal).

Αυτά τα σχήματα δημιουργούνται από τη σωματική εμπειρία, μπορούν να οριστούν με όρους ορισμένων δομικών στοιχείων, έχουν μία λογική και μπορούν να προβληθούν μεταφορικά δίνοντάς μας μία δομή σε μία ευρεία γνωστική περιοχή.

Το περιέχον σχήμα αποτελεί τη βάση εννοιών όπως *μέσα (in)* και *έξω (out)*. Στα μαθηματικά το σχήμα αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί καθιστά σαφέστερες τις έννοιες

- Εσωτερικό
- Όριο
- Εξωτερικό

Το σχήμα πηγής – πορείας – στόχου (source-path-goal). Είναι το πρωτεύον εικονό-σχήμα που σχετίζεται με την κίνηση και αποτελείται από τα παρακάτω στοιχεία

- Μια τροχιά που κινείται
- Μια θέση πηγής (η αφετηρία)
- Ένας στόχος (δηλαδή ένας προορισμός της τροχιάς)
- Μια διαδρομή από την πηγή στο στόχο
- Η πραγματική τροχιά της κίνησης
- Η θέση της τροχιάς σε μία δεδομένη στιγμή
- Η κατεύθυνση της τροχιάς εκείνη τη στιγμή
- Η πραγματική τελική θέση της τροχιάς, η οποία μπορεί να είναι ή να μην είναι ο τελικός προορισμός.

Το σχήμα αυτό χαρακτηρίζεται ως τοπολογικό, από την άποψη ότι μια πορεία μπορεί να επεκταθεί, να συσταλθεί ή ακόμα και να παραμορφωθεί, αλλά ακόμα να παραμείνει μια πορεία (Lakoff & Nunez, 2000). Κάτι τέτοιο είναι πανταχού παρών στη μαθηματική σκέψη, όπως π.χ. στην έννοια της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης.

Τα εικονό-σχήματα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι είναι μια ιδιαίτερη γνωστική λειτουργία, που είναι συγχρόνως και αντιληπτική και εννοιολογική. Βρίσκονται σε ένα αρχικό στάδιο ανάπτυξης *(primitives)* και επιτρέπουν την οργάνωση των εμπειριών που εμπλέκουν χωρικές σχέσεις. Είναι δυναμικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα που διατάσσουν τις δράσεις μας και τις αντιλήψεις μας. Αυτά τα πρότυπα προκύπτουν ως σημαντικές για μας δομές, κυρίως μέσω της σωματικής εμπειρίας της κίνησης στο χώρο, του χειρισμού των αντικειμένων, και των αντιληπτικών αλληλεπιδράσεων.

Όπως δηλώνει ο Johnson (1987, σελ.29), *«Είναι πρωτεύοντα μέσα, με τα οποία κατασκευάζουμε ή συνθέτουμε διάταξη και όχι απλώς παθητικά δοχεία στα οποία εισέρχεται η εμπειρία»*. Σύμφωνα με τη Manno (2006) *«Τα εικονό-σχήματα είναι ιδέες. Οι ιδέες δεν κυκλοφορούν αφηρημένα στον κόσμο, αλλά είναι γεννήματα των εγκεφάλων και των κατάλληλων νευρικών δομών. Δεν έχουν μια συγκεκριμένη φύση ή μια δομή αλλά προκύπτουν από ειδικά νευρικά κυκλώματα. Είναι μια γέφυρα μεταξύ της γλώσσας και της σκέψης από τη μια πλευρά και της εικόνας από την άλλη»*. Οι Lakoff & Nunez (2000, σελ.30) λένε ότι *«ένα μεγάλο μέρος αυτού που είναι 'αφηρημένο' στα μαθηματικά … αφορά το συντονισμό των σημασιών και της δημιουργίας νοήματος βασισμένο σε κοινά εικονό-σχήματα και μορφές μεταφορικής σκέψης. Ο αφηρημένος συλλογισμός και η γνωστική λειτουργία είναι, επομένως, γνήσιες ενσώματες διαδικασίες»*.

4.5.4 Εννοιολογικά μίγματα (conceptual blends).

Τα εννοιολογικά μίγματα είναι μια άλλη δομική μονάδα. Αποτελούνται από χαρτογραφήσεις που σύρουν περισσότερες από μία περιοχές πηγών (ή σύρουν στοιχεία) για να επιτρέψουν την κατασκευή μιας περιοχής στόχων που δεν είναι ισομορφική με καμία από τις πηγές. Ένα παράδειγμα θα ήταν ο συνδυασμός των *«αριθμών ως σημεία σε μια γραμμή»*, όπου σύροντας από τους προηγούμενους κατασκευασμένους όρους και των αριθμών και των γραμμών, οι νέες οντότητες, «αριθμό-σημεία» δημιουργούνται έτσι ώστε να έχουν τα χαρακτηριστικά και των δύο. (Lakoff & Nunez, 2000, σελ.48).

4.6 Έλεγχος κίνησης και μαθηματικές ιδέες

Αυτό που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον στους νευροεπιστήμονες είναι ο ρόλος που φαίνεται να έχει η κίνηση ακόμη και στην αφηρημένη σκέψη. Σύμφωνα με τον Bennett (2008), ο Spivey (2003), σε μια μελέτη του, διαπίστωσε ότι οι άνθρωποι που τους δόθηκαν δυσνόητες χωρικές σχέσεις εξέθεσαν ένα διακριτικό και ασυνείδητο σχέδιο των κινήσεων των ματιών αμέσως προτού να φθάσουν στην απάντηση. Τα υποκείμενα φάνηκαν να λειτουργούν ασυναίσθητα μέσω του προβλήματος με τη θέσπιση των πιθανών λύσεων με το βλέμμα τους.

Οι Nunez et al. (1999) αναφέρουν ότι ο Regier στο βιβλίο του *"The Human Semantic Potential"* συνειδητοποίησε πως ορισμένες γνωστές νευρικές δομές και

μηχανισμοί στον οπτικό φλοιό έχουν τη σωστή δομή για «να υπολογίσουν» τα εικονό-σχήματα με τις οπτικές ιδιότητες. Διαλογίστηκε, παραδείγματος χάριν, ότι οι τοπογραφικοί χάρτες του οπτικού πεδίου θα μπορούσαν να υπολογίσουν τοπολογικά τα εικονό-σχήματα (π.χ. οριακές περιοχές και τροχιές). Ο Regier βρήκε τη μόνη εύλογη υπόθεση μέχρι σήμερα ως προς τον τρόπο με τον οποίο τα εικονό-σχήματα ενσωματώνονται νευρικά. Ήταν το πρώτο βήμα στην απάντηση της ερώτησης*: «Πώς μπορεί ένας εγκέφαλος, ο οποίος δουλεύει νευροχημικά, να έχει ιδέες;»* Η ανακάλυψη του Regier άρχισε την έρευνα για μια νευρική θεωρία της σκέψης και της γλώσσας.

Η επόμενη δραματική πρόοδος έγινε από τον Bailey στο Berkeley στα μέσα της δεκαετίας του ’90. Ο Bailey αναρωτήθηκε πώς ήταν δυνατό να μαθευτούν οι λέξεις για τις ενσώματες έννοιες. Περιόρισε τη μελέτη του στα ρήματα της κίνησης των χεριών. Κάθε γλώσσα έχει τέτοια ρήματα [τα αγγλικά, παραδείγματος χάριν, έχουν το *push (σπρώχνω), pull (τραβώ), grasp (ελέγχω), hold (κρατώ), drop (ρίχνω)* κ.ο.κ.]. Τα ρήματα σε κάθε γλώσσα καλύπτουν μια διαφορετική σειρά των ενεργειών. Αλλά η σειρά εξαρτάται από αυτό που τα χέρια μπορούν να κάνουν. Η κίνηση, εντούτοις, είναι περίπλοκη. Οι απλές κινήσεις, όπως το άνοιγμα και το κλείσιμο του χεριού είναι προϊόντα συμπράξεων μηχανικών κινήσεων, σύνθετα κυκλώματα που κυβερνώνται από μικρές συστάδες νευρώνων στον κινητικό φλοιό. Οι περίπλοκες κινήσεις είναι ορχηστρικότερες των απλών μηχανικών κινήσεων. Εκτελούνται από τον προμετωπιαίο φλοιό, λόγω νευρικών ενώσεων που καλούνται «συνδέσεις» του κινητικού φλοιού. Όταν κινούμαστε, ένα κύκλωμα πυροδοτεί τη σειρά των κινήσεων, συντονίζει δυναμικά τις απλές μηχανικές κινήσεις και τις ανατροφοδοτεί.

Δεδομένου ότι ο Bailey διαμόρφωνε την εκμάθηση των ρημάτων της κίνησης χεριών, στρατολόγησε τη βοήθεια του σπουδαστή του Narayanan. Ο Narayanan δημιούργησε ακριβή υπολογιστικά μέσα μοντελοποιώντας όλες τις σχετικές νευρικές πληροφορίες που απαιτήθηκαν για το στόχο του Bailey. Αυτό που έκανε ήταν να πάρει τα δίκτυα του Petri, μια κοινή μορφή τεχνητής νοημοσύνης, και να τα επεκτείνει με σημαντικούς τρόπους για να περιορίσει κατάλληλα τη νευρική διαμόρφωση (Lakoff, 2001).

Ο Narayanan πήρε έπειτα σαράντα με πενήντα κινητικά σχήματα του Bailey και τα αναπαράστησε στο μοντέλο του. Τα μηχανικά σχήματα διαμερίζονται σε τρία μέρη:

1. Οι απλές κινητικές συμπράξεις που ελέγχονται από τον κινητικό φλοιό,
2. Τα σύνθετα κινητικά σχήματα που ελέγχονται από τον προμετωπιαίο φλοιό, και
3. Οι συνδέσεις μεταξύ των δύο αυτών.

Καθώς το έκανε αυτό, έκανε μια αξιοπρόσεκτη ανακάλυψη: Όλα είχαν την ίδια δομή! Αυτή η δομή είναι απλή:

- *Ετοιμότητα*: δηλαδή, σωματική ετοιμότητα κατά την εκτέλεση σωματικών πράξεων, π.χ. όταν κάνουμε κάτι πρέπει να σταματήσουμε για λίγο και ύστερα να ξεκινήσουμε να κάνουμε κάτι άλλο.
- *Έναρξη*: για να σηκώσουμε π.χ. ένα ποτήρι πρέπει πρώτα να το φτάσουμε και μετά να το πιάσουμε.
- *Κύρια διαδικασία*.

- *Πιθανή διακοπή και επανάληψη*: κατά τη διάρκεια της κύριας διαδικασίας έχουμε την επιλογή να σταματήσουμε. Και εάν το κάνουμε αυτό, μπορεί να το επαναλάβουμε ή όχι.
- *Στόχος*: ένας έλεγχος που βλέπει εάν έχει επιτευχθεί ο σκοπός μας ή όχι.
- *Ολοκλήρωση*: κάνουμε ότι έχει απομείνει για να ολοκληρώσουμε την ενέργειά μας.
- *Τελική κατάσταση*: εδώ βλέπουμε τα αποτελέσματα και τις συνέπειες της δράσης μας.

Ο Narayanan υπέβαλε έπειτα μια μοιραία ερώτηση. Θα μπορούσε το ίδιο νευρικό σύστημα που κινεί το σώμα μας, να εκτελέσει επίσης αφηρημένα συμπεράσματα για γεγονότα; Θα μπορούσε άραγε το σύστημα που ελέγχει τις σωματικές κινήσεις να αιτιολογήσει τις αφηρημένες περιοχές που γίνονται αντιληπτές μεταφορικά από την άποψη των σωματικών κινήσεων; Για να το εξετάσει αυτό, ο Narayanan γύρισε στη θεωρία της εννοιολογικής μεταφοράς, όπου μια μάζα αποτελεσμάτων έχει δείξει ότι η αφηρημένη αιτιολόγηση γίνεται από την άποψη του αισθητικό-κινητικού συλλογισμού.

Ο Narayanan κατασκεύασε έπειτα μια νευρική μεταφορική θεωρία, στην οποία οι εννοιολογικές μεταφορές είναι νευρικά κυκλώματα που συνδέουν τις περιοχές πηγής και στόχων. Το πρότυπό του περιείχε τρία θεμελιώδη μέρη:

- *Απλά κυκλώματα* που χαρακτηρίζουν τις κυριολεκτικές λογικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των εννοιών. Αυτά δε θα μπορούσαν φυσικά να παρέχουν τα σωστά συμπεράσματα για την κατανόηση των μεταφορικών προτάσεων.
- *Κυκλώματα κινητικού ελέγχου* για την εκτέλεση των σωματικών ενεργειών στις περιοχές πηγής.
- *Μεταφορικά χαρτογραφημένα κυκλώματα*, έτσι ώστε τα κινητικά συμπεράσματα να μπορούν να χαρτογραφηθούν επάνω στις αφηρημένες έννοιες. Αυτές οι χαρτογραφήσεις επιτρέπουν στα κινητικά συμπεράσματα να συνδυάζονται μέσω της μεταφοράς και να επιτύχουν τον αφηρημένο συλλογισμό.

Τα πρώτα αποτελέσματα δείχνουν πράγματι προς την κατεύθυνση της υπόθεσης επιβεβαίωσης του Narayanan Τα ίδια νευρικά κυκλώματα που μπορούν να κινήσουν το σώμα μας μπορούν να βγάλουν αφηρημένα συμπεράσματα μέσω της εννοιολογικής μεταφοράς. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σκεφτόμαστε πάνω σε γεγονότα και πράξεις (Lakoff & Nunez, 2000, σελ.34-35).

Το σχήμα που περιγράψαμε παραπάνω ονομάζεται σχήμα φάσεων *(aspect schema)*. Ένα τέτοιο σχήμα είναι πολύ συχνό στα μαθηματικά. Όταν λόγου χάρη θέλουμε να σχεδιάσουμε γεωμετρικά σχήματα, η χρήση των γεωμετρικών οργάνων συνίσταται σε φάσεις κινήσεως αυτών, ώσπου τελικά να λάβουν την κατάλληλη θέση. Θα πρέπει να υπάρξει σωστή συνεργασία του νευρικού και του μυϊκού συστήματος ώστε να επιτύχουμε ένα σωστό σχεδιασμό. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και όταν χρησιμοποιούμε τα χέρια για να περιγράψουμε κάτι. Κάθε διαδικασία δομείται από φάσεις.

4.6.1 Καθρεφτικοί νευρώνες

Το τελευταίο μέρος είναι ίσως το πιο ενδιαφέρον. Μετατοπίζουμε τις σκηνές από το Berkeley στην Parma της Ιταλίας, όπου μια ομάδα επιστημόνων νευρολογίας, με καθοδηγητές τον Rizzolatti και τον Gallese, έκανε μια αξιοπρόσεκτη ανακάλυψη. Ανακάλυψαν, σε μια μελέτη των πιθήκων μακάκας, ότι οι ίδιοι νευρώνες στον προμετωπιαίο φλοιό που πυροδοτούνται κατά τη διάρκεια των σύνθετων κινητικών ενεργειών ανάβουν επίσης όταν το ζώο βλέπει ένα πρόσωπο ή έναν άλλο πίθηκο που κάνει την ίδια κινητική δράση. Εν συντομία, οι νευρώνες σε αυτό το μέρος του προμετωπιαίου φλοιού συνδέονται και με την οπτική αντίληψη και με την κινητική δράση, για τις ίδιες κινητικές ενέργειες. Αυτοί καλούνται *καθρεφτικοί νευρώνες*.

Σε μια περιοχή δίπλα στους καθρεφτικούς νευρώνες, ανακάλυψαν κάποιους που τους ονόμασαν *κανονικούς νευρώνες*. Αυτοί ανάβουν είτε όταν εκτελείται μια σύνθετη κινητική δράση είτε όταν το ζώο βλέπει ένα αντικείμενο του είδους πάνω στο οποίο η δράση εκτελείται κανονικά. Οι ίδιοι κανονικοί νευρώνες που ανάβουν όταν τρώει ο πίθηκος μια μπανάνα, ανάβουν και όταν ο πίθηκος βλέπει την μπανάνα. Οι καθρεφτικοί νευρώνες, σε αντίθεση, ανάβουν είτε όταν τρώει ο πίθηκος την μπανάνα είτε όταν βλέπει έναν άλλο πίθηκο να τρώει μια μπανάνα, αλλά όχι μόνο όταν βλέπει ο πίθηκος μια μπανάνα. Αυτή η έρευνα έχει επεκταθεί από τότε και στους ανθρώπους.

Σκεφτείτε πάλι τώρα τα ρήματα της έρευνας των Bailey-Narayanan που ενώνονταν με τις νευρικές παραμέτρους δημιουργώντας τις ενέργειες. Τα ρήματα δράσης ισχύουν όχι μόνο για τις ενέργειές κάποιου, αλλά και για τις ενέργειες άλλων επίσης. Αλλά τα πρότυπα του Narayanan δημιουργήθηκαν αρχικά μόνο για τη δράση κάποιου, όχι για τις ενέργειες άλλων. Η ανακάλυψη των καθρεφτικών νευρώνων σύνδεσε την πρώτη εμπειρία των προσώπων με τις περιγραφές τρίτων προσώπων, δεδομένου ότι το ίδιο νευρικό εκτελών σχήμα (ή «Χ-σχήμα») πέρα από τους καθρεφτικούς νευρώνες μπόρεσε να χαρακτηρίσει και τα δύο. Οι καθρεφτικοί νευρώνες εντέλει αποκρίνονται όταν βλέπουμε κάποιον άλλον να εκτελεί μια ενέργεια (ή ακόμα και όταν ακούμε μια δράση να περιγράφεται) σαν να εκτελούσαμε εμείς οι ίδιοι αυτήν την ενέργεια. Με ταυτόχρονη δράση και της ενέργειας και της σκέψης, οι καθρεφτικοί νευρώνες πρότειναν ότι αυτά τα δύο μπορεί να μην είναι τόσο χωριστά τελικά. «Βλέπετε το ίδιο σύστημα, το κινητικό, να διαδραματίζει έναν ρόλο και στην επικοινωνία και τη γνώση,» λέει ο Glenberg (καθηγητής της ψυχολογίας και επικεφαλής του εργαστηρίου ενσώματης γνώσης στο κρατικό πανεπιστήμιο της Αριζόνα) (Benett, 2008).

Έτσι, η ιδέα αυτή εφαρμόστηκε και τεχνικά. Τα νευρικά Χ-σχήματα που ο Narayanan διαμόρφωσε έχουν μια νευρική δομή που μπορεί να χαρακτηριστεί ανεξάρτητα από τις συνδέσεις της στις κινητικές συμπράξεις. Μια τέτοια δομή μπορεί επίσης να έχει συνδέσεις στα σχήματα για την οπτική αντίληψη επίσης. Εν ολίγοις, τα πρότυπα του Narayanan είναι ακριβώς ότι θα ήταν κατάλληλο για τη διαμόρφωση των δομών πέρα από τους καθρεφτικούς και τους κανονικούς νευρώνες στα ανθρώπινα όντα. Προσθέτοντας τις μεταφορικές συνδέσεις, τέτοιες ενσώματες δομές μπορούν να χαρακτηρίσουν τον αφηρημένο συλλογισμό.

4.7 Γνωστική γλωσσολογία

Οι θεσπίσεις των νευρικών δομών που αναφέραμε παραπάνω και η διάκριση μεταξύ των παραμέτρων τους έχει επιτρέψει μια νευρική θεωρία της γλώσσας. Στη θεωρία αυτή, που τώρα βρίσκεται υπό ανάπτυξη, η έννοια της λέξης και οι σημαντικές γραμματικές κατασκευές χαρακτηρίζονται μέσω της ένωσης των νευρικών παραμέτρων για τις ενσώματες έννοιες με τις νευρικές παραμέτρους για τη φωνολογία, τη γραμμική τάξη και άλλες πτυχές της γλωσσικής μορφής. Το αποτέλεσμα είναι μια ενσώματη θεωρία της γλωσσικής κατανόησης.

Ο Nunez (2004) αναφέρει ότι οι πρόσφατες αναπτύξεις στη γνωστική γλωσσολογία είναι πολύ καρποφόρες στη μελέτη της υψηλού επιπέδου γνώσης από μια προοπτική ενσωμάτωσης (π.χ., φυσική κατανόηση γλώσσας και εννοιολογικά συστήματα). Ιδιαιτέρως, η γνωστική σημασιολογία (Sweetser,1990; Talmy,1999), η εννοιολογική ολοκλήρωση (Fauconnier, 1997; Fauconnier & Turner,1998) και η εννοιολογική θεωρία μεταφοράς (Lakoff, 1993; Lakoff & Johnson, 1980, 1999).

Ο Whorf (1956, σελ.212-214) έγραψε: «*Διαπιστώθηκε ότι το υπόβαθρο του γλωσσικού συστήματος...από κάθε γλώσσα είναι όχι μόνο ένα όργανο αναπαραγωγής για την έκφραση των ιδεών αλλά μάλλον είναι ο διαμορφωτής των ιδεών...Ο κόσμος παρουσιάζεται σε ένα καλειδοσκόπιο ρευστής κατάστασης των εντυπώσεων που πρέπει να οργανωθεί από το μυαλό μας και αυτό εννοείται κατά ένα μεγάλο μέρος από τα γλωσσικά συστήματα μέσα στα μυαλά μας. Αυτό το γεγονός είναι πολύ σημαντικό για τη σύγχρονη επιστήμη, γιατί σημαίνει ότι κανένα πρόσωπο δεν είναι ελεύθερο να περιγράψει τη φύση με απόλυτη αμεροληψία αλλά είναι περιορισμένο σε ορισμένους τρόπους ερμηνείας ακόμη και όταν είναι ελεύθερο όταν σκέφτεται. Εισαγόμαστε έτσι σε μια νέα αρχή της σχετικότητας, η οποία υποστηρίζει ότι όλοι οι παρατηρητές δεν οδηγούνται από την ίδια σωματική ένδειξη στην ίδια εικόνα του κόσμου, εκτός αν τα γλωσσικά υπόβαθρά τους είναι παρόμοια, ή μπορούν με κάποιο τρόπο να διαμετρηθούν*».

Με βάση αυτά τα συμπεράσματα οι Lakoff και Nunez (2000) ανέλυσαν πολλές περιοχές στα μαθηματικά, από τη θεωρία συνόλων έως τους υπερβατικούς αριθμούς. Απέδειξαν (μέσω των καθημερινών ανθρώπινων ενσώματων μηχανισμών, όπως οι εννοιολογικές μεταφορές, τα εικονό-σχήματα και τα εννοιολογικά μίγματα) ότι τα επαγωγικά σχήματα προέρχονται από την άμεση σωματική εμπειρία που έχουμε στον πραγματικό κόσμο. Η εμπειρία αυτή εκτείνεται με πολύ συγκεκριμένους και ακριβείς τρόπους ώστε να δώσει αφορμή για μία νέα προκύπτουσα επαγωγική οργάνωση σε μία καθαρά φανταστική περιοχή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

Γεωμετρικός – Χωρικός Συλλογισμός

«Όλη η γνώση μας έχει τις ρίζες της στην αντίληψή μας.»

Leonardo da Vinci

5.1 Η κατανόηση του χώρου

Η αντίληψη για τον κόσμο περιλαμβάνει τη μελέτη του χώρου και του σχήματος, η οποία οδηγεί τελικά στη γεωμετρία. Σύμφωνα με τους Nemirovsky, Tierney & Wright (1998), ο χώρος που προσδιορίζεται από τις διαισθήσεις, τα βιώματα και την εμπειρία του ατόμου είναι υποκειμενικός. Αυτός αντιπαραβάλλεται στον αντικειμενικό ή απόλυτο χώρο, ο οποίος προσδιορίζεται από μετρήσεις και τους Νευτώνειους νόμους.

Ο Duval (1998) υποστηρίζει ότι η γεωμετρία αποτελείται από τρία είδη γνωστικών διαδικασιών που πραγματοποιούν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες.

i. **Απεικόνιση**: η διαδικασία που συσχετίζεται με την αναπαράσταση του χώρου.
ii. **Κατασκευή**: γίνεται με χρήση συσκευών.
iii. **Συλλογισμός**: σχετίζεται με τις λεκτικές διαδικασίες και την επέκταση γνώσης για απόδειξη και επεξήγηση.

Τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών συνδέονται στενά και η συνεργασία τους είναι απαραίτητη για οποιαδήποτε πρόοδο στη γεωμετρία (Πρωτοπαπάς, 2003).

Αν επιστρέψουμε στα χρόνια της αρχαιότητας, η στοιχειώδης γεωμετρία (πριν ακόμα γίνει θεωρητική γνώση) αποτελούσε ένα αποτελεσματικό μοντέλο στην τεχνολογική επεξεργασία των αντικειμένων του χώρου. Θέλοντας όμως σήμερα να μελετήσουμε τα ζητήματα που αφορούν στην ψυχολογία των μηχανισμών και τη συγκρότηση των εννοιών της γεωμετρίας είναι ανάγκη να κάνουμε μια πρώτη διάκριση μεταξύ του αντιληπτικού και του αναπαραστατικού χώρου (Σπύρου & Λάππας, 2007). Η ικανότητα αντίληψης του χώρου είναι δυνατό να βελτιωθεί με εξάσκηση. Αρωγός σε κάτι τέτοιο είναι η προσέγγιση μέσω μετασχηματισμών, η οποία κάνει τη γεωμετρία ένα ελκυστικό και δυναμικό αντικείμενο. Για τον Einstein τα στοιχεία της σκέψης δεν ήταν λέξεις αλλά συγκεκριμένα σήματα και λιγότερο ή περισσότερο ξεκάθαρες εικόνες οι οποίες μπορούσαν αβίαστα να αναπαραχθούν ή να συνδυαστούν (Clemens & Batista, 1992).

Ο χώρος που μας περιβάλλει αποτελεί την κυριότερη πηγή ανάπτυξης των περισσότερων εννοιών. Από πολύ μικρός ο άνθρωπος οριοθετεί και προσανατολίζει

τον εαυτό του από τον περιβάλλοντα χώρο και τα αντικείμενά του. Στη συνέχεια οριοθετεί και συσχετίζει τα αντικείμενα μεταξύ τους και αναπτύσσει βαθμιαία μια αντικειμενική αντίληψη του χώρου συμπεριλαμβάνοντας και τον εαυτό του μέσα σε αυτόν (Τζεκάκη, 1996). Άλλωστε, ακόμη και οι πιο αφηρημένες έννοιες, εάν αναλύονται κατάλληλα, παρουσιάζουν τα σημάδια προέλευσής και εξάρτησης τους, σε βασικά αντιληπτικά σχήματα κίνησης. Επίσης, οι ανθρώπινες εννοιολογικές δομές είναι τέτοιες που επηρεάζονται βαθιά από τις λεπτομέρειες της φυσικής ύπαρξής μας. Διαλογιζόμαστε με τον ίδιο εξοπλισμό που χρησιμοποιούμε για να παρατηρήσουμε τα άμεσα περίχωρά μας, να τριγυρίσουμε σε αυτά, και να αλληλεπιδράσουμε με τους ανθρώπους και τα πράγματα.

Η αναπαραστασιακή αντιστοιχία αναφέρεται στις συνδέσεις ανάμεσα σε κατηγορίες αντικειμένων και τα σύμβολά τους. Έχει αποδειχτεί ότι κατανοείται πρωτύτερα από τη γεωμετρική (Liben & Yekel,1996) ενώ πειράματα έχουν δείξει ότι ακόμη και τα τρίχρονα παιδιά κατανοούν την έννοια του «συμβολίζω-αντιπροσωπεύω» σε αναπαραστάσεις χώρου αναφορικά με την τοποθέτηση αντικειμένων στο χώρο (Blades & Spencer, 1994).

Η απασχόληση της χωρικής αντίληψης για την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών είναι παλαιότερη αλλά εξετάζει τη γενική περιγραφή και δε βοηθάει στον αφαιρετικό μηχανισμό της προηγμένης μαθηματικής σκέψης (Battista & Clements, 1992; Bender & Schreiber 1980; Bishop 1980; Glen & Clements 1981). Οι Bender & Schreiber (1980) προσπαθούν να κατανοήσουν το χώρο οργανώνοντας χωρικά φαινόμενα. Υποστηρίζουν ότι γεωμετρικές έννοιες όπως ‘ευθεία’, ‘κύκλος’, ‘επίπεδο’, ‘ορθογώνιο’, ‘παράλληλες’, κ.ο.κ. δε βρίσκονται έτσι στη φύση αλλά υπάρχουν αρχικά ως ιδέες στον άνθρωπο. Οι Watson et al. (2002) θεωρούν ότι ο άνθρωπος είναι αυτός που τις μεταφέρει στο φυσικό κόσμο για τους δικούς του σκοπούς. Προκειμένου να περιγραφεί κάποιο φυσικό φαινόμενο πρέπει ο άνθρωπος να ασχοληθεί πρώτα με τις φυσικές έννοιες μέσω των οποίων κατασκευάζεται το φυσικό πρότυπο και η διατύπωση αυτή να μεταφερθεί έπειτα σε ένα μαθηματικό μοντέλο.

Η Manno (2006) αναφέρει ότι οι βασικές μαθηματικές έννοιες παρουσιάζουν εντυπωσιακή σταθερότητα για εκατοντάδες (ή και χιλιάδες) έτη. Θεωρεί πως για να συμβεί αυτό απαιτείται αφ’ ενός ένα κοινό σύνολο νευρικών και σωματικών δομών με τις οποίες θα κατασκευαστούν οι μαθηματικές ιδέες. Αφ’ ετέρου απαιτείται αυτή η εννοιολογική κατασκευή να χρησιμοποιήσει τον πιο κοινό τόπο των καθημερινών εμπειριών, όπως η κίνηση, οι χωρικές σχέσεις, ο χειρισμός αντικειμένων, ο χώρος και ο χρόνος.

Η συστηματική μελέτη της γεωμετρίας λοιπόν, επιτρέπει στους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις έννοιες του χώρου, να κατασκευάζουν σχήματα και να τα επεξεργάζονται, να συσχετίζουν αρχές και εικασίες. Περαιτέρω να επιχειρούν μια διαθεματική προσέγγιση συνδυάζοντας γεωμετρικές ιδέες με αριθμούς, να κατανοούν τα σχήματα και τις σχέσεις τους μέσω της σύγκρισης. Εν κατακλείδι “η μάθηση πραγματώνεται μέσω της εμπειρίας” σύμφωνα με την άποψη του Dewey.

5.2 Η αντίληψη των εννοιών του χώρου από το παιδί

Οι Varela et al. (1999, σελ 176) αναφέρουν ότι οι Piaget & Inhelder (1956) οδηγήθηκαν σε μια θεωρία για το πώς αντιλαμβάνονται τα παιδιά το χώρο. Για τον Piaget το παιδί δεν είναι ούτε αντικειμενιστής (objectivist) ούτε ιδεαλιστής (idealist). Έχει τη δική του δραστηριότητα και ακόμα και η πιο απλή ενέργεια αναγνώρισης

ενός αντικειμένου μπορεί να κατανοηθεί μόνο με όρους της δικής του δραστηριότητας.

Τα παιδιά στα πρώτα δύο χρόνια της ζωής τους συγκροτούν τον αισθησιοκινητικό χώρο, ο οποίος είναι συντονισμός αισθήσεων και κινήσεων. Οι Piaget & Inhelder (1956) υποστηρίζουν πως για να μελετήσουμε το χώρο πρέπει να λαμβάνουμε υπ' όψιν δύο αλλαγές. Τις αλλαγές των θέσεων του σώματός μας και τις αλλαγές καταστάσεων που είναι εξωτερικές από μας.

Η Τζεκάκη (1996) αναφέρει ότι οι ιδέες όμως που βρίσκονται πίσω από οργανωμένα αναπαραστασιακά συστήματα είναι αρκετά δύσκολο να συλληφθούν από τα μικρά παιδιά και το γεγονός αυτό, σύμφωνα με τον Lawer (1985), οφείλεται στις διαφορετικές διαισθήσεις που έχουν για την κατανόηση της θέσης και της κίνησης σ' ένα πλάνο. Οι διαισθήσεις αυτές απορρέουν τόσο από τις αντιλήψεις των παιδιών αναφορικά με το χώρο όσο και από το σωματικό συντονισμό (body syntonicity) (Papert, 1980). Εξαιτίας της διαφορετικής προέλευσής των διαισθήσεων, είναι δύσκολο τα παιδιά να τις συνδυάσουν έτσι ώστε να ερμηνεύσουν μια απλή κατάσταση.

Ο Piaget ισχυρίζεται ότι το παιδί αρχικά είναι ανίκανο να κάνει διαφοροποιήσεις ανάμεσα στο ίδιο και τον υπόλοιπο κόσμο. Δε γνωρίζει ότι υπάρχει κάτι πέρα από το ίδιο ούτε αναγνωρίζει την ίδια του την ύπαρξη. Είναι ιδιαίτερα εγωκεντρικό (Donaldson, 2001, σελ.180). Η Manno (2006) λέει ότι σύμφωνα με τον Berthoz, ο εγκέφαλος χρησιμοποιεί δύο διαφορετικά πλαίσια για να αναφέρει την αναπαράσταση της θέσης των αντικειμένων. Οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων σε ένα δωμάτιο μπορούν να κωδικοποιηθούν ως «εγωκεντρικές», όπου συσχετίζονται όλες με τον εαυτό μας, ή ως «αλλοκεντρικές», που συσχετίζονται με ένα πλαίσιο αναφοράς που είναι εξωτερικό για το σώμα μας. Τα παιδιά αρχικά σχετίζουν το χώρο με τα σώματά τους και η δυνατότητα της αλλοκεντρικής κωδικοποίησης εμφανίζεται αργότερα.

Έτσι λοιπόν, ενώ η βασική κωδικοποίηση του χώρου αρχίζει πολύ νωρίς, η ικανότητα της αναπαράστασής του ακολουθεί μια μακρά πορεία. Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1956) η πρώτη χωρική γνώση ενός αντικειμένου για το παιδί, έρχεται με το να βάζει το αντικείμενο στο στόμα του. Να υπενθυμίσουμε εδώ πως στην περίπτωση του χώρου, ως αντικείμενο θεωρείται κάθε αντιληπτικός σχηματισμός. Στα δύο πρώτα στάδια λοιπόν είναι άμεση η ανάμειξη του σώματος, χωρίς όμως να υπάρχει συντονισμός. Στο τρίτο στάδιο επέρχεται ο συντονισμός (π.χ. το παιδί καθοδηγούμενο από την όρασή του θα πιάσει ένα αντικείμενο). Κάτι τέτοιο όμως δε συνεπάγεται συντονισμό αντικειμένων. Δηλαδή, αν κάποιος ενήλικας δείχνει στο παιδί μια μπάλα και ξαφνικά την κρύψει πίσω από την πλάτη του, το παιδί δεν είναι σε θέση να συνδυάσει τις διαφορετικές αυτές χωρικότητες. Στο τέταρτο στάδιο μεταβαίνουμε στην αντικειμενικότητα, όπου εκεί το παιδί ανακαλύπτει την αντιστρεψιμότητα των νοητικών πράξεων. Στο πέμπτο στάδιο η έννοια του χώρου συμβαδίζει με την έννοια της μονιμότητας. Το παιδί αναζητά το αντικείμενο ακόμα και μετά από πολλές μετακινήσεις του, χωρίς όμως να μπορεί να αναπαραστήσει νοητικά τις σχέσεις του. Στο έκτο στάδιο γίνεται πλέον η νοητική αναπαράσταση του αντικειμένου, όπου π.χ. θα αναζητήσει μία μπάλα ακόμα κι αν αυτή έχει βγει από το οπτικό του πεδίο.

Στο τέλος λοιπόν της αισθησιοκινητικής περιόδου γίνεται η πρώτη οργάνωση του χώρου από το παιδί, όπου καταφέρνει να τον αναπαραστήσει με μια εσωτερική νοητική πράξη. Οι εσωτερικεύσεις των πράξεων αυτών βοηθούν επίσης στην οργάνωση του αντιληπτικού χώρου.

5.3 Η ταξινόμηση των χωρικών σχέσεων

Για να επιτευχθεί η δόμηση του χώρου από το παιδί πρέπει να χρησιμοποιηθούν τρία κύρια συστήματα, τοπολογικό, προβολικό και ευκλείδειο (Λάππας & Σπύρου, 2007). Σύμφωνα με τους Liben & Yekel (1996) η γεωμετρική αντιστοιχία αναφέρεται στις συνδέσεις ανάμεσα στα «*χωρικά*» χαρακτηριστικά των αντικειμένων και των συμβόλων τους και, σύμφωνα με την Τζεκάκη (1996), αφορά

- τις *οριοθετήσεις* μέσα στο χώρο (τοπολογικές σχέσεις και ιδιότητες)
- τις *ποιοτικές τοποθετήσεις* (σύνθεση τοπολογικών και προβολικών σχέσεων/ προοπτική) και
- τις *ποσοτικές σχέσεις* (σύνθεση των παραπάνω με τις μετρικές Ευκλείδειες σχέσεις)

Οι έννοιες αυτές μπορούν να παρατηρηθούν τόσο στο μικρό-χώρο, όσο και στο μέσο-χώρο και στο μακρό-χώρο (Τζεκάκη, 1996).

Η επιλογή κάποιου από τα τρία ανωτέρω συστήματα αναφοράς εξαρτάται μεταξύ άλλων και από το γενικότερο πλαίσιο μέσα στο οποίο γίνεται απαραίτητη η χρήση τους (Ackerman, 1991).

- Με βάση το *ευκλείδειο σύστημα*, τα σημεία και η κίνηση στο χώρο προσδιορίζονται από μετρήσεις, υπολογισμούς και συντεταγμένες. Πρόκειται για ένα απόλυτο σύστημα αναφοράς όπου η θέση και οι τοπολογικές σχέσεις των αντικειμένων αναπαρίστανται με λογικό-μαθηματικό τρόπο πάνω στο επίπεδο.
- Με βάση το *προβολικό σύστημα*, η θέση των αντικειμένων στο χώρο προσδιορίζεται από την προοπτική (οπτική γωνία) από την οποία φαίνονται τ' αντικείμενα. Περιλαμβάνει επίσης και τη διαδικασία αποκέντρωσης της σκέψης προκειμένου να γίνει αντιληπτή ποια είναι η θέση των αντικειμένων στο χώρο όταν τα βλέπει κανείς από διαφορετικές οπτικές γωνίες.
- Με βάση το *τοπολογικό σύστημα*, η θέση των αντικειμένων στο χώρο προσδιορίζεται αναφορικά με τη θέση άλλων αντικειμένων. Πρόκειται δηλαδή για ένα σχετικό σύστημα αναφοράς όπου η βάση για την περιγραφή ενός σημείου ή αντικειμένου στο χώρο είναι τ' άλλα αντικείμενα

Οι Piaget & Inhelder (1956) πιστεύουν ότι η πρωταρχική αντίληψη του χώρου από τα παιδιά έχει *τοπολογικό χαρακτήρα*. Παρατήρησαν δηλαδή ότι σε πρώτη φάση τα παιδιά αντιλαμβάνονται χαρακτηριστικά όπως η *εγγύτητα* και η *διάταξη*. Εξοικειώνονται πολύ γρηγορότερα με διαδικασίες που περικλείουν στένεμα, φάρδεμα, τοποθέτηση σε σειρές κ.ο.κ. Αργότερα διαπίστωσαν την αναγνώριση *προβολικών ιδιοτήτων*. Τα παιδιά κατανοούσαν τα αντικείμενά όταν αυτά εμφανίζονταν από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Εξοικειώνονταν πλέον με μεγεθύνσεις-σμικρύνσεις σχημάτων, με στροφές σχημάτων, με ξεδίπλωμα επιφανειών κ.ο.κ. Ωστόσο δεν μπορούσαν να διακρίνουν χαρακτηριστικά μέτρησης. Στο νοητικό επίπεδο του παιδιού η δόμηση του ευκλείδειου χώρου ερχόταν πολύ αργότερα σε σχέση με την τοπολογική και προβολική δόμηση. Ακόμα και στα 7 του

χρόνια, ο χώρος είναι συνδεδεμένος με συγκεκριμένες κινητικές δράσεις και δεν έχει αφαιρεθεί επαρκώς ώστε να αποτελέσει θέμα νοητικών λειτουργιών. Σοβαρά προβλήματα αντιμετώπιζαν σε πειράματα που έμπλεκαν οριζόντιες-κατακόρυφες γραμμές και επίπεδα. (Σπύρου και Λάππας, 2007).

5.4 Κατακόρυφος – Κάθετη Ευθεία

Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1956, σελ.375) ο προβολικός και ο ευκλείδειος χώρος δομούνται ο ένας σε συσχέτιση με τον άλλον. Λένε συγκεκριμένα ότι *«με την εισαγωγή των συντεταγμένων στον ευκλείδειο χώρο κάθε αντικείμενο συνδέεται με τα υπόλοιπα, μέσα από τρεις βασικές κατευθύνσεις : "δεξιά – αριστερά", "πάνω από – κάτω από", "μπροστά από – πίσω από" κατά μήκος μιας διεύθυνσης η οποία τέμνει αυτές που ανήκουν στις δύο διευθύνσεις της ορθής γωνίας.»*. Το ζεύγος *"πάνω από – κάτω από"* σχετίζεται με την ύπαρξη της βαρύτητας. Σε μια περιοχή του σύμπαντος χωρίς τη βαρύτητα δεν υφίστανται οι έννοιες της κατακόρυφου και του οριζόντιου επιπέδου. Αντιθέτως η έννοια της καθέτου, που είναι γεωμετρική, δεν παύει να έχει υφή, ανεξάρτητα της βαρύτητας.

Ο ορισμός της καθέτου συναντάται στο Βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη

> ***<u>Ορισμός (ι)</u>*** *: «όταν δύο ευθείες δημιουργούν τις εφεξής γωνίες ίσες, τότε καθεμιά που δημιουργείται λέγεται 'ορθή γωνία' και η ευθεία που γίνεται λέγεται 'κάθετη ευθεία'.»*

Στον ανωτέρω ορισμό δίνεται επίσης και ο ορισμός της ορθής γωνίας. Μέσω αυτής δίνονται οι ορισμοί της αμβλείας γωνίας (ια) και της οξείας γωνίας (ιβ). Να παρατηρήσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι το Αίτημα (δ) του Βιβλίου Ι των Στοιχείων αναφέρει τις ορθές γωνίες. Συγκεκριμένα

> ***<u>Αίτημα (δ)</u>*** *: «όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.»*

Από το αίτημα αυτό προκύπτει ότι η ορθή γωνία είναι ένα καθορισμένο μέγεθος και ως αμετάβλητο μέτρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο των αμβλειών και των οξειών γωνιών (Νεγρεπόντης, 2005). Η έκφραση *«κάθετη ευθεία»* αντιστοιχεί στο νήμα της στάθμης, στο αλφάδι (Heath, 1956).

Η αίσθηση της κατακόρυφου είναι χαρακτηριστική της ουσίας μας ως ευφυή όντα και είναι έμφυτη στην αντιληπτική σωματική εμπειρία μας σε μια φύση που εξουσιάζεται από τη βαρύτητα. Η αντίληψη που έχουμε γι' αυτήν και η αναγνώριση των μορφών παρέχουν το πλαίσιο για την κατασκευή των κεντρικών γεωμετρικών εννοιών (Lappas & Spyrou, 2006). Ο Merleau-Ponty (1945)[5] επίσης, έχει υπογραμμίσει τη σημασία της βαρύτητας στην κατανόηση του χώρου και η θέση του έχει υποστηριχτεί και από άλλους: Zuzne (1970), Ibboston & Bryant (1976), Varela & al (1999). Σύμφωνα με τον Lakoff (1987,σελ.277) η κατακόρυφος είναι η κύρια περιοχή πηγής και συνδέεται επίσης με την κατανόηση της ποσότητάς. Για τη σύλληψη της συγγένειας της κατακόρυφου με τον ορίζοντα έχει προταθεί στην

[5] Merleau–Ponty, M. (2000). *Phenomenology of Perception* (Colin Smith, μετάφραση). London: Routledge & Kegan Paul. (Πρωτότυπη έκδοση, 1945).

ψυχολογία ότι: «η απόκτηση της κατακόρυφου είναι σύγχρονη με αυτήν του οριζόντιου» (Piaget & Inhelder, 1956, σελ.400).

5.5 Συστήματα αναφοράς και οριζόντιων-κάθετων συντεταγμένων

Οι οριζόντιες και κάθετες διευθύνσεις παρατηρούνται παντού γύρω μας. Αν στρέψουμε τα κεφάλια μας θα τις διακρίνουμε στην επιφάνεια της θάλασσας, στους τοίχους και στα πατώματα των σπιτιών, στην ελεύθερη πτώση κ.λ.π. Προσφέρονται ως αντιληπτικά γεγονότα από τη στιγμή της γέννησης του ανθρώπου. Είναι φυσικές έννοιες αλλά για να κατανοηθούν και να μελετηθούν απαιτείται η δημιουργία ενός συστήματος συντεταγμένων, που μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε και τη θέση τους (Piaget & Inhelder, 1956).

Ως ενήλικες είμαστε συνηθισμένοι στο να χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αναφοράς και να οργανώνουμε τον εμπειρικό μας χώρο κάνοντας χρήση των συντεταγμένων αξόνων. Κάτι τέτοιο φαίνεται αυταπόδεικτο, όπως για παράδειγμα η κάθετος που δίνεται από το σωλήνα του νερού και η οριζόντια από την επιφάνεια του νερού. Σε ποια ηλικία όμως ένα παιδί μαθαίνει ή αποκτά αυτές τις έννοιες; Θα ειπωθεί ότι ως αποτέλεσμα του να ξαπλώνει ανάσκελα το παιδί έχει συναίσθηση του οριζόντιου (άξονα) από την κούνια και πως ανακαλύπτει τον κάθετο αμέσως μόλις προσπαθήσει να σηκωθεί.

Εδώ αγγίζουμε μία από τις χειρότερες παρεξηγήσεις που έχουν ταλαιπωρήσει τη θεωρία των γεωμετρικών εννοιών. Από το γεγονός ότι ένα παιδί αναπνέει, χωνεύει και έχει μια καρδιά που χτυπά, δεν συμπεραίνουμε ότι έχει γνώση του μεταβολισμού ή του κυκλοφορικού συστήματος. Στην καλύτερη περίπτωση, ίσως να έχει προσέξει τις κινήσεις του όταν αναπνέει ή το σφυγμό του. Όμως μία τέτοια αισθητικό-κινητική συνείδηση δεν οδηγεί στην κατανόηση των εσωτερικών φαινομένων των οποίων αυτές οι κινήσεις είναι μόνο το εξωτερικό και ορατό σημάδι. Με τον ίδιο τρόπο, από το γεγονός ότι μπορεί να σταθεί όρθιο ή να ξαπλώσει, το παιδί αρχικά αποκτά μόνο μια αποκλειστικά εμπειρική γνώση των δύο θέσεων του σώματος και τίποτ' άλλο. Για να προβάλλει πάνω σ' αυτό ένα γενικότερο σχήμα, πρέπει το παιδί σε κάποιο σημείο να ξεφύγει από το αποκλειστικό πεδίο της θέσης του σώματος και να συγκρίνει τη δική του θέση μ' αυτή των αντικειμένων που βρίσκονται γύρω του και κάτι τέτοιο είναι πέρα από την αποκλειστικά εμπειρική γνώση (Piaget & Inhelder, 1956, σελ.378)

5.6 Οριζόντιοι-Κάθετοι άξονες.

Το πιο απλό και φυσικό σύστημα αναφοράς που είναι διαθέσιμο στο παιδί είναι κατά πάσα πιθανότητα αυτό που παρέχεται από τον πραγματικό κόσμο με το σχήμα των κάθετων και οριζόντιων αξόνων (σταθερό βλέμμα). Τέτοιες έννοιες είναι, φυσικά, εντελώς σχετικές με τη δική μας κλίμακα εμπειρικής προσέγγισης, αφού σε μια ελαφρώς πιο ακριβή κλίμακα η επιφάνεια ενός υγρού δεν είναι πλέον επίπεδη και τα νήματα της στάθμης δεν είναι παράλληλα το ένα με το άλλο. Στο εμπειρικό επίπεδο, ο οριζόντιος άξονας δίνεται από μια επιφάνεια πάνω στην οποία ακουμπούν καθημερινά αντικείμενα, η γη η ίδια (όπου τη θεωρούμε επίπεδη) ή οι τεχνητές επιφάνειες των πατωμάτων, των ταρατσών κ.λ.π. Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας είναι η επιφάνεια ενός υγρού, ενός ποτού π.χ. στα ποτήρια. Όσο για τον κάθετο (άξονα), αυτός δίνεται από τους τοίχους των δωματίων των σπιτιών, από τους στύλους, τις σωλήνες της καμινάδας, τα δέντρα κ.ο.κ. Σταδιακά οι άξονες

δημιουργούν θέσεις αναφοράς έτσι ώστε όταν θεωρηθεί ένα επίπεδο στο χώρο ως οριζόντιο, τότε η κατακόρυφη διεύθυνση να είναι η κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο. Δηλαδή οι θεσιακές σχέσεις αντικαθίστανται από σχέσεις διάταξης και απόστασης.

Από τη μια πλευρά, οι ιδέες του κάθετου και οριζόντιου είναι εκ φύσεως φυσικές παρά μαθηματικές, δείχνοντας απλώς την κατεύθυνση που παίρνει ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση ή μια γραμμή κάθετη σε αυτό. Όμως από την άλλη μεριά, η επεξεργασία αυτών των εννοιών εισάγει ένα ζήτημα ανεξάρτητο από τη φυσική. Αυτή η (τουλάχιστον) σχετική ανεξαρτησία εξηγείται ευθέως από το ακόλουθο παράδοξο. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, οι γήινες κάθετοι δεν είναι απόλυτα παράλληλες και οι επιφάνειες των υγρών είναι καμπύλες. Όμως, γεωμετρικά, η ανακάλυψη των καθέτων και οριζοντίων διαμορφώνει την ιδιαίτερη περίπτωση που οδηγεί στην έννοια του ορθοκανονικού συστήματος που είναι μόνο παραπλήσια στην (φυσική) πραγματικότητα που εκφράζουν.

Για να ανακαλύψουμε εάν το παιδί κατανοεί πραγματικά αυτές τις έννοιες, όμως, είναι απαραίτητο να μελετήσουμε με ποιον τρόπο ανακαλύπτει τους φυσικούς νόμους, βγάζοντας συμπεράσματα από τα μικρά του πειράματα. Για παράδειγμα, νόμοι όπως η συνέχεια της επιφάνειας ενός υγρού οποιαδήποτε κι αν είναι η γωνία του δοχείου, ή η διαρκής κατεύθυνση του νήματος της στάθμης ανεξαρτήτως της γωνίας των κοντινών αντικειμένων. Η μελέτη της οριζόντιας και της κατακόρυφης διεύθυνσης έγινε με φιάλες που περιείχαν υγρό και με το σχεδιασμό αντικειμένων στις πλευρές ενός βουνού (Piaget & Inhelder, 1956, σελ. 379-384).

Τα πειράματα του Piaget έδωσαν διάφορα στάδια ανάπτυξης κατανόησης της οριζόντιας και της κατακόρυφης διεύθυνσης. Αρχικά το παιδί (έως 4-5 ετών) δεν μπορεί να παρουσιάσει ούτε το νερό ούτε το βουνό ως επίπεδη επιφάνεια. Ακόμα και στο δεύτερο στάδιο οι στύλοι είναι κάθετοι στις πλευρές του βουνού χωρίς να μπορούν να καθορίσουν την κατεύθυνση του νήματος της στάθμης σε σχέση με το βουνό. Κατά τον Piaget η κρίσιμη ηλικία για την ανάπτυξη των χωρικών εννοιών είναι γύρω στα 9 χρόνια, όπου και δημιουργεί νοερά ένα σύστημα αναφοράς.

Αυτά τα αποτελέσματα είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέροντα από την άποψη της περιπλοκότητάς τους, το αποτέλεσμα μίας ποικιλίας αντιληπτικών, εννοιολογικών και γραφικών παραγόντων. Κάθε ένα από τα παιδιά μπορούν να αναπαράγουν την κάθετο σε ορισμένες περιπτώσεις αλλά όχι σε άλλες, και αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε διαφορετική περίπτωση βασίζουν την κρίση τους σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς χωρίς να το συνειδητοποιούν. Είναι φανερό ότι η άποψη ενός παιδιού για την κάθετο δεν είναι μία λειτουργική έννοια, αφού ακόμα και οι ευθείες γραμμές δεν γίνονται αντιληπτές με λειτουργικούς όρους. Αφού η ιδέα της καθέτου είναι απλά ενστικτώδης , είναι φυσικό να διέπεται από ένα αντιληπτικό περιβάλλον.

Τα ευρήματα δείχνουν καθαρά, πως θα ήταν εντελώς λάθος να υποθέσουμε πως οι άνθρωποι έχουν έμφυτη ή ψυχολογικά πρώιμη τη γνώση του χωρικού περιβάλλοντος που είναι σε ένα οργανωμένο σύστημα αναφοράς με δύο ή τρεις διαμέτρους. Αρχικά, το παιδί δεν έχει καν συναίσθηση των πραγματικών ή φυσιολογικών εννοιών της καθέτου ή της οριζόντιας για έναν πολύ απλό λόγο. Ο λόγος είναι ότι η αντίληψη καλύπτει ένα πολύ περιορισμένο πεδίο, ενώ αντίθετα ένα σύστημα αναφοράς προϋποθέτει λειτουργική ένταξη πολλών πεδίων στο σύστημα συντεταγμένων.

Όντας μακριά από το να αποτελεί το αρχικό σημείο της αντίληψης του χώρου, το σύστημα αναφοράς είναι στην πραγματικότητα το κορυφαίο σημείο ολόκληρης της ψυχολογικής ανάπτυξης του ευκλείδειου χώρου. Ένα σύστημα συντεταγμένων προϋποθέτει καταρχήν, τις τοπολογικές έννοιες της διάταξης και διάστασης.

5.7 Αρχέτυπα αποτελέσματα, Αντικειμενικότητα και Πυθαγόρειο Θεώρημα

Οι λειτουργίες που συνδέονται με τις έννοιες της κατακόρυφου, της οριζοντίου και της ομοιότητας αποτελούν ιδιότητες της χωρικής αντίληψης που έχει ο άνθρωπος. Για να επιτύχουμε μία αντικειμενική απόδοση των λειτουργιών αυτών χρησιμοποιούμε αριθμητικές και λογικές σχέσεις, παίρνοντας τα πρώτα αποτελέσματα για τη γεωμετρία. Η ανησυχία της ανθρωπότητας για την ιδέα του αριθμού ήταν ένα πρώτο όργανο για να αποκτήσει η γεωμετρία *«αντικειμενικότητα»*. Κι αυτό γιατί ο αριθμός αντιπροσωπεύει τη βεβαιότητα της γνώσης της παγκόσμιας αλήθειας. Τα μαθηματικά είναι πολύ δεμένα στη λογικο-μαθηματική δυνατότητα του υπολογισμού. Μέσω των αριθμών, η εμπειρία γίνεται ομοιογενής, δι-υποκειμενική και μεταφέρεται ευκολότερα. Επομένως, αποτελέσματα όπως οι Πυθαγόρειες τριάδες στα οποία η *«αντικειμενικότητα»* δίνεται από μια αριθμητική σχέση, εμφανίζονται ως *«αρχέτυπα»* των πιο πρόσφατων βασικών θεωρημάτων της γεωμετρίας (Lappas & Spyrou, 2006).

Το αρχέτυπο, σύμφωνα με τους Harley (1995, σελ. 193) και Malt (1999, σελ. 333), θεωρείται ως το «καλύτερο υπόδειγμα» μιας έννοιας, ως προδιαγραφή για τα μέλη μιας οικογένειας και από αυτή την άποψη είναι ο ιδανικός πυρήνας μιας έννοιας. Η θεωρία των αρχετύπων λειτουργεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Στηρίζεται σε κάποια «στοιχειώδη» αρχέτυπα, τα οποία εξαρτώνται μόνο από τη λεκτική περιγραφή. Από αυτά προκύπτουν κάποιες αρχικές έννοιες και με μία πρόσθετη εννοιολογική δομή έχουμε τα «αρχέτυπα αποτελέσματα». Η όλη αυτή διαδικασία θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί ένα ‘μοντέλο’ (Lappas & Spyrou, 2006). Τέτοια μοντέλα αρχετύπων είναι π.χ. οι γωνίες, το τρίγωνο κ.α.

Η σπουδαιότητα που έχει ο ρόλος της γλώσσας σε μία τέτοια διαδικασία φαίνεται από τα λόγια του Tall που ακολουθούν

> *«Η γλώσσα παίζει έναν όλο και περισσότερο λεπτό ρόλο σε αυτήν την γεωμετρική ανάπτυξη. Οι πρωτότυπες μορφές όπως μια ευθεία γραμμή, ένα τρίγωνο, ένας κύκλος, περιγράφονται προφορικά με τρόπους που υποστηρίζουν τη φαντασία των τέλειων πλατωνικών αναπαραστάσεων, όπως η τέλεια ευθεία γραμμή χωρίς πλάτος που μπορεί να εκταθεί αυθαίρετα προς κάθε κατεύθυνση, ή το τέλειο τετράγωνο, ένας τέλειος κύκλος. Κατά συνέπεια, παραδόξως, οι τέλειες γεωμετρικές οντότητες εξαρτώνται από τη γλώσσα για να κατασκευάσουν τη σημασία τους.»*
>
> *Tall et al. (2000)*

Ο Σπύρου (2005) αναφέρει ότι, σύμφωνα με τον Lakatos (1997), τα αρχέτυπα αποτελέσματα αποτέλεσαν μια πρωτόγονη αντικειμενική γνώση, την «προ-ιστορική» περίοδο της γεωμετρίας, πριν από την εμφάνιση οποιασδήποτε συνεπούς λογικής παραγωγικής θεωρίας. Επιτακτική ήταν η ανάγκη να ενσωματωθούν τα ήδη υπάρχοντα «αρχέτυπα» αποτελέσματα μέσα σε μια θεωρία για τη γεωμετρία. Αυτό αποτέλεσε μια εννοιολογική μετατόπιση, όπου έκαναν την εμφάνισή τους διάφοροι γνωστικοί παράγοντες όπως:

- Τυπικές περιγραφές και παραγωγικές αποδείξεις.
- Πρόσθετη παραγωγή αφηρημένων εργαλείων (όπως το επίπεδο, η γωνία, το εμβαδόν και η κατασκευή), δεδομένου ότι η συσσωρευμένη εμπειρική γνώση δεν αρκεί.
- Τεχνικές για τις κατασκευές και τις αποδείξεις.

5.8 Επίπεδα Van Hiele και ενσώματα αντικείμενα

Τα ενσώματα αντικείμενα αρχίζουν να γίνονται κατανοητά με την αισθητήρια αντίληψη που έχει ο καθένας μας (σε ένα αρχικό στάδιο). Έπειτα καθορίζονται στη διανοητική σκέψη μέσω της χρήσης της γλώσσας. Πολλά παιδιά όμως (ακόμη και φοιτητές) δεν αναπτύσσουν τη σκέψη τους πέρα από την ήδη υπάρχουσα ενσώματη αντίληψή τους. Άλλοι, όσο μεγαλώνουν δεν προκαλούνται από τις συνειδητές συνδέσεις με την ενσώματη αίσθηση τους για τον κόσμο, παρά μόνο εξάγουν έννοιες από την τυπική αφαίρεση (Pinto,1998)[6]. Αυτό δίνει όλο και περισσότερο μια περίπλοκη σύλληψη των ενσώματων αντικειμένων κατά τρόπο γενικό ο οποίος συγκεκριμένα περιγράφηκε από τους Van Hiele[7] σε σχέση με τα γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι Van Hiele (1959) κατέληξαν στη διατύπωση πέντε επιπέδων κατανόησης και των φάσεων της μάθησης, που τράβηξαν αμέσως την προσοχή της παγκόσμιας κοινότητας. Τα επίπεδα αυτά όσον αφορά τη σχολική γεωμετρία είναι τα εξής:

- ***Επίπεδο 1 (αναγνώριση):*** ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα ως μία ολότητα *(gestalt)* και όχι σε σχέση με τις ιδιότητές τους. Μπορεί να τα κατονομάσει (π.χ. ως τρίγωνα ή τετράγωνα) αλλά δεν μπορεί να διατυπώσει τις ιδιότητές τους. Για την περιγραφή τους χρησιμοποιεί οπτικά πρότυπα (αναγνωρίζει π.χ. έναν κύκλο γιατί μοιάζει με μια μπάλα).
- ***Επίπεδο 2 (ανάλυση):*** ο μαθητής αναγνωρίζει ένα σχήμα από τις ιδιότητές του (π.χ. ένα σχήμα είναι ορθογώνιο γιατί έχει τέσσερις γωνίες ορθές). Μπορεί επίσης να αναφέρει άλλες ιδιότητες των σχημάτων (π.χ. τα ορθογώνια έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες) αλλά δεν μπορεί να τις ορίσει τυπικά, ούτε και να τις αποδείξει.
- ***Επίπεδο 3 (διάταξη):*** ο μαθητής συνδέει τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους και τα ταξινομεί σε κατηγορίες (π.χ. κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο). Αρχίζει να κατανοεί το ρόλο του ορισμού. Μπορεί να κάνει απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς αλλά δεν μπορεί να συνθέσει αποδείξεις αυτών.

- ***Επίπεδο 4 (παραγωγικότητα):*** ο μαθητής κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης. Είναι σε θέση να αποδείξει μία πρόταση χρησιμοποιώντας δεδομένα. Δεν αναγνωρίζει όμως την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη.
- ***Επίπεδο 5 (αυστηρότητα):*** ο μαθητής κατανοεί την αναγκαιότητα για αυστηρότητα. Είναι πλέον σε θέση να κατανοήσει αφηρημένους παραγωγικούς συλλογισμούς. Κατανοεί ιδιότητες όπως η συνέπεια, η ανεξαρτησία και η πληρότητα των αξιωμάτων.
-

[6]Η αναφορά στον Pinto γίνεται από τον Tall (2003) (βλ. βιβλιογραφία στο παράρτημα).
[7] Η πηγή είναι: *Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. New York: Academic Press.* (βλ. βιβλιογραφία στο παράρτημα).

Συνοπτικός πίνακας των επιπέδων κατανόησης

Επίπεδο 1	**Αναγνώριση ή Οπτικοποίηση**
Επίπεδο 2	**Περιγραφή ή Ανάλυση ιδιοτήτων**
Επίπεδο 3	**Σύνδεση ή Άτυπη παραγωγή**
Επίπεδο 4	**Απόδειξη ή Τυπική παραγωγή**
Επίπεδο 5	**Αυστηρότητα ή Αξιωματικοποίηση**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

Ερευνητική Διαδικασία

"Ο δάσκαλος στις σχέσεις του με το μαθητή πρέπει να στοχεύει πώς να αχρηστέψει τον εαυτό του. Αυτό είναι δύσκολο. Τότε όμως ο μαθητής μαθαίνει μόνος του, γίνεται αυτόνομος και ο θρίαμβος του δασκάλου είναι να κάνει το μαθητή αυθύπαρκτο και ανεξάρτητο."

ΣΩΚΡΑΤΗΣ

6.1 Το πρόβλημα

6.1.1 Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια παρατηρούνται χαμηλά ποσοστά κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών στα σχολεία (Clements & Battista, 1992). Για να αντιστραφεί μία τέτοια εικόνα, πολλοί ερευνητές συστήνουν την προσέγγιση των εννοιών με χρήση των πρωτογενών καταστάσεων, μέσα στις οποίες διαμορφώθηκαν οι έννοιες (Arcavi & Bruckheimer, 2000; Jahnke et al., 2000). Ιδιαίτερη σημασία πλέον έχει ο τρόπος με τον οποίον οι μαθητές κατασκευάζουν τις μαθηματικές γνώσεις, όπου οι Lakoff & Nunez (2000) αναζητούν τον τρόπο αυτόν στη σωματικότητα των ανθρώπων. Η έρευνα αυτή επιχειρεί να ερμηνεύσει την προεργασία που έγινε για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, συνδέοντάς το με τις τριάδες, και να εξετάσει πώς επανενεργοποιούνται και πώς εδραιώνονται οι ιστορικές επινοήσεις στο σημερινό πλαίσιο διδασκαλίας.

6.1.2 Διατύπωση του προβλήματος

Εν γένει, στη μαθηματική κοινότητα όλο και περισσότεροι αναφέρουν πως αν κοιτάξει κάποιος τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μπορεί να παρατηρήσει ότι απουσιάζουν λειτουργίες όπως η διαίσθηση, ο στοχασμός, ο συλλογισμός, η φαντασία, στοιχεία που ενεργοποιούνται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας. Όπως υποστηρίζουν οι Οικονόμου & Τζεκάκη (1999), μία τέτοια κατάσταση οφείλεται στο γεγονός ότι η πρακτική της

δραστηριοποίησης των μαθητών για την αντιμετώπιση ενός 'αγνώστου προβλήματος', με στόχο την οικοδόμηση νέων μαθηματικών γνώσεων, έχει εξαιρετικά περιορισμένη εφαρμογή στην εκπαίδευση. Κινούμενα προς την αντίθετη κατεύθυνση της διαπίστωσης αυτής, τα ενσώματα μαθηματικά εφαρμόστηκαν από πολλούς ερευνητές σε διάφορους τομείς και κυρίως στη Γεωμετρία (Edwards, 2002; Fyhn, 2008; Manno, 2006; Nemirovsky, 2003; Watson, Spyrou & Tall ,2002).

Η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια των πρόσφατων 10 χρόνων από τους Nunez, Edwards & Matos (1999) και από τους Lakoff & Nunez (2000). Οι Nunez et al. (1999) θεωρούν ότι η ανθρώπινη δημιουργία των μαθηματικών προκύπτει από την απόδοση νοήματος, που όχι μόνο δεν είναι αυθαίρετη αλλά αντιθέτως είναι σωματικά θεμελιωμένη. Η μελέτη της εννοιολογικής δομής των μαθηματικών από μία ενσώματη άποψη δείχνει πως τα μαθηματικά δομούνται από άτυπες, καθημερινές εμπειρίες και ιδέες (Nunez et al.,1999). Σύμφωνα με το γενικό θεωρητικό πλαίσιο των ενσώματων μαθηματικών, οι πρωταρχικές μαθηματικές έννοιες πρέπει να στηριχτούν πάνω στους έμφυτους γνωστικούς μηχανισμούς και στην αλληλεπίδρασή τους με το περιβάλλον (Kospentaris & Spyrou, 2005).

Ο Nemirovsky (2003) επίσης αναφέρει ότι η γνώση βασίζεται επιπλέον στις διάφορες αισθησιοκινητικές ικανότητες που έχει ένα σώμα. Αυτές, όπως υποστηρίζουν οι Varela et al. (1999), είναι ενσώματες σε ένα βιολογικό, ψυχολογικό και πολιτισμικό πλαίσιο και συνθέτουν την εμπειρία κάθε ανθρώπου. Ο Pea (1993) υπογραμμίζει ότι η ιστορική διάσταση είναι αυτή που κάνει τις σημειωτικές έννοιες (semiotic means) (δηλαδή έννοιες που παράγονται από σύμβολα και κανόνες χρήσης τους) της εξαντικειμενίκευσης (objectification) να φέρουν μία ενσώματη νοημοσύνη, μεταφέροντας πρότυπα προηγούμενων συλλογισμών. Η σημασία μιας έννοιας δεν καθορίζεται ολοκληρωτικά από το σημερινό της ορισμό αλλά είναι συνισταμένη της ιστορίας της, τόσο στο παρελθόν όσο και σήμερα. Σύμφωνα με τον Radford (2006), κάτι τέτοιο εξυπηρετεί την ανακάλυψη των αντικειμενικών σχέσεων των νόμων που κυβερνούν τα Μαθηματικά, καθώς η σκέψη μαζί με τη σημειωτική δραστηριότητα είναι μία επανενεργοποίηση (reaction) της συνάντησής μας με τα αντικείμενα του κόσμου. Αυτή η επανενεργοποίηση καθοδηγείται από ένα πραγματικό κίνητρο να καταλάβουμε τον κόσμο που απλώνεται μπροστά μας. Για να κατανοήσουμε πρέπει να πειραματιστούμε, να τυποποιήσουμε υποθέσεις και να μεταφέρουμε συμπεράσματα.

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιείται η φιλοσοφική υπόθεση των Lappas & Spyrou (2006), οι οποίοι θεωρούν ότι δύο από τους παράγοντες που διαμορφώνουν τη βασική αντίληψη της Γεωμετρίας είναι η κατακόρυφος και η ομοιότητα. Ισχυρίζονται ότι οι κύριοι μηχανισμοί, όπως η αντίληψη για τη βαρύτητα και η αναγνώριση των μορφών, παρέχουν το πλαίσιο για την κατασκευή των κεντρικών γεωμετρικών εννοιών. Η ιδέα ότι οι βασικοί παράγοντες για την αντίληψη του χώρου είναι η κάθετος, ο ορίζοντας και η αναγνώριση των οπτικών σχημάτων, φαίνεται να ανήκει στον Piaget (1956), ο οποίος συνέδεσε την αναγνώριση των μορφών με τη σύλληψη της αναλογίας.

Επιθυμητό, κατά τη διδασκαλία είναι να φανερωθεί εάν είναι δυνατή η επανενεργοποίηση της ιστορίας προκειμένου να είναι χρήσιμη για την τάξη. Όπως ισχυρίζονται οι Arcavi & Isoda (2007), η ιστορία των μαθηματικών είναι αυτή που μπορεί να χορηγήσει πολλές προσεγγιστικές λύσεις σε προβλήματα τα οποία είναι πολύ διαφορετικά σήμερα απ' ότι ήταν παλαιότερα. Τέτοιες λύσεις μπορεί να κρύβουν και τη σκέψη που βρίσκεται πίσω από αυτά. Για το λόγο αυτό, οι μαθητές μπαίνουν σε μια κατάσταση επανεφεύρεσης εκείνου του σημείου του ιστορικού

γεγονότος που οδήγησε στην παραγωγή του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Freudental (1991), ‘‘η ιστορία είναι αυτή που μας λέει πώς ανακαλύφθηκαν τα μαθηματικά’’ οδηγώντας τους εκπαιδευτικούς να δουν μέσα από τα μάτια των μαθητών τους, έχοντας βέβαια υπ’ όψιν ότι “ένα αρχαίο πρόβλημα ή μια αρχαία μαθηματική κατάσταση ποτέ δε θα είναι το ίδιο πράγμα” όπως αναφέρει ο Radford (1997). Υποστηρίζει όμως ο Radford (1997), ότι “ο τρόπος με τον οποίο μια αρχαία ιδέα ξεχάστηκε, μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε την παλαιά έννοια που, μέσω μιας προσαρμοστικής διδακτικής εργασίας, μπορεί πιθανώς να ξανασχεδιαστεί και να γίνει συμβατή με τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών στα πλαίσια της επεξεργασίας της ακόλουθης διδασκαλίας”. Φυσικά αυτός ο επανασχεδιασμός καθοδηγείται από μια παιδαγωγική φιλοσοφία και τις προσδοκίες του. Πρόθεση λοιπόν της έρευνας είναι να επανενεργοποιηθεί η αρχέγονη πράξη της εξαντικειμενίκευσης (objectification) στην περίπτωση της γεωμετρίας και ιδιαίτερα στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Λίγα λόγια για την εξαντικειμενίκευση (objectification).

Ο Husserl στο βιβλίο του “The origins of Geometry” ασχολήθηκε με το βασικό του ερώτημα που αφορούσε το “πώς η γεωμετρική ιδεατότητα (ideality) προχωράει από τις πρωταρχικές εσωτερικές ρίζες σε μία ιδεατή εξαντικειμενίκευση (objectification)?”. Η αντικειμενικότητα (objectivity) κατά τον Husserl είναι διπλή και επιτυγχάνεται

- Σε μια άμεση γλωσσική επικοινωνία που πραγματοποιείται από τον προφορικό λόγο και που ελευθερώνει το αντικείμενο από την ατομική υποκειμενικότητα.
- Στο συγχρονισμό μιας ανταλλαγής μέσα στην καθιερωμένη κοινότητα.

Από τη μια πλευρά είναι μία υποκειμενική οικοδόμηση των σκοπών που θέλει να μεταδώσει ένα άτομο και από την άλλη είναι ένα πολιτισμικό οικοδόμημα, προγενέστερο της υποκειμενικής εμπειρίας. Η εξαντικειμενίκευση του Husserl (Husserl, 1982, σελ.366) αναφέρεται στην αναπαράσταση και επομένως σε ένα σημειωτικό σύστημα (semiotic system) από το οποίο περιγράφεται και γίνεται προφανές το αντικείμενο. Λέγοντας σημειωτικό σύστημα, εννοείται οτιδήποτε προκύπτει από μία δραστηριότητα η οποία παράγεται από σύμβολα και κανόνες χρήσης αυτών. Για τον Pierce το πρόβλημα ήταν να εξηγήσει πώς η σημειωτική δραστηριότητα μπορεί να αποκαλύψει την πραγματική φύση των αντικειμένων, των οποίων η αντικειμενική ύπαρξη δεν εξαρτάται από το δικό μας σύστημα συμβόλων (Radford, 2006).

Ο Radford (2003, σελ.40) αναφέρει ότι «ο όρος ‘objectification’ έχει τις ρίζες του στη λέξη ‘object’, η οποία παράγεται πρωταρχικά από το λατινικό ρήμα ‘obiectare’ που σημαίνει *βγάζω κάτι προς τα έξω* (Charleton, 1966, σελ.550). Η κατάληξη ‘-tification’ προέρχεται από το ρήμα ‘facere’ που σημαίνει *κάνω* ή *φτιάχνω* (Charleton, 1966, σελ.311). Ετυμολογικά λοιπόν, η εξαντικειμενίκευση (objectification) σχετίζεται με εκείνες τις ενέργειες που στοχεύουν στο να φέρουν ή να βγάλουν κάτι μπροστά σε κάποιον, να κάνουν κάτι ορατό».

Όπως λένε οι Lappas & Spyrou (2006), κατά τον Derrida (1962, σελ.25-27) το μαθηματικό αντικείμενο είναι ιδεατό, απόλυτα αντικειμενικό, ολοκληρωτικά

απαλλαγμένο από την εμπειρική υποκειμενικότητα. Ανάγεται πάντα στην φαινομενολογική και οντολογική του υπόσταση, όμως δεν προϋπάρχει του υποκειμενικού ενεργήματος (όπως στον πλατωνισμό). Εάν έχει ιστορία πρέπει πρωταρχικά να αναπτυχθεί μέσα σε αυτήν και να σχετιστεί με την υποκειμενική πράξη (Derrida, 1962, σελ.40-45).

Οι Lappas & Spyrou (2006) μιλώντας για την αντικειμενικότητα των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται:

i. Στην ιδεατότητά τους (ως μαθηματικά αντικείμενα).
ii. Σε κοινωνικές συμφωνίες που εξετάζονται στα πλαίσια της ανθρώπινης εμπειρίας.

Και στις δύο περιπτώσεις θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι μαθηματικές έννοιες, σε οποιοδήποτε πολιτισμό, αντιπροσωπεύουν τη διϋποκειμενική γνώση και τις εκφράσεις της. Δηλαδή οι ιδέες και τα μαθηματικά αντικείμενα είναι εννοιολογικές μορφές ιστορικής, κοινωνικής και πολιτισμικής αντανάκλασης μιας ενσώματης μεσολαβητικής πράξης (Radford, 2006).

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχει δύο επίπεδα ανάπτυξης: την πρωτόγονη μέθοδο παρουσίασης του και την εξήγησή του μέσω των ιδιοτήτων των τριάδων. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η ανακάλυψη των τριάδων θα μπορούσε να αναδυθεί παρατηρώντας τον τρόπο που η βαρύτητα έλκει ένα οποιοδήποτε σώμα λόγω του βάρους του. Η αίσθηση αυτή της βαρύτητας αποτελεί μία σωματική πραγματικότητα που είναι αμετάβλητη σε κάθε ιστορικό χρόνο για όλα τα υποκείμενα. Εξαντικειμενικεύεται επομένως το Πυθαγόρειο Θεώρημα, σε ένα πρώτο στάδιο, μέσω των αριθμητικών σχέσεων. Η αντίστροφη περίπτωση (δηλ. έχοντας μια τριάδα να μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθή γωνία σε ένα επίπεδο) δίνει την εξαντικειμενίκευση της ορθής γωνίας που είναι ανεξάρτητη από την αίσθηση της βαρύτητας. Έχουμε έτσι μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για τον προσδιορισμό ενός αντικειμένου. Κάτι τέτοιο όμως δεν ήταν αρκετό για τη λογική επιχειρηματολογία, η οποία προέκυψε στα πλαίσια της γεωμετρίας. Η γενική απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ήρθε με την αντιμετώπιση των αριθμών ως σημειοτετράγωνα (dots), ένα καθαρά νοητικό όργανο, όπου πρότεινε μία ένα προς ένα αντιστοιχία των ευθύγραμμων τμημάτων και των τετραγώνων (Lappas & Spyrou, 2006).

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα ανωτέρω, η έρευνα αυτή επιδιώκει να εξετάσει το πώς οι ιστορικές επινοήσεις που σχετίζονται με τις Πυθαγόρειες τριάδες επανενεργοποιούνται μέσω της ενσώματης γνωστικής λειτουργίας οδηγώντας τους μαθητές να εξαντικειμενικεύσουν τις μαθηματικές έννοιες.

6.1.3 Σκοπός της έρευνας

Ο σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει εάν η επανενεργοποίηση της αρχέγονης πράξης της εξαντικειμενίκευσης στα μαθηματικά, που απέδωσε κατά πρωτογενή τρόπο την έννοια της καθέτου, ως αποτέλεσμα της αίσθησης της κατακόρυφου, θα μπορούσε να συμβάλλει σε μία ενεργητική διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος βασισμένη στη σωματική εμπειρία των μαθητών.

6.1.4 Αναγκαιότητα έρευνας

Σύμφωνα με το Ζαχαριάδη (2000), στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυριαρχεί μια «ψευδοαυστηρότητα» σε βάρος του νοήματος. Δε γίνεται προσπάθεια να συλλάβει ο μαθητής, στο βαθμό που αυτό είναι δυνατόν, την ουσία των εννοιών που διαπραγματεύεται και των μεθόδων που χρησιμοποιεί. Η αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων και οι σχέσεις μεταξύ αυτών και των αναπαραστάσεών τους αποτελούν σημαντικά προβλήματα στη γεωμετρία (Mesquita,1998). Οι Battista & Clements (1995) παρατηρούν ότι η παρουσίαση των γεωμετρικών εννοιών εξαφανίζει την πνευματική δραστηριότητά τους, από την οποία έχουν παραχθεί. Αυτή η νοοτροπία κάνει αναγκαία την εμφάνιση δημιουργίας καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων που να στοχεύουν στη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Ο Schoenfeld (1992) πιστεύει ότι η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να προσφέρει στο μαθητή μια αντίληψη της επιστήμης των μαθηματικών, του σκοπού, της δύναμης, της χρήσης και της ιστορίας τους. Πρέπει να δίνει μια αίσθηση του τι είναι τα μαθηματικά και πώς γίνονται στο επίπεδο που μπορούν να κατανοούν και να βιώνουν τα παιδιά. Αρκετοί είναι οι ερευνητές που προτρέπουν σε μία ενσώματη προσέγγιση των εννοιών μέσω της ιστορικότητας τους (Arcavi & Bruckheimer, 2000; Baker & Gravemeijer, 2006; Furinghetti, 2007; Jahnke et al., 2000; Nemirovsky, 2003; Radford, 2003). Ο Radford (2003) θεωρεί ότι η ανακάλυψη του τρόπου με τον οποίον τα άτομα φέρνουν στην επιφάνεια τις έννοιες και ο τρόπος που τις συνδέουν, ίσως δώσει κάποιο φως στην κοινωνική κατασκευή της γνώσης. Ο Nunez (2000) υποστηρίζει επίσης πως η ενσώματη εμπειρική μελέτη μπορεί να δώσει σημαντικές ιδέες για τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθηματικών. Η Edwards (2002) προτείνει μία παραγωγική έρευνα χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών, γιατί πιστεύει ότι η ενσώματη προσέγγιση μπορεί να ανακαλύψει τη φύση των μηχανισμών που κατασκευάζουν τις εννοιολογικές δομικές μονάδες των μαθηματικών. Η Manno (2006) ερευνά πώς η μαθηματική έννοια της καθέτου μπορεί να γεννηθεί σε σχέση με την κατακόρυφο, μέσω μιας καθημερινής εμπειρίας, και θεωρεί ότι θα ήταν πραγματικά ενδιαφέρον να επαναληφθεί μία τέτοια έρευνα με άλλες μαθηματικές έννοιες.

6.1.5 Σημαντικότητα έρευνας

Ο Ζαχαριάδης (2000) αναφέρει ότι αυτό που έχει επικρατήσει στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι μία λανθασμένη αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία έχει οδηγήσει σε έναν τρόπο σκέψης των μαθητών που δεν έχει καμία σχέση με το μαθηματικό τρόπο σκέψης. Το ενδιαφέρον της εκπαίδευσης επικεντρώνεται πλέον στη φύση και την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και κατ' επέκταση στη δημιουργία αποτελεσματικών μέσων και μεθόδων διδασκαλίας. Κάτι τέτοιο είναι επιθυμητό και ίσως απαραίτητο για τη στήριξη του σύγχρονου αναλυτικού προγράμματος διδακτικής των μαθηματικών.

Ιδιαίτερη σημασία για το σχεδιασμό μιας διδασκαλίας έχει ο τρόπος με τον οποίον κατασκευάζονται οι γνώσεις (Tymoczko, 1986). Η ιστορική φαινομενολογία, δηλαδή η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης μιας έννοιας σε σχέση με τα φαινόμενα που οδήγησαν στη γέννηση αυτής της ιδέας, είναι ένας από τους τρόπους προσέγγισης μιας μαθηματικής έννοιας, όπως αναφέρουν οι Baker & Gravemeijer (2006). Αυτοί θεωρούν ότι η ιστορική φαινομενολογία έχει αποδειχθεί χρήσιμη πηγή έμπνευσης για

διάφορα σχέδια διδασκαλίας γιατί βοηθάει να συζητηθούν προβληματικές καταστάσεις και να συσχετιστούν μαθηματικές έννοιες. Έτσι λοιπόν, στο πλαίσιο της διδασκαλίας της παρούσης έρευνας πραγματοποιήθηκε η πρωτόγονη μέθοδος του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω των ιδιοτήτων των τριάδων. Η ιστορία άλλωστε είναι αυτή που χορηγεί παραδείγματα αλγορίθμων και μεθόδων που επιτρέπουν την «εκμετάλλευση» της λειτουργικής φύσης των μαθηματικών αντικειμένων (Furinghetti, 2007) και σύμφωνα με τη Sierpinska (1991), "η γνώση της ιστορίας των εννοιών είναι πολύ χρήσιμη στις έρευνες για τη διάγνωση των δυσκολιών των μαθητών".

Αποτελέσματα ερευνών έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί δε θα πρέπει να χειρίζονται τα μαθηματικά συστήματα σαν τυπικά θέματα από την αρχή, αλλά θα πρέπει να τα εισάγουν υποστηρικτικά στην καθημερινή ανθρώπινη λογική (Gravemeijer & Doorman, 1999). Αξιοποιώντας την ενσώματη διδασκαλία, ο Nemirovsky (2003) πραγματοποίησε μία έρευνα για να εξετάσει πώς η σωματική δραστηριότητα εμπλέκεται στον τρόπο που ο άνθρωπος φαντάζεται τη μορφή και την κίνηση των μαθηματικών αντικειμένων. Η Fyhn (2008) επίσης, μελέτησε πώς ένα δωδεκάχρονο κορίτσι μπορεί να ανακαλύψει τις γωνίες ενώ αναρριχάται. Ειδικότερα, στον τομέα της Γεωμετρίας, η Edwards (2002) έκανε μία έρευνα για τους μετασχηματισμούς, όπου αντιμετωπίζοντας τους μικρόκοσμους ως αναπαραστάσεις κατέληξε στο ότι οι μαθητές διαφόρων ηλικιών αποκρίνονται με παρόμοιο τρόπο σε ένα νέο θέμα. Οι Watson, Spyrou & Tall (2002) μελετώντας το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη θεωρία των διανυσμάτων μέσα από τα ενσώματα μαθηματικά, ανέδειξαν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με τη μαθηματική μοντελοποίηση και την απόδοσή της. Επίσης, η Manno (2006) συμπέρανε ότι οι άνθρωποι έχουν χτίσει μια νοητική εικόνα που συνδέει την έννοια της καθέτου με το μοντέλο του νήματος της στάθμης.

Όπως επισημαίνουν οι Yackel, Cobb & Wood (1991), η έρευνα μέσα στη τάξη με στόχο την ανάπτυξη νέων μορφών διδασκαλίας των Μαθηματικών καθώς και η διερεύνηση των δυνατοτήτων τους, αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο. Γι' αυτό και πολλά ερευνητικά προγράμματα επιχειρούν πλέον με διαφορετικούς τρόπους να ξεπεράσουν τα μειονεκτήματα του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών και να δημιουργήσουν μέσα στις τάξεις πρότυπα περιβάλλοντα μάθησης για τους μαθητές. Η πρωτόγονη μέθοδος παρουσίασης και εξήγησης του Πυθαγορείου Θεωρήματος, μέσω των ιδιοτήτων των τριάδων, που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της διδασκαλίας της παρούσης έρευνας εκπληρώνει και κάποιους από τους στόχους της πολιτείας, όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, που διατυπώνονται στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου προς τους καθηγητές των μαθηματικών. Αυτοί, όπως αναφέρονται από τον Ζαχαριάδη (2000), είναι:

- Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών.
- Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ανάλυση, στη γενίκευση και στην αφαίρεση.
- Να ασκηθούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.

Με την πραγματοποίηση αυτής της έρευνας αναμένεται να ενισχυθεί η διδακτική πρόταση για αξιοποίηση της μαθηματικής και ειδικότερα της γεωμετρικής διαίσθησης μέσα στη σχολική αίθουσα, ανοίγοντας το δρόμο στα παιδιά για την αναγκαία στοχαστική αφαίρεση.

6.2 Μεθοδολογία

6.2.1 Περίληψη

Με βολική δειγματοληψία (convenience sampling) επιλέγηκαν δύο γυμνάσια της Αθήνας. Από τα σχολεία επιλέγηκαν 12 μαθητές, οι οποίοι αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας. Σε ζεύγη μαθητών πραγματοποιήθηκε διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο χώρο του σχολείου. Τα δεδομένα ήταν βιντεοσκοπήσεις, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας που πραγματοποίησαν οι δύο ερευνητές (όπως επίσης και αποβιντεοσκοπήσεις των διδασκαλιών), θεατή μη συμμετοχική παρατήρηση από τον ένα ερευνητή (όταν δίδασκε το μάθημα ο καθηγητής της εκάστοτε σχολικής τάξης) και συνεντεύξεις (εφόσον διδάχτηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στις σχολικές μονάδες) οι οποίες και απομαγνητοφωνήθηκαν.

6.2.2 Ποιοτική έρευνα

Στην έρευνα αυτήν υιοθετήθηκε η μέθοδος της ποιοτικής έρευνας καθώς οι στόχοι επιδίωκαν συλλογή και επεξεργασία δεδομένων σε βάθος. Επειδή εξετάζεται ολιστικά αυτό που μας ενδιαφέρει, κάθε άτομο οφείλει να μελετηθεί ξεχωριστά αφού ως μοναδική οντότητα χρήζει μελέτης. Οι ερευνητικοί στόχοι προϋποθέτουν καταγραφή και ανάλυση των αναπαραστάσεων και της σκέψης των μαθητών, της πραγματικής τους συμπεριφοράς (εξέλιξη σκέψης), και των υποκειμενικών τους προδιαθέσεων (αντιμετώπιση προβλήματος). Άλλωστε, σύμφωνα με τους Strauss & Corbin (1990), η ποιοτική ανάλυση είναι η πλέον κατάλληλη για τη διερεύνηση φαινομένων που σχετίζονται με μικρές κοινωνίες, με την κατανόηση των αναπαραστάσεων των ανθρώπων, των τρόπων σκέψης τους και των αφηγημάτων τους για την πραγματικότητα που βιώνουν.

Με τη μελέτη περίπτωσης παρατηρήθηκαν τα χαρακτηριστικά μιας ομάδας (12 παιδιών) προκειμένου να καταγραφεί ο τρόπος σκέψης τους και να γίνουν αναγωγές σε συμπεράσματα ποιοτικού χαρακτήρα. *Κάτι τέτοιο μας βοηθάει στο να κάνουμε πιθανές γενικεύσεις που να είναι χρήσιμες στον ευρύτερο πληθυσμό στον οποίον ανήκουν οι ομάδες οι οποίες μελετούνται* (Cohen & Manion,1997).

Επιλέχθηκε η συμμετοχική παρατήρηση της διαδικασίας με την ενεργή συμμετοχή των δύο ερευνητών στη διεξαγωγή της διδασκαλίας. Με τη μεθοδολογική αυτή προσέγγιση επιτεύχθηκε να καταγραφεί ρεαλιστικά η πραγματικότητα παρέχοντας μια «φυσική βάση» για γενίκευση (Adelman, 1980). Επίσης δόθηκε προσοχή στη λεπτομέρεια και στην πολυπλοκότητα που μπορούσε να αναδειχτεί μέσα από τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων.

6.2.3 Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Η διδασκαλία του μαθήματος και οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν από το συντάκτη της διπλωματικής και τον επιβλέποντά αυτής. Ο συντάκτης της έρευνας σχεδίασε τις δραστηριότητες της διδασκαλίας σε συνεργασία με τον επιβλέποντα καθηγητή, ο οποίος καθοδήγησε και συμμετείχε στην έρευνα. Ο συντάκτης παρακολούθησε επιπλέον τις διδασκαλίες που διεξήχθησαν στις σχολικές αίθουσες (από τους εκάστοτε καθηγητές των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα), επεξεργάστηκε και κατέγραψε την όλη έρευνα.

Η έρευνα διεξήχθη από τον Οκτώβριο του 2007 μέχρι το Φεβρουάριο του 2008 στην περιοχή της Αττικής. Αφορά μια μελέτη για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσα από την οπτική των ενσώματων μαθηματικών. Τα υποκείμενα ήταν μαθητές της Β' Γυμνασίου. Τον Οκτώβριο έγινε μια πιλοτική διδασκαλία σε 2 μαθητές του οικείου περιβάλλοντος των 2 ερευνητών για ν' αποφευχθούν τυχόν αδυναμίες που δεν είχαν προβλεφθεί. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν διδασκαλίες του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε 12 μαθητές της Β' Γυμνασίου (ανά ζεύγη). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα παιδιά δεν είχαν διδαχθεί την ενότητα αυτή στο τρέχον ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου τους. Η επιλογή των μαθητών έγινε από τους καθηγητές των Μαθηματικών που δίδασκαν αντίστοιχα τα παιδιά σε κάθε σχολείο. Τα ζευγάρια επιλέχτηκαν με κριτήριο τη φιλία που είχαν αναπτύξει μεταξύ τους καθώς επιθυμήσαμε ενεργό και "ζωντανό" μάθημα. Όλες οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν από το συντάκτη της έρευνας και από τον επιβλέποντα καθηγητή, οι οποίοι παράλληλα βιντεοσκοπούσαν το μάθημα. Τη στιγμή που τα παιδιά διδάχτηκαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σχολείο, έγινε μη-συμμετοχική παρατήρηση από τον συντάκτη της έρευνας. Κατά τη διάρκεια, δηλαδή, της διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τους καθηγητές τους στο σχολείο, παρευρέθηκε ο μεταπτυχιακός φοιτητής μέσα στην τάξη, χωρίς όμως να συμμετέχει στην παράδοση του μαθήματος, παρά μόνο παρακολουθούσε και κατέγραφε τις αντιδράσεις των παιδιών που μετείχαν στην έρευνα. Ακολούθησαν ημιδομημένες συνεντεύξεις και με τα 12 παιδιά, εφόσον διδάχτηκαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σχολείο τους, οι οποίες και ηχογραφήθηκαν.

6.2.4 Ο υπό μελέτη πληθυσμός

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές της Β' τάξης Γυμνασίου. Η δειγματοληψία ήταν βολική (convenience sampling). Τα υποκείμενά ήταν 12 μαθητές (7 αγόρια και 5 κορίτσια) από δύο Γυμνάσια του λεκανοπεδίου της Αττικής, το 62^{ο} Γυμνάσιο Αθηνών (Πετράλωνα) απ' όπου πήραμε 8 μαθητές (6 αγόρια και 2 κορίτσια) ανά ζεύγη (αγόρι-αγόρι, αγόρι-αγόρι, κορίτσι-κορίτσι, αγόρι-αγόρι), και το Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών (Αμπελόκηποι) απ' όπου επιλέξαμε 4 μαθητές (1 αγόρι και 3 κορίτσια) ανά ζεύγη (αγόρι-κορίτσι, κορίτσι-κορίτσι). Οι ηλικίες των υποκειμένων ήταν 13 – 14 ετών.

Σχολεία	Αγόρια	Κορίτσια
62^{ο} Γυμνάσιο Αθηνών	6	2
Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών	1	3

Τα ζεύγη αποτελούσαν οι μαθητές – μαθήτριες.

<u>62^{ο} Γυμνάσιο Αθηνών</u>

1. Κώστας – Άγγελος.
2. Χρήστος – Γιάννης.
3. Αγγελική – Δάφνη.
4. Γιώργος Κ. – Γιώργος Μ.

Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

1. Δανάη – Νίκος.
2. Νάντια – Ελένη.

6.2.5 Μέσα συλλογής δεδομένων

Για την εγκυρότητα και την αξιοπιστία της έρευνας, η επικύρωση των δεδομένων έγινε με τη χρήση της παρατήρησης της διδασκαλίας. Η συλλογή των πληροφοριών (Couper, Bethlelem & Arbor, 1998) που αφορά την παρατήρηση των υποκειμένων μπορεί να προέλθει από πολλές πηγές. Περιελάμβανε καταγραφή εικονοληπτικών – ηχοληπτικών ντοκουμέντων (βιντεοσκόπηση) και συνεντεύξεις. Οι διδασκαλίες έλαβαν χώρα στις εκάστοτε σχολικές μονάδες. Τη χρονική στιγμή που διεξαγόταν το μάθημα των μαθηματικών, παίρναμε τα ζεύγη από την τάξη τους πραγματοποιώντας τη διδασκαλία σε ειδική αίθουσα που διέθετε το κάθε σχολείο.

Η βιντεοσκόπηση έγινε με χρήση φορητής κάμερας από τον ένα ερευνητή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Πριν ξεκινήσουμε, βεβαιώθηκε στους μαθητές η πλήρης ανωνυμία τους και ότι οι όποιες συνέπειες θα είναι ανεξάρτητες στην αξιολόγηση τους στο μάθημα των μαθηματικών. Ο υπεύθυνος καθηγητής απουσίαζε από το χώρο. Η διάρκεια των διδακτικών ωρών κυμάνθηκε από 24 – 52 λεπτά. Όλες οι διδασκαλίες διεκπεραιώθηκαν σε χρόνο τριών εβδομάδων (19/11/07 – 6/12/08). Οι αρχικές μορφές των βίντεο έχουν επίσης μονταριστεί (πέραν της κανονικής μορφής που έχουμε) με σκοπό να βγει περισσότερο στην επιφάνεια οτιδήποτε αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα.

Ακολούθησε θεατή μη-συμμετοχική παρατήρηση από τον ένα ερευνητή (μεταπτυχιακός φοιτητής) για κάθε διδακτική ώρα που πραγματοποιήθηκε στη σχολική μονάδα. Ήταν παρών τη χρονική διάρκεια που έλαβε μέρος η διεξαγωγή της διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος την περίοδο που όριζε το τρέχον ωρολόγιο σχολικό πρόγραμμα. Δε συμμετείχε καθόλου κατά τη διάρκεια της παράδοσης. Ο ρόλος του ήταν να παρακολουθήσει και να καταγράψει τις αντιδράσεις των μαθητών – μαθητριών που λίγο καιρό πριν είχαν συμμετάσχει στην έρευνα. Παρακολουθήθηκαν τα πέντε από τα έξι ζευγάρια που πήραν μέρος στην έρευνα. Οι παρατηρήσεις που προέκυψαν έγιναν το οικοδόμημα πάνω στο οποίο στηρίχτηκαν οι ερωτήσεις των συνεντεύξεων.

Οι συνεντεύξεις έλαβαν μέρος αφ’ ότου οι μαθητές είχαν διδαχτεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σχολείο τους. Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας θεωρήθηκε απαραίτητη η ημιδομημένη συνέντευξη (semi-structured interview). Βοήθησε στην περαιτέρω διεξαγωγή συμπερασμάτων (μετά από τη σχολαστική εξέταση και των βίντεο) και στην αύξηση εγκυρότητας της έρευνας. Πριν από την έναρξη κάθε συνέντευξης υπενθυμίσαμε στα παιδιά τον σκοπό της έρευνας και τους βεβαιώσαμε για την ανωνυμία των απαντήσεών τους. Τους θέσαμε 17 ερωτήσεις κλειστού και ανοικτού τύπου ώστε να έχουμε πληρέστερη κατανόηση των απαντήσεων που έδιναν. Κατά τη διάρκεια της κάθε συνέντευξης διατυπώθηκαν διευκρινιστικές ερωτήσεις για τη βέλτιστη κατανόηση των απαντήσεων των ερωτώμενων. Επιπλέον η επιλογή ομαδικής συνέντευξης (ανά ζευγάρι) έδωσε τη δυνατότητα να αναπτυχθεί συζήτηση, καθώς το κάθε παιδί προκαλούσε και διεύρυνε τις ιδέες του άλλου. Όλες οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν. Η διάρκειά τους κυμάνθηκε από 22 – 40 λεπτά. Ολοκληρώθηκαν σε περίοδο δύο εβδομάδων (25/1/08–7/2/08) στο χώρο του σχολείου κατά τη διάρκεια κάποιου κενού του

εκάστοτε σχολικού προγράμματος. Ο υπεύθυνος καθηγητής του μαθήματος απουσίαζε από το χώρο.

Να σημειωθεί κάπου εδώ η μη ιδανικότητα των συνθηκών κατά τη διεξαγωγή της έρευνας. Όσον αφορά το διαδικαστικό μέρος, η επιλογή σχολείου πρέπει να έχει την έγγραφη άδεια του Υπουργείου Παιδείας, η οποία είναι μία χρονοβόρα διαδικασία. Όσον αφορά το μέρος της έρευνας που σχετίζεται με τη διδασκαλία, η χρήση φορητής κάμερας συνίσταται εφόσον ο χειριστής είναι έμπειρος, καθώς επιθυμείται σταθερή εικόνα και καλός ήχος. Προβλήματα παρουσιάστηκαν και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και εφόσον είχαμε πάρει τα παιδιά από την τάξη τους και είχαμε μεταφερθεί σε μια ειδική αίθουσα. Σε ένα ζευγάρι, ενώ η διδασκαλία πραγματοποιούνταν στην αίθουσα εργαστηρίου, διακόπηκε δύο με τρεις φορές γιατί έμπαιναν καθηγητές (φυσικός, γυμναστής) να δανειστούν αντικείμενα. Σε δύο ακόμη ζευγάρια υπήρξε διακοπή της διδασκαλίας από τον καθηγητή των μαθηματικών τους και το διευθυντή, καθώς ήθελαν να δουν πώς προχωράει η έρευνα. Σε κάθε περίπτωση, η επέμβαση αυτή φανέρωσε ολιγόλεπτη διστακτικότητα στις κινήσεις των μαθητών. Επίσης, η διδασκαλία απαιτούσε περισσότερο χρόνο από αυτόν της μιας σχολικής ώρας, με αποτέλεσμα όταν χτυπούσε το κουδούνι να θέλουν να μπουν στην αίθουσα οι μαθητές. Όλος αυτός ο θόρυβος αποσπούσε την προσοχή των μαθητών. Εξαιτίας αυτού, αναγκαστική ήταν σε δύο ζεύγη η μη–ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

6.3 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα σχολικά εγχειρίδια.

Στη σχολική εκπαίδευση οι μαθητές ακούνε πρώτη φορά για το Πυθαγόρειο Θεώρημα στη Β' Γυμνασίου στο μάθημα των Μαθηματικών (Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Πυθαγόρειο Θεώρημα, & 1.4, σελ. 127-128, εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.). Παρουσιάζεται μία δραστηριότητα, όπου

> *«Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ. Ζητείται*
> 1. *Να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριγώνων και των τετραγώνων.*
> 2. *Να τοποθετηθούν κατάλληλα τα τρίγωνα και τα τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα πλευράς (β + γ).»*

Στη συνέχεια διατυπώνεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα ***«σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.»*** και γίνεται αναφορά στο αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, τονίζοντας συγκεκριμένα ότι *«στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί με 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται τρίγωνο, το οποίο οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο. Μεταγενέστερα οι Αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτόν αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.* ***"αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η***

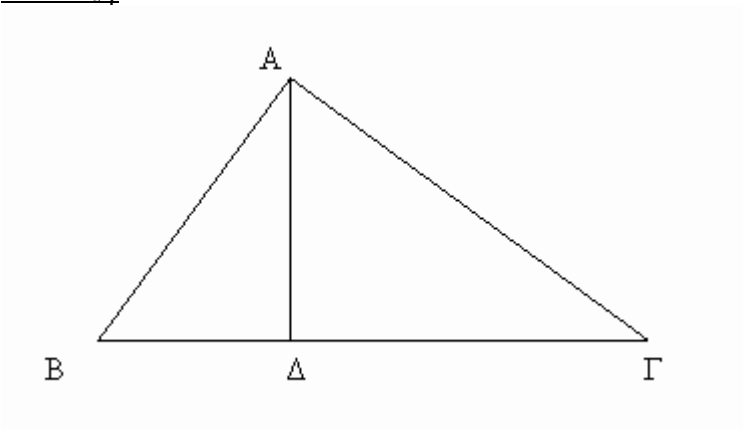
γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.”» Ακολουθούν τέσσερις εφαρμογές, μία ερώτηση κατανόησης, εννιά ασκήσεις και μία δραστηριότητα διασκεδαστικού χαρακτήρα. Το κεφάλαιο τελειώνει με ένα ιστορικό σημείωμα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα συναντάται πάλι στην έναρξη της Β’ Λυκείου, στο μάθημα της Γεωμετρίας (Ευκλείδεια Γεωμετρία, & 9.2, σελ. 183-184, εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.). Εδώ συναντούμε και την απόδειξη του Θεωρήματος, η οποία διαφέρει από αυτήν των Στοιχείων του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται πρώτα το

Θεώρημα Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη



Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ *και* Δ *η προβολή της κορυφής* Α *στην υποτείνουσα* ΒΓ. *Θέλουμε να αποδείξουμε ότι* $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ}$ *και* $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΓΔ}$. *Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι* $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}}$, *δηλαδή ότι τα τρίγωνα* ΑΒΓ *και* $\Delta\text{ΒΑ}$ *είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού* $\hat{\text{Α}} = \hat{\Delta} = 1\text{L}$ *και η* $\hat{\text{Β}}$ *είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση* $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΓΔ}$.

Ακολουθεί το

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή να αποδείξουμε ότι $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2$ *ή* $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ}$ *και* $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΓΔ}$.

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \\
&= \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ} + \text{ΒΓ} \cdot \text{ΓΔ} \\
&= \text{ΒΓ} \cdot (\text{ΒΔ} + \text{ΓΔ}) \\
&= \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΓ} \\
&= \text{ΒΓ}^2
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται στη συνέχεια το

<u>Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου).</u>
Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ***ισχύει*** $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2$***, τότε*** $\hat{\text{Α}} = 1\text{L}$**.**
<u>Απόδειξη</u>
Πάνω στις πλευρές $\text{Οχ}, \text{Οψ}$ *ορθής γωνίας* $\text{χ}\hat{\text{Ο}}\text{ψ}$ *θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα* $\text{ΟΔ} = \text{ΑΒ}$ *και* $\text{ΟΕ} = \text{ΑΓ}$. *Επειδή το τρίγωνο* ΟΔΕ *είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε*

$$\text{ΔΕ}^2 = \text{ΟΔ}^2 + \text{ΟΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2 .$$

Άρα $\text{ΔΕ} = \text{ΒΓ}$. *Επομένως τα τρίγωνα* ΑΒΓ *και* ΟΔΕ *είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι* $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Ο}} = 1\text{L}$, *που είναι το ζητούμενο.*

Επιπλέον, στην παράγραφο 9.4 εμφανίζεται η γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. (Ευκλείδεια Γεωμετρία, & 9.4, σελ. 189-194, εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.).

6.4 Οι διδακτικές δραστηριότητες του Πυθαγόρειου Θεωρήματος μέσα από τις Πυθαγόρειες τριάδες, με αξιοποίηση της ιδέας των ενσώματων μαθηματικών (embodied mathematics).

Οι ερευνητές πραγματοποίησαν μία διδασκαλία όπου επιδιώχθηκε να εμπλακούν οι μαθητές σε όλα τα στάδια της. Στόχος ήταν να παρατηρήσουν οι μαθητές κάποια φαινόμενα, να τα ερμηνεύσουν και να δημιουργήσουν εμπειρίες μέσα από τις οποίες να ανακαλύψουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως γενίκευση.

Η ενδεικτική διδασκαλία αποτελείται από ένα κεντρικό σενάριο. Αυτό περιλαμβάνει οχτώ υποδραστηριότητες καθώς και μια σειρά από εργαλεία (παιχνίδι Jenga, μπαλάκια, ζύγια – βαρίδια, πήχεις, σπάγκος, μπουκάλι με χρωματιστό υγρό, μολύβι, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, μιλιμετρέ χαρτί). Οι μαθητές εντάσσονται σε μια διαδικασία μάθησης η οποία περιλαμβάνει μια εξελικτική πορεία (με ανακαλύψεις, εξερευνήσεις, διάγνωση λαθών, αναθεωρήσεις απόψεων κ.α.) για την ενθάρρυνση της προσωπικής τους εμπλοκής. Επιπλέον, η χρήση των εργαλείων επιτρέπει την παράλληλη εξερεύνηση των μαθητών, ορμώμενων από τη βιωματική τους βάση. Τα εργαλεία πλαισιώνουν τις ενέργειες που χρειάζονται να εκτελέσουν οι μαθητές για να οικοδομήσουν τη νέα μαθηματική γνώση, φέρνοντας στην επιφάνεια βιώματα και εμπειρίες τους.

Πριν προχωρήσουμε όμως σε μία εις βάθος μελέτη όλων των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν, ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των εμπλεκόμενων υποκειμένων, ας δούμε τις οχτώ αυτές ενέργειες πάνω στις οποίες στηρίχτηκε η όλη διδασκαλία.

1. Ισορροπία σωμάτων

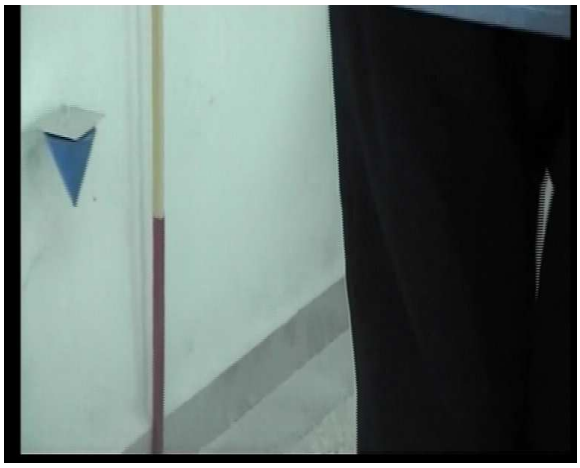
Το μάθημα ξεκίνησε προσεγγίζοντας τους μαθητές με το παιχνίδι JENGA. Το παιχνίδι αυτό αποτελείται από μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ξύλινα τουβλάκια (διαστάσεων 1,5εκ. πλάτος, 1εκ. ύψος, 8εκ. μήκος). Οι μαθητές θα έπρεπε να στήσουν το ένα τουβλάκι πάνω στο άλλο με τέτοιον τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένας μεγάλος πύργος. Στη συνέχεια με μια διαδικασία αφαίρεσης αυτών (έβγαζαν ένα ξύλινο τουβλάκι απ' όπου ήθελαν και το τοποθετούσαν στην κορυφή) οδηγούνταν με μαθηματική ακρίβεια στην κατάρρευση του πύργου που είχαν δημιουργήσει. Στόχος της ενέργεια αυτής ήταν να δοθούν κάποια κίνητρα στους μαθητές ώστε να δραστηριοποιηθεί το ενδιαφέρον τους.

2. Πτώση σωμάτων

Κατόπιν τους παραχωρήθηκε ελευθερία κινήσεων μέσα στο χώρο της αίθουσας. Σηκώθηκαν από το θρανίο και δόθηκε στον καθένα τους από ένα μπαλάκι. Τους ζητήθηκε να το αφήσουν από το χέρι τους. Ακολούθησε μία συζήτηση με τα παιδιά που είχε ως στόχο την ανάδειξη της κατακόρυφης τροχιάς που ακολουθεί η πτώση των αντικειμένων και τη σύνδεσή της με τη βαρύτητα.

3. Επίδειξη του βαριδιού δεμένο σε νήμα.

Αφού λοιπόν διαπίστωσαν την εξάρτηση βαρύτητας–κατακόρυφου έγινε προσπάθεια εκμαίευσης κάποιου τρόπου οπτικοποίησης της πορείας που λίγο πριν είχαν αντιληφθεί. Μετά τη συζήτηση που ακολούθησε παρουσιάστηκε η λειτουργία των βαριδιών-νήμα στάθμης και εξηγήθηκε η συμβολή που έχουν (τα βαρίδια) στην κατασκευή των κατακόρυφων τοίχων.



4. Αναγκαιότητα καθετότητας και ανάδειξη οριζόντιου επιπέδου

Από τη στιγμή που εξασφαλίστηκε το κατακόρυφο, τέθηκε το ζήτημα *«τώρα που φτιάξαμε τον κατακόρυφο τοίχο πάνω στο έδαφος, πώς θα φτιάξουμε κάθετο τοίχο πάνω σε αυτόν;»*. Τη σύνδεση λοιπόν της κατακόρυφου με τη βαρύτητα ακολούθησε ο προβληματισμός κατασκευής κάθετης πάνω στον κατακόρυφο τοίχο.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε στα παιδιά ένα μπουκάλι με χρωματιστό υγρό. Κρατώντας ο ερευνητής το μπουκάλι σταθερό σε κάποιο σημείο στον κατακόρυφο τοίχο, και δημιουργώντας διαφορετικές γωνίες, το υγρό που περιελάμβανε παρέμενε σε μία οριζόντια θέση. Η αναγκαιότητα λοιπόν της καθετότητας είναι αυτή που μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε ορθές γωνίες.

5. Βασική Πυθαγόρεια τριάδα στον κάθετο τοίχο και στο επίπεδο.

Στο στάδιο αυτό αφήνονται πλέον τα στοιχεία βαρύτητας και μαθηματικοποιείται το πρόβλημα κάνοντας συζήτηση για τη βασική Πυθαγόρεια τριάδα (3,4,5). Δόθηκαν σε κάθε ζεύγος τρεις πήχεις (90εκ., 120εκ., 150εκ.) οι οποίοι ήταν χρωματισμένοι ανά 30εκ. με διαφορετικό χρώμα και αφέθηκαν τα παιδιά να κάνουν ότι παρατηρήσεις μπορούσαν βλέποντάς τους. Ύστερα, έχοντας σε επαφή με τον κάθετο τοίχο το ξύλο των 90εκ. ή των 120εκ. ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Μετά, παίρνοντας τα τρία αυτά ξύλα, κατασκεύασαν ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο πάτωμα. Κατόπιν τους παρουσιάστηκε πώς στην Αρχαία Αίγυπτο σχημάτιζαν το ορθογώνιο τρίγωνο με τη βοήθεια ενός σπάγκου και τους εξηγήθηκε ότι οι άνθρωποι για να φτιάξουν ορθή γωνία παρατήρησαν πως αρκούσε να κατασκευάσουν ορθογώνιο τρίγωνο. Οδηγήθηκαν έτσι στην τριάδα (3,4,5).

Κάθετη γωνία $\xrightarrow{\text{με}}$ **Ορθογώνιο τρίγωνο** $\xrightarrow{\text{με}}$ **Τριάδα (3,4,5)**

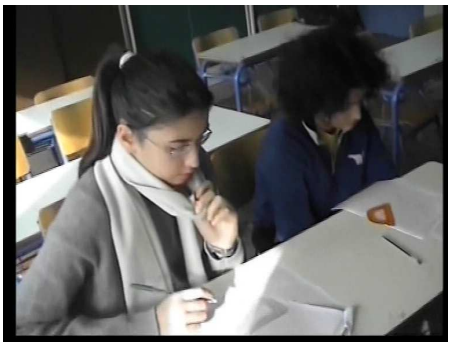
Επίσης διαπίστωσαν και την αντίστροφη πορεία, όπου ξεκινώντας από την τριάδα (3,4,5) οδηγήθηκαν στη δημιουργία κάθετης γωνίας.

Τριάδα (3,4,5) $\xrightarrow{\text{με}}$ **Ορθογώνιο τρίγωνο** $\xrightarrow{\text{με}}$ **Κάθετη γωνία**

Έπειτα οι μαθητές κάθισαν σε θρανίο όπου και τους δόθηκε (ξεχωριστά στον καθένα) φύλλο εργασίας σε μιλιμετρέ χαρτί (το οποίο και βρίσκεται στο παράρτημα της διπλωματικής). Στο σύνολό του αυτό περιελάμβανε 6 δραστηριότητες και 4 ερωτήσεις.

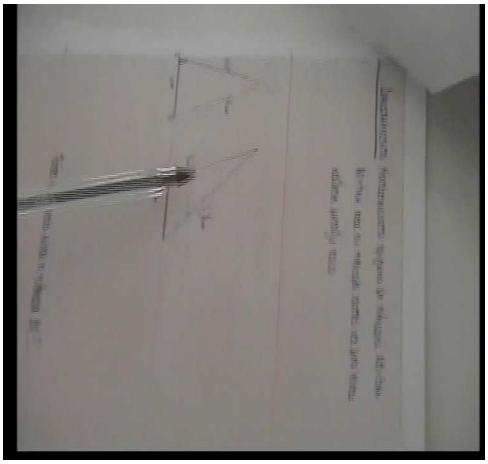
6. Πέρασμα της βασικής Πυθαγόρειας τριάδας στο μιλιμετρέ χαρτί

Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά αν μπορούν να διακρίνουν παράλληλες ευθείες και ορθές γωνίες στο μιλιμετρέ χαρτί. Η πρώτη δραστηριότητα ήταν να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3εκ. και 4 εκ. Ζητούνταν να υπολογίσουν πόσα εκατοστά είναι η τρίτη πλευρά.



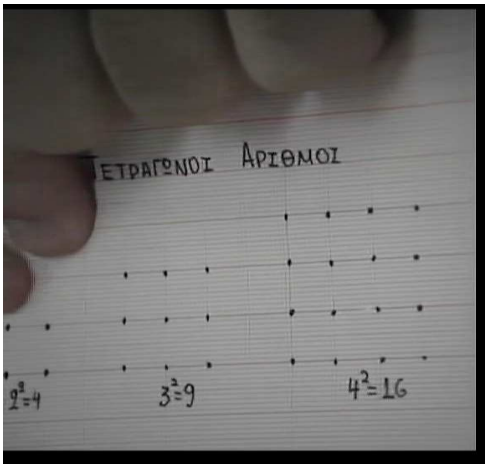
7. Διαπίστωση ότι η τριάδα δουλεύει μόνο στα «ορθογώνια» τρίγωνα

Πρωτίστως ρωτήθηκαν όλοι οι μαθητές για όλα τα είδη γωνιών που ξέρουν και δευτερευόντως τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν τρίγωνο με πλευρές 3εκ. και 4εκ. αλλά η μεταξύ τους γωνία να μην είναι ορθή. Κατόπιν να μετρήσουν την τρίτη πλευρά και να πουν κάποιον κανόνα που τυχόν παρατήρησαν.



8. Σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers) – Πυθαγόρειες τριάδες

Παρουσιάστηκαν οι σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers) και εξηγήθηκε ο τρόπος κατασκευής τους. Δείξαμε το 1^2, το 2^2 , το 3^2, το 4^2. Ζητήσαμε να μας πουν ποιος θα είναι ο επόμενος σχηματικός αριθμός και αν θα μπορούσαν να τον σχεδιάσουν. Η επόμενη δραστηριότητα περιελάμβανε κατασκευή τετραγώνων με πλευρές 3εκ., 4εκ. και 5εκ. όπως επίσης και τον υπολογισμό των εμβαδών αυτών των τετραγώνων. Τέλος έγινε επέκταση στην εξαγωγή κι άλλων πιθανών Πυθαγόρειων τριάδων, στην κατασκευή τριγώνου με πλευρές 6εκ., 8εκ. και 10εκ. και στην επιβεβαίωση ισχύος του Πυθαγορείου Θεωρήματος πάνω σε αυτά.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

Αποτελέσματα
Της
Έρευνας

"Ιδανικός δάσκαλος είναι εκείνος
που γίνεται γέφυρα
για να περάσει αντίπερα ο μαθητής του
κι όταν πια το καταφέρει,
αφήνεται χαρούμενα να γκρεμιστεί,
ενθαρρύνοντας το μαθητή του
να φτιάξει δικές του γέφυρες."

Ν. Καζαντζάκης

7.1 Αποτελέσματα διδασκαλίας

7.1.1 Το παιχνίδι ως κίνητρο για μάθηση

Η διδασκαλία ξεκίνησε με το να δοθεί στα παιδιά ένα παιχνίδι. Παρατηρώντας τα ζευγάρια να ασχολούνται με αυτό, εύκολα διέκρινε κάποιος τη συνεργατικότητα και την ευγενή άμιλλα που επικρατούσε μεταξύ τους. Περιβάλλον ζωντανό που συχνά ακολουθούνταν από επιφωνήματα κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Είχαν μπει για τα καλά στο ρόλο τους.

Καθώς έστηναν τον πύργο, η κίνηση των χεριών τους ήταν ευθυγραμμισμένη. Δεν άφηναν κανένα κομμάτι να βγαίνει εκτός ορίων. Η παρεμβολή από τους ερευνητές είχε να κάνει με τη μετατόπιση των τούβλων. Επεμβαίνοντας και αλλάζοντας θέση σε αυτά, αναρωτήθηκαν τι θα συνέβαινε εάν άλλαζε ο τρόπος τοποθέτησης τους. Όλα τα παιδιά αντιλαμβάνονταν ότι αν γίνει κάτι τέτοιο, τότε ο πύργος θα γκρεμιστεί. Συγκεκριμένα ακολουθεί το παρακάτω επεισόδιο:

> ***Ερευνητής****: 'Έχει σημασία πώς θα τα βάλεις αυτά? Αν βάλεις ένα ξυλάκι έτσι και ένα άλλο έτσι, παίζει ρόλο αυτό?'*
> ***Δανάη****: 'Ναι.'*
> ***Ερ****: 'Γιατί?'*
> ***Δ****: 'Στην ισορροπία αν είναι αυτό εδώ…δε θα έχει σημασία που είναι το άλλο…δε θα στηρίζεται πουθενά και θα πέσει'.*

Κατά γενική ομολογία τα τουβλάκια θα έπρεπε να βρίσκονταν υπό κατάλληλες συνθήκες για να διατηρηθεί η ισορροπία τους. Έπρεπε να είναι ευθυγραμμισμένα μεταξύ τους. Να σημειώσουμε κάπου εδώ ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές ανεδείκνυαν μία τέτοια παρατήρηση με κινήσεις των χεριών τους.

7.1.2 Η έννοια της κατακόρυφου

Στη συνέχεια δόθηκε από ένα μπαλάκι σε κάθε παιδί και ζητήθηκε να το αφήσουν να πέσει. Η ερώτηση που ακολούθησε ήταν:

> ***Ερευνητής****: ‘ Τι πορεία θα ακολουθήσει το μπαλάκι όταν πέσει?’*

9 από τους μαθητές απάντησαν *«ευθεία»*.
1 αγόρι απάντησε *«καμπυλωτά»*.
1 άλλος ότι *«θα ακολουθήσει το νόμο της βαρύτητας»*.
1 κοπέλα έδειξε προς στιγμήν να μην καταλαβαίνει, αποκρίθηκε με ένα *«δηλαδή?»*.

Αποζητώντας όμως περισσότερη ευκρίνεια οι ερευνητές αναρωτήθηκαν

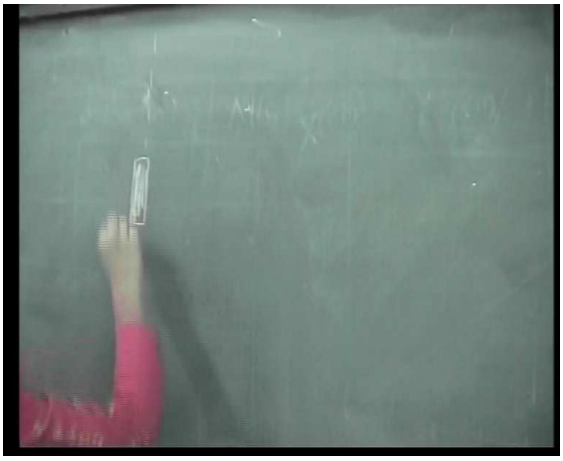
> ***Ερευνητής****: ‘Ναι, αλλά ευθεία είναι κι αυτή.’ (δείχνοντας με το χέρι προς τη μεριά του ορίζοντα)*

Οι 9 από τους 12 μαθητές είπαν τότε *«θα είναι κάθετη»*.
Οι υπόλοιποι 3 δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν ‘αν έχουν ακούσει μία άλλη λέξη αντί για κάθετη’ (έχοντας στο νου μας την ‘κατακόρυφο’) κανένας τους δεν έδωσε κάποια απάντηση. Ωστόσο, όταν τους αναφέρθηκε η ‘κατακόρυφος’, οι περισσότεροι τη γνώριζαν ως λέξη.

Θελήσαμε έπειτα να δούμε αν μπορούν να οπτικοποιήσουν την πορεία που ακολούθησε το μπαλάκι. Δύο μαθητές (από διαφορετικά ζευγάρια) επιχείρησαν να αποτυπώσουν την τροχιά (όπως φαίνεται στο επόμενο επεισόδιο) ζωγραφίζοντας με την κιμωλία στον πίνακα διακεκομμένες γραμμές

> ***Ερευνητής****: ‘Πώς έπεσε?’*
> ***Δάφνη****: ‘Πέφτοντας.’*
> ***Ερ****: ‘Δηλαδή?’*
> ***Αγγελική****: ‘Έπεσε ευθεία.’*
> ***Ερ****: ‘Θα μπορούσε να έπεφτε διαφορετικά?’*
> ***Αγγ****: ‘Όχι, αν δεν το ρίχναμε εμείς.’*
> ***Ερ****: ‘Πού είναι αυτή η ευθεία? Πού την είδες?’*
> ***Αγγ****: ‘Εεε…σχεδόν ευθεία.’*
> ***Ερ****: ‘Μπορείς να την κάνεις να φανεί κάπως?’*
> ***Δ****: ‘Μπορούμε να ρυθμίσουμε τη φωτογραφική μηχανή να βγάζει συνεχόμενες φωτογραφίες και να βγάλουμε φωτογραφίες. Θα κάναμε το μπαλάκι να πέφτει και στο επόμενο θα κάναμε διακεκομμένες γραμμές.’*



Μία τέτοια εικόνα συναντάται συχνά στα βιβλία της φυσικής όταν διδάσκονται τις βολές. Μία άλλη μαθήτρια τόνισε πως μπορεί να φανεί αν βάλουμε σχοινί. Ειδικότερα

> ***Ερευνητής***: *'Πώς πέφτει?'*
> ***Νίκος***: *'Ευθεία.'*
> ***Ερ***: *'Ευθεία όμως είναι κι αυτή.' (πετώντας το μπαλάκι προς τον ορίζοντα)*
> ***Δανάη***: *'Α! Προς τον πυρήνα της γης.'*
> ***Ερ***: *'Και γιατί προς τον πυρήνα της γης?'*
> ***Δ***: *'Γιατί η γη έλκει τα σώματα.'*
> ***Ερ***: *'Έχει μια συγκεκριμένη ονομασία αυτή η ευθεία. Μήπως την ξέρετε?'*
> ***Δ***: *'Να μην είναι…κάθετη!'*
> ***Ερ***: *'Μπορείς να τη σχεδιάσεις?'*
> ***Ν***: *'Θα βάλουμε γραμμούλες.'*
> ***Ερ***: *'Πού? Στον αέρα?'*
> ***Δ***: *'Α! Θα βάλουμε ένα σχοινί ή έναν σπάγκο ή κάτι τέτοιο και θα το φτιάξουμε ενώ κρατάμε το σχοινί.'*

Οι υπόλοιποι 9 κούνησαν αρνητικά τα κεφάλια τους. Δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Ο αμέσως επόμενος προβληματισμός που τέθηκε ήταν *'πώς θα μπορούσαμε να βρούμε έναν τρόπο να υλοποιήσουμε την κατακόρυφο που δίνει η βαρύτητα?'*. Τρία παιδιά είχαν στο νου τους εικόνες των οικοδόμων που χτίζουν τα σπίτια. Προσπαθώντας μάλιστα η Δάφνη να βρει έναν τρόπο υλοποίησης της κατακόρυφου, αποκρίθηκε:

> ***Δάφνη***: *'μπορεί με το χάρακα ή το τρίγωνο να κάνουμε μια ευθεία αλλά δεν έχω δει ποτέ κανέναν με ένα τρίγωνο στον τοίχο να το φτιάχνει.'*

Εν συνεχεία εξηγήθηκε η λειτουργία των βαριδιών. Ένα παιδί μάλιστα, έχοντας στο στενό του οικογενειακό κύκλο κάποιο άτομο που να ασχολείται με αυτά, άρχισε να περιγράφει τον τρόπο κτισίματος.

Όταν επίσης λάμβανε χώρα η εξήγηση του τρόπου λειτουργίας των ζυγιών, ένα παιδί έκανε την εξής απορία *«αν χωρίσουμε το βαρίδι στη μέση δε θα είχαμε ένα αντικείμενο, αλλά δύο»*. Διαπιστώθηκε, από τη διαδικασία της συνέντευξης, πως εννοούσε ότι δεν είναι συμμετρική η προς τα κάτω έλξη των σωμάτων.

7.1.3 Εξαντικειμενίκευση (objectification) της ορθής γωνίας με αναφορά στην πρωτογενή ιδέα.

Αφού λοιπόν εξασφαλίσαμε την κατακόρυφο μέσω της βαρύτητας, τι είναι αυτό που μας εξασφαλίζει την κάθετη πάνω στην κατακόρυφη? Πώς δηλαδή θα φτιάξουμε ορθή γωνία? Σε αυτό το σημείο ζητήθηκε από τους μαθητές να πουν, αφού είχε δημιουργηθεί κατακόρυφος τοίχος, πώς θα κατασκεύαζαν κάθετο τοίχο πάνω στον κατακόρυφο? Αφέθηκε στα παιδιά αρκετός χρόνος ούτως ώστε ν' αντιληφθούν τη σημασία του προβληματισμού. Να προσπαθήσουν ν' ανακαλύψουν κάτι νέο γι' αυτούς αλλά γνωστό για τους ερευνητές. Μερικοί έδωσαν την ιδέα του τριγώνου. Η επισήμανση όμως *'ναι, αλλά σκεφτείτε ότι δεν έχει κατασκευαστεί το τρίγωνο'* έκανε έκδηλη την απογοήτευση στα μάτια τους. Χαρακτηριστική είναι και η φράση της Δάφνης που είχε πει προηγουμένως και ανέφερε και πάλι

> ***Δάφνη**: 'Θα μπορούσαμε να πάρουμε ένα τρίγωνο αλλά δεν έχω δει κανέναν οικοδόμο να χρησιμοποιεί τρίγωνο.'*

Τα παιδιά εδώ φαίνονται να έχουν στο νου τους την έννοια του ορθογωνίου τριγώνου, την οποία και έχουν διαμορφώσει ανάλογα με το πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο έχουν μεγαλώσει.

Κατέφευγαν τότε στην εμπειρική λύση

> ***Νίκος**: 'Να βάζανε ένα ξύλο…ευθείο…και να το χτίζανε.'*
> ***Ερευνητής**: 'Και πώς ξέρεις ότι θα είναι κάθετο?'*
> ***Ν**: 'Με το μάτι…θα το δούμε.'*

Μία μαθήτρια επεσήμανε ότι

> ***Νάντια**: 'Αν έχουμε τον έναν τοίχο μπορούμε να βάλουμε έναν άλλον τοίχο.'*
> ***Ερευνητής**: 'Πώς?'*
> ***Ν**: 'Με κέντρο.'*
> ***Ερ**: 'Κέντρο?'*
> ***Ν**: 'Κέντρο συμμετρίας.'*

χωρίς όμως στη συνέχεια να αποσαφηνίσει τι εννοούσε.

Η επιμονή ενός ζευγαριού (Δανάη – Νίκος) ήταν τέτοια, που ενώ είχαμε προχωρήσει με τα ξυλάκια στην επόμενη φάση της διδασκαλίας και τους ζητήθηκε να κάνουν παρατηρήσεις πάνω σε αυτά, αποκρίθηκαν *'Να! Αν βάλουμε το ξύλο έτσι* (προσπαθούσαν με τα χέρια τους να τοποθετήσουν το ξύλο με σκοπό να φτιάξουν ορθή γωνία) *τότε θα δημιουργηθεί κάθετη.'* Διευκρινίζοντάς τους όμως πως δεν είναι επιθυμητή μία προσεγγιστική λύση του προβλήματος αλλά μία ικανή και αναγκαία

συνθήκη, έδειχναν ανήμποροι να απαντήσουν. Ήταν τότε που παρουσιάσαμε ένα μικρό μπουκάλι με χρωματιστό υγρό.

> ***Ερευνητής***: *'Για κοιτάξτε. Τι είναι αυτό?'*
> ***Γιώργος Μ.***: *'Υγρό.'*
> ***Ερ***: *'Προσέξτε. Το υγρό αυτό το κινώ και έχω μία επιφάνεια. Τι κάνει η επιφάνεια αυτή με το νήμα?'*
> ***Γιώργος Κ.***: *'Άμα το φέρουμε κάθετα…αυτό θα κάνει μια ορθή.'*

Κατόπιν δόθηκαν στους μαθητές να περιεργαστούν τρεις πήχεις μεγέθους 90εκ., 120εκ. και 150 εκ. οι οποίοι ήταν χρωματισμένοι με διαφορετικό χρώμα ανά 30εκ. Οι παρατηρήσεις που έκαναν ήταν πως *'είναι χρωματισμένα σε ίσα κομμάτια'*, *'έχουν διαφορετικό μήκος'*, *'είναι ομοιόμορφα'*. Ένα ζευγάρι μάλιστα τα εξέφρασε με αναλογίες

> ***Ερευνητής***: *'Παρατηρήσεις που μπορείτε να κάνετε πάνω σε αυτά.'*
> ***Δάφνη***: *'Αυτό είναι…1,2,3,4,5…αυτό είναι τρία πέμπτα, αυτό είναι…*
> ***Αγγελική***: *'Τέσσερα πέμπτα.'*
> ***Δάφνη***: *'Κι αυτό πέντε πέμπτα.*

Με τα ξυλαράκια αυτά θελήσαμε ν' αναδειχθεί η δυνατότητα ανεξαρτητοποίησης της ορθής γωνίας από τη βαρύτητα και κατ' επέκταση η αντικειμενικότητά της μέσω της Πυθαγόρειας τριάδας (3,4,5). Ζητήθηκε ύστερα να φτιάξουν με τους πήχεις ένα ορθογώνιο τρίγωνο, πρώτα στον τοίχο και μετά στο πάτωμα. Όταν κατάφεραν να φτιάξουν το τρίγωνο στο πάτωμα, τέθηκε η ερώτηση:

> ***Ερευνητής***: *'Μπορείτε να μας ανακεφαλαιώσετε τα όσα κάναμε μέχρι τώρα?'*

Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές βρίσκονταν σε θέση να ανακεφαλαιώσουν τα όσα έκαναν. Ο Νίκος, λόγου χάρη, είπε:

***Νίκος**: 'Είδαμε τα βαριδάκια…που πήγαιναν προς το κέντρο της γης λόγω βαρύτητας. Είδαμε το ορθογώνιο τρίγωνο και πώς το σχεδίασαν οι Αρχαίοι, και πώς φτιάχνανε ένα σπίτι.*

Μπόρεσαν επιπλέον να συσχετίσουν την κατακόρυφο με την ορθή γωνία όπως φαίνεται από την ακόλουθη παρατήρηση της Δάφνης.

***Αγγελική**: 'Είδαμε την κατακόρυφη κίνηση και το ορθογώνιο τρίγωνο.*
***Δάφνη**: 'Και μία σχέση ανάμεσα σε αυτά. Δεν ήταν ξεκομμένα. Ότι βάσει της κατακόρυφης κίνησης κάναμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.'*

7.1.4 Γωνίες

Οι μαθητές αντιμετώπισαν πολλά προβλήματα όσον αφορά τις γωνίες.

1ο Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Ποιες είναι οι διαφορετικές γωνίες από τις ορθές? Πώς τις λέμε?'*
***Άγγελος**: 'Παράλληλες?'(ρώτησε στρέφοντας το κορμί του προς το συμμαθητή του.)*
***Κώστας**: 'Αμβλείες και οξείες.'*
***Άγγελος**: 'Ναι…αμβλείες…' (φανερώνοντας συγκατάβαση)*

2ο Επεισόδιο

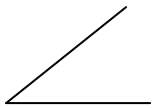
***Ερευνητής**: 'Αν δεν είναι ορθή η γωνία, τι θα είναι?'*
***Γιάννης**: 'Οριζόντια.'*
***Ερ**: 'Οριζόντια?'*
***Γ**: 'Ναι, οριζόντια.'*
***Ερ**: 'Ποια άλλα είδη γωνιών έχουμε δηλαδή?'*
***Χρήστος**: 'Ισοσκελή.'*

Επιβεβαίωση της όλης σύγχυσης που είχαν τα παιδιά αποτελεί ο ακόλουθος διάλογος που πραγματοποιήθηκε τη στιγμή που κατασκεύασαν το ορθογώνιο τρίγωνο στο έδαφος με τη βοήθεια των πηχών.

3ο Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Τι παρατηρείτε τώρα?'*
***Γιάννης**: 'Ότι οι γωνίες του δεν είναι ίσες.'*
***Ερ**: 'Δηλαδή?'*
***Γ**: 'Δεν είναι κανονικό τρίγωνο.'*
***Ερ**: 'Τι εννοείς δεν είναι κανονικό τρίγωνο?'*
***Χρήστος**: 'Έχουμε μία ορθή γωνία.'*

Η επιβεβαίωση της επικρατούσας κατάστασης ήρθε όταν στη συνέχεια τους ζητήσαμε να μας δείξουν μία ορθή, μία οξεία και μία αμβλεία γωνία. Ήταν τότε που ο Χρήστος έφτιαξε μία οξεία γωνία στο χαρτί

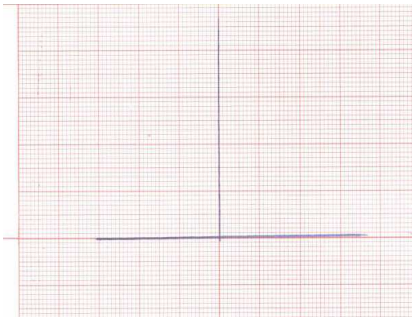


και αποκρίθηκε: *'αυτή είναι μία αμβλεία γωνία'*.

7.1.5 Το ορθογώνιο τρίγωνο στο μιλιμετρέ χαρτί

Στην πρώτη δραστηριότητα που τους δώσαμε να κάνουν στο μιλιμετρέ χαρτί, ζητήσαμε *να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3εκ. και 4εκ., να μετρήσουν την τρίτη πλευρά και να μας πουν πόσα εκατοστά είναι.*

- 8 μαθητές δεν παρουσίασαν κανένα πρόβλημα.
- 1 μαθητής (Άγγελος) δεν μπόρεσε να καταλάβει τι ακριβώς ζητάγαμε και θέλησε διευκρινίσεις.
- 1 μαθητής (Χρήστος) σχεδίασε δύο κάθετες ευθείες.
- 1 μαθητής (Γιάννης) έφτιαξε την ορθή γωνία αλλά δεν έφερε την υποτείνουσα.
- 1 μαθητής (Γιώργος Κ.) θεώρησε 4εκ. την υποτείνουσα, ξεκίνησε να σχεδιάζει από αυτήν το ορθογώνιο τρίγωνο και κατέληξε να δημιουργήσει ένα τρίγωνο, όπου όταν μέτρησε τις πλευρές, τις έβγαλε 3εκ., 3εκ., 4εκ.

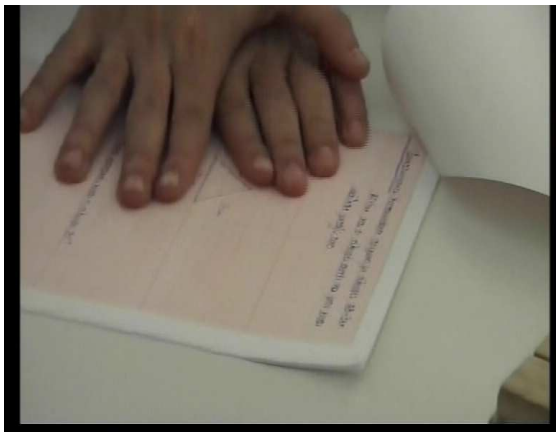


Να τονίσουμε πως ένα από τα παιδιά (Δάφνη), ενώ κατασκεύαζε το ορθογώνιο τρίγωνο παρατήρησε πως η τρίτη πλευρά θα είναι 5εκ. χωρίς να τη μετρήσει. Έδειξε με αυτήν την ενέργεια ότι είχε δεχτεί την Πυθαγόρεια τριάδα (3,4,5) που είχε ακούσει προηγουμένως.

7.1.6 Η ισχύς του Πυθαγόρειου Θεωρήματος

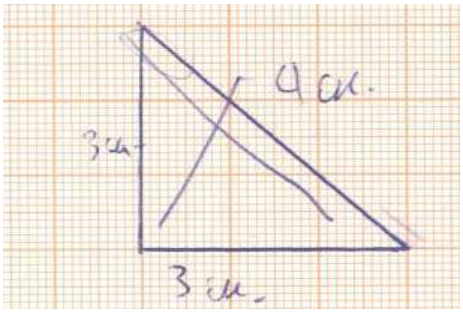
Στην επόμενη δραστηριότητα ζητήθηκε *να σχεδιάσουν τρίγωνο με πλευρές ΑΒ=3εκ. και ΑΓ=4εκ. και οι πλευρές αυτές να μην είναι κάθετες μεταξύ τους*. Τα 10 από τα 12 παιδιά τα έκαναν χωρίς πρόβλημα. Ή τουλάχιστον έτσι φαινόταν. Ρωτήθηκε ο ένας μαθητής, που προηγουμένως είχε δείξει ότι δεν καταλάβαινε βασικά πράγματα για τις γωνίες, για το ποια γωνία σχηματίζουν οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Έδειχνε τη γωνία Γ.

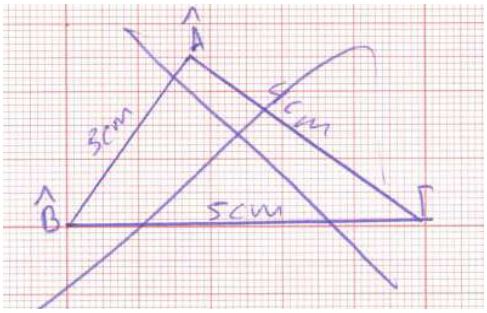
Στο σημείο αυτό προσπαθήσαμε με κινήσεις και κατάλληλες τοποθετήσεις των χεριών να του παρουσιάσουμε τη γωνία, αλλά ούτε τότε ήταν σε θέση να τη διακρίνει, όπως διαπιστώνεται ακολούθως



***Ερευνητής**: 'Κάντε ένα τρίγωνο όπου η γωνία που σχηματίζουν οι δύο πλευρές που κάνατε πριν να μην είναι οξεία τώρα, αλλά αμβλεία.'*
***Χρήστος**: 'Η μία από τις δύο.'*
***Ερ**: 'Αυτή η πλευρά…κι αυτή η πλευρά (δείχνοντας με τα χέρια τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου) σχηματίζουν μια γωνία. Ποια είναι αυτή η γωνία?'*
***Γιάννης**: 'Έχουμε τη γωνία ΑΒ.'*
***Ερ**: 'Ποια?'*
***Γ**: 'Τη γωνία Β και Α.'*
***Χρ**: 'Τη Γ.'*

Τα υπόλοιπα 2 παιδιά έφτιαξαν ορθογώνιο τρίγωνο, δείχνοντας με τη ενέργεια αυτή ότι μετέφεραν λάθος δεδομένα από την εκφώνηση.





Εν συνεχεία τους βάλαμε να μετρήσουν την τρίτη πλευρά και να μας πουν αν μπορούσαν να βρουν κάποιον κανόνα για τα μεγέθη των πλευρών. Ένα ποσοστό της τάξεως του 91.6% παρατήρησε, σε γενικές γραμμές, πως σε ένα τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της ορθής ενώ η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία είναι μικρότερη. Ας δούμε όμως τα εξής στιγμιότυπα για πιο ολοκληρωμένη εικόνα του τι συνέβη.

1^{ο} Επεισόδιο

Ερευνητής: *'Μπορείτε να μας πείτε κάποιον κανόνα συγκρίνοντας αυτές τις περιπτώσεις?'*
Αγγελική: *'Ότι στο οξυγώνιο…η τρίτη πλευρά είναι…'*
Δάφνη: *'Ναι, δεν έχει τον ίδιο αριθμό…η γωνία δεν είναι 90^{ο} όπως στο ορθογώνιο τρίγωνο.'*
Ερ: *'Μήπως θέλεις να ολοκληρώσεις κι εσύ Αγγελική το σκεπτικό σου?'*
Αγγ: *'Εεε…βασικά αυτό ήθελα να πω.'*
Ερ: *'Το άρχισες όμως με άλλη διατύπωση.'*
Αγγ: *'Ότι σε ένα οξυγώνιο…'*
Ερ: *'Ναι…'*
Αγγ: *'Η τρίτη πλευρά θα είναι μικρότερη απ' ότι θα είναι στο ορθογώνιο.'*
Ερ: *'Και στο αμβλυγώνιο?'*
Αγγ: *'Μεγαλύτερη.'*

2^{ο} Επεισόδιο

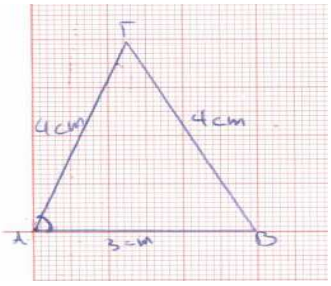
Γιώργος Μ.: *'Στο αμβλυγώνιο ήταν μεγαλύτερη από το ορθογώνιο.'*
Ερευνητής: *'Και στο οξυγώνιο?'*
Γιώργος Μ.: *'Μικρότερη.'*
Ερ: *'Ενώ στο ορθογώνιο τι βγάλαμε?'*
Γιώργος Κ.: *'Ότι στο ορθογώνιο είναι μικρότερη από το αμβλυγώνιο και μεγαλύτερη από το οξυγώνιο.'*

3^{ο} Επεισόδιο

Ερευνητής: *'Μπορείτε να μας δώσετε κάποιον κανόνα συγκρίνοντας αυτές τις καταστάσεις με την προηγούμενη?'*
Νάντια: *'Ότι…εδώ πέρα που έχουμε οξεία γωνία…εεε…αυτή η πλευρά είναι μικρότερη από τις άλλες δύο. Και εδώ που έχουμε αμβλεία είναι μεγαλύτερη.'*

Από τους τρεις μαθητές που προηγουμένως είχαν δείξει ότι δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της γωνίας, ο Γιάννης ήταν και ο μόνος που δεν έδωσε καμία απάντηση. Ο Άγγελος έδειξε να συμφωνεί με τον Κώστα (ταίρι του στο ζευγάρι) και ο Χρήστος, αφού είχε φτιάξει ένα οξυγώνιο με πλευρές 3εκ., 3εκ., 4εκ. παρατήρησε πως η τρίτη πλευρά είναι ίση με μία από τις δύο.

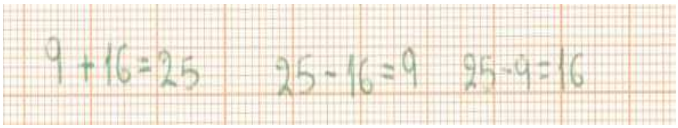
Χρήστος*: 'Ότι η τρίτη πλευρά στην αμβλεία βγαίνει μεγαλύτερη.'*
Ερευνητής*: 'Και στην οξεία?'*
Χρ*: 'Η ίδια.'*



7.1.7 Σχηματικοί αριθμοί (figurative numbers)

Έπειτα ακολούθησε το πέρασμα στους σχηματικούς αριθμούς. Τους αριθμούς όπως τους αντιλαμβάνονταν οι Πυθαγόρειοι, όπου γι' αυτούς ο αριθμός πρώτα απ' όλα ήταν σχήμα. Για ν' αρχίσουν να εξοικειώνονται οι μαθητές με την οπτικοποίηση των αριθμών, κατασκευάστηκαν τα τέλεια τετράγωνα $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$.

Μία κοπέλα (Δανάη) τα εξέφρασε αριθμητικά, γράφοντας τις προκύπτουσες σχέσεις:



και τόνισε πως

> ***Δανάη**: 'Αν προσθέσουμε αυτά τα δύο μας δίνουν το 25. Και αν αφαιρέσουμε αυτά τα δύο μας κάνουν το άλλο.'*

Σε τρία από τα έξι ζευγάρια ζητήθηκε να κατασκευάσουν τετράγωνα με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Στα υπόλοιπα τρία ζευγάρια παρακάμφθηκε το στάδιο αυτό λόγω έλλειψης χρόνου. Σε ποσοστό 66,7% επεσήμαναν τις σχέσεις των τετραγώνων των αριθμών 3, 4 και 5 δείχνοντας με τα χέρια τους τα εμβαδά, λέγοντας χαρακτηριστικά

> ***Αγγελική**: 'Το άθροισμα των δύο μικρών κάνει το μεγάλο.'*
> ***Χρήστος**: 'Τα τετράγωνα των δύο πλευρών κάνουν το τετράγωνο της άλλης.'*

7.1.8 Εξαγωγή Πυθαγόρειων τριάδων

Στο ορθογώνιο τρίγωνο που φτιάχτηκε προέκυψε ότι $4^2 + 3^2 = 5^2$. Διαπιστώνεται ότι τα τετράγωνα των αριθμών 3, 4 και 5 έχουν μια συγκεκριμένη σχέση. Υπάρχουν άραγε άλλοι τέτοιοι αριθμοί? Αφήσαμε τα παιδιά να συλλογιστούν. Υπήρξαν τρεις μαθητές που έδωσαν σωστές τριάδες. Κατάφεραν να ανακαλύψουν τα πολλαπλάσια των αριθμών (3,4,5).

1^{ο} Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Έχουμε ότι* $4^2 + 3^2 = 5^2$. *Σε αυτούς τους αριθμούς παρατηρούμε ότι έχουν μια ορισμένη σχέση τα τετράγωνά τους. Υπάρχουν άραγε κι άλλοι τέτοιοι αριθμοί?'*
***Κώστας**: 'Ας δοκιμάσουμε τους αριθμούς (6,8,10).'*
***Ερ**: 'Γιατί αυτούς?'*
***Κ**: 'Γιατί είναι διπλάσιοι από το (3,4,5)'*
***Ερ**: 'Και εσύ τι καταλαβαίνεις? Αν τους διπλασιάσουμε αυτούς τους αριθμούς, τι θα γίνει δηλαδή?'*
***Κ**: 'Ότι υπάρχει μια αναλογία, θα προκύψει πάλι το ίδιο.'*

2^{ο} Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Ποιοι άλλοι συνδυασμοί αριθμών θα μπορούσαν να μας δώσουν ορθογώνιο τρίγωνο?'*
***Νάντια**: 'Οι διπλάσιοι.'*
***Ερ**: 'Δηλαδή?'*
***Ελένη**: 'Το 6, το 8 και το 10.'*
***Ερ**: 'Γιατί αυτοί οι αριθμοί? Πού πήγε το μυαλό σου?'*
***Ν**: 'Θα είναι και τα διπλάσια. Απλά θα είναι λίγο πιο μεγάλο…ότι το διπλάσιο θα είναι ακριβώς το ίδιο σχήμα.'*

Για να οδηγηθούν όμως στις τριάδες πέρασαν από ένα στάδιο υποθέσεων, υπολογισμών (έγραφαν στο χαρτί, ότι π.χ. $6^2 + 8^2 = 10^2$) και ενδεχομένως νοερών πράξεων, όπως φαίνεται στο ακόλουθο επεισόδιο, όπου ο Νίκος είπε επίσης τις τριάδες (1,2,3) και (4,5,6).

3^{ο} Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Θα μπορούσαμε να βρούμε άλλους αριθμούς?'*
***Νίκος**: 'Το 1 και το 2 με το 3. Ή αν είχαμε τον αριθμό* 6^2, *τον* 4^2 *και τον* 5^2. *Αλλά όχι…δε μας κάνουν.'*

Μία κοπέλα (Αγγελική) ανέφερε επίσης την τριάδα (6,7,8).

4^{ο} Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Με την τριάδα (3,4,5) έχουμε εξασφαλίσει ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Μήπως θα μπορούσαμε να βρούμε άλλη τριάδα που να μας δίνει ορθογώνιο?'*
***Αγγελική**: 'Το 6, το 7 και το 8.'*
***Ερ**: 'Γιατί το λες αυτό?'*
***Αγγ**: 'Όπως ήταν το 3,4,5. Συνεχόμενα.'*

Η απάντηση λοιπόν που πήραμε όταν τους ρωτήσαμε γιατί θεώρησαν ότι αυτοί οι αριθμοί δημιουργούν ορθογώνιο τρίγωνο ήταν η αναμενόμενη *'γιατί είναι διαδοχικοί αριθμοί.'* Είναι σαφές ότι επηρεάστηκαν από τη διαδοχικότητα της Πυθαγόρειας τριάδας (3,4,5). Ωστόσο όταν στην πορεία του μαθήματος οι μαθητές κατασκεύασαν ορθή γωνία με πλευρές 6εκ., 8εκ. και υπολόγισαν την υποτείνουσα 10εκ., το ζευγάρι της Αγγελικής με τη Δάφνη κατάφερε να ανακαλύψει Πυθαγόρειες τριάδες.

5^{ο} Επεισόδιο

***Ερευνητής**: 'Μπορείτε να μας βγάλετε έναν κανόνα σε σχέση με τους αριθμούς 3, 4 και 5?'*
***Αγγελική**: 'Ότι πολλαπλασιάσαμε με το 2 και βγήκε πάλι ορθογώνιο.'*
***Ερ**: 'Άλλες πλευρές που να μπορούμε να φτιάξουμε ορθογώνιο?'*
***Αγγ**: '9,12 και 15.'*
***Ερ**: 'Τι έκανες δηλαδή?'*
***Αγγ**: 'Τα πολλαπλασίασα με το 3.'*
***Ερ**: 'Μπορείτε δηλαδή να βρείτε κάποιον κανόνα?'*
***Αγγ**: 'Ότι το 36 και το 64 μας κάνει 100.'*
***Δάφνη**: 'Το τετράγωνο των δύο αυτών…αυτό είναι 6^2 και αυτό 8^2…ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών μας κάνει το τετράγωνο της υποτείνουσας.*

Σε αυτό το σημείο τρία παιδιά (ο Κώστας, η Δάφνη και η Νάντια.) κατάφεραν να διατυπώσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, λέγοντας πως *«σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της μιας κάθετης και το τετράγωνο της άλλης μας κάνουν το τετράγωνο της υποτείνουσας.»*

7.2 Αποτελέσματα συνεντεύξεων

Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες και αποτελούνταν από 17 ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου. Διεξήχθησαν ανά ζευγάρι και εφόσον οι μαθητές είχαν διδαχτεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα στη σχολική μονάδα τους. Οι αρχικές ερωτήσεις είχαν σκοπό να φέρουν στην επιφάνεια τις αντιλήψεις των παιδιών για την κατακόρυφο και την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο και κατά πόσο είχαν συνδέσει τις έννοιες αυτές με τις ενέργειες που είχαν λάβει μέρος κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στην ερώτηση *'πού συναντάει κάποιος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?'*, δόθηκαν οι απαντήσεις:

***Κώστας**: «Με τα ορθογώνια τρίγωνα, με το ζύγι.»*
***Άγγελος**: «Με την ορθή γωνία.»*
***Χρήστος – Γιάννης**: «Δε θυμάμαι.»*
***Αγγελική**: «Αυτό που κρέμαγαν ένα νήμα.»*
***Δάφνη**: «Όταν άρχιζαν να χτίζουν διάφορα…στις πυραμίδες οι Αιγύπτιοι.»*
***Γιώργος Κ.**: «Με τη βαρύτητα.»*
***Νίκος**: «Είχαμε βάλει στον τοίχο ένα ξύλο.»*
***Δανάη**: «Είχαμε κρεμάσει στον τοίχο ένα σχοινάκι…ένα βαρίδι…πιο εύκολο όμως είναι με το τρίγωνο.»*
***Νάντια**: «Σε χαράδρες…εεε…εκεί που είναι…άμεσα, εδώ που τη βλέπουμε, στον τοίχο.»*

Τρία παιδιά ανέφεραν επίσης ότι η ιδέα της καθέτου προέρχεται:

***Δάφνη**: «Απ' όταν πέφτει ένα αντικείμενο».*
***Γιώργος Κ.**: «Με κάτι ξύλα που κάναμε, κάτι γραμμές».*

***Ελένη**: «Από μία ευθεία που έχει την τάση να πηγαίνει προς τα κάτω, χωρίς όμως να πηγαίνει πλάγια ή λοξά, προς τον πυρήνα της γης».*

Κάπου εδώ αρχίζει ν' αναδεικνύεται μια ανησυχία από πλευράς της Δανάης μέσα από την ερώτηση που έθεσε : *"Βλέπουμε σε καλύβες ότι δεν είναι οι τοίχοι κάθετοι. Μετά πώς τους ήρθε η ιδέα να κάνουν κάθετους τους τοίχους?"*. Ακολούθησε ένας ενδιαφέρον διάλογος που έμεινε ωστόσο εκκρεμής αφού ο χρόνος ήταν περιορισμένος.

***Ερευνητής**: «Εδώ όμως ο άνθρωπος επινοεί με βάση την εμπειρία του. Δεν μπορούσε να σκεφτεί τους αριθμούς. Με πειράματα το κατάφερε.»*
***Δανάη**: «Και πώς ήξερε ότι είναι κάθετο?»*
***Ερ**: «Το έβλεπε.»*
***Δ**: «Ναι, ξεκίνησαν όμως από κάτι που μπορεί και να μην είναι σίγουρο.»*
***Ερ**: «Ναι, αλλά εκείνοι ξέρεις τι ήθελαν.»*
***Νίκος**: «Να φτιάξουν τα σπίτια τους.»*
***Δ**: «Αισθανόταν φυσιολογικό ότι το ταβάνι στέκεται και δεν πέφτει με τους νόμους της βαρύτητας?»*

Στην αντίστοιχη ερώτηση *'πού συναντάει κάποιος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?'* δόθηκαν οι απαντήσεις

***Κώστας**: «Στο πάτωμα, στη θάλασσα».*

Εδώ ο ***Άγγελος*** εξέφρασε την απορία *«απλώς…είναι ακριβώς οριζόντια η θάλασσα?»*

***Χρήστος** : «Όπως και στις πολυκατοικίες…είναι ο δρόμος, είναι η κάτω γραμμή…η βάση.»*
***Ελένη**: «Εκεί που χωρίζεται η γη κι ο ουρανός, δηλαδή στη θάλασσα.»*
***Νάντια**: «Στο πάτωμα, στο έδαφος.»*
***Γιώργος Κ.**: «Στο πάτωμα, κάτω, παράλληλα προς το επίπεδο».*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο διάλογος στο ζευγάρι Αγγελικής – Δάφνης, όπου η Δάφνη έχοντας μια απορία στο μυαλό της, ανακαλεί εικόνες του οικείου περιβάλλοντός της και αναθεωρεί την άποψή της.

***Ερευνητής**: «Πού συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?»*
***Αγγελική**: «Στο έδαφος.»*
***Ερ**: «Είναι πάντα οριζόντιο? Πού είναι το οριζόντιο?»*
***Αγγ**: «Στην πεδιάδα, αλλά μπορεί να κάνει έτσι.» (Δείχνει καμπύλες με τα χέρια της)*
***Ερ**: «Εντελώς οριζόντιο που συναντάμε?»*
***Δάφνη**: «Στον πάγο, όταν είναι λείος.»*
***Αγγ**: «Η θάλασσα, το νερό.»*

***Δ**: «Ναι, αλλά όταν φυσάει? Δίκιο έχεις, αλλά όταν είναι ήρεμη η επιφάνεια θα είναι οριζόντια.»(Δίνει την απάντηση από μόνη της)*

Όπως επίσης και αυτός της Δανάης με του Νίκου, όπου η αντίληψη από πλευράς της Δανάης ότι τα μαθηματικά είναι ιδεατότητες αρχίζει να γίνεται όλο και πιο έντονη, εκφράζοντάς το με μια ιδιόρρυθμη επιμονή.

***Ερευνητής**: «Πού συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?»*
***Δανάη**: «Πουθενά.»*
***Νίκος**: «Στο έδαφος.»*
***Δ**: «Μα δεν είναι.»*
***Ν**: «Στις πεδιάδες.»*
***Δ**: «Μα ακόμα και αυτό. Τίποτα δεν είναι ίσιο. Ακόμα και οι ακτίνες του ήλιου όταν περνάνε από τη γη καμπυλώνονται.»*
***Ερ**: «Πάρε έναν κουβά, πάνω – πάνω.»*
***Δ**: «Μα κι αυτό θα κινείται.»*
***Ν**: «Όταν δεν έχει αέρα…η θάλασσα.»*

Στη συνέχεια τα παιδιά ρωτήθηκαν *«ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?»* . Όλοι είπαν *«το ορθογώνιο τρίγωνο»* εκτός από έναν που είπε *«το χάρακα»*. Ζητώντας τους ύστερα να πούνε *«πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?»* το 83,3% ανέφερε τα ξύλα και τη συσχέτισή τους με τους αριθμούς (3,4,5), διατυπώνοντας μάλιστα και τη σχέση που ικανοποιούν οι αριθμοί αυτοί (Πυθαγόρειο Θεώρημα), ενώ το υπόλοιπο16,7% δεν μπόρεσε να θυμηθεί. Να τονίσουμε πως ο ένας από τους 10 μαθητές θυμήθηκε τους αριθμούς από το χρωματισμό των ξύλων. Συγκεκριμένα, είπαν:

1^{ο} Ζευγάρι
***Κώστας**: «Έχουμε τα τρία μεγέθη. Το 3, το 4 και το 5.»*

2^{ο} Ζευγάρι
***Χρήστος**: «Ανάλογα με τους αριθμούς.»*
***Γιάννης**: «5...νομίζω 10…»*
***Χρ**: «2, 3 και 5…»*
***Ερευνητής**: «Πλησίασες. Είπες το 5, είπες το 3, λείπει άλλος ένας αριθμός.»*
***Γ**: «Το 7?»*

3^{ο} Ζευγάρι
***Αγγελική**: «Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλωστές που να έχουν μήκη 3, 4 και 5.»*

4^{ο} Ζευγάρι
***Γιώργος Κ.**: «Το είχαμε φτιάξει με κάτι ξύλα. Είχαμε φτιάξει τις δύο κάθετες πλευρές και βάλαμε ένα ξύλο να σχηματίζει την υποτείνουσα.»*
***Ερευνητής**: «Οι πλευρές ήταν τυχαίες?»*
***Γιώργος Κ.**: «Όχι, είχαν ένα συγκεκριμένο μήκος.»*

***Ερ**: «Ποιο?»*
***Γιώργος Κ.**: «Ήταν χρωματισμένες με διάφορα χρώματα.»*
***Γιώργος Μ.**: «Απ' ότι θυμάμαι τα 5εκ. ήταν με μοβ.»*
***Ερ**: «Τι μονάδες είχαμε εκεί?»*
***Γιώργος Κ.**: «3, 4 και 5.»*

5^{ο} Ζευγάρι

***Δανάη**: «3, 4, 5, έχω βαρεθεί πια. Παντού είναι αυτοί οι αριθμοί.»*

6^{ο} Ζευγάρι

***Ελένη**: «Με τα ξύλα. Βάζουμε ένα μεγάλο που να είναι επάνω στον τοίχο και μετά από εκεί προσπαθούμε » (την κόβει η Νάντια)*
***Νάντια**: «Να φτιάξουμε ένα τρίγωνο.»*
***Ερευνητής**: «Με τι πλευρές?»*
***Ν**: «5, 4, 3.»*
***Ελ**: «Ορθογώνιο τρίγωνο.»*

Έχοντας εντοπίσει δυσκολία στην κατανόηση των γωνιών κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διδασκαλίας, τοποθετήθηκαν στη συνέντευξη τρεις ερωτήσεις που αφορούσαν

- Τον ορισμό των παραπληρωματικών γωνιών,
- Το σχεδιασμό τους και
- Το πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες είναι ίσες.

Όσον αφορά τον ορισμό, γνώριζε το 33,3%. Από τις απαντήσεις για τον ορισμό, οι εκφράσεις των δύο αγοριών φανερώνουν ότι είχαν στο νου τους οπτικές αναπαραστάσεις. Αντίθετα η απάντηση της Αγγελικής είναι περισσότερο φορμαλιστική.

***Κώστας**: «Αυτές που συμπληρώνουν η μία την άλλη…και είναι 180^{ο}.»*

***Γιώργος Μ.**: «Α, ναι! Το θυμήθηκα. Που σχηματίζουν γωνία 180 μοίρες.»*

***Αγγελική**: «Αυτές που το άθροισμά τους είναι 180 μοίρες.»*

Από τα 8 παιδιά που έδωσαν αρνητική απάντηση για το τι είναι παραπληρωματικές γωνίες,

- 4 παιδιά (Άγγελος, Χρήστος, Γιάννης, Δανάη) απάντησαν *«όχι»* και περίμεναν να τους πούμε.
- 2 παιδιά (Νάντια, Ελένη) σχεδίασαν κατακορυφήν γωνίες. Όταν τους είπαμε ότι δεν είναι αυτές, η Ελένη σχεδίασε δύο παραπληρωματικές, δίνοντας τον ορισμό *«όταν η μία πλευρά είναι κοινή»*. Η άποψή του αναιρέθηκε μόλις του δείξαμε δύο εφεξής μη παραπληρωματικές γωνίες.

- 1 παιδί (Γιώργος. Κ) είπε «αυτές που είναι παραπάνω των 90°…..»
- 1 παιδί (Νίκος) ψέλλισε *«όταν είναι παράλληλες…όχι…δεν υπάρχουν τέτοιες…»*

Αφού δόθηκε ο ορισμός από τους ερευνητές, το 66,7% κατάφερε να σχεδιάσει δύο παραπληρωματικές γωνίες και το 100% απάντησε στο πότε δύο παραπληρωματικές είναι ίσες.

Ζητήθηκε έπειτα να σχεδιάσουν ορθογώνιο τρίγωνο και να ονομάσουν τις πλευρές. Το 83,3% σχημάτισε επιτυχώς το ορθογώνιο ενώ το 16,7% έφτιαξε ορθή γωνία. Σχετικά με την ονομασία των πλευρών, 8 μαθητές (66,7%) τις ονόμασαν ως κάθετες και υποτείνουσα, 2 μαθητές (16,7%) δεν έδωσε καμία απάντηση, 1 μαθητής (8,3%) μπέρδεψε την υποτείνουσα και την είπε εφαπτομένη και 1 μαθητής (8,3%) έδωσε ονομασίες με μεταβλητές (α, β, γ).

Η διαδικασία της συνέντευξης ακολουθήθηκε από την εξής δραστηριότητα: *«Φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ, 4εκ., 5εκ. Θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω και να μας πείτε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο».* Όλοι πέτυχαν στην κατασκευή του σχήματος. Μόνον ο Άγγελος δυσκολεύτηκε στο σημείο που έπρεπε να φτιάξει το τετράγωνο της υποτείνουσας γιατί δεν μπορούσε να εξασφαλίσει την ορθή γωνία (και με τη βοήθεια χάρακα) σε κεκλιμένο επίπεδο. Αντιθέτως, ο Χρήστος εξασφάλισε καθετότητα χωρίς τη χρησιμοποίηση γνώμονα. Όσον αφορά τη συσχέτιση με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μηδενός εξαιρουμένου απάντησαν ορθά. Ποσοστό 58,3% τόνισε πως η σχέση που προκύπτει έχει να κάνει με εμβαδόν χρησιμοποιώντας πολύ έντονα τα χέρια τους. Ακολουθούν μερικά στιγμιότυπα:

***Άγγελος**: «Το 9 και το 16 θα έπρεπε να είναι 25.»*

***Γιάννης**: «Α γωνία και…όχι, α^2 και β^2 μας βγάζει το γ^2.»*
***Χρήστος**: «Τώρα είναι 3, 4 και 5. Όχι με α, β και γ. Και άμα υψώσουμε το $4^2 + 3^2$ μας κάνουν 5^2.»*
.....
***Χρήστος**: «Θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν.»*

***Αγγελική**: «Ότι το εμβαδόν των δύο τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας.»*
***Δάφνη**: «Δηλαδή ενώ με τις τελίτσες θα βλέπαμε αριθμούς τώρα βλέπουμε εμβαδόν.»*

***Δανάη**: «Ότι το τετράγωνο αυτό…(δείχνει της μιας κάθετης) και αυτό (δείχνει το τετράγωνο της άλλης) μας κάνουν αυτό το τετράγωνο (δείχνει αυτό της υποτείνουσας).»*

***Ελένη**: «Ότι το τετράγωνο αυτό (δείχνει) κι αυτό (δείχνει) είναι ίσο με αυτό (δείχνει το τετράγωνο της υποτείνουσας).»*

Κατόπιν τους είπαμε να φτιάξουν ορθογώνιο τρίγωνο με τις κάθετες πλευρές να είναι δεκαδικοί αριθμοί, να προσπαθήσουν να φτιάξουν τα τετράγωνα των πλευρών με τελείες και να υπολογίσουν την υποτείνουσα (χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης). Όλοι τους διαπίστωσαν ότι είναι αδύνατη η κατασκευή των τετραγώνων με τη μορφή των σχηματικών αριθμών.

***Κώστας**: «Αφού είναι μισό…δεν μπορούμε να κάνουμε τα ίδια.»*

***Δάφνη**: «Επειδή δεν είναι ακέραιοι οι αριθμοί δε βγαίνουν.»*

***Νάντια**: «Ε! τότε δεν μπορούμε.»*
***Ελένη**: «Ε, δεν ξέρουμε…γιατί βγαίνει δεκαδικός αριθμός.»*

***Χρήστος**: «Δε θα βγει ακριβώς επειδή είναι 0.81 (η υποτείνουσα στο δικό του τρίγωνο ήταν 7.81).»*
***Γιάννης**: «Δηλαδή είναι δεκαδικός αριθμός, δεν είναι ακέραιος. Άρα δεν μπορούμε να το φτιάξουμε.»*

Στον υπολογισμό της υποτείνουσας ο Γιάννης που βρήκε το τετράγωνο της υποτείνουσας 50, είπε ότι ισούται με 25. Διαψεύστηκε όμως με τη χρήση του υπολογιστή. Κι ένα άλλο παιδί, ο Γιώργος Μ., όταν πάτησε τη ρίζα του 9,76 έδειξε να παραξενεύεται αφού είπε *«δε βγαίνει ολόκληρος αριθμός, βγάζει άπειρα δεκαδικά ψηφία»*.

Επιθυμώντας να εξεταστεί αν έχει γίνει κατανοητό το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και κατά πόσο μπορούν να βρουν Πυθαγόρειες τριάδες, προτάθηκε η παρακάτω δραστηριότητα: *«Αν οι αριθμοί 17, 8 και 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο. Μπορείτε να βρείτε πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?»*. Το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος φάνηκε να έχει κατανοηθεί και από τους 12 μαθητές. Όλοι ήταν σε θέση να επαληθεύσουν την ισχύ του Πυθαγορείου επιβεβαιώνοντας ότι $17^2 = 8^2 + 15^2$.

***Άγγελος**: «Θα πρέπει* $17^2 = 8^2 + 15^2$*.»*

***Χρήστος**: «Θα προσθέσουμε στο τετράγωνο τις δύο μικρότερες πλευρές και θα δούμε αν θα μας βγάλει το αποτέλεσμα, το τετράγωνο της υποτείνουσας.»*
***Γιάννης**: «Πρέπει να βρούμε αν είναι τρίγωνο?»*
***Ερευνητής**: «Αν είναι ορθογώνιο τρίγωνο.»*
***Γιάννης**: «Μας βγάζουνε. Γιατί αν προσθέσομε αυτά τα δύο αποτελέσματα, δηλαδή* $8^2 + 15^2$ *βγάζουν* 289 *και άμα πατήσουμε* $\sqrt{289}$ *βγαίνει 17. (εδώ ο Γιάννης ένιωθε σιγουριά γι' αυτά που έλεγε και φαίνεται από τη ροή που πήρε ο λόγος του καθώς ήταν χειμαρρώδης.).»*

***Αγγελική**: «Θα υψώσουμε το 15 και το 8 στη δευτέρα και αν τα προσθέσουμε θα πρέπει να είναι ίσο με το τετράγωνο του 17.»*

***Ελένη**: «Λογικά είναι. 8 είναι η μικρότερη. 15 αυτή και 17 η υποτείνουσα.»*

***Νάντια**: «Θα μπορούσαμε να τα κάνουμε όλα στο τετράγωνο τους. Να βρούμε δηλαδή τα τετράγωνά τους και μετά να τα προσθέσουμε κι αν μας κάνουν το τετράγωνο του 17 θα είναι.(κάνουν πράξεις με υπολογιστή)»*
***Ελ**: «Ναι.»*
***Ν**: «Γίνεται.»*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η Δανάη προσέγγισε διαφορετικά την επαλήθευση συγκριτικά με όλα τα άλλα παιδιά. Ανακάλεσε αρχικά την τριάδα (3,4,5) και θέλησε στη συνέχεια να επιχειρήσει μία σχηματική απόδειξη.

***Δανάη**: «Ναι! Να δούμε αν είναι πολλαπλάσια των 3, 4 και 5.»*
***Ερευνητής**: «Δεν είναι όμως.»*
***Δ**: «Νννναιιι.....θα φτιάξουμε το τρίγωνο.»*
***Ερ**: «Άλλος τρόπος ελέγχου?»*
***Νίκος**: «Με το μυαλό. Λογικά 8 και 15 είναι οι κάθετες και 17 η υποτείνουσα. Θα το φτιάξουμε και θα το δοκιμάσουμε.»*
***Δανάη**: «Να δούμε αν* $15^2 + 8^2 = 17^2$*.»*
***Ερ**: «Ναι.»*
***Δ**: «Αυτό ήταν όλο?»*
***Ν**: «Αυτό το ήξερα.»*

Επιπλέον

- Τα 3 παιδιά (Κώστας, Νάντια, Ελένη) που είχαν βρει κι άλλες Πυθαγόρειες τριάδες κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, με περισσή άνεση έδωσαν κι εδώ ανάλογα παραδείγματα. Ανέφεραν λόγου χάρη την τριάδα (34,16,30) και «*τα τριπλάσια του 17,8,15*».
- 5 (Αγγελική, Δάφνη, Γιώργος Κ., Δανάη, Νίκος) ήταν αυτοί που μίλησαν για διπλάσια και πολλαπλάσια.
- 2 (Άγγελος, Γιώργος Μ.) θεώρησαν τα τετράγωνα των αρχικών πλευρών (8,15,17) δηλαδή τους αριθμούς (64,225,289) και
- 2 (Χρήστος, Γιάννης) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Στα παιδιά που δεν έδωσαν καμία απάντηση, όταν τους φέραμε σα διαδικασία τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση στις φωτοτυπίες χαρτιού, ανέφεραν

***Γιάννης**: «Μπορούμε να πάρουμε το μισό του 15».*
***Χρήστος**: «Ή το διπλάσιο»*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Ερμηνεία
Αποτελεσμάτων

Ο δάσκαλος όντας ενήλικος
πρέπει να μπορεί να γίνει παιδί :
άνθρωπος αγνός, δροσερός, εύπλαστος.
Όταν ο δάσκαλος πλησιάσει με την ψυχή του
την παιδική ψυχή,
τότε βρίσκει την πρόσβαση προς
τα αισθήματα, τις σκέψεις, τις επιθυμίες του παιδιού,
τις οποίες και θα διαπαιδαγωγήσει.

Ε. Παπανούτσος

8.1 Συσχέτιση αποτελεσμάτων με το θεωρητικό πλαίσιο.

Στο πρώτο στάδιο της διδασκαλίας επιχειρήθηκε να εξεταστεί ο ενσώματος χαρακτήρας της έννοιας της κατακόρυφου, μέσω του φυσικού προτύπου του 'νήματος της στάθμης'. Οι Merleau–Ponty και Piaget έχουν τονίσει τη σημασία της βαρύτητας στην κατανόηση του κόσμου. Αυτή η άποψη υποστηρίζεται επίσης από τους Zuzne (1970), Ibbotson & Bryant (1976), Varela et al. (1999), Nunez et al. (1999), οι οποίοι απέδωσαν τη μεγάλη σημασία της αίσθησης της βαρύτητας λέγοντας ότι η εμπειρία της ισορροπίας είναι μέρος της καθημερινής μας ζωής και καθιστά πιθανή τη φυσική μας εμπειρία για τον κόσμο καθώς και την επιβίωσή μας σε αυτόν. Ο Σπύρου (2005) αναφέρει ότι η αίσθηση της βαρύτητας είναι χαρακτηριστική της ουσίας μας ως ευφυή όντα, είναι έμφυτη στην αντιληπτική σωματική μας εμπειρία και αμετάβλητη σε κάθε ιστορικό χρόνο για όλα τα υποκείμενα. Θεωρεί επίσης ότι «η αντίληψη της βαρύτητας και η αναγνώριση των σχημάτων παρέχουν το πλαίσιο για την κατασκευή βασικών γεωμετρικών σχημάτων».

Οι Lappas & Spyrou (2006) ισχυρίζονται πως γύρω από τις αντιλήψεις της κατακόρυφου (V), της οριζόντιου (H) και της ομοιότητας (S) στηρίζονται οι κύριες θεωρητικές κατασκευές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτή ανατέλλει από την επίμονη προσπάθεια για μια αντικειμενική εκπραγμάτωση (reification) που συνδέεται με τα V, H, S μέσω της αριθμητικής και της λογικής. Τα V, H, S είναι ποιοτικές λειτουργίες, που ανήκουν σε υποκειμενικές αισθήσεις και εσωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι δύσκολο να μεταδοθούν. Ο Radford (2003, σελ.41) θεωρεί ότι "οι αναπαραστάσεις που παράγονται σημειωτικά (δηλαδή με σύμβολα και

κανόνες χρήσης τους) μπορούν να διαδραματίσουν το ρόλο της επεξεργασίας (trainment) και της εξαντικειμενίκευσης που είναι θεμελιώδεις σε κάθε διαδικασία γνώσης”.

8.2 Ερμηνεία αποτελεσμάτων

8.2.1 Γενικά

Τα παιδιά που μετείχαν στην έρευνα παρουσίασαν όχι τη μαθηματική δέσμευση της δύναμης του φορμαλισμού, αλλά άντ’ αυτού ένα σύνολο διαισθήσεων που ενεργοποιείται μέσω της δραστηριότητας και της εμπειρίας του φυσικού κόσμου. Η δραστηριότητα αναμειγνύει εργαλεία (ζύγια, πήχεις, χάρακας, μολύβι κ.ο.κ) τα οποία στερούνται του χαρακτήρα των συμβόλων (Volosinov, 1973, σελ.10) αλλά αποκτούν μία λειτουργική έννοια (Radford, 2003). Ενεργώντας μέσα στο περιβάλλον και αναδιοργανώνοντας τους χειρισμούς τους, οι μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν νοητικές αναπαραστάσεις για τον κόσμο. Σχηματικά θα μπορούσαμε να πούμε πως ακολουθήθηκε η κάτωθι αλληλουχία ενεργειών

Αλληλεπιδράσεις με τον κόσμο

↓

Αντίληψη

↓

Κανόνες πραγματικών γεγονότων

↓

Πλατωνικά αντικείμενα

↓

Ευκλείδεια απόδειξη

Δηλαδή η αντίληψη για τον κόσμο περιλαμβάνει μελέτη του χώρου και του σχήματος, η οποία οδηγεί τελικά στη γεωμετρία, όπου οι λεκτικές διατυπώσεις υποστηρίζουν μια μετατόπιση προς την Ευκλείδεια απόδειξη (Lappas & Spyrou, 2006). Με άλλα λόγια, η εξαγωγή και η κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος πέρασε μέσα από μεσολαβημένες ενσώματες ενέργειες. Να σημειώσουμε εδώ ότι με τον όρο ‘ενσώματη’ εννοούμε

i. Ότι η γνώση εξαρτάται από το είδος της εμπειρίας που έχει ένα σώμα με τις διάφορες αισθησιοκινητικές ικανότητες, και
ii. Ότι αυτές οι αισθησιοκινητικές ικανότητες είναι από μόνες τους ενσώματες σε ένα περισσότερο βιολογικό, ψυχολογικό και πολιτισμικό πλαίσιο.

(Varela, Thompson & Rosch, 1999)

8.2.2 Ως προς την κατακόρυφο

Ο ορισμός της έννοιας της κατακόρυφου συνδέεται αυστηρά με το σώμα και τον εγκέφαλό μας (Manno,2006). Τα παιδιά ξέρουν ότι αν αφήσουν ένα αντικείμενο από ένα ύψος αυτό θα πέσει στο έδαφος. Οι περισσότεροι μαθητές στην έρευνα απάντησαν ότι αφήνοντας το μπαλάκι από τα χέρια τους, αυτό θα ακολουθήσει μία πορεία ευθείας.

Θέλησαν μάλιστα να οπτικοποιήσουν την πορεία, χρησιμοποιώντας μία κάθετη γραμμή ώστε να δείξουν το δρόμο που ακολούθησε το μπαλάκι. Η προσπάθεια και η επιτυχία οπτικοποίησης της κατακόρυφης πτώσης είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα από την άποψη περιπλοκότητας και στρατηγικής επίλυσης ενός προβλήματος. Φανερώνει μία εννοιολογική κατανόηση και ικανότητα δυναμικής και ευέλικτης εφαρμογής εννοιών.

Παρουσιάστηκε έτσι το σιωπηρό μοντέλο της κατακόρυφου. Τα παιδιά έχτισαν με αυτόν τον τρόπο μία νοητική εικόνα της έννοιας της κατακόρυφου που συνδέεται με το μοντέλο του «νήματος της στάθμης». Σύμφωνα με τη Manno (2006), οι λόγοι που συντρέχουν σε αυτό το μοντέλο είναι η παρόμοια σημασία των λέξεων ‘κάθετος-κατακόρυφος’, η προσωπική εμπειρία της έννοιας της βαρύτητας και ο τρόπος που λειτουργεί το σώμα μας. Η Manno (2006) υποστηρίζει ότι το σιωπηρό μοντέλο της κατακόρυφου είναι πολύ δυνατό στα παιδιά, και τα παιδιά που δεν έχουν αυτό το εσωτερικό μοντέλο δεν είναι ικανά να προσδιορίσουν τη μαθηματική έννοια της καθέτου. Υπάρχουν εντούτοις μερικοί μαθητές που έχουν τη σωστή ιδέα της καθέτου, αλλά αυτό είναι μόνο μια ιδέα, όχι μια μαθηματική έννοια. Αναφέρει ακόμα πως για ν’ αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της κατανόησης της έννοιας της καθέτου μέσω της σωματικής εμπειρίας, είναι καθήκον να ληφθούν υπόψη οι βιολογικοί νόμοι των ανθρώπων, οι οποίοι θεωρούν απαραίτητη τη σύνδεση των εννοιών της βαρύτητας και της κατακόρυφου.

Επίσης η έννοια της κατακόρυφου όπως και της οριζοντίου εκφράστηκαν από τη Δανάη ως ιδεατότητες, όπως διαπιστώνει κανείς από τα αποσπάσματα των συνεντεύξεων. Αναφέρει ότι υπάρχουν στο νου μας και τις εφαρμόζουμε χωρίς να είναι κάτι πραγματικό. Είναι εμφανές ότι έχει κάποιες διάχυτες ιδέες περί σχετικότητας, πράγμα και το οποίο διαπιστώθηκε όταν στις συνεντεύξεις είπε πως γενικά στο σπίτι κάνει συζητήσεις επιστημονικού ενδιαφέροντος με τους γονείς της.

8.2.3 Ως προς την εξαντικειμενίκευση (objectification) της ορθής γωνίας

Η ανακάλυψη των τριάδων στο ορθογώνιο τρίγωνο προέρχεται από παρατηρήσεις που έκαναν οι άνθρωποι ότι η βαρύτητα τραβάει ένα βάρος που είναι δεμένο σε ένα νήμα (το ευθύ του Πυθαγορείου Θεωρήματος). Πρέπει όμως πρώτα να ελεγχθεί ο τρόπος με τον οποίο θα κατασκευαστεί η ορθή γωνία. Για το λόγο αυτό τέθηκε στα παιδιά ένας προβληματισμός. Σε αυτό το σημείο αφέθηκε στα παιδιά

αρκετός χρόνος ούτως ώστε ν' αντιληφθούν το μέγεθος και τη σημασία του προβληματισμού, να προσπαθήσουν ν' ανακαλύψουν κάτι νέο γι' αυτούς αλλά γνωστό για τους ερευνητές. Άρχισαν, όπως παρατηρεί και η Furinghetti (2007), να συλλογίζονται στη σημασία των μαθηματικών αντικειμένων μέσω των εμπειρικών ιστορικών στιγμών κατασκευής τους. Μερικοί έδωσαν την ιδέα του τριγώνου, φανερώνοντας ότι δεν υπάρχει αναλυτική εμπειρία δράσης. Εδώ φαίνεται ότι το πολιτισμικό περιβάλλον δεν αφήνει τα παιδιά να προσεγγίσουν άμεσα τη σύνδεση καθέτου-κατακόρυφου. Έχουν μάθει άλλους τρόπους χειρισμού, όπου πλέον δεν μπορεί να προσαρμοστεί άμεσα η παλαιά έννοια. Άλλοι κατευθύνθηκαν σε αισθητηριακούς προσανατολισμούς. Άλλωστε, όπως αναφέρει ο Nemirovsky (2003), ο Kitcher (1983) δίνει μια θεωρία της μαθηματικής γνώσης υποθέτοντας ότι οι αρχές των μαθηματικών βρίσκονται σε μία αισθητική αντίληψη που έχουμε για τον κόσμο γύρω μας.

Δε θα πρέπει βεβαίως να παραλειφθεί το γεγονός ότι η αντιμετώπιση των προβληματισμών αυτών από τους μαθητές ανέδειξε επίσης:

- Ικανότητα χειρισμού μαθηματικού προβλήματος.
- Παρατηρητικότητα.
- Κιναισθητικότητα.
- Επιμονή.

Όλα αυτά σχετίζονται άμεσα με την αυτοπεποίθηση, την αυτεπάρκεια, τη στάση των μαθητών απέναντι στις ποικίλες προκλήσεις που βρίσκονται και εντέλει με τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που αναπτύσσονται από τα παιδιά και είναι αποτέλεσμα μιας ποικιλίας αντιληπτικών και εννοιολογικών παραγόντων.

Μη μπορώντας όμως οι μαθητές να φτάσουν στην ανακάλυψη της αρχικής Πυθαγόρειας τριάδας (3,4,5), πραγματοποιήθηκε και η πρώτη παρέμβαση από τους ερευνητές. Δόθηκαν στα παιδιά τρεις πήχεις μεγέθους 90εκ., 120εκ. και 150εκ. οι οποίοι ήταν χρωματισμένοι με διαφορετικό χρώμα ανά 30εκ. και ζητήθηκε να τους περιεργαστούν κάνοντας παρατηρήσεις. Μία παρέμβαση όπου, κατά τον Radford (2006), παρ' όλο που τα άτομα είναι οι παραγωγοί των εννοιών και των ιδεών τους, μέσω του σχεδίου του μαθήματος η υποκειμενική έννοια των μαθητών ωθείται προς συγκεκριμένες κατευθύνσεις της εκάστοτε εννοιολογικής ανάπτυξης. Ο Freudental (1991) θεωρεί επίσης ότι οι μαθητές θα έπρεπε να καθοδηγούνται έτσι ώστε να ξαναανακαλύψουν τις έννοιες που τίθενται υπό συζήτηση, χρησιμοποιώντας τη γνώση που ήδη έχουν.

Η αντίστροφη περίπτωση, δηλαδή να κατασκευαστεί ορθή γωνία έχοντας μία τέτοια τριάδα, οδηγεί στην εξαντικειμενίκευση της ιδέας της ορθής γωνίας από τη βαρύτητα. Σε αυτό το σημείο πραγματοποιήθηκε και δεύτερη παρέμβαση από τους ερευνητές λόγω έλλειψης χρόνου. Τοποθετήθηκε στον κατακόρυφο τοίχο το ένα από τα τρία ξύλα (αυτό των 90εκ. ή των 120εκ.) και ζητήθηκε να δημιουργηθεί ορθογώνιο τρίγωνο. Εξαντικειμενεύτηκε εντέλει, σε ένα αρχικό στάδιο, μέσω των αριθμητικών σχέσεων μία καθαρά αντιληπτική κατηγορία όπως το κατακόρυφο. Αναφέρεται από τους Lakoff & Nunez (2000, σελ.109) ότι, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, στην κλασική θεωρία η κατηγορία καθορίζεται από ένα σύνολο ικανών και αναγκαίων συνθηκών, από μία λίστα με έμφυτες ιδιότητες που έχει κάθε μέλος.

Μερικοί μαθητές τη στιγμή που επιχείρησαν να κατασκευάσουν το τρίγωνο στο πάτωμα της τάξης ξεκίνησαν από την υποτείνουσα και αντιμετώπισαν δυσκολίες. Ήταν αυτοί οι μαθητές που μετέπειτα διαπιστώθηκε πως δεν είχαν κατανοήσει την έννοια της γωνίας. Αντιθέτως, στα παιδιά που είχαν κατακτήσει κάποιες θεμελιώδεις έννοιες παρατηρήθηκε εναρμονισμένη κιναισθητικότητα χεριών και μυαλού κατά τη διάρκεια της κατασκευής του ορθογωνίου τριγώνου. Παρ' όλες τις δυσκολίες που

αντιμετώπισαν, κατάφεραν όλοι να δημιουργήσουν το ορθογώνιο τρίγωνο χρησιμοποιώντας τους πήχεις, και όταν τους δόθηκε η μία κάθετη πλευρά να ακουμπάει στον τοίχο, και αργότερα στο πάτωμα, εν αντιθέσει με το χαρτί όπου υπήρξαν μαθητές που παρουσίασαν εμπόδια όταν επιχείρησαν να σχεδιάσουν το τρίγωνο με χαρτί και μολύβι.

Επίσης, ένα μεγάλο ποσοστό της τάξεως του 91,6% κατάφερε να διαπιστώσει ποιοτικά ότι οι αριθμοί 3,4,5 είναι ένας ικανός και αναγκαίος προσδιορισμός για την κατασκευή ορθής γωνίας.

8.2.4 Ως προς τις γωνίες

Στην έρευνά διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν γνωστικά εμπόδια όσον αφορά τις γωνίες. Σε ποσοστό 16,6% δεν ήταν σε θέση ούτε να ονομάσουν τα βασικά είδη γωνιών ούτε να τις σχηματίσουν. Η Fyhn (2008) λέει ότι είναι δύσκολο για πολλούς μαθητές να καταλάβουν "τι είναι μια γωνία" και "πώς να συγκρίνουν γωνίες διαφορετικών μεγεθών" (Johnsen, 1996; Gjone & Norberg, 2001; Fyhn, 2004). Αναφέρεται επίσης σε μία μελέτη των Gjone & Norberg (2001), όπου βρέθηκε ότι μόνο το 30% των Νορβηγών μαθητών της έκτης δημοτικού απάντησαν σωστά για το ποια είναι η μεγαλύτερη από δύο γωνίες που τους δόθηκαν σε ένα σχήμα.

Σημαντικές παρανοήσεις και δυσκολίες στην έννοια της γωνίας οφείλονται στον τρόπο με τον οποίο αυτή έχει οριστεί. Οι τρεις συνηθέστεροι ορισμοί της γωνίας, όπως αυτοί εμφανίζονται στη βιβλιογραφία (Mitchelmore, 1989; Krainer, 1989; Schweiger, 1986; Roels, 1985; Freudental, 1983) είναι οι ακόλουθοι

- Το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται μεταξύ δύο ημιευθειών (στατικός ορισμός).
- Ένα ζεύγος ημιευθειών με ένα κοινό σημείο τομής (στατικός ορισμός).
- Η στροφή δύο ευθειών γύρω από ένα σημείο (δυναμικός ορισμός).

Στην έρευνά μας τρία από τα δώδεκα παιδιά, ποσοστό 25% δηλαδή, δεν μπορούσαν να διακρίνουν τα είδη των γωνιών. Υπήρξε σύγχυση μεταξύ των εννοιών των γωνιών και των πλευρών. Θεώρησαν ότι οι οριζόντιες και οι παράλληλες είναι οι διαφορετικές από την ορθή γωνία. Ένα μεγάλο ποσοστό της τάξεως του 66,7% δεν ήξερε τις παραπληρωματικές γωνίες, παρόλο που τις είχαν διδαχτεί την περσινή χρονιά (στην Α' Γυμνασίου). Όταν δόθηκε ο ορισμός των παραπληρωματικών γωνιών και ζητήθηκε ο σχεδιασμός τους, 33.3% των παιδιών δεν κατάφεραν να τις απεικονίσουν. Σύμφωνα με τους Henderson & Taimina (2005, σελ.38) "φαίνεται πιθανό ότι κανένας επίσημος ορισμός δεν μπορεί να συλλάβει όλες τις πτυχές της εμπειρίας μας για το τι είναι γωνία". Επισημαίνουν τρεις διαφορετικές απόψεις, από τις οποίες μπορούμε να καθορίσουμε τις γωνίες ως

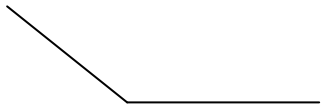
- Δυναμική έννοια
- Μέτρο
- Γεωμετρική μορφή

Ποιοτική αντιμετώπιση γωνίας

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές, σε ποσοστό 75%, όταν τους ζητήθηκε να φτιάξουν τρίγωνα, παρόλο που είχαν μοιρογνωμόνιο, δεν το χρησιμοποίησαν για να δημιουργήσουν οξείες ή αμβλείες γωνίες. Παρατηρήθηκε λοιπόν μία ποιοτική αντιμετώπιση της γωνίας από την πλειονότητα των υποκειμένων.

Γωνία ως δράση

Ένας από τους μαθητές φαίνεται να είχε συνδυάσει τη γωνία με δράση. Κάτι τέτοιο γίνεται αντιληπτό από τη στιγμή που του τέθηκε η ερώτηση *«ποια γωνία είναι αμβλεία?»* και απάντησε *«η γωνία που πηγαίνει προς τ' αριστερά»* σχεδιάζοντας το παρακάτω:



Σε μία άλλη δραστηριότητα, αρχικά ζητήθηκε να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $\text{ΑΒ} = 3\text{cm}, \text{ΑΓ} = 4\text{cm}, \text{ΒΓ} = 5\text{cm}$ κι έπειτα τετράγωνα με πλευρές αυτές του ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή $\text{ΑΒ}, \text{ΑΓ}, \text{ΒΓ}$. Όλοι κατασκεύασαν τις κάθετες πλευρές έτσι ώστε να είναι παράλληλες στις γραμμές του μιλιμετρέ. Δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα στο να φτιάξουν τα τετράγωνα με πλευρές αυτές των καθέτων (δηλαδή τις $\text{ΑΒ}, \text{ΑΓ}$). Όταν όμως επιχείρησαν να δημιουργήσουν το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα, αδυνατούσαν να το κάνουν. Κάθε ένα από αυτά τα παιδιά μπόρεσαν να αναπαράγουν την κάθετο σε ορισμένες περιπτώσεις αλλά όχι σε άλλες, και αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε διαφορετική περίπτωση βασίζουν την κρίση τους σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς.

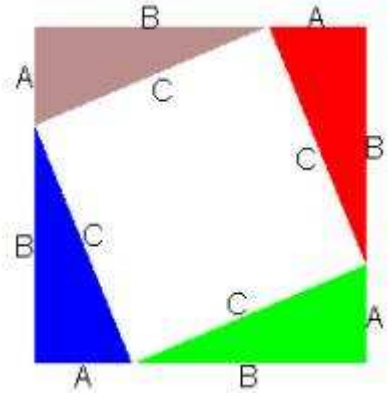
8.2.5 Ως προς τους σχηματικούς αριθμούς (figurative numbers)

Η παρουσίαση των αριθμών όπως τους αντιλαμβάνονταν οι Πυθαγόρειοι (μέσα από τη διαδικασία της οπτικοποίησης) βοήθησε τους μαθητές να δουν τη διπλή αντιπροσωπευτική έκφραση των αριθμών. Πέραν της αριθμητικής, ήρθε στην επιφάνεια και η γεωμετρική τους φύση, προτρέποντας τους μαθητές ν' ανακαλύψουν νέες κατευθύνσεις στην προσέγγιση διαφόρων προβλημάτων.

Μετά την αναπαράσταση των πρώτων τεσσάρων αριθμών τα παιδιά δεν είχαν καμία δυσκολία να αναπαραστήσουν με τελείες τον αριθμό 25. Παρατηρήθηκε ότι είχαν αναπτύξει πολλαπλασιαστικούς κανόνες μιας και δε μετρούσαν τα τετράγωνα παρά υπολόγιζαν το εμβαδόν (έλεγαν π.χ. πέντε επί πέντε). Η επιρροή που άσκησαν οι σχηματικοί αριθμοί φάνηκε όταν μια κοπέλα στην πορεία της διδασκαλίας σχεδίασε τετράγωνα αναπαριστώντας τα με τελείες και όχι με ευθύγραμμα τμήματα.

Επίσης τη χρονική περίοδο που πραγματοποιήθηκε η θεατή μη-συμμετοχική παρατήρηση μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας, διαπιστώθηκε ευχέρεια στον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών μικρών αριθμών από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα σε σύγκριση με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους. Κατανόησαν δηλαδή σαφώς την αναπαράσταση των τέλειων τετραγώνων. Όταν μάλιστα διδάχτηκαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στην τάξη τους

- Μία κοπέλα (Δανάη) ανακάλυψε μία γεωμετρική απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η υπεύθυνη καθηγήτρια είχε φέρει μέσα γεωμετρικά σχήματα σχεδιασμένα σε χαρτί. Τα μοίρασε στα παιδιά και τους είπε να τα ενώσουν έτσι ώστε να φτιαχτεί ένα τετράγωνο πλευράς A + B. Η Δανάη κατάφερε να συναρμολογήσει τα κομμάτια έτσι ώστε να δημιουργηθούν τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα (με κάθετες πλευρές A και B και υποτείνουσα C) και ένα μικρό τετράγωνο (πλευράς C) των οποίων το άθροισμα των εμβαδών τους έβγαινε ίσο με το εμβαδόν ενός μεγαλύτερου τετραγώνου (πλευράς A + B), όπως φαίνεται παρακάτω:



Στη συνέχεια έγραψε

$$4 \cdot \frac{AB}{2} + C^2 = (A+B)^2$$
$$2 \cdot AB + C^2 = A^2 + 2 \cdot AB + B^2$$
$$C^2 = A^2 + B^2$$

- Ένα αγόρι (Κώστας) τόνισε στον καθηγητή του ότι οι αριθμοί που μας βγάζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν είναι τυχαίοι.
- Ένα άλλο κορίτσι (Νάντια) επισήμανε πως στο Πυθαγόρειο Θεώρημα μιλάμε για εμβαδά, φανερώνοντας μία τάση για γενίκευση των τριάδων.

8.2.6 Ως προς τις Πυθαγόρειες τριάδες

Διδάσκοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα οι μαθητές συχνά αναγνωρίζουν και απομνημονεύουν ορισμένες κοινές τριάδες που μπορούν ν' αναπαραστήσουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Μερικές από αυτές τις Πυθαγόρειες τριάδες είναι οι (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) (7,24,25). κ.ο.κ. Εφ' όσον όμως ο μαθητής κατανοήσει πώς μπορεί μία τριάδα ν' αναπαράγει κι άλλες, μπορεί να τις ανακαλύψει από μόνος του.

Το 25% των υποκειμένων που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν σε θέση να ανακαλύψει τέτοιες τριάδες χωρίς καμία παρέμβαση των διδασκόντων. Υπήρξε κι ένα ποσοστό της τάξης του 16,7% που αναζήτησε χαρακτηριστικά των αριθμών αποτυχημένα. Μετά το πέρας της διδασκαλίας και κατά τη διάρκεια των

συνεντεύξεων διαπιστώθηκε ότι το ποσοστό των μαθητών που μπορούσε να βρει Πυθαγόρειες τριάδες ανήλθε στο 66,6%.

Παρατηρήθηκε επίσης ότι οι μαθητές αρχικά οδηγήθηκαν σε μία ποιοτική αντίληψη του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω των οξειών και των αμβλειών γωνιών. Κατόπιν βέβαια περνούν σε μία ποσοτική αντίληψη όταν κάνουν την επαλήθευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, όπου εκείνη τη στιγμή το απόλυτο ποσοστό του 100% ήταν σε θέση να επιβεβαιώσει το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Τέλος, μέσα από την ανάδειξη των Πυθαγόρειων τριάδων, τα παιδιά παρατήρησαν ότι η ομοιότητα διατηρεί κάποιες ιδιότητες. Άρχισαν λοιπόν να διαπιστώνουν ότι η ομοιότητα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την κατανόηση χωρικών ιδιοτήτων.

8.3 Θεμελίωση των ευρημάτων της έρευνας

Παρόλο που η ενσώματη γνώση παραμένει ένας νέος τομέας, μερικοί ειδικοί θεωρούν ότι προτείνει μια επανεξέταση για το πώς πρέπει να πλησιάσουμε την εκπαίδευση. Σύμφωνα με τον Bennett (2008), μια δυνατότητα είναι να ρίξουμε μια άλλη ματιά στην εκπαιδευτική προσέγγιση που η Montessori σχεδίασε σχεδόν 100 χρόνια πριν. Ένα κλειδί για τη μέθοδο Montessori είναι η ιδέα ότι τα παιδιά μαθαίνουν καλύτερα σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεμάτο από κίνηση και χειρισμό φυσικών αντικειμένων. Οι Nemirovsky, Borba & Dimatia (2004) αναφέρονται στο "χειρισμό υλικών με τα χέρια και την κίνηση των υλικών" ως σωματική δραστηριότητα. Οι Watson & Tall (2002) μιλάνε για τις δραστηριότητες που διενεργούνται από τα χέρια ως "ενσώματη δράση" (embodied action), υποστηρίζοντας ότι μία ενσώματη προσέγγιση εστιάζει στις θεμελιώδεις αντιληπτικές ιδέες πριν εισάγει οποιοδήποτε συμβολισμό.

Στη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε, επιχειρήθηκε να μπουν οι μαθητές σε ένα ρόλο όπου θα αξιοποιήσουν τις άμεσες βιωματικές τους εμπειρίες, έτσι ώστε να καταλάβουν από μόνοι τους τον τρόπο που λειτουργούν τα μαθηματικά και να οδηγηθούν σε αναλλοίωτες σταθερές. Αφέθηκαν τα παιδιά να «κάνουν μαθηματικά», όπου ο όρος ''κάνω μαθηματικά'' περιγράφεται ως «δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης στην οποία ανακαλούνται η επίκτητη γνώση και οι δραστηριότητες προκειμένου ν' ανακαλυφθούν οι άγνωστες τακτικότητες και δομές» (Treffers, 1987, σελ.247). Άλλωστε, σύμφωνα με τον Freudental, «τα μαθηματικά μπορούμε να τα μάθουμε καλύτερα με το να 'κάνουμε μαθηματικά'…και το να 'κάνουμε μαθηματικά' είναι ο κύριος στόχος της εκπαίδευσης» (Van den Heurel–Panhuizen, 2003, σελ.11).

Δόθηκε η ευκαιρία στα παιδιά να χειριστούν μια πληθώρα αντικειμένων, ώστε να βιώσουν κάποιες μαθηματικές έννοιες. Στο άρθρο "Η Γεωμετρία είναι κάτι πολύ περισσότερο από μία απόδειξη" ο Hoffer (1981) υπογραμμίζει ότι «πολλές φορές είναι σημαντικότερο να σχεδιάσει ο μαθητής ένα γεωμετρικό αντικείμενο παρά ν' αποδείξει το θεώρημα. Στη μέση εκπαίδευση δίνεται έμφαση στις 'τυπικές' αποδείξεις με αποτέλεσμα να ελαχιστοποιείται η δυνατότητα για την ανάπτυξη άλλων γεωμετρικών δεξιοτήτων».

Στην έρευνα μελετάται πώς οι πρωταρχικές λειτουργίες της καθετότητας μετατρέπονται σε γεωμετρικές έννοιες και μαθηματικές προτάσεις. Για τον Husserl η εξαντικειμενίκευση των μαθηματικών αντικειμένων σχετίζεται με τον τρόπο εμφάνισής τους. Οι Lappas & Spyrou (2006) λένε ότι η ανθρώπινη σύλληψη της ιδέας του αριθμού ήταν το πρώτο εργαλείο εξαντικειμενίκευσης. Μέσω αυτών η εμπειρία γίνεται διϋποκειμενική και ευκολότερη στο να μεταδοθεί. Ο Nemirovsky

(2003) αναφέρει πως οι αριθμοί συχνά φαίνονται ως ένα πρωταρχικό παράδειγμα του τι είναι η αφαίρεση, εξαιτίας του ότι μπορούν να ποσοτικοποιήσουν οτιδήποτε μετριέται.

Η παρουσίαση όμως του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω των ιδιοτήτων των τριάδων δεν είναι αρκετή για τη λογική επιχειρηματολογία (Lappas & Spyrou, 2006). Η γενίκευση του έρχεται μέσα από τη χρήση των εμβαδών. Δόθηκε έτσι η ευκαιρία στους μαθητές να χειριστούν πληροφορίες σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης (εικονικό, αριθμητικό, γεωμετρικό), η χρήση των οποίων, σύμφωνα με τον Gardner (1999), κρίνεται αναγκαία ως μέσο επικοινωνίας, κατανόησης και μαθηματικής δραστηριότητας. Αξιοποιήθηκε παράλληλα το εσωτερικό τους δυναμικό ώστε να καταλήξουν σε μία γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΧ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ

«Τα μαθηματικά είναι
από μόνα τους
ο καθρέφτης
της πολύς σκέψης
που τα δημιουργεί»

Al Cuoco

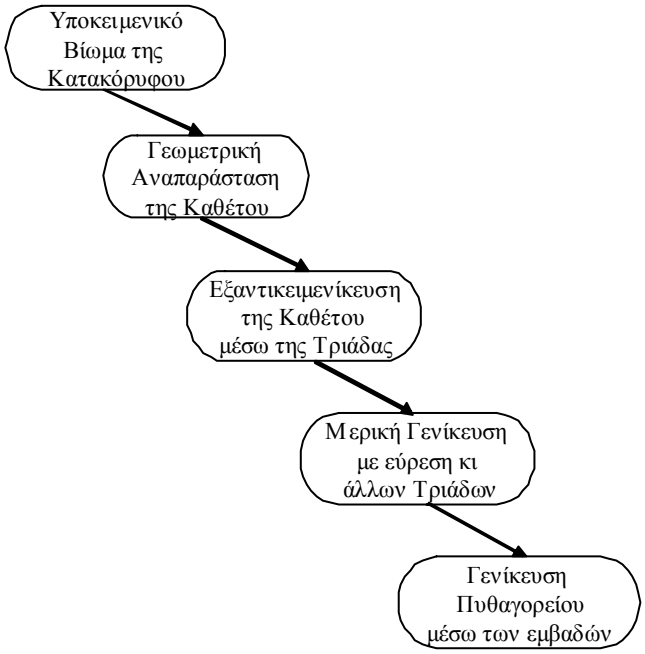
9.1 Περίληψη

Από τα αποτελέσματα της διδασκαλίας φαίνεται ότι προκλήθηκε αύξηση οπτικών, κιναισθητικών, γλωσσικών και γνωστικών αλληλεπιδράσεων των μαθητών, με ευεργετικές συνέπειες, καθώς εξέφρασαν αυθόρμητες ιδέες, οικοδόμησαν με αυθεντικό προσωπικό τρόπο γνώσεις σχετικές με την εισαγόμενη έννοια του Πυθαγορείου Θεωρήματος και αρκετοί από αυτούς οδηγήθηκαν σε γενικεύσεις. Όλα αυτά συνέβαλλαν στη διέγερση της μαθηματικής, και ειδικότερα της γεωμετρικής διαίσθησης, ανοίγοντας το δρόμο για την αναγκαία στοχαστική αφαίρεση. Τα παιδιά κατάφεραν να εξαντικειμενικεύσουν σε ένα αρχικό στάδιο, μέσω των αριθμητικών σχέσεων, μία καθαρά αντιληπτική κατηγορία όπως το κατακόρυφο, και εντέλει να την περιγράψουν επακριβώς από το Πυθαγόρειο Θεώρημα λαμβάνοντας υπόψη την καθολική του ισχύ.

9.2 Συμπεράσματα

Στην έρευνα που διεξήχθη, οι μαθητές εισήχθησαν στο Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη χρήση ιδεών, εννοιών και παραδειγμάτων που ακολουθούν πρότυπα με τα οποία λειτουργεί φυσικά το ανθρώπινο εννοιολογικό σύστημα. Αρχίζοντας με τις αντιληπτικές μορφές της κατακόρυφου και της οριζοντίου, μελετήθηκε πώς οι πρωταρχικές λειτουργίες της καθετότητας μετατρέπονται σε γεωμετρικές εικόνες και μαθηματικές προτάσεις και πώς οι άνθρωποι οδηγούνται στον αντικειμενικό προσδιορισμό αυτών των κατηγοριών με τη χρησιμοποίηση αριθμητικών και γεωμετρικών σχέσεων.

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, οι μαθητές περνούν από διάφορα στάδια έως ότου καταλήξουν στο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Τα στάδια αυτά φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα: Η πορεία προς την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Η παρακάτω περιγραφή αξιοποιεί κατά ένα μεγάλο μέρος το άρθρο των Harel & Tall (1989).

Περιγραφή της εξέλιξης των νοητικών κατασκευών των μαθητών:

- Στηριζόμενοι στο '*υποκειμενικό βίωμα της βαρύτητας*' και στα στοιχεία του μοντέλου της κατακόρυφου, οι μαθητές κατάφεραν να εξάγουν την εννοιολογική δομή της καθέτου.
- Στη '*γεωμετρική αναπαράσταση της καθέτου*' προκύπτει το νόημα της ορθής σε συσχετισμό με το τρίγωνο.
- Στην '*εξαντικειμενίκευση της καθέτου μέσω της τριάδας*' εμφανίζεται μία αφαιρετική διαδικασία, όπου οι μαθητές βοηθούνται στο να την πετύχουν μέσω της παρέμβασης των ξύλων και της τριάδας που τους δίνεται.
- Στη '*μερική γενίκευση με εύρεση κι άλλων τριάδων*', τα παιδιά βρίσκουν περισσότερα συγκεκριμένα παραδείγματα ενσωματώνοντας έτσι την αναγκαιότητα της εν γένει τριάδας. Αυτή η μορφή αφαίρεσης ονομάζεται *γενεσιουργή αφαίρεση* και ανεβάζει την επίγνωση του μαθητή σε ένα υψηλότερο επίπεδο, όπου συνειδητοποιείται και αφαιρείται η πιο γενική έννοια.
- Στη '*γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω των εμβαδών*' υπάρχει μια εξαντικειμενίκευση στο πλαίσιο της αποδεικτικής δομής της γεωμετρίας. Το θεωρητικό πλαίσιο τροποποιείται, εμπλουτίζεται και συμπεριλαμβάνεται σε ένα πιο γενικό πλαίσιο, δίνοντας έτσι μία πραγματική γενίκευση του εμπλουτισμένου σχήματος.

Στο ξεκίνημα της διδασκαλίας ζητήθηκε από τα παιδιά να αφήσουν από τα χέρια τους ένα μπαλάκι έτσι ώστε να πέσει προς τα κάτω. Συζητώντας μαζί με τους ερευνητές διαπίστωσαν την εξάρτηση βαρύτητας-κατακόρυφου, έχοντας ανεπτυγμένο στο μυαλό τους, όπως λέει η Manno (2006), το μοντέλο του 'νήματος της στάθμης'.

Αφού λοιπόν αναδείχτηκε το υποκειμενικό βίωμα της κατακόρυφου, οι μαθητές προβληματίστηκαν αρκετά στο πώς θα κατασκευάσουν κάθετο τοίχο πάνω σε έναν ήδη κατασκευασμένο κατακόρυφο τοίχο. Τα πολιτισμικά όμως στοιχεία που αναδείχθηκαν κατά τη διάρκεια της προσπάθειάς τους, στάθηκαν εμπόδιο στο να συνδεθεί άμεσα η κατακόρυφος με την κάθετο. Μετά από παρέμβαση των ερευνητών, όπου δόθηκαν στους μαθητές 3 ξύλα μεγέθους 90εκ., 120εκ. και 150εκ., τα παιδιά κατάφεραν να οδηγηθούν στην ικανή και αναγκαία συνθήκη ότι:

Κάθετη γωνία ⟷ Ορθογώνιο τρίγωνο ⟷ Τριάδα (3,4,5)

Εξαντικειμενίκευσαν δηλαδή την κάθετο μέσω της τριάδας (3,4,5).

Όταν οι μαθητές άρχισαν να δραστηριοποιούνται στο μιλιμετρέ χαρτί, έκαναν κάποιες παρατηρήσεις για το αμβλυγώνιο και για το οξυγώνιο τρίγωνο, όπου και φανερώθηκαν σημάδια μίας ποιοτικής αντίληψης του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Στη συνέχεια, μέσα από την ομοιότητα, κατάλαβαν ότι το ορθογώνιο τρίγωνο που κατασκεύασαν με πλευρές (3,4,5) δεν είναι πλέον μοναδικό. Ανακάλυψαν ότι όλα τα τρίγωνα που θα έχουν για πλευρές τα πολλαπλάσια των αριθμών (3,4,5) θα είναι ορθογώνια. Οδηγήθηκαν έτσι, με την εύρεση τέτοιων τριάδων, σε μία επεκτατική γενίκευση.

Παρουσιάζοντας ύστερα τους σχηματικούς αριθμούς (τον τρόπο αναπαράστασης των αριθμών από τους Πυθαγόρειους), ένα καθαρά νοητικό όργανο, τα παιδιά αντιμετώπισαν το τετράγωνο ενός αριθμού σαν εμβαδόν, όπου μάλιστα κατάφεραν να επιχειρήσουν επιτυχώς και απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω εμβαδών, πετυχαίνοντας με αυτόν τον τρόπο μία αναδομητική γενίκευση.

Ύστερα από μελέτη των αποτελεσμάτων, τα συμπεράσματα που αναδύονται από την έρευνα είναι ότι τα παιδιά:

- Συνέδεσαν την έννοια της καθέτου με την έννοια της κατακόρυφου.
- Προσέγγισαν ποιοτικά την αναγκαιότητα της Πυθαγόρειας τριάδας μέσω της οξείας και της αμβλείας γωνίας..
- Επανενεργοποίησαν τη διαδικασία της εξαντικειμενίκευσης της ορθής γωνίας μέσω της τριάδας.
- Αποδέχτηκαν την αριθμητική σχέση ως εργαλείο ελέγχου ορθογωνιότητας.
- Κατάφεραν να γενικεύσουν την αριθμητική σχέση των τριάδων μέσω της ομοιότητας
- Απέδειξαν τη γενική περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με χρήση εμβαδών.

Σύνδεση καθέτου – κατακόρυφου.

Τα παιδιά είχαν ανεπτυγμένη την αίσθηση της κατακόρυφου, αλλά όπως υποστηρίζει και η Manno (2006), νομίζουν ότι η κατακόρυφη γραμμή σημαίνει 'την κατεύθυνση της βαρύτητας'. Χτίζουν έτσι μία νοητική εικόνα, ένα ισχυρό μοντέλο

που συνδέει το νήμα της στάθμης με την έννοια της καθέτου. Όταν ρωτήθηκαν, στην αρχή του μαθήματος, πώς θα πέσει ένα μπαλάκι εάν το αφήσουν από τα χέρια τους, πρωτίστως απάντησαν 'ευθεία' και δευτερευόντως 'κάθετα'. Κανείς τους δεν αναφέρθηκε στη λέξη 'κατακόρυφα' παρ' όλο που μετέπειτα είπαν ότι την είχαν ξανακούσει. Μία αντίδραση όπου, σύμφωνα με τους Clements & Battista (1992), δικαιολογείται διότι οι άνθρωποι όταν σκέφτονται δε χρησιμοποιούν ορισμούς των εννοιών αλλά μάλλον εικόνες εννοιών και συνδυασμούς όλων των διανοητικών εικόνων και των ιδιοτήτων που έχουν συνδεθεί με την έννοια. Όπως λένε οι Robutti & Arzarello (2003), ο τρόπος που οι μαθητές περιγράφουν διάφορες λειτουργίες δείχνει βαθιά σημάδια των δράσεων και αλληλοδράσεών τους με εργαλεία και αναπαραστάσεις. Σημάδια που δεν είναι συμπληρωματικά της έννοιας αλλά ουσιώδη συστατικά της σημασίας της.

Η ελευθερία στο χώρο που παραχωρήθηκε στα παιδιά και τα αντικείμενα που τους δόθηκαν να περιεργαστούν (παιχνίδι Jenga, μπαλάκια, ζύγια–βαρίδια, πήχεις, σπάγκος, μπουκάλι με χρωματιστό υγρό, μολύβι, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, μιλιμετρέ χαρτί) προκάλεσαν τη σωματική τους δραστηριότητα. Η εισαγωγή όλων αυτών των αντικειμένων προκάλεσε μεγαλύτερη εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Το σώμα τους, από την παθητική στάση ενός ακροατή ή ενός αναγνώστη, ενεργοποιήθηκε. Μία ποικιλία κινήσεων, ειδικότερα των χεριών, έκανε την εμφάνισή της. Η εμπλοκή των παιδιών σε αυθεντικές και νοηματικές δραστηριότητες κίνησε το ενδιαφέρον τους. Οι μαθητές παρέβαλλαν εικόνες από το οικείο σε αυτούς περιβάλλον (χτίσιμο σπιτιών, οικοδόμοι κ.ο.κ.), οι οποίες τους βοήθησαν στην περαιτέρω αντιμετώπιση των δραστηριοτήτων που έλαβαν μέρος. Ο τρόπος περιγραφής των μαθητών γινόταν στην οικεία για αυτούς γλώσσα του σώματος και σύμφωνα με τον προσωπικό φυσικό κώδικα ερμηνείας της κίνησης.

Διαπίστωσαν επίσης τη βαρύτητα, την ανακάλεσαν θέλοντας να οπτικοποιήσουν την κατακόρυφη τροχιά και τη σύνδεσαν με την κατασκευή ορθογώνιου τριγώνου. Μία τέτοια ενέργεια ενισχύει αυτό που ισχυρίζεται ο Nunez (2000), ότι δηλαδή οι μαθηματικές ιδέες στηρίζονται σε σωματικά βασισμένους μηχανισμούς και στην καθημερινή εμπειρία. Παραδείγματος χάρη, η ιδέα της ορθής γωνίας μαθηματικοποιεί την ιδέα της κατακόρυφου, η ιδέα της παραγώγου μαθηματικοποιεί την ιδέα της στιγμιαίας αλλαγής κ.ο.κ. όπου σύμφωνα με τον Κλαουδάτο (2005), η μαθηματικοποίηση κατά τον Bauersfeld είναι μια πρακτική που μάλλον βασίζεται σε κοινωνικές συμβάσεις και όχι στην εφαρμογή ενός παγκόσμια εφαρμόσιμου συνόλου αιώνιων αληθειών. Ξεκινούν λοιπόν να συντίθενται μαθηματικές ιδέες από τις συνήθεις σωματικά θεμελιωμένες ιδέες.

Ποιοτική προσέγγιση της αναγκαιότητας της Πυθαγόρειας τριάδας μέσω οξείας και αμβλείας γωνίας.

Υπήρξε σημαντικός αριθμός παιδιών που δεν είχε αποσαφηνίσει βασικές έννοιες (όπως π.χ. ποια γωνία είναι οξεία και ποια αμβλεία, ποια είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου κ.α.). Εμφανίστηκαν δυσκολίες και παρανοήσεις για την έννοια της γωνίας από αρκετούς μαθητές. Από την πλειονότητα των υποκειμένων η γωνία αντιμετωπίστηκε ποιοτικά, μιας και κατά κόρον δε χρησιμοποιούσαν το μοιρογνωμόνιο στην κατασκευή των γωνιών, αν και το είχαν στη διάθεσή τους. Υπήρξε επίσης και μία περίπτωση όπου αντιμετωπίστηκε ως δράση.

Εμπόδιο παρουσιάστηκε και τη στιγμή που σε μία δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο στο χαρτί με δοσμένες

πλευρές. Αντίθετα, δεν παρουσιάστηκε κανένα εμπόδιο όταν επιχείρησαν να δημιουργήσουν το τρίγωνο στο χώρο με τους πήχεις. Ο Steinbring (1990) άλλωστε προτείνει τρία βασικά στάδια για την επίλυση ενός προβλήματος και επισημαίνει ότι στο δεύτερο στάδιο κατά τη μεταφορά από το εμπειρικό επίπεδο του προβλήματος στο επίπεδο του τυπικού ουσιαστικά υπολογισμού παρουσιάζονται στους μαθητές πολλές δυσκολίες. Επίσης, κατά την πορεία επίλυσης των δραστηριοτήτων που αφορούσαν γωνίες στο μιλιμετρέ χαρτί, οι μαθητές αγνοούσαν μέρος από τα δεδομένα ή τα μετέφεραν λάθος, γεγονός που όπως αναφέρουν οι Tourniaire & Pulos (1985), έχει παρατηρηθεί και σε άλλες έρευνες. Αυτό βέβαια τους εμπόδιζε να φτάσουν στην επίλυση του εκάστοτε προβλήματος αφού οδηγούνταν σε λανθασμένες απαντήσεις.

Παρ' όλα όμως τα εμπόδια που αντιμετώπισαν οι μαθητές με τις γωνίες, έκαναν παρατηρήσεις για τις περιπτώσεις του οξυγώνιου και του αμβλυγώνιου τριγώνου φανερώνοντας μία ποιοτική αντίληψη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Επανενεργοποίηση της εξαντικειμενίκευσης της ορθής γωνίας μέσω του ορθογωνίου τριγώνου και της τριάδας.

Όταν ζητήθηκε στα παιδιά να κατασκευάσουν κάθετο τοίχο πάνω στον ήδη κατασκευασμένο κατακόρυφο, επιχείρησαν να το κάνουν είτε με τα ξύλα που διέθεταν είτε με το ορθογώνιο τρίγωνο, στηριζόμενοι στην εμπειρική τους ικανότητα. Διαπιστώθηκε έτσι ότι προσπαθούσαν ν' αναπαράγουν την κάθετη με έναν τρόπο που κινούνταν σε πολιτισμικές αντιλήψεις, κατοχυρωμένες από το οικείο προς σε αυτούς περιβάλλον. Οι μαθητές συλλογίστηκαν στη σημασία των μαθηματικών αντικειμένων μέσω των εμπειρικών στιγμών κατασκευής τους. Ξεκίνησαν να χτίζουν μαθηματικές έννοιες από διαισθητικές ιδέες σε λειτουργικές μεταφορές. Άλλωστε, η ικανότητα κατανόησης του χώρου είναι μία από τις μερικές, σχετικά αυτόνομες, ανθρώπινες ικανότητες (Gardner, 1985). Εξάλλου "στον ενσώματο κόσμο δεν επιβάλλονται οι νόμοι του πραγματικού κόσμου αλλά προκύπτουν από αυτόν" (Watson, Spyrou & Tall, 2002). Οι αισθησιοκινητικές αυτές αντιδράσεις, όπως ισχυρίζονται οι Clements & Battista (1992), βοηθούν στο να μαθαίνουν οι μαθητές τις γεωμετρικές έννοιες.

Τα παιδιά προσέφυγαν σε ένα ευρύ σύνολο εννοιών, όπου χειρίζονται αντικείμενα, σχεδιάζουν, χειρονομούν, γράφουν σύμβολα, χρησιμοποιούν τη γλώσσα, αναλογίες, μεταφορές κ.ο.κ. και μέσω όλων αυτών των τεχνουργημάτων, των λέξεων, των μαθηματικών συμβόλων και των χειρονομιών κατάφερε να γίνει εμφανές το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ο Radford (2003) αναφέρει ότι ο Merleau–Ponty λέει πως όλα αυτά τα μορφολογικά κατασκευάσματα (morphological instuments) είναι μέρος της πολιτισμικής μας κληρονομιάς κι εμείς χρησιμοποιούμε τα αναπαραστασιακά συστήματα για να ΄δέσουμε' τη νέα σημασία (signification) στην ήδη χρησιμοποιούμενη. Όπως αναφέρει και ο Radford (2003), μέσα από αυτήν την προοπτική και από μια ψυχολογική άποψη, η εξαντικειμενίκευση των μαθηματικών αντικειμένων εμφανίζεται συνδεδεμένη με τις ατομικές μεσολαβητικές προσπάθειες που σκοπό έχουν την επίτευξη του στόχου της εκάστοτε δραστηριότητας.

Ένα άλλο συμπέρασμα που εξάγεται είναι πως ο έντονος προβληματισμός που δημιουργήθηκε για την κατασκευή ορθής γωνίας, οδήγησε τους μαθητές να ερευνήσουν αρκετά ώστε να βρουν κατάλληλο τρόπο αντιμετώπισης. Αναδείχθηκε έτσι μια ικανότητα ανάπτυξης στρατηγικής επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Οι Thom & Pirie (2002) θεωρούν πως σε ένα τέτοιο περιβάλλον, που επιτρέπει την ενεργή συμμετοχή στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, οι μαθητές

γίνονται ανεξάρτητοι, ικανοί να θέσουν προβλήματα στον εαυτό τους μέσω των μεταγνωστικών ικανοτήτων, να αναρωτηθούν και να κατευθύνουν μόνοι τις τεχνικές τους. Παρατηρήθηκε επίσης επιμονή από μέρους των παιδιών, η οποία σχετίζεται άμεσα με την αυτοπεποίθηση, την αυτεπάρκεια και τη στάση των μαθητών απέναντι στις ποικίλες προκλήσεις που βρίσκονται.

Αριθμητική σχέση τριάδων και γενίκευση αυτής μέσω της ομοιότητας

Εν συνεχεία οδηγούνται σε μία αριθμητική αντίληψη του Πυθαγορείου μέσω της τριάδας (3,4,5) την οποία και εντέλει γενικεύουν μέσω της ομοιότητας, η οποία αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο κατανόησης χωρικών ιδιοτήτων (Lappas & Spyrou, 2006). Το ορθογώνιο τρίγωνο δεν ήταν πλέον μοναδικό για τα παιδιά, αλλά μπορούσαν να πάρουν κι άλλα ορθογώνια τρίγωνα χωρίς να χάνεται η ιδιότητα της ορθής γωνίας. Σιγά–σιγά λοιπόν πέρασαν από το ειδικό στο γενικό, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Αποδέχονταν επίσης τον τύπο του Πυθαγορείου Θεωρήματος ως εργαλείο ελέγχου ορθογωνιότητας.

Απόδειξη γενικής περίπτωσης με χρήση εμβαδών.

Η γενική απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος προέκυψε μέσα από τους σχηματικούς αριθμούς (figurative numbers), ένα όργανο σαφώς νοητικό. Ο τρόπος που αντιμετώπιζαν οι Πυθαγόρειοι τους αριθμούς αποτελεί ένα παράδειγμα σύνδεσης αυτών και των ιδιοτήτων τους με τους αντίστοιχους σχηματισμούς πραγματικών αντικειμένων, όπως βόλους ή χαλίκια Αυτή η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως πρόωρη διπλή αντιπροσωπευτική έκφραση της αριθμητικής και της γεωμετρικής φύσης, κάτι που γίνεται κυρίαρχο στα νεότερα χρόνια και οδηγεί ουσιαστικά στην αλγεβρική αναπαράσταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω του τύπου $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Η διπλή αυτή αναπαράσταση των αριθμών έχει ιστορικές και πολιτιστικές διαστάσεις, οι οποίες σύμφωνα με τον Nunez (2000) πρέπει να συμπεριληφθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Συνδέοντας το αριθμητικό σύστημα αναπαράστασης με το γεωμετρικό, (μέσω των σχηματικών αριθμών) παρατηρήθηκε ότι η πλειοψηφία των παιδιών αντιμετώπιζε το τετράγωνο ενός αριθμού ως εμβαδόν και πως ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν ότι ένας αριθμός (αναφερόμαστε σε μικρούς αριθμούς) γράφεται ως τέλειο τετράγωνο. Ανέπτυξαν με αυτόν τον τρόπο την κρίση τους, ανακαλύπτοντας νέες κατευθύνσεις στην προσέγγιση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων. Γεγονός που φανερώνει ότι ο ενσώματος κόσμος έχει τη δυνατότητα της οικοδόμησης της έννοιας αρκετά παραπέρα από τον παραδοσιακό συμβολικό υπολογισμό. Διαπιστώθηκε επιπλέον πως οι μαθητές μετέφραζαν τη σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, μετατρέποντας την πληροφορία που υπήρχε σε αυτήν τη συμβολική έκφραση σε πληροφορίες που κατανοούσαν μέσω των αναπαραστάσεων, ζωγραφίζοντας το αντίστοιχο ορθογώνιο τρίγωνο και τα τετράγωνα που σχηματίζονται από τις πλευρές του. Είχαν έτσι την ευκαιρία να ξεπεράσουν εμπόδια φορμαλιστικού χαρακτήρα, να προβούν σε νοητικές διεργασίες σύγκρισης και συσχετισμού, εικασιών, πειραματισμού και συλλογισμών. Γενικεύοντας λοιπόν τις καταστάσεις, από την τριάδα (3,4,5) κατέληξαν στην ικανή και αναγκαία συνθήκη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, συσχετίζοντας την με εμβαδά.

Κλείνοντας με τα συμπεράσματα να τονιστεί ότι άξια αναφοράς είναι η συμπεριφορά της Δανάης, η οποία κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, τη στιγμή που για πρώτη φορά άκουσε την τριάδα (3,4,5), αναρωτήθηκε εάν *έχουν καμιά σχέση αυτοί οι αριθμοί μεταξύ τους*, όπως επίσης και στο τέλος της διδασκαλίας, εξέφρασε την απορία: *τι σχέση έχουν οι αριθμοί με τον τοίχο που θέλουμε να φτιάξουμε?* Αναδεικνύεται επομένως μια ανησυχία από πλευράς της Δανάης, η οποία διαπιστώθηκε και στις συνεντεύξεις όπου η αντίληψη από πλευράς της Δανάης ότι τα μαθηματικά είναι ιδεατότητες αρχίζει να γίνεται όλο και πιο έντονη, εκφράζοντάς το με μια ιδιόρρυθμη επιμονή. Τα άλλα παιδιά δέχονται το εμπειρικό αυτονόητο που τους παρουσιάζεται. Η Δανάη όμως δεν αφήνει τον εαυτό της να δεχτεί κάτι τέτοιο. Απαξιώνει ως ένα βαθμό αυτούς τους συσχετισμούς και φαίνεται να μη συμμετέχει στο βάθος της συζήτησης. Φαίνεται να την κυνηγάει ένα στερεότυπο διδασκαλίας, το οποίο την ωθεί στο να αφομοιώνει το συμβολικό και φορμαλιστικό χαρακτήρα. Έχει ένα επιστημολογικό εμπόδιο όπου λειτουργεί έντονα ο διαφορετικός κώδικας ένεκα του πολιτισμικού της περιβάλλοντος, μέσα από το οποίο θέλει να επιβάλλει κάποιες σοφιστικές αντιλήψεις που έχει.

9.3 Εισηγήσεις

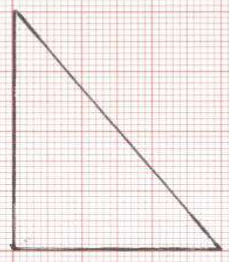
Η παρούσα έρευνα είχε στόχο να διερευνήσει το πώς επιδρούν τα ενσώματα μαθηματικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και να εξετάσει τις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές οδηγούνται εντέλει στην εξαγωγή αναλλοίωτων μέσω της εξαντικειμενίκευσης.

Η έρευνα αυτή αποτελεί αφετηρία για προτάσεις και μελλοντικές εφαρμογές καθώς και προεκτάσεις. Μία από τις δυνατές επεκτάσεις είναι να χρησιμοποιηθεί σε περισσότερες τάξεις και σχολεία όπου θα μπορεί να δώσει τη δυνατότητα μεγαλύτερου φάσματος συμπερασμάτων. Τα αποτελέσματα μεγαλύτερου εύρους δεδομένων θα βοηθούσαν να αξιολογηθούν καλύτερα οι συνέπειες. Θα μπορούσε να διερευνηθεί πώς σχετίζεται η συγκεκριμένη μέθοδος της ενσώματης διδασκαλίας με τον παραδοσιακό τρόπο. Όπως επίσης και το ότι η ενσώματη εμπειρική μελέτη εννοιολογικών συστημάτων μπορεί να δώσει σημαντικές ιδέες για τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α' :ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Κώστας Β 4

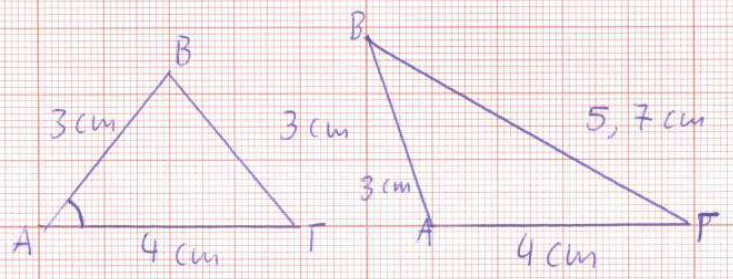
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές κάθετες έτσι ώστε η μία κάθετη να είναι 3εκ. και η άλλη 4εκ.



ΕΡΩΤΗΣΗ: πόσα εκατοστά είναι η τρίτη πλευρά?
Είναι 5 εκατοστά.

DIN A 4 210 X 297

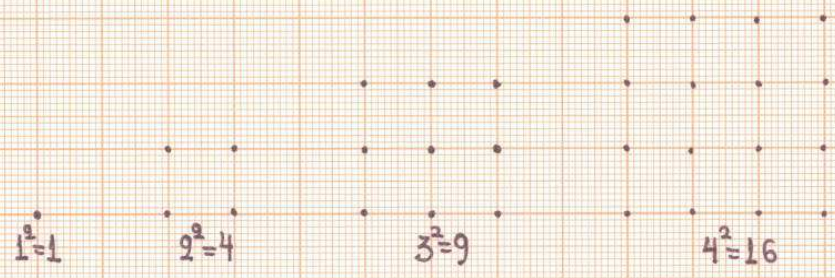
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: Κατασκευάστε τρίγωνο με πλευρές ΑΒ=3εκ. ΑΓ=4εκ. και οι πλευρές αυτές να μην είναι κάθετες μεταξύ τους.



Πόσα εκατοστά είναι η πλευρά ΒΓ?

DIN A 4 210 X 297

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

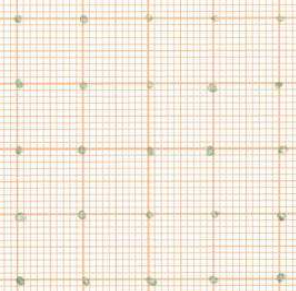


$16+9=25$

$25-9=16$

$25-16=9$

Μπορείτε να σχηματίσετε τον επόμενο αριθμό?



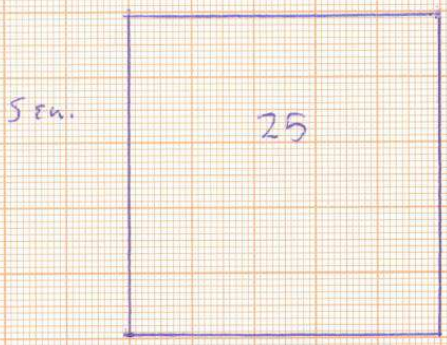
$5^2=25$

$3^2+4^2=5^2$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 3εκ.

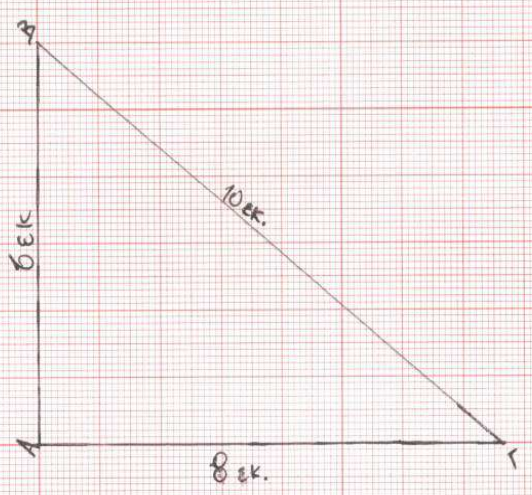
Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 4εκ.

Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 5εκ.



ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιο είναι το εμβαδόν κάθε τετραγώνου?

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ: Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με κάθετες πλευρές ΑΒ=6εκ, ΑΓ=8εκ.

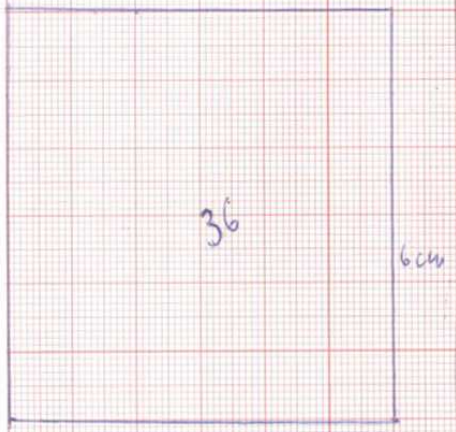


Πόσα εκατοστά είναι η πλευρά ΒΓ?

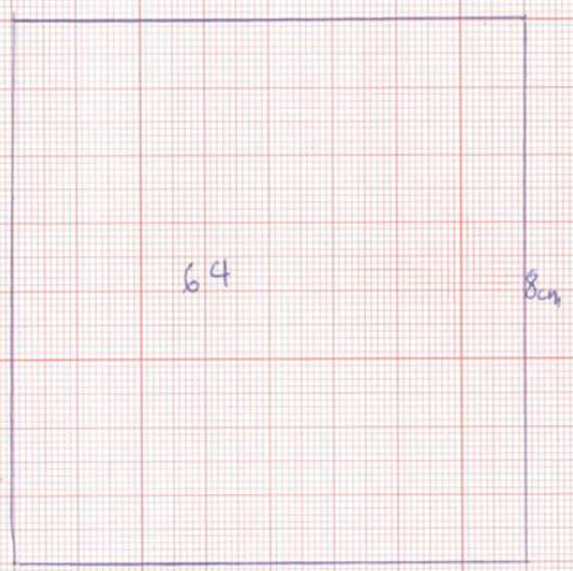
Είναι 10 εκ.

DIN A 4 210 X 297

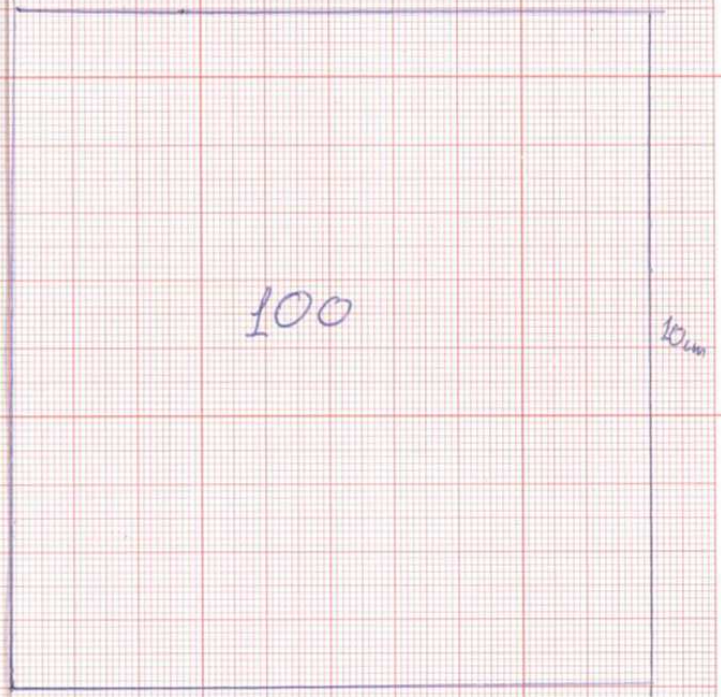
Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 6εκ.



Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 8εκ.



Κατασκευάστε τετράγωνο με πλευρά 10εκ.



DIN A 4 210 X 297

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β':
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ

1) Που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο? Από πού δηλαδή προέρχεται η έννοια της καθέτου?

2) Που συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?

3) Ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?

4) Ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?

5) Σχεδιάστε δύο παραπληρωματικές γωνίες.

6) Πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?

7) Πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?

8) Ικανοποιούν κάποια σχέση οι αριθμητικές τριάδες, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?

9) Δραστηριότητα: φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Ποια γωνία είναι η ορθή? Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?

10) Μήπως θυμόσαστε κάποιον κανόνα που βρήκαμε για τις πλευρές του τριγώνου?

11) Δραστηριότητα: φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω. Ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο?

12) Δραστηριότητα: φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (τυχαίο). Μετρήστε τις κάθετες πλευρές του. Μπορείτε να πείτε πόσο είναι η υποτείνουσα, χωρίς να τη μετρήσετε ?

13) Προσπαθήστε να φτιάξετε τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου με τελείες.

14) Δραστηριότητα: αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?

15) Μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?

16) Όταν διδαχτήκατε το πυθαγόρειο θεώρημα στο σχολείο το αποδείξατε? Αν ναι, πώς ?

17) Μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ': ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ

ΣΧΟΛΕΙΟ: 62^{Ο} ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Κώστας – Άγγελος
ΒΑΘΜΟΣ ΚΩΣΤΑ : 19
ΒΑΘΜΟΣ ΑΓΓΕΛΟΥ : 15
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 19/11/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 28/11/07
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 51:29
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 29/1/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ : 31:14

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής : πού συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Κώστας : με τα ορθογώνια τρίγωνα.
3. Άγγελος : με την ορθή γωνία.
4. Ερ: ναι, αυτό είναι το κάθετο. Το κατακόρυφο?
5. Κ : με το ζύγι.
6. Ερ : τι είναι οριζόντιο?
7. Κ : μία ευθεία κάθετη στην κατακόρυφη.
8. Ερ : πού μπορούμε να το δούμε?
9. Κ : στο πάτωμα, στη θάλασσα…
10. Ά : απλώς…είναι ακριβώς οριζόντια η θάλασσα?
11. Ερ : όταν είναι ήρεμη.
12. Ά : α…εντάξει.
13. Ερ : ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?
14. Ά : το τρίγωνο, το ορθογώνιο.
15. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
16. Κ : αυτές που συμπληρώνουν η μία την άλλη…και είναι 180^{ο}.
17. Ερ : Σχεδιάστε δύο παραπληρωματικές γωνίες. (ακολουθεί επιτυχής σχεδιασμός παραπληρωματικών γωνιών.)
18. Ερ : πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?
19. Κ : όταν είναι και οι δύο ορθές.
20. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
21. Κ : έχουμε τα τρία μεγέθη. Το 3, το 4 και το 5.
22. Ερ : ικανοποιούν κάποια σχέση οι αριθμητικές τριάδες, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?
23. Κ : ότι είναι ανάλογα?
24. Ερ : ανάλογα είναι?
25. Κ : ότι αν τα κάνουμε στη δευτέρα, το 3 και το 4, είναι ίσο με το 5 στη δευτέρα.
26. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. (ο Κώστας το σχεδιάζει ενώ ο Άγγελος μπερδεύεται και σχεδιάζει μια ορθή γωνία). Αυτό είναι τρίγωνο?
27. Ά : το ξέχασα…έτσι είναι καλά? (ζητάει πλέον την επιβεβαίωση).
28. Ερ: πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
29. Κ : οι δύο κάθετες πλευρές και η υποτείνουσα. (δείχνει).

30. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. (το σχεδιάζουν και οι δύο).
31. Ερ : θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω. (εδώ ο Άγγελος όταν φτάνει στο σημείο να κάνει τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα δεν μπορεί να τοποθετήσει σωστά το γνώμονα. Στη συνέχεια ρωτάει).
32. Ά : πόσο θα είναι η πλευρά?
33. Ερ : εσύ πόσο λες?
34. Ά : 4?
35. Ερ : πόσο είναι η υποτείνουσα?
36. Ά : 5.
37. Ερ : άρα?
38. Ά : 5.(το λέει πλέον με σιγουριά).
39. Ερ: ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε?
40. Ά : το 9 και το 16 θα έπρεπε να είναι 25.
41. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Μετρήστε τις κάθετες πλευρές του. (ο Κώστας φτιάχνει κάθετες με μήκη 4.1εκ. – 3.3εκ και ο Άγγελος 3.56εκ – 3.56εκ). Μπορείτε να πείτε πόσο είναι η υποτείνουσα, χωρίς να τη μετρήσετε?
42. Κ : κάνουμε τις πράξεις και το βρίσκουμε
43. Ερ : κάν'τες. (ο Κώστας βρίσκει επιτυχώς την υποτείνουσα με τη χρήση υπολογιστή ενώ ο Άγγελος μπερδεύεται).
44. Ερ :προσπαθήστε να φτιάξετε τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου με τελείες.
45. Κ : αφού είναι μισό…δεν μπορούμε να κάνουμε τα ίδια.
46. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
47. Ά : θα πρέπει $17^2 = 8^2 + 15^2$.
48. Ερ : απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?
49. Ά : απέναντι από την υποτείνουσα, την 17.
50. Ερ : και η ορθή γωνία ποια θα είναι?
51. Ά : το 8 θα είναι η ορθή γωνία.
52. Ερ : μα το 8 δεν είναι γωνία.
53. Ά : ναι…θα είναι η κάθετη πλευρά. Και το 15 θα είναι η άλλη κάθετη.
54. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
55. Κ : 34, 16, 30.
56. Ά : το τετράγωνο του 8, του 15…
57. Κ : γενικά όλα τα πολλαπλάσια.
58. Ερ : μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?
59. Κ : ξεκινήσαμε από το πώς φέρνουμε την κάθετη και την οριζόντια πλευρά…
60. Ά : ...την κατακόρυφη…
61. Κ. …φτιάχνοντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
62. Ερ: πώς?
63. Κ – Ά : με το ζύγι. (απάντησαν ταυτόχρονα).
64. Κ : μετά βάλαμε τα 3 ξύλα που ήταν… (διακόπτεται από τον Άγγελο)
65. Ά : ..και φτιάξαμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
66. Ερ : τα ξύλα αυτά τα οποία ήταν?
67. Κ : 3, 4 και 5 και φτιάξαμε το ορθογώνιο τρίγωνο.
68. Ερ : και τι σχέση είχαν μεταξύ τους τα 3, 4 και 5?
69. Ά : ότιιι…ήτασαν…πολλαπλάσια? Όχι …

70. Κ : ότι τα τετράγωνα των αριθμών των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ήταν ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
71. Ερ : κάποια διαφορά με αυτό που διδαχτήκατε?
72. Κ : το κάναμε με πράξεις, τύπους.
73. Ά : με μεταβλητές.
74. Ερ : ήταν 3, 4, 5?
75. Κ : όχι απαραίτητα
76. Ά : ήταν μεταβλητές.

ΣΧΟΛΕΙΟ: 62° ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Χρήστος- Γιάννης
ΒΑΘΜΟΣ ΧΡΗΣΤΟΥ : 18
ΒΑΘΜΟΣ ΓΙΑΝΝΗ : 14
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 19/11/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : –
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 38:40
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 25/1/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ : 35:59

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής: που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Γιάννης : δε θυμάμαι.
3. Ερ : πώς είχαμε ξεκινήσει το μάθημα που κάναμε μαζί?
4. Γ : κάναμε κάτι με ξυλάκια.
5. Ερ : με ξυλάκια είχαμε ξεκινήσει?
6. Γ : με σχοινιά…
7. Ερ : και τι κάναμε με τα σχοινιά?
8. Γ : φτιάξαμε ένα σχήμα.
9. Χρήστος : ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
10. Ερ : Που συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?
11. Χρ : όπως και στις πολυκατοικίες…είναι ο δρόμος, είναι η κάτω γραμμή…η βάση.
12. Ερ : πού αλλού μπορούμε να τη δούμε? Στο φυσικό κόσμο?
13. …….
14. Ερ : μια λίμνη ας πούμε.
15. Χρ : είναι ο πάτος.
16. Ερ : ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?
17. Χρ: χάρακα
18. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
19. Χρ: όχι.
20. Γ : όχι.
21. Ερ: σχεδιάστε μία οξεία, μία ορθή και μία αμβλεία γωνία. (ο Χρήστος τις έφτιαξε, ενώ ο Γιάννης όταν σχεδίασε μία οξεία και τον ρωτήσαμε τι είναι αυτή, απάντησε αμβλεία.).
22. Ερ : παραπληρωματικές είναι αυτές που έχουν άθροισμα 180 μοίρες.
23. Ερ : πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?
24. Χρ : όταν είναι και οι δύο ορθές.
25. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
26. Χρ : ανάλογα με τους αριθμούς.
27. Γ : 5...νομίζω 10…
28. Χρ : 2, 3 και 5…
29. Ερ : πλησίασες. Είπες το 5, είπες το 3, λείπει άλλος ένας αριθμός.
30. Γ : το 7 ?
31. Ερ : ήταν το 3, 4 και 5.Ικανοποιεί κάποια σχέση η αριθμητική τριάδα, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?

32. Χρ: ότι οι πλευρές που σχηματίζουν κάθετη γωνία……εεε….δημιουργούν….
33. Γ : το κάναμε αλλά δε θυμάμαι.
34. Χρ : ότι…άμα προσθέσουμε …στο τετράγωνο…με τις δύο κάθετες πλευρές τότε δημιουργείται…και η απέναντι? Η μεγαλύτερη πλευρά.
35. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. (εδώ ο Γιάννης αντί για ορθογώνιο τρίγωνο, φτιάχνει μια ορθή γωνία.).
36. Γ : δεν είναι αυτό πάντως.(μετά φτιάχνει ένα οξυγώνιο τρίγωνο.).
37. Ερ : Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
38. Χρ : α, β και γ.
39. Γ : να πω? Όχι εφαπτομένη…υποτείνουσα?
40. Ερ : μήπως θυμόσαστε κάποιον κανόνα που βρήκαμε για τις πλευρές του τριγώνου?
41. Χρ : προσθέτουμε στο τετράγωνο τις πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία και έτσι θα δημιουργηθεί στο τετράγωνο και πάλι η υποτείνουσα.
42. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. στη συνέχεια θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω. (τα σχεδιάζουν και οι δύο. Μάλιστα ο Χρήστος παρόλο που δεν έχει γνώμονα καταφέρνει να εξασφαλίσει ην καθετότητα.). Ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο?
43. Γ : το κάθε τετράγωνο έχει μεγαλύτερες πλευρές από το άλλο.
44. Ερ : ναι, αλλά τι λέει το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τα τετράγωνα?
45. Γ : Α γωνία και….όχι, α^2 και β^2 μας βγάζει το γ^2.
46. Χρ : τώρα είναι 3, 4 και 5. Όχι με α, β και γ. Και άμα υψώσουμε το 4^2+3^2 μας κάνουν 5^2.
47. Ερ : το Πυθαγόρειο Θεώρημα το βλέπετε διαφορετικά?
48. Γ : ναι, με αριθμούς.
49. Ερ : τι διαφορά έχει αυτό το τετράγωνο με το άλλο? (δείχνοντας γεωμετρικό τετράγωνο – σχήμα – και α^2).
50. Γ : ψάχνουμε….
51. Χρ : θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν.
52. Γ : δηλαδή να βρούμε το εμβαδόν τετραγώνου? $16m^2$ ας πούμε.
53. Χρ : αυτό (δείχνει το τετράγωνο της υποτείνουσας) θα είναι ίσο με τα άλλα δύο.
54. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (τυχαίο) και μετρήστε τις κάθετες πλευρές του.
55. Γ : 5 και 5. μέτρησα και την άλλη 7.
56. Χρ : 6 και 5
57. Ερ : μπορείτε να πείτε πόσο είναι η υποτείνουσα, χωρίς να τη μετρήσετε ?
58. Γ : θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και θα κάνουμε ας πούμε $5^2+5^2=25+25=50$.
59. Χρ : το 6^2 και το 5^2 να κάνει το αποτέλεσμα της υποτείνουσας στη δευτέρα. Να δούμε ποιος αριθμός στη δευτέρα κάνει 61.
60. Γ : το 25? (αργώντας χαρακτηριστικά να απαντήσει). Όχι, όχι….δεν είναι νομίζω ένας αριθμός…
61. Ερ : προσπαθήστε να φτιάξετε τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου με τελείες.
62. Γ : να πάρουμε τη διαγώνιο του τετραγώνου, δε βγαίνει ακριβώς όμως. Γιατί αυτή η πλευρά είναι στάνταρ 1εκ. αλλά η διαγώνιος είναι μεγαλύτερη….να βάλω 7 τετραγωνάκια.
63. Ερ : μα δεν είναι 7 ο αριθμός.

64. Γ : είναι 7,07…(επικρατεί μία παύση 87 sec χωρίς να μιλήσει κανείς από τους δύο μαθητές.).
65. Γ : θα μπορούσα… γιατί η διαγώνιος είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου, άρα θα μπορούσαν να μας βγουν 7 και 0.7.
66. Χρ : δε θα βγει ακριβώς επειδή είναι 0.81 (η υποτείνουσα στο δικό του τρίγωνο ήταν 7.81).
67. Γ : δηλαδή είναι δεκαδικός αριθμός, δεν είναι ακέραιος. Άρα δεν μπορούμε να το φτιάξουμε.
68. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
69. Χρ : θα προσθέσουμε στο τετράγωνο τις δύο μικρότερες πλευρές και θα δούμε αν θα μας βγάλει το αποτέλεσμα, το τετράγωνο της υποτείνουσας.
70. Γ : πρέπει να βρούμε αν είναι τρίγωνο?
71. Ερ : αν είναι ορθογώνιο τρίγωνο.
72. Γ : μας βγάζουνε. Γιατί αν προσθέσομε αυτά τα δύο αποτελέσματα, δηλαδή 8^2+15^2 βγάζουν 289 και άμα πατήσουμε $\sqrt{289}$ βγαίνει 17. (εδώ ο Γιάννης ένιωθε σιγουριά γι' αυτά που έλεγε και φαίνεται από τη ροή που πήρε ο λόγος του καθώς ήταν χειμαρρώδης.).
73. Ερ : απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?
74. Χρ : στην 17.
75. Γ : ναι.
76. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
77. Γ : κοιτάμε η διαφορά το 8 από το 15 πόσο είναι και προσπαθούμε να βγάλουμε αριθμούς.(επικρατεί παύση μεγάλου χρονικού διαστήματος)
78. Ερ : στα φωτοτυπικά έχετε κάνει μεγέθυνση ή σμίκρυνση?
79. Γ : σμίκρυνση.
80. Ερ : άρα?
81. Γ : μπορούμε να πάρουμε το μισό του 15.
82. Χρ : ή τα διπλάσια.
83. Ερ : μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?
84. Χρ : κάναμε το αντίθετο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
85. Γ : μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα … αλλά … και …όχι…και με άλλους τρόπους.
86. Χρ : όπως είναι μια πολυκατοικία και είναι η μία δίπλα στην άλλη για να φτιάχνουμε καθέτους.

ΣΧΟΛΕΙΟ: 62° ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Αγγελική - Δάφνη
ΒΑΘΜΟΣ ΑΓΓΕΛΙΚΗΣ: 20
ΒΑΘΜΟΣ ΔΑΦΝΗΣ: 20
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 20/11/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 30/11/07
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 47:49
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 25/1/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ : 26:10

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής : που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Δάφνη : όταν άρχιζαν να χτίζουν διάφορα…στις πυραμίδες οι Αιγύπτιοι.
3. Αγγελική : εννοείτε που έβαζαν ένα…τίποτα…
4. Ερ : πες το Αγγελική.
5. Αγγ : αυτό που κρέμαγαν από ένα νήμα.
6. Ερ : από πού δηλαδή προέρχεται η έννοια της καθέτου?
7. Δ : απ' όταν πέφτει ένα αντικείμενο.
8. Ερ : που συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?
9. Αγγ : στο έδαφος.
10. Ερ : είναι πάντα οριζόντιο? Πού είναι το οριζόντιο?
11. Αγγ : στην πεδιάδα, αλλά μπορεί να κάνει έτσι (δείχνει καμπύλες με τα χέρια της).
12. Ερ : εντελώς οριζόντιο που συναντάμε?
13. Δ : στον πάγο, όταν είναι λείος.
14. Αγγ : η θάλασσα, το νερό.
15. Δ : ναι, αλλά όταν φυσάει? Δίκιο έχεις, αλλά όταν είναι ήρεμη η επιφάνεια θα είναι οριζόντια.(δίνει την απάντηση από μόνη της).
16. Ερ : ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?
17. Αγγ : το τρίγωνο.
18. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
19. Αγγ : αυτές που το άθροισμά τους είναι 180 μοίρες.
20. Ερ : σχεδιάστε δύο παραπληρωματικές γωνίες. (η Δάφνη σχεδιάζει δύο ορθές και η Αγγελική μία οξεία και μία αμβλεία.). Τι γωνίες έχουμε εκεί?
21. Αγγ : μία οξεία και μία αμβλεία.
22. Δ : όχι πάντα. Εγώ έχω δύο ορθές.
23. Ερ : πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?
24. Αγγ : όταν είναι ορθές.
25. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
26. Αγγ : μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλωστές που να έχουν μήκη 3, 4 και 5.
27. Ερ : ικανοποιούν κάποια σχέση οι αριθμητικές τριάδες, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?
28. Αγγ: οι δύο κάθετες ορθές στο τετράγωνο κάνουν την υποτείνουσα στο τετράγωνο.
29. Ερ : οι ποιες?
30. Δ : οι κάθετες πλευρές.

31. Αγγ : α, ναι. Οι κάθετες πλευρές.
32. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. (το σχεδιάζουν χωρίς κανένα πρόβλημα και οι δύο μαθήτριες.). Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
33. Αγγ : οι κάθετες είναι αυτές που είναι οι πλευρές της ορθής γωνίας και η τρίτη πλευρά είναι η υποτείνουσα.
34. Ερ : μήπως θυμόσαστε κάποιον κανόνα που βρήκαμε για τις πλευρές του τριγώνου?
35. Αγγ : το τετράγωνο των δύο κάθετων πλευρών (τη διορθώνει η Δάφνη)
36. Δ : το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών
37. Αγγ : ναι…είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
38. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με τελείες, για καθεμιά από τις παραπάνω πλευρές. (στο σημείο αυτό μπερδεύτηκαν και οι δύο μαθήτριες, η Αγγελική δεν πήρε ίσες αποστάσεις και η Δάφνη έφτιαξε ορθογώνιο).
39. Ερ : ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο?
40. Αγγ : ότι το εμβαδόν των δύο τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας.
41. Δ : δηλαδή ενώ με τις τελίτσες θα βλέπαμε αριθμούς τώρα βλέπουμε εμβαδόν.
42. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (τυχαίο) και μετρήστε τις κάθετες πλευρές του.
43. Αγγ : αυτή είναι 2.5 και αυτή 3.5.
44. Ερ : μπορείτε να υπολογίσετε την υποτείνουσα χωρίς να τη μετρήσετε?
45. Αγγ : ναι, περίπου…(καταφέρνουν επιτυχώς με υπολογισμούς να βρουν πόσο είναι η υποτείνουσα).
46. Ερ : προσπαθήστε να φτιάξετε με τελείες τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου.
47. Δ : επειδή δεν είναι ακέραιοι οι αριθμοί δε βγαίνουν.
48. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
49. Αγγ : θα υψώσουμε το 15 και το 8 στη δευτέρα και αν τα προσθέσουμε θα πρέπει να είναι ίσο με το τετράγωνο του 17.
50. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
51. Αγγ : αν τα πολλαπλασιάσουμε με 2.
52. Ερ : μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?
53. Δ : θ’ αρχίσεις εσύ?
54. Αγγ : ξεκίνα.
55. Δ : ν’ αρχίσω εγώ…βασικά…αρχικά…προσπαθήσαμε να βρούμε την έννοια της κατακόρυφου…και…μας είπατε διάφορους τρόπους πώς μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και να το κατασκευάζουμε και πώς μπορούμε να χτίζουμε κάνοντας ορθές γωνίες χωρίς να έχουμε κάποιο τρίγωνο…εεε…και μετά μέσω διάφορων σχημάτων και πράξεων βρήκαμε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
56. Ερ : ποια κατάσταση βιωμένη της ζωής μας αξιοποιούμε για να φτάσουμε στο Πυθαγόρειο Θεώρημα?
57. Αγγ : εεε…τα αντικείμενα τα οποία πέφτουν κατακόρυφα.
58. Ερ : την αίσθηση της βαρύτητας. Και ποια άλλη βασική έννοια υπάρχει?
59. Δ : η οριζόντια.

ΣΧΟΛΕΙΟ: 62° ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Γιώργος Κατσούρης– Γιώργος Μουστάκας
ΒΑΘΜΟΣ ΓΙΩΡΓΟΥ Κ: 20
ΒΑΘΜΟΣ ΓΙΩΡΓΟΥ Μ: 20
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 20/11/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 28/11/07
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 41:30
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 29/1/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ : 21:32

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής : που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Γιώργος Κατσούρης. : με τη βαρύτητα…
3. Ερ : από πού δηλαδή προέρχεται η έννοια της καθέτου?
4. Γ.Κ. : με κάτι ξύλα, γραμμές.
5. Ερ : που συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?.....(δεν απάντησε κανείς).
6. Ερ : το οριζόντιο πού είναι?
7. Γ.Κ. : παράλληλα προς το επίπεδο.
8. Ερ : ναι, πού το βλέπεις αυτό?
9. Γ.Κ. : στο πάτωμα, κάτω.
10. Ερ : στη φύση?.....(δεν απάντησε κανείς).
11. Ερ : σε μια λιμνούλα, στο νερό. Τι σχέση έχουν το οριζόντιο με το κατακόρυφο από πλευράς γωνίας?
12. Γιώργος Μουστάκας : σχηματίζουν ορθή γωνία.
13. Ερ : ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?
14. Γ.Μ. : το τρίγωνο.
15. Γ.Κ. : το ορθογώνιο.
16. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
17. Γ.Κ. : οι γωνίες που είναι παραπάνω των 90 μοιρών, όχι…αυτές είναι οι αμβλείες.
18. Γ.Μ. : α, ναι! Το θυμήθηκα. Που σχηματίζουν γωνία 180 μοίρες.
19. Ερ : σχεδιάστε δύο παραπληρωματικές γωνίες. (τις σχεδιάζουν και οι δύο χωρίς πρόβλημα).
20. Ερ : πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?
21. Γ.Κ. : όταν κάθε γωνία είναι 90 μοίρες.
22. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
23. Γ.Κ. : το είχαμε φτιάξει με κάτι ξύλα. Είχαμε φτιάξει τις δύο κάθετες πλευρές και βάλαμε ένα ξύλο να σχηματίζει την υποτείνουσα.
24. Ερ : οι πλευρές ήταν τυχαίες?
25. Γ.Κ. : όχι, είχαν ένα συγκεκριμένο μήκος.
26. Ερ : ποιο?
27. Γ.Κ. : ήταν χρωματισμένες με διάφορα χρώματα.
28. Γ.Μ. : απ’ ότι θυμάμαι τα 5εκ. ήταν με μοβ.
29. Ερ : τι μονάδες είχαμε εκεί?
30. Γ.Κ. : 3, 4 και 5.

31. Ερ : Ικανοποιούν κάποια σχέση οι αριθμητικές τριάδες, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?
32. Γ.Κ. ναι, ότι αν προσθέσουμε το 3^2 και το 4^2 θα μας βγει το 5^2.
33. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (τυχαίο). Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
34. Γ.Μ. : κάθετες και υποτείνουσα.
35. Ερ : μετρήστε τις κάθετες πλευρές του και υπολογίστε την υποτείνουσα χωρίς όμως να τη μετρήσετε. (χρησιμοποιούν και οι δύο με ευχέρεια τους υπολογιστές και βρίσκουν το μέγεθος της υποτείνουσας).
36. Γ.Μ. : δε βγαίνει ολόκληρος αριθμός. Βγάζει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
37. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Προσπαθήστε να φτιάξετε τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου με τελείες. (τα κατασκευάζουν με ευκολία).
38. Γ.Κ. : είναι 9 και 16.
39. Ερ : το άλλο πόσο έπρεπε να είναι?
40. Γ.Κ. : 25
41. Γ.Μ. : χωρίς να το σχηματίσουμε. (με τόνο που φανερώνει έκπληξη).
42. Ερ : στην περίπτωση όμως που δεν έχω ακέραιους αριθμούς δεν μπορώ να κάνω τετράγωνα με τελείες.
43. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
44. Γ.Κ. : οι δύο κάθετες πλευρές
45. Ερ : ποιες είναι οι κάθετες?
46. Γ.Κ. : η 8 και η 15, αφού η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη.
47. Ερ : σωστά. (ακολουθεί επιτυχής υπολογισμός με χρήση υπολογιστή)
48. Γ.Κ. : είναι.
49. Γ.Μ. : ναι.
50. Ερ : απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?
51. Γ.Κ. από την υποτείνουσα.
52. Γ.Μ. ναι, την 17.
53. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
54. Γ.Μ. : αυτές που είναι στο τετράγωνο αν ήταν πλευρές κανονικές, δηλαδή 64, 225, 289. Επίσης και με τα πολλαπλάσια.
55. Ερ : μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?
56. Γ.Μ. εμείς ξεκινήσαμε από τη φύση γενικότερα που βλέπουμε, και μέσα στην τάξη κάναμε προβλήματα.
57. Ερ : τι άλλο?
58. Γ.Μ. : α! αυτό με τα μήκη.
59. Γ.Κ. : με τους σπάγκους.
60. Γ.Μ. : την πρώτη – πρώτη φορά κάναμε με τη βαρύτητα. Μετά μας είχατε πει με μια πολυκατοικία. Μετά κάναμε κάποιες πράξεις με τα μήκη σε τρίγωνο 3 – 4 – 5.
61. Ερ : ποιο ήταν πιο γενικό? (επικρατεί σιγή).
62. Γ.Κ. : μπορούμε να σχηματίσουμε κι άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με 6 – 8 – 10. Επίσης ότι το άθροισμα των καθέτων βγάζει το τετράγωνο της υποτείνουσας.
63. Ερ : σε τι τρίγωνο?
64. Γ.Κ. : σε ορθογώνιο.
65. Ερ : βλέπετε κάποια διαφορά σ' αυτό που είπαμε μαζί και σ' αυτό που κάνατε στο σχολείο?
66. Γ.Μ. : μήπως…ότι δεν είναι ακέραιοι.

ΣΧΟΛΕΙΟ: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΕΙΟ: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Δανάη - Νίκος
ΒΑΘΜΟΣ ΔΑΝΑΗΣ: 16
ΒΑΘΜΟΣ ΝΙΚΟΥ: 16
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 6/12/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 24/1/08
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 45:49
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 7/2/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ : 39:48

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής : που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Νίκος : είχαμε βάλει στον τοίχο ένα ξύλο.
3. Ερ : πιο πριν?
4. Ν : είχαμε κρεμάσει ένα σχοινάκι.
5. Δανάη : ένα βαρίδι. Πιο εύκολο όμως είναι με το τρίγωνο.
6. Ερ : ναι, αλλά το τρίγωνο φτιάχτηκε μετά.
7. Δ : και μπορούσε να φτιάχνει ένα βαρίδι που θα είχε το ίδιο βάρος και από δεξιά και από αριστερά?
8. Ερ : τι εννοείς?
9. Δ : αν το χωρίσουμε σε δύο μέρη…για να…αυτό να είναι ίσο και να μη γέρνει από τη μια μεριά το βαρίδι, θα πρέπει και τα δυο κομμάτια να είχαν το ίδιο βάρος.
10. Ερ : θες να πεις ότι δεν είναι συμμετρική η προς τα κάτω αυτή έλξη.
11. Δ : ναι….και μπορούσαν να σκεφτούν αυτό και όχι το τρίγωνο?
12. Ερ : γιατί το τρίγωνο ήρθε μετά από αυτήν την ιδέα.
13. Δ : βλέπουμε σε καλύβες ότι δεν είναι οι τοίχοι κάθετοι. Μετά πώς τους ήρθε η ιδέα να κάνουν κάθετους τους τοίχους?
14. Ερ : όταν άρχισαν να χτίζουν με πέτρα, αν δεν ήταν κάθετο…
15. Δ : θα έπεφτε. (πετάχτηκε συμπληρώνοντας).
16. Ερ : και ο μόνος τρόπος που εξασφάλιζε την κάθετο ήταν το βάρος. Και μετά τι ανακαλύψανε?
17. Δ : το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
18. Ερ : ναι, αλλά πιο μπροστά?
19. Δ : το νερό.
20. Ν : το ορθογώνιο τρίγωνο.
21. Ερ : και πώς το φτιάξαμε?
22. Ν : με ξυλάκια.
23. Ερ : τα οποία τι χαρακτηριστικό είχαν?
24. Δ : ότι το τετράγωνο του μήκους των ξύλων…αν το προσθέσουμε είναι ίδιο με το μεγαλύτερο ξύλο που έχουμε.
25. Ερ : μπορείς άμα σου δώσουμε τυχαία ξύλα να εξασφαλίσεις ορθή γωνία?
26. Δ : απλά να βλέπουμε.
27. Ερ : δεν εξασφαλίζεται με το μάτι.
28. Ν : ήταν κάθετα τα ξύλα.
29. Ερ : μόνο? Τίποτα αριθμοί έπαιξαν ρόλο?
30. Δ : α! 3, 4 και 5. και όλα τα πολλαπλάσιά τους, που καλά αυτό το μάθαμε μετά, και που μπορούμε να βρούμε γιατί γίνεται αυτό.

31. Ερ : ναι, ακριβώς αυτό.
32. Δ : ανάποδα! πρώτα θα έπρεπε κανονικά, μέσα σε εισαγωγικά, να βρούμε πώς γίνεται, γιατί γίνεται. Όχι να βρούμε ότι γίνεται και μετά γιατί γίνεται.
33. Ερ : ναι, εσύ ξεκινάς έχοντας πρώτα την ιδέα του γενικού και βγάζεις το ειδικό. Εδώ όμως ο άνθρωπος επινοεί με βάση την εμπειρία του. Δεν μπορούσε να σκεφτεί τους αριθμούς. Με πειράματα το κατάφερε.
34. Δ : και πώς ήξερε ότι είναι κάθετο?
35. Ερ : το έβλεπε.
36. Δ : ναι, ξεκίνησαν όμως από κάτι που μπορεί και να μην είναι σίγουρο.
37. Ερ : ναι, αλλά εκείνοι ξέρεις τι ήθελαν.
38. Ν : να φτιάξουν τα σπίτια τους.
39. Δ : αισθανόταν φυσιολογικό ότι το ταβάνι στέκεται? Και δεν πέφτει με τους νόμους της βαρύτητας?
40. Ερ : πρώτα αξιοποίησε τι έβλεπε στον κόσμο και μετά έφτασε στο τρίγωνο. Πού συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?
41. Δ : πουθενά.
42. Ν : το έδαφος.
43. Δ : μα δεν είναι.
44. Ν : στις πεδιάδες.
45. Δ : μα ακόμα και αυτό. Τίποτα δεν είναι ίσιο. Ακόμα και οι ακτίνες του ήλιου όταν περνάνε από τη γη καμπυλώνονται.
46. Ερ : πάρε έναν κουβά, πάνω – πάνω.
47. Δ : μα κι αυτό θα κινείται.
48. Ν : όταν δεν έχει αέρα…η θάλασσα.
49. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
50. Δ : είχε πέσει και στις εξετάσεις πέρσι…δεν είμαι σίγουρη.
51. Ν : όταν είναι παράλληλες. Όχι, δεν υπάρχουν τέτοιες…δε θυμάμαι.
52. Δ : είναι ή αυτές (σχεδιάζει δύο κατακορυφήν) ή…(δεν απαντάει τελικά κανείς και τις σχεδιάζουμε εμείς).
53. Ερ : γίνεται δύο παραπληρωματικές γωνίες να είναι ίσες?
54. Δ : ναι, όταν θα είναι 90 μοίρες.
55. Ν : ναι, και οι δύο 90 μοίρες.
56. Δ : ναι, αλλά μπορεί να μην είναι ίσες.
57. Ν : ε! τότε δεν υπάρχει και τρίγωνο.
58. Δ : ούτε ευθεία.
59. Ερ : ναι, αυτό κατάλαβαν οι αρχαίοι Έλληνες. Έφτιαξαν μια Γεωμετρία που στηρίζεται σε ιδεατότητες αλλά είναι σίγουρη. Τα Μαθηματικά είναι μέσα στο μυαλό μας. Ξεκινάνε όμως από τον πραγματικό κόσμο.
60. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο, το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
61. Δ : 3, 4, 5. έχω βαρεθεί πια. Παντού είναι αυτοί οι αριθμοί.
62. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. (το σχεδιάζουν πολύ εύκολα). Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
63. Ν : νομίζω αυτή ονομάζεται…μας το είχατε πει κι εσείς… (η Δανάη έκανε αρνητικό νεύμα με τα μάτια).
64. Ερ : είναι η υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές. Μήπως θυμόσαστε τι λέει το Πυθαγόρειο Θεώρημα?
65. Δ : πολύ που διαβάζω, μόνο τις ασκήσεις.
66. Ν : ούτε εγώ θυμάμαι.

67. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Στη συνέχεια θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω.
68. Δ : α! αυτά τα είχαμε μάθει.
69. Ερ : ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο?
70. Δ : ότι το τετράγωνο αυτό…(δείχνει της μιας κάθετης) και αυτό (δείχνει το τετράγωνο της άλλης) μας κάνουν αυτό το τετράγωνο (δείχνει αυτό της υποτείνουσας).
71. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου μπορείτε να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο?
72. Δ : ναι! Να δούμε αν είναι πολλαπλάσια των 3, 4 και 5.
73. Ερ : δεν είναι όμως.
74. Δ : νννναιιιι.....θα φτιάξουμε το τρίγωνο.
75. Ερ : άλλος τρόπος ελέγχου?
76. Ν : με το μυαλό. Λογικά 8 και 15 είναι οι κάθετες και 17 η υποτείνουσα. Θα το φτιάξουμε και θα το δοκιμάσουμε.
77. Δ : να δούμε αν $15^2 + 8^2 = 17^2$.
78. Ερ : ναι.
79. Δ : αυτό ήταν όλο?
80. Ν : αυτό το ήξερα.
81. Ερ : απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?
82. Ν : η ορθή γωνία?
83. Ερ : ναι.
84. Ν : απέναντι από ποια?
85. Ερ : ναι.
86. Ν : από την υποτείνουσα.
87. Δ : το 17.
88. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
89. Δ : ναι, βέβαια! Μπορεί να μας βγει κι ο ένας αριθμός άρρητος. Μπορούμε να επιλέξουμε π. χ. το 45 και το 28
90. Ερ : για αυτούς τους αριθμούς, το 8, το 15 και το 17.
91. Δ : τα πολλαπλάσιά τους.
92. Ερ : μπορείτε να μας πείτε τι σας έμεινε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα?
93. Ν : γενικότερα πώς μπορούμε να βρούμε αυτοί οι μικροί αριθμοί να βγάζουν το μεγάλο.
94. Δ : εμένα μου έμειναν οι άρρητοι, που….που δεν ξέρω….γενικά….ενώ έχουμε ένα μήκος το οποίο το βλέπουμε, δηλαδή μας βγαίνει ένας αριθμός που δεν τελειώνει, το καταλαβαίνω, το κατανοώ, αλλά είναι λίγο περίεργο.
95. Ν : μερικοί αριθμοί στη ρίζα δε βρίσκονται ακριβώς.

ΣΧΟΛΕΙΟ: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΖΕΥΓΑΡΙ : Νάντια – Ελένη
ΒΑΘΜΟΣ ΝΑΝΤΙΑΣ: 18
ΒΑΘΜΟΣ ΕΛΕΝΗΣ: 18
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 6/12/07
ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ : 14/12/07
ΑΡΧΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΒΙΝΤΕΟ : 24:06
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ : 24/1/08
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ :29:50

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

1. Ερευνητής : που συναντά ο άνθρωπος την κατακόρυφο στο φυσικό κόσμο?
2. Νάντια : σε χαράδρες…εεε…εκεί που είναι…άμεσα, εδώ που τη βλέπουμε, στον τοίχο. Άντε ρ' Ελένη.
3. Ερ : από πού δηλαδή προέρχεται η έννοια της καθέτου?
4. Ν : από μια ευθεία που έχει τάση να πηγαίνει προς τα κάτω. Χωρίς όμως να πηγαίνει πλάγια ή λοξά, ευθεία, προς τον πυρήνα της γης.
5. Ερ : πού συναντά ο άνθρωπος την οριζόντιο στο φυσικό κόσμο?
6. Ν : στο πάτωμα, στο έδαφος.
7. Ελένη : εκεί που χωρίζεται η γη κι ο ουρανός. Στη θάλασσα.
8. Ερ : ποιο γεωμετρικό όργανο χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε καθέτους?
9. Ελ : το τρίγωνο.
10. Ερ : ξέρετε ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές?
11. Ν : ναι, κάτσε…Ελένη εσύ ξέρεις.
12. Ελ : (σχεδιάζει μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων) εδώ είναι το κέντρο…και η μία είναι έτσι…και η άλλη από κάτω.
13. Ν : α! μήπως είναι αυτές? (σχεδιάζει δύο κατακορυφήν).
14. Ερ : όχι (σχεδιάζουμε μία ευθεία γωνία).
15. Ελ : αυτή είναι η ευθεία. Μήπως είναι δύο ευθείες μαζί?
16. Ερ : όχι.
17. Ελ : όταν η μία συμπληρώνει την άλλη…α! μήπως είναι όταν έχουμε μια γωνία έτσι και αυτή είναι η πλευρά μιας άλλης γωνίας. (καταφέρνει να σχεδιάσει δύο παραπληρωματικές). Δηλαδή η μία πλευρά είναι κοινή.
18. Ν : και αν προσθέσουμε τις δύο αυτές γωνίες κάνουν την …πώς τη λένε…ευθεία γωνία.
19. Ερ : πότε δύο παραπληρωματικές γωνίες γίνονται ίσες?
20. Ν : αν κάνουμε την ευθεία…εδώ…στο σημείο που ενώνονται…πρέπει να γίνει εδώ η κάθετος. Για να γίνουν όμως ίσες πρέπει να πάψουν να είναι παραπληρωματικές.
21. Ερ : αν είναι κάθετες?
22. Ν : ναι…ναι…σωστά, έχετε δίκιο.
23. Ερ : πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε το γεωμετρικό αυτό όργανο το οποίο προσδιορίζει ακριβώς την κάθετο?
24. Ελ : με τα ξύλα. Βάζουμε ένα μεγάλο που να είναι επάνω στον τοίχο και μετά από εκεί προσπαθούμε (την κόβει η Νάντια)
25. Ν : να φτιάξουμε ένα τρίγωνο.
26. Ερ : με τι πλευρές?

27. Ν : 5, 4, 3.
28. Ελ : ορθογώνιο τρίγωνο.
29. Ερ : ικανοποιούν κάποια σχέση οι αριθμητικές τριάδες, και αν ναι μήπως ξέρετε ποια είναι αυτή?
30. Ν : άμα προσθέσουμε τα τετράγωνά τους θα βρούμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς.
31. Ελ : της υποτείνουσας.
32. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Πώς ονομάζουμε τις πλευρές?
33. Ελ : αυτήν κι αυτήν κάθετες, κι αυτήν υποτείνουσα. (δείχνει στο σχήμα της).
34. Ερ : μήπως θυμόσαστε κάποιον κανόνα που βρήκαμε για τις πλευρές του τριγώνου?
35. Ελ : το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
36. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3εκ., 4εκ., 5εκ. Θέλουμε να κατασκευάσετε τετράγωνα με πλευρές τις παραπάνω.
37. Ελ : τι να κάνω εδώ δηλαδή? (αφού έχει φτιάξει το ορθογώνιο τρίγωνο, δείχνει να έχει μπερδευτεί στην κατασκευή του τετραγώνου).
38. Ερ : ξέρετε ποια είναι η σχέση των τετραγώνων που φτιάξατε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που διδαχτήκατε στο σχολείο?
39. Ελ : ότι το τετράγωνο αυτό (δείχνει) κι αυτό (δείχνει) είναι ίσο με αυτό (δείχνει το τετράγωνο της υποτείνουσας).
40. Ερ : είχαμε δύο τρόπους που μιλήσαμε για τα τετράγωνα
41. Ν : με τελίτσες.
42. Ερ : όταν λέμε για τετράγωνο πού πάει το μυαλό σας? Στο εμβαδόν ή στον πολλαπλασιασμό του αριθμού στη δευτέρα?
43. Ν : εεε…στον πολλαπλασιασμό του αριθμού με τον εαυτό του.
44. Ερ : φτιάξτε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (τυχαίο) και μετρήστε τις κάθετες πλευρές του.
45. Ελ : 6 και 4.
46. Ν : 7 και 4.
47. Ερ : μπορείτε να πείτε πόσο είναι η υποτείνουσα, χωρίς να τη μετρήσετε ?
48. Ν : χωρίς να τη μετρήσουμε? (επαναλαμβάνει)
49. Ελ : εεε…376. Sorry, πάτησα λάθος (έκανε 36×16 ενώ είχε πλευρές 4 και 6). Και θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα …. 7.3833 …. 7,1 … 7,2 … 7,3 … βγαίνει (μετράει για να επαληθεύσει).
50. Ερ : προσπαθήστε να φτιάξετε τα τετράγωνα του παραπάνω ορθογωνίου τριγώνου με τελείες.
51. Ελ : το θυμόμαστε.
52. Ερ : ωραία.
53. Ν : το τετράγωνο αυτού είναι το 64.(είχε βρει την υποτείνουσα 8.062).
54. Ερ : μα δεν έχει πλευρά ίση με 8.
55. Ν : ε! τότε δεν μπορούμε.
56. Ελ : ε, δεν ξέρουμε…γιατί βγαίνει δεκαδικός αριθμός.
57. Ερ : αν οι αριθμοί 17, 8, 15 αποτελούν πλευρές τριγώνου, εξετάστε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
58. Ελ : λογικά είναι. 8 είναι η μικρότερη. 15 αυτή και 17 η υποτείνουσα.
59. Ν : θα μπορούσαμε να τα κάνουμε όλα στο τετράγωνο τους. Να βρούμε δηλαδή τα τετράγωνά τους και μετά να τα προσθέσουμε κι αν μας κάνουν το τετράγωνο του 17 θα είναι.(κάνουν πράξεις με υπολογιστή)
60. Ελ : ναι.

61. Ν : γίνεται.
62. Ερ : απέναντι από ποια πλευρά βρίσκεται η ορθή γωνία?
63. Ν : εδώ θα είναι η 17 (δείχνει την υποτείνουσα στο προηγούμενο ορθογώνιο τρίγωνο που είχε κάνει) η 8 και η 15.
64. Ερ : μπορείτε να βρείτε άλλες πιθανές τριάδες που να φτιάχνουν ορθογώνιο τρίγωνο?
65. Ν : θα πάρουμε τα διπλάσια του 17, 8, 15. Το ίδιο πράγμα δεν είναι?
66. Ερ : όταν διδαχτήκατε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σχολείο το αποδείξατε? Αν ναι, θυμόσαστε πώς?
67. Ν : σχεδιάσαμε τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα εκεί μέσα και έπρεπε να χωρέσουμε το τετράγωνο και τα τέσσερα τρίγωνα εκεί μέσα.
68. Ερ : μπορείτε να κάνετε μια ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε?
69. Ν : αρχίσαμε από την κάθετο. Πώς μπορούμε να βρούμε την κάθετο. Και μετά κάναμε τα ξυλάκια.
70. Ελ : την κατακόρυφο.
71. Ερ : πώς την εξασφαλίσαμε?
72. Ελ : που πετάγαμε το μπαλάκι κάτω.
73. Ν : και μετά πήγαμε στο μιλιμετρέ και φτάσαμε στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.
74. Ελ : όπου είπαμε ότι το τετράγωνο των δύο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
75. Ερ : ποια η διαφορά αυτών που κάναμε εμείς με αυτά που διδαχτήκατε στο σχολείο?
76. Ν : στο μάθημα κάναμε με σχήματα. Εμείς…εμείς…απλά κάναμε αυτό με τις τελίτσες…και μετά…προσθέσαμε αριθμούς…
77. Ερ : ήταν για συγκεκριμένους αριθμούς αυτό που κάναμε εμείς?
78. Ν : ναι, εμείς κάναμε για τους αριθμούς 3, 4 και 5.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη Βιβλιογραφία

1. Ackermann, E. (1991). From decontextualized to situated knowledge: Revisiting Piaget's water level experiment. In I. Harel & S. Papert (Eds.), *Constructionism* (σελ. 269-294). Norwood: Ablex publishing corporation.

2. Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education, 1* (1), 55-74.

3. Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 111-129.

4. Baker, A., & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 149-168.

5. Battista, M., & Clements, D. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, 88* (1), 48-54.

6. Bennett, D. (2008, January 13). Don't just stand there, think. *The Boston Globe.* Retrieved May 19, 2008, from http://www.boston.com/bostonglobe/ideas/articles/2008/01/13/dont_just_stand_there_think/

7. Blades, M., & Spencer, C. (1994). The Development of children's ability to use spatial representations. In H.W. Reese (Ed.), *Advances in child development and behavior .Vol. 25* (pp 157-159). San Diego: Academic Press.

8. Boyer, C.B., & Merzbach, U.C. (1991). *A History of Mathematics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

9. Clements, D.H., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp.109-161). Enschede, Netherlands: NICD.

10. Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23* (7), 13-20.

11. Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. *For the Learning of Mathematics, 15* (1), 38-48.

12. Couper, M.P., Bethlelem, J., & Arbor, A. (1998). Computer Assisted Survey Information Collection. New York: John Wiley & Sons.

13. Dewey, J. (1963). *Experience and Education.* New York: Collier Books.

14. Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* (pp.37-51). Dordrecht, Nederlands: Kluwer Academic Publisher.

15. Edwards, L.D. (1998). Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(1), 53-78.

16. Edwards, L.D. (2002). The nature of mathematics: A personal journey. In A. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.1* (pp.149-153). Norwich, UK: University of East Anglia.

17. Freudental, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

18. Freudental, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

19. Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 131-143.

20. Fyhn, A. B. (2004). How can experiences from physical activities in the snow influence geometry learning? Paper at ICME-10, Topic Study Group 10, Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry. DK: Copenhagen. Retrieved June, 12, 2008, from http://www.icmeorganisers.dk/tsg10/articulos/Fyhn_4_revised_paper.doc

21. Fyhn, A.B. (2008). A climbing class' reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 19-35.

22. Gardner, H. (1985). *The Mind's New Science.* New York: Basic Books.

23. Gardner, H. (1999). *Intelligence Reframed*. New York: Basic Books.

24. Gillings, R.J. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover.

25. Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 111-129.

26. Greeno, J. (1997). On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher, 26,* 5-17.

27. Harel, G., & Tall, D. (1989). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. For the Learning of Mathematics, 11 (1), 38-42. Retrieved September 5, 2008, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991b-harel-flm.pdf

28. Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* New York: Dover.

29. Henderson D.W., & Taimina, D. (2005). *Experiencing geometry. Euclidean and non-Euclidean with history.* New York: Cornell University.

30. Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74* (1), 11-18.

31. Husserl, E. (1982). *Logical Investigations* (Vol II). London: Routledge & Kegan Paul.

32. Ibbotson, A., & Bryant, P. (1976). The perpendicular Error and the Vertical Effect in Children Drawing. *Perception, Vol. 5*, 319-326.

33. Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Dynnikov, C., Furinghetti, et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI Study* (pp. 291–328). Boston, MA: Kluwer.

34. Johnson, M. (1987). *The body in the mind: the bodily basis of meaning, imagination, and reason.* Chicago: University of Chicago Press.

35. Johnson, M., & Rohrer, T. (2006). We are live creatures: Embodiment, American pragmatism, and the cognitive organism. Retrieved October, 31,2007, from http://zakros.uscd.edu/~trohrer/blmjohnsonrohrerdraft.pdf

36. Krainer, K. (1991). Consequences of a low level of acting and reflecting in geometry learning – Findings of interviewers on the concept of angle. *In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Program Comitee, 15th PME Conference,* (pp.254-261). Assisi, Italy.

37. Kospentaris, G., & Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity – Proportions and the educational experience. *Proceedings of 4th Mediterranean Conference in Mathematics Education. Vol. 1* (pp.239-254). Palermo, Italy.

38. Lakoff, G. (1987). *Women, Fire and Dangerous things: What categories Reveal about the Mind.* Chicago: University of Chicago Press.

39. Lakoff, G. (2001). Embodied Mind, Embodied Philosophy: how the science of mind changes our understanding of the world. *The Gifford Lectures*. University of Glasgow. Retrieved October, 31, 2007, from http://www.impmuenchen.de/fileadmin/user_upload/Parmenides/Lecture1.rev.2_lakoff.doc

40. Lakoff, G., & Johnson, M. (1998). *Philosorhy in the Flesh.* New York: Basic Books.

41. Lakoff, G., & Nunez, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

42. Lave, J., & Wegner, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge. University press of Cambridge.

43. Liben, L. S., & Yekel, C. A. (1996). Pre-schoolers Understanding of plan and oblique maps: the role of Geometric and Representational Correspondence, *Child Development, 67,* 2780-2796.

44. Malt, B.C. (1999). Word Meaning. In W. Bechtel, & C. Graham (Eds.), *A Companion to Cognitive Science,* (pp.331-337). Massachusetts: Blackwell.

45. Manno, G. (2006). Embodiment and a-didactical situation in the teaching-learning of the perpedicular straight lines concept, PhD dissertation, Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Didactic Mathematics.

46. Maor, E. (1998). Trigonometric delights. New Jersey: Princeton University Press.

47. Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem.* New Jersey: Princeton University Press.

48. Merleau–Ponty, M. (2000). *Phenomenology of Perception* (Colin Smith, μετάφραση). London: Routledge & Kegan Paul. (Πρωτότυπη έκδοση, 1945).

49. Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behaviour, 17* (2), 183-195.

50. Mitchelmore, M.C. (1989). The development of children's concepts of angle. *In G.Vergnaud (Ed.), Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.2* (pp.304-311). Paris, France.

51. Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. Patenam, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp.105-109). Honolulu, Hawaii.

52. Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body Motion and graphing. *Cognition and Instruction, 16* (2), 119-172.

53. Nemirovsky, R., Borba, M., & Dimatia, C. (2004). PME Special Issue : Bodily Activity and Imagination in Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics, 57,* 303-321.

54. Nunez, R.E. (2000). *Mathematical Idea Analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED466734).

55. Nunez, R.E. (2004). Do real numbers really move? Language, thought and gesture: the embodied cognitive foundation of mathematics. Retrieved October 8, 2007, from http://www.cogsi.ucsd.edu/~nunez/web/Dagstuhlscan.pdf

56. Nunez, R.E., Edwards, L.D., & Matos, P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 45-65.

57. Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Hassocks, UK: Harvester.

58. Pea, R.D. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Salomon (Ed.), *Distributed Cognitions,* (pp. 47-87). Cambricge, England: University Press of Cambridge.

59. Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space.* London: Routledge & Kegan Paul.

60. Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning, 17*(1), 26- 33.

61. Radford, L. (2003). Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5* (1), 71-107.

62. Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 39-65.

63. Regier, T. (1996). *The Human Semantic Potential.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

64. Robutti, O., & Arzarello, F. (2003). Approaching algebra through motion experiences, *Proceedings of the PME27 Conference,* 1, (pp. 111-115).

65. Roels, G. (1985). Het fenomenon hoek [The angle phenomenon]. *Wiskunde en Onderwiis, 11,* 127-138.

66. Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teachingand learning,* (pp.334-370). New York: MacMillan.

67. Schweiger, F. (1986). Winkelbegriff und Winkelmab [The angle concept and angle measurement]. *Mathematik im Unterricht, 11,* 1-9.

68. Steinbring, H. (1990). Problems in the Development of Mathematical knowledge in the Classroom. *Der Mathematik-Unterricht, 36* (3), 4-28.

69. Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedure and Techniques.* London: Sage.

70. Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. Retrieved October 31, 2007, from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf

71. Tall, D., Gray, E., Ali, B.M., Growley, L., DeMarois, P., McGowen, M., et al. (2000). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education Behaviour, 18* (4), 1-13.

72. Thom, J. S., & Pierre S. E. (2002). Problems, perseverance and mathematics residue. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 1-28.

73. Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

74. Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*. Dordrecht: D. Reidel

75. Tymoczko, T. (Επιμ.έκδ.). (1986). New direction in the philosophy of mathematics. Boston: Birkahauser.

76. Van Den Heurel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mayhematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

77. Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* New York: Academic Press.

78. Varela, F.J., Thompson, E., & Rosch, E. (1999). *The Embodied Mind* (7th ed.). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

79. Volosinov, V.N. (1973). *Marxism and the philosophy of the language.* Cambridge, MA: University Press of Harvard.

80. Watson, A., & Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. In Anne D. Cockburn, & Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.4* (pp.369-376). Norwich, UK.

81. Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2002). Cognitive development of vectors as forces in mechanics and process and concept in mathematics: The case of vector. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 73-97.

82. Whorf, B.L., (1956). Science and linguistics. In J.B.Caroll (Ed.), *Language thought and reality,* (pp.207-219). Cambricge, Massachussetts: MIT Press.

83. Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991) Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (5), 390-408.

84. Ziemke, T. (2003). What's that thing called embodiment? In Alterman & Kirsh (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Cognitive Science Society,* (pp.1134-1139). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

85. Zuzne, L. (1970). *Visual Perception of Form.* London: Academic Press.

Ελληνική βιβλιογραφία

1. Changeux, J.P., & Connes, A. (1995). Τα Μαθηματικά και ο Εγκέφαλος. (Α. Κασέτα, Σ. Μάκρα και Σ. Μανουσέλη, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

2. Cohen, L., & Manion, L. (1997). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (Χρ. Μητσόπουλου και Μ. Φιλοπούλου, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.

3. Donaldson, M. (2001). *Η Σκέψη των Παιδιών*. (Α. Καλλογιανίδου & Α. Αρχοντίδου, μετάφραση). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση, 1978).

4. Husserl, E. (2003). *Η προέλευση της Γεωμετρίας*. (Π. Κοντού, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Εκκρεμές.

5. Sierpinska, A. (1991). Μερικές ιδέες πάνω στη μεθοδολογία της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών που συνδέεται με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 7,* 11-28.

6. Van Der Waerden, B.L. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. (Γ. Χριστιανίδη, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1954).

7. Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών* (3η έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

8. Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σίδερης, Π. (2003). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου* (γ' έκδοση). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

9. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου* (β' έκδοση). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

10. Βοσνιάδου, Σ. (Επιμέλεια έκδοσης). (2000). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

11. Βοσνιάδου, Σ. (2002). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Τόμος Α', Βιολογικές, Αναπτυξιακές και Συμπεριφοριστικές Προσεγγίσεις, Γνωστική Ψυχολογία.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

12. Βοσνιάδου, Σ. (2005). Οι μεταβαλλόμενες σχέσεις ψυχολογίας και βιολογίας και τα προβλήματα της γνωσιακής επιστήμης. Νόησις, 1, 19-37. Ανάκληση Μάιος, 30, 2008, από http://www.cs.phs.uoa.gr/el/courses/cognitive_psychology/cognitive%20psychology%202006-2007%20papers/vosniadou%20NOESIS.pdf

13. Δακανάλης, Α., & Θεοδοσίου, Ε. (n.d.). Μαθηματικό και Αστρονομικό Μυστήριο των Πυραμίδων. Ανάκληση Οκτώβριος, 9, 2007, από http://www.omilosmeleton.gr/pdf/Pyramides2.pdf

14. Ζαχαριάδης, Θ. (2000). Στόχοι και αποτελέσματα της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. *Πρακτικά Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. Ανάκληση Ιούνιος, 18, 2008, από http://www.math.uoa.gr/me/conf2/conf/sum/zah.html

15. Κλαουδάτος, Ν. (2005). Συμπληρωματικές σημειώσεις του μαθήματος *Διδακτική των Μαθηματικών, Η Επικοινωνιακή Προσέγγιση του Vygotsky – και η θεωρία της αλληλοδράσης - αλληλεπίδρασης (interactionism).* Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

16. Κολιάδης, Ε. (2003). *Γνωστική Ψυχολογία, Γνωστική Νευροεπιστήμη και Εκπαιδευτική Πράξη*. Αθήνα: Συγγραφέας.

17. Νεγρεπόντης, Σ. (2005). Σημειώσεις του μαθήματος *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία Ευκλείδη*. Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

18. Οικονόμου, Π., & Τζεκάκη, Μ. (1999). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 4*, 37-65.

19. Πρόκλος, Σχόλια Εις Το Πρώτον Βιβλίο Των Ευκλείδου Στοιχείων, TLG Mussaios.

20. Πρωτοπαπάς, Π. (2003). Στρατηγικές υπολογισμού όγκου από μαθητές Ε' δημοτικού. *Οι αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη μάθηση των Μαθηματικών*. Λευκωσία: Intercollege Press.

21. Σπύρου, Π. (2005). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο των Αθηνών.

22. Σπύρου, Π., & Λάππας, Δ. (2007). *Φάκελος μαθήματος για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο των Αθηνών.

23. Τζεκάκη, Μ. (1996). Μαθηματικές δραστηριότητες για την Προσχολική ηλικία. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.