ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διαμόρφωση και αιτιολόγηση εικασιών από μαθητές Δημοτικού και ο ρόλος τους στην απόδειξη

Ιωάννα Χρ. Τσιτσιρίγκα

με Α.Μ. Δ200808

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δέσποινα Πόταρη

Αθήνα 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

« Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Πόταρη Δέσποινα (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αν. Καθηγήτρια	…….
2) Ζαχαριάδης Θεοδόσης	Καθηγητής	……..…
3) Ράπτης Ευάγγελος	Καθηγητής	……...…

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά, και τα τρία μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής της εργασίας αυτής, για την εμπιστοσύνη που έδειξαν στο πρόσωπό μου, στη διερεύνηση ενός τόσο σημαντικού θέματος, όπως η απόδειξη, αλλά και για την αμέριστη συμπαράσταση και βοήθεια που μου προσέφεραν, όχι μόνο κατά τη διπλωματική μου εργασία, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό της Διδακτικής Μαθηματικών.

Επίσης, ευχαριστώ και τους υπόλοιπους καθηγητές του Μεταπτυχιακού, για τις ίσες ευκαιρίες που δίνουν στους ανθρώπους που θέλουν να μάθουν κάτι παραπάνω και για τον πλούτο των γνώσεων που μας προσέφεραν.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ την κυρία Δέσποινα Πόταρη, για όλους τους παραπάνω λόγους, αλλά και για τον επιπρόσθετο λόγο ότι πάνω απ' όλα σκέφτεται ανθρώπινα και ενδιαφέρεται πρωτίστως να βλέπει τους φοιτητές της να είναι καλά στην υγεία τους, στην οικογένειά τους και στις σχέσεις με συνανθρώπους τους. Την ευχαριστώ πάρα πολύ γι' αυτό κι εύχομαι όλοι οι εκπαιδευτικοί να είχαν τέτοιες ανθρωπιστικές αξίες.

Θα ήταν μεγάλη παράλειψη βέβαια, αν ξεχνούσα να ευχαριστήσω τους πρωταγωνιστές αυτής της ερευνητικής μελέτης, τους τρεις μαθητές που συμμετείχαν με προθυμία και χαρά στο πείραμα σχεδιασμού που κάναμε και μας έδωσαν τα 'φώτα' τους.

Ευχαριστώ επίσης κι όλους τους συμφοιτητές μου, για τον αλληλοσεβασμό και την αλληλοεκτίμηση που είχαμε ο ένας στον άλλο, αλλά ιδιαίτερα, τον Κώστα και τον Παύλο, με τους οποίους είχαμε μια άψογη κι ευχάριστη συνεργασία, αλλά και το Σωτήρη και το Σωκράτη, που με το χιούμορ τους, κατάφερναν (ειδικά ο Κώστας) να ξεχνάω 'το δύσκολο της υπόθεσης' και να προσπαθώ με όλη μου τη δύναμη.

Εύχομαι σε όλους τους ανθρώπους και ειδικά στην οικογένειά μου και στα πανέμορφα ανιψάκια μου, να μάθουν κι αυτοί να ξεπερνούν όλες τις δυσκολίες και στενοχώριες της ζωής και να προσπαθούν να τα καταφέρουν με όλη τους τη δύναμη.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη σ' εκείνους, στην Αίγλη μας, που θα αγαπάμε πάντα, και στο Γιώργο, για την υπομονή και συμπαράστασή του όλο αυτό το διάστημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ **9**

ABSTRACT **11**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **13**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ **16**

ΕΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΠΡΑΞΗ 16
Μορφές αιτιολόγησης *18*
Ο ρόλος που έχουν οι νόρμες της τάξης στην εξήγηση και δικαιολόγηση *19*
ΑΠΟΔΕΙΞΗ 20
Ο ρόλος της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση *21*
Ο ρόλος της διερεύνησης και των εμπειρικών δοκιμών στην απόδειξη- ο ρόλος των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων *25*
Αποδεικτικά σχήματα των μαθητών για την επαλήθευση εικασιών *29*
Τι γνώμη έχουν οι δάσκαλοι για τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών τους; *34*
Η απόκρουση των εικασιών *35*
Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 36
Ποια είναι η σχέση της εικασίας με την επιχειρηματολογία; *37*
Η επιχειρηματολογία και η σχέση της με την απόδειξη *38*
Τα κοινά λειτουργικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης *38*
Η κοινωνική διάσταση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στην επιστήμη των μαθηματικών αλλά και στη σχολική πραγματικότητα- Η απόδειξη ως πειστικό επιχείρημα *40*
Η σημασία των κοινωνικά αποδεκτών κανόνων του λόγου στην επιχειρηματολογία *41*
Τα δομικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας *42*
Το σύστημα αναφοράς στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη *43*
Τελικά, επιχειρηματολογία και απόδειξη συγκλίνουν ή αποκλίνουν; *45*
Ο ρόλος της επιχειρηματολογίας στην αλγεβρική απόδειξη προβλημάτων που αφορούν ιδιότητες αριθμών *47*
Θεωρητικό πλαίσιο για να αντιληφθεί κανείς την έννοια της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά *51*
Ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης *53*
ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 55
Γιατί να μιλήσουμε για την απόδειξη στο Δημοτικό σχολείο; *55*
Τι εννοούμε όμως ως απόδειξη στο Δημοτικό σχολείο; *57*
Ενδεικτικές έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές δημοτικού *60*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ **63**

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 63
ΜΕΘΟΔΟΣ 64
Συμμετέχοντες *66*
Διαδικασία *66*
Ανάλυση δεδομένων *67*

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **69**

Α) ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΝΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ 69
1η συνεδρία: «Το γινόμενο πρώτων είναι πρώτος αριθμός; Τι ισχύει με το γινόμενο σύνθετων και τι με το γινόμενο πρώτου με σύνθετο;» *69*
2η συνεδρία: Πρόσθεση πρώτων αριθμών *76*
3η συνεδρία: Αφαίρεση και διαίρεση με πρώτους αριθμούς *78*
4η συνεδρία : Το άθροισμα 4 άρτιων αριθμών είναι άρτιος; *82*
5η συνεδρία: Υπάρχουν 4 περιττοί που αν τους προσθέσουμε δίνουν περιττό; *84*
6η συνεδρία: Το άθροισμα από 5 οποιουσδήποτε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς διαιρείται με το 5; *88*
7η συνεδρία : Το άθροισμα 4 διαδοχικών αριθμών θα διαιρείται με το 4; *93*
Και το άθροισμα 6 διαδοχικών θα διαιρείται με το 6; *93*
8η συνεδρία : «Διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 2 με το 4;» *99*
9η συνεδρία: «Να παρατηρήσετε τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 και να βρείτε τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν» *103*
10η συνεδρία: Δίνεται ο $A=2^3*3*5$. Να απαντήσετε τα ερωτήματα. *107*
*11η συνεδρία: Α) Το 3 διαιρεί το 18; Β) Το 3 διαιρεί το 18*2800;* *111*

12η συνεδρία: Ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς. Διαιρεί και το άθροισμά τους; *117*
Β) ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ 121
Β1) Ποιες εικασίες κάνουν οι μαθητές σε σχέση με ιδιότητες και σχέσεις αριθμών και πώς τις διαμορφώνουν; *121*
Β2) Τι είδους επιχειρηματολογία και αποδεικτικά σχήματα χρησιμοποιούν; *130*
Β.2.1: Μελέτη είδους επιχειρηματολογίας και αποδεικτικών σχημάτων για τις εικασίες που οι ίδιοι οι μαθητές διαμόρφωσαν κι εξέφρασαν *131*
Β.2.2. Μελέτη της επιχειρηματολογίας που δόθηκε σε κάθε ερώτημα *133*
Β.2.3. Μελέτη του τρόπου που απέκρουσαν τις εικασίες των συμμαθητών τους και των ερωτημάτων *137*
Β.2.4. Είδη συλλογισμών που παρατηρήθηκαν στην επιχειρηματολογία των μαθητών *140*
Β3) Τι πληροφορίες μας δίνουν οι εικασίες και τρόποι επιχειρηματολογίας των μαθητών όσον αφορά στις γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών; *144*
Β4) Πως εξελίχθηκε η αποδεικτική δραστηριότητα των μαθητών κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων; *146*
Β.4.1. Συγχρονική εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας *146*
Β.4.2. Διαχρονική εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας *148*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 150

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ 153

ΕΠΙΛΟΓΟΣ 158

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 161

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 166

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αφορμή της παρούσας έρευνας ήταν οι προτάσεις των Blanton & Kaput (2005) για εισαγωγή ενός είδους πρώιμης άλγεβρας στο Δημοτικό σχολείο καθώς και του NCTM (2000 στο Knuth, 2002) που προτείνει την ενασχόληση των μαθητών με τις εικασίες, την επιχειρηματολογία κι απόδειξή τους, από τις μικρές βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επίσης, στην επιλογή του θέματος της έρευνάς μας, συνέβαλαν οι διαφορετικές απόψεις που έχουν ακαδημαϊκοί (Pedemonte, 2007, 2008; Duval, 1992-3; Hanna 2000) και εκπαιδευτικοί για την αξία του επιχειρήματος και της απόδειξης, αλλά και οι χαμηλές προσδοκίες για τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών τους (Bergqvist, 2005).

Έτσι θελήσαμε να ερευνήσουμε αν οι μαθητές διαμορφώνουν εικασίες σχετικά με ιδιότητες και σχέσεις των αριθμών και πώς αιτιολογούν αυτές ή άλλες πιθανές εικασίες που τους δίνονται. Θεωρήσαμε σκόπιμο να γίνει μία μελέτη περίπτωσης σε τρεις μαθητές Ε' και Στ' Δημοτικού, μέσω της μεθόδου του πειράματος σχεδιασμού (που περιλάμβανε συνολικά 12 συνεδρίες), όπου θα μπορούσαμε να ερευνήσουμε «εκ των έσω» και σε βάθος τα είδη των εικασιών των μαθητών μας, των συλλογισμών και επιχειρημάτων τους καθώς και τους παράγοντες που συμβάλλουν σε αυτά. Έτσι, μέσα από την εργασία, φανερώνονται κάποια είδη εικασιών που διαμορφώνουν οι μαθητές κυρίως δομικής γενίκευσης, αφελούς εμπειρισμού, αλλά και αναλογικής σκέψης. Ακόμη, φαίνεται πως οι μαθητές χρησιμοποιούν ποικίλα αποδεικτικά σχήματα (με βάση Balacheff, 1988), κι όχι αποκλειστικά μόνο ένα, τα οποία επηρεάζονται από τις συζητήσεις μεταγνωστικού περιεχομένου που γίνονταν. Επίσης, διαφαίνεται ο ρόλος που είχαν οι εμπειρικές δοκιμές για τους μαθητές και η συμβολή τους στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας και στην κατανόηση της απόδειξης.

Ως εργαλεία για τη συλλογή δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν η συμμετοχική παρατήρηση, η απομαγνητοφώνηση όλων των διαλόγων που έγιναν κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, καθώς και τα φύλλα εργασίας των μαθητών, ενώ η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε με την αναγνώριση των *κρίσιμων επεισοδίων* (critical events) και τη σύνθεση μιας πλοκής (story-line), που προτείνει η Maher (2004), σε συνδυασμό με ορισμένες αρχές της μεθόδου της Ποιοτικής (και Ποσοτικής) **Α*νάλυσης Περιεχομένου*** (content analysis).

Λέξεις κλειδιά: Εικασίες, επιχειρηματολογία, αποδεικτικά σχήματα, είδη συλλογισμών, δημοτικό σχολείο

ABSTRACT

The present study was inspired by the suggestions of Blanton & Kaput (2005) for embodying a kind of early algebra in elementary school education, as well as by NCTM's suggestion (2000 in Knuth, 2002) for students' enacting with conjectures, argumentation and proof, starting from the lower levels of education. Besides, in the selection of our subject, contributed the different views that academicians (Pedemonte, 2007, 2008; Duval, 1992-3; Hanna 2000) and mathematics educators have of the argument's and proof's worth, but also the low expectations they have for their students' proof schemes (Bergqvist, 2005).

So, we intended to study if students make conjectures about properties and relations of numbers, and how they reason about them or other conjectures they are given. We considered it as worthwhile, that we should do a case study with three students of 5th and 6th grade of elementary school, through the method of design experiment (that concluded 12 sessions totally), in which we could research 'from within' and in depth the kinds of our students' conjectures, their types of reasoning and arguments, as well as the factors that contribute in them. So, through our study, several kinds of conjectures students make, are made explicit, such as structural generalization's, naïve empiricism's, as well as analogical thinking's. Also, it seems that students use various proof schemes (mostly categorized by Balacheff, 1988), instead of one, and they are affected in their choice by the meta-cognitive conversations that were held. In addition, it is emerged the role of empirical tests for the students and their contribution in the development of argumentation and in understanding of proof.

As tools for data collection, we used the participatory observation, the transcripts of all the dialogues that grew during the didactical interventions, as well as the students' documents, while the results' analysis became with reference to *critical events* and the composition of a *story-line*, that Maher (2004) suggests, combined with some principles of Qualitative (and Quantitative) Content Analysis (Berelson 1952 in Prasad, 2008; Mayring, 2000).

Key Words:

Conjectures, argumentation, proof schemes, types of reasoning, elementary school

Εισαγωγή

Ένα ερώτημα που διχάζει αρκετούς εκπαιδευτικούς είναι αν θα πρέπει να νιώθουν ικανοποιημένοι από τους μαθητές όταν επιχειρηματολογούν ή όταν αποδεικνύουν. Είναι γεγονός πως ανάλογα με την άποψη που έχει ο εκπαιδευτικός για την επιχειρηματολογία και την απόδειξη, προωθεί ανάλογες πρακτικές και στα παιδιά. Η επιχειρηματολογία προκύπτει συνήθως μέσα από διερεύνηση και συζήτηση μες στη τάξη κι έτσι μπορεί να εκφραστεί και με απλή καθημερινή γλώσσα. Η απόδειξη έχει συγκεκριμένη μορφή και γλώσσα και δε χρειάζεται πάντοτε ο διάλογος, μπορεί να είναι και ατομική υπόθεση. Κατανοούμε πως είναι διαφορετικές οι δεξιότητες που απαιτούνται για την καθεμία.

Κάποιοι επιστήμονες, διαφοροποιούν την απόδειξη μέσω λογικής που δίνει έμφαση στην τυπικότητα και την απόδειξη μέσω επιχειρηματολογίας που περιλαμβάνει εξερευνήσεις. Με αυτό το είδος διαχωρισμού, φαίνεται πως και η επιχειρηματολογία δεν παύει να είναι ένα είδος απόδειξης. Η αυστηρή απόδειξη θεωρείται μάλιστα, κατά την άποψη πολλών, ξένη προς τους μαθητές, αφού δεν έχει καμία σύνδεση με την υπάρχουσα νοητική δομή και μπορεί να επιτευχθεί μόνο από μια μειονότητα. Πιστεύουν ότι η απόδειξη με επιχειρηματολογία ταιριάζει με το 'φυσιολογικό' μαθητή, επειδή περιλαμβάνει το επιχείρημα και είναι προσβάσιμο από μεγαλύτερο ποσοστό παιδιών. Μερικοί ακόμα εκφράζουν ότι η παραγωγική απόδειξη δε θα έπρεπε πια να διδάσκεται κι εστιάζουν όχι μόνο στο συλλογισμό (reasoning) αλλά και στην αιτιολόγηση (Hanna 2000). Θεωρούν ως πιο σημαντικό ρόλο της εκπαίδευσης, τη διερεύνηση και ανεπίσημη αιτιολόγηση, που κάνουν χρήση της διαίσθησης και που μπορούν να προσφέρουν μαθηματική ενόραση και τεχνική άνεση περισσότερη από την απόδειξη .

Υπάρχει όμως και η αντίθετη άποψη. Σε έρευνα που έκαναν οι Jaffe & Quinn (1993 στο Hanna 2000) εντόπισαν μία τάση εναντίωσης του να βασίζονται τα μαθηματικά σε διαισθητική επιχειρηματολογία χωρίς απόδειξη. Στην πρότασή τους, τα μαθηματικά αποτελέσματα που βασίζονται σε υποθετική διαισθητική επιχειρηματολογία ή σε εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων ελέγχου, τα αναφέρουν ως «θεωρητικά μαθηματικά», ενώ ως «αυστηρά μαθηματικά» θα αναφέρονται οι διαδικασίες όπου τα θεωρήματα αποδεικνύονται αυστηρά.

Το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), θέλοντας να πάρει θέση στα ερωτήματα αυτά που δημιουργήθηκαν, στο έργο του 'Standards' (1989 στο

Ball, 1993) προτείνει μεγαλύτερη έμφαση στην εξέταση των εικασιών, το σχηματισμό αντιπαραδειγμάτων και την κατασκευή κι εξέταση έγκυρων επιχειρημάτων, όπως και την ικανότητα να χρησιμοποιούνται αυτές οι τεχνικές στο περιεχόμενο επίλυσης ασυνήθιστων προβλημάτων. Ωστόσο, επειδή η έκδοση αυτή (NCTM, 1989 στο Ball, 1993) παραμέλησε την απόδειξη, η νέα έκδοση του NCTM 'Principles and Standards' (2000, στο Knuth, 2002) προσπαθώντας να αποκαταστήσει το γεγονός, προτείνει *ότι επιχειρηματολογία κι απόδειξη πρέπει να είναι μέρος του αναλυτικού προγράμματος σε όλες τις βαθμίδες, ακόμα κι από το νηπιαγωγείο*. Συγκεκριμένα συστήνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

- Να αναγνωρίζουν την επιχειρηματολογία και απόδειξη σαν βασικές όψεις των μαθηματικών.
- Να κάνουν και να ερευνούν μαθηματικές εικασίες
- Να αναπτύσσουν και να αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις
- Να διαλέγουν και να χρησιμοποιούν ποικίλους τύπους επιχειρήματος και μεθόδους απόδειξης.

Παρατηρούμε πως το NCTM μιλά για την απόδειξη και την επιχειρηματολογία ως μέρος του αναλυτικού προγράμματος σε όλες τις βαθμίδες, ακόμα και στο νηπιαγωγείο! Φαίνεται, πως τα νέα παιδιά σήμερα χρειάζεται να μάθουν ένα διαφορετικό είδος μαθηματικών, απ' ότι οι γονείς τους. Χρειάζεται να είναι έτοιμα για την άλγεβρα ***(algebra ready***). Οι Robert & Kaput (1999, στο Blanton & Kaput, 2005) υποστηρίζουν ότι λόγω των αυξανόμενων σύνθετων μαθηματικών του 21^{ου} αι., απαιτείται από τα παιδιά του δημοτικού σχολείου, μια εμπειρία πέρα από την αριθμητική και υπολογιστική ικανότητα, που να ασχολείται με πιο βαθιά δομή των μαθηματικών. Αυτού του είδους η εμπειρία στο Δημοτικό σχολείο θα ενσωματωθεί σε αυτό που πολλοί αναφέρουν ***πρώιμη άλγεβρα*** (Blanton & Kaput, 2005). Σκοπός αυτής είναι να εμβαθύνει στην κατανόηση της δομής και της γενικευσιμότητας των μαθηματικών, κι όχι να παρέχει μεμονωμένες εμπειρίες υπολογισμών.

Είναι εφικτός ένας τέτοιος στόχος; Σύμφωνα με άποψη του Vygotsky (1962 στο Blanton & Kaput, 2005), το παιδί μπορεί να χειριστεί μια εννοιολογική σκέψη προτού ακόμα είναι ενήμερο για τη φύση αυτών των χειρισμών. Το να μάθει να σκέφτεται με μαθηματικό τρόπο περιλαμβάνει την απόκτηση εργαλείων ως σημεία διαμεσολάβησης. Τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν την αίσθηση των συμβόλων, όταν

έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν συμβολικά συστήματα με τρόπους που έχουν νόημα (Blanton & Kaput, 2005).

Κάτι ακόμα στο οποίο δίνει έμφαση το NCTM είναι ότι οι μαθητές πρέπει να διαμορφώνουν και να δικαιολογούν εικασίες. Όπως θα δούμε και στην παρούσα εργασία, οι εικασίες είναι το έναυσμα ή αλλιώς το ερέθισμα που προκαλεί τους μαθητές να δικαιολογήσουν την άποψή τους, να επιχειρηματολογήσουν ή και να αποδείξουν στο τέλος, ενώ επίσης είναι το μέσο που δείχνει τις μαθηματικές πεποιθήσεις των μαθητών μας.

Κάτω από αυτό το πλαίσιο, η παρούσα εργασία μελετά μέσω πειράματος σχεδιασμού (12 παρεμβάσεων συνολικά) τις εικασίες που διαμορφώνουν κάποιοι μαθητές Ε΄και ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού όταν διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις αριθμών, καθώς και το είδος της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσουν. Εστιάζει επίσης στους παράγοντες που συμβάλλουν στη διαμόρφωση των εικασιών, ενώ ακόμη παρατηρεί πώς εξελίσσονται κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων τα αποδεικτικά σχήματα που χρησιμοποιούν. Η μελέτη του παραπάνω θέματος έγινε μέσα από την ανάλυση των συζητήσεων των μαθητών πάνω σε προβλήματα που σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εικασίες και η σημασία τους στη πράξη

Ο καθένας από εμάς κάνει υποθέσεις για διάφορα θέματα, σχηματίζει μια γνώμη και πιθανολογεί πως κάτι μπορεί να ισχύει. Το ίδιο συμβαίνει και στη μαθηματική διαδικασία κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος ή απόδειξης μιας πρότασης. Σκεπτόμαστε ότι κάτι μπορεί να ισχύει αλλά δεν είμαστε απόλυτα σίγουροι. Ακόμα και στην επιστήμη των μαθηματικών, επισήμως κάποιες υποθέσεις εικάζονται ότι ισχύουν αλλά δεν έχουν αποδειχτεί ακόμη, παρά τις επίπονες προσπάθειες των μαθηματικών. Τα ερωτήματα που δεν έχουν απαντηθεί ακόμα, παραμένουν εικασίες γι' αυτό και τα ονομάζουμε έτσι (Πούλος 2009). Διάσημη είναι η αποκαλουμένη εικασία του Goldbach, η οποία διατυπώνεται ως εξής: «κάθε άρτιος αριθμός ν με ν $\geq$ 4 γράφεται ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών». Πράγματι ισχύει 4=2+2, 20=17+3, 32=29+3, 100=97+3, κ.λ.π. Κανείς όμως μαθηματικός έως σήμερα δεν έχει αποδείξει ότι αυτό συμβαίνει με κάθε άρτιο αριθμό (Πούλος 2009). Επίσης, συγγενής προς την εικασία του Goldbach είναι η ακόλουθη: «κάθε άρτιος, μεγαλύτερος του 2, είναι διαφορά δυο πρώτων αριθμών». Για παράδειγμα, 8=11-3, 14=17-3.

Η Pedemonte (2007) ορίζει την εικασία σαν μια τριπλέτα που αποτελείται από: μια πρόταση-δήλωση, μια επιχειρηματολογία και ένα σύστημα πεποιθήσεων. Από τον παραπάνω ορισμό της εικασίας βλέπουμε ότι βασίζεται σε ένα σύστημα πεποιθήσεων καθώς και σε μια επιχειρηματολογία που οδηγεί σε αυτή. Όπως θα δούμε παρακάτω, η επιχειρηματολογία μπορεί να προηγείται ή να έπεται της εικασίας. Επίσης, ο ορισμός αυτός της Pedemonte, όπως ισχυρίζεται και η ίδια, έρχεται σε αντιστοιχία με τον ορισμό του θεωρήματος από τους Mariotti et al. (1997, στο Pedemonte 2007) που όρισαν το θεώρημα έτσι ώστε να αποτελείται από 3 στοιχεία: μια δήλωση, μια απόδειξη και μια μαθηματική θεωρία. Το θεώρημα υπάρχει επειδή υπάρχει μια μαθηματική θεωρία που επιτρέπει την κατασκευή μιας απόδειξης και δίνει αξιοπιστία στη δήλωση (βλ. σύστημα αναφοράς). Μήπως άραγε η δήλωση προτού αποδειχτεί δεν ήταν μια εικασία; Και βέβαια ναι. Έτσι, κατανοούμε ότι μια εικασία επεξηγείται από την επιχειρηματολογία, αλλά για να μετασχηματιστεί η εικασία σε πρόταση χρειάζεται μαθηματική απόδειξη.

Ο Πούλος συνιστά οι εικασίες να αποτελέσουν αντικείμενο της διδακτικής πράξης, ακόμα και οι άλυτες. Οι εικασίες, έχει παρατηρηθεί, πως λόγω του

προσωρινού αναπόδεικτου τους, ελκύουν την προσοχή των μαθητών και είναι ένα ερέθισμα για να προκληθεί ενδιαφέρον για τα μαθηματικά προβλήματα και τις διαδικασίες (Πούλος 2009). Ο Lakatos (στο Πούλος 2009) θεωρεί ότι τα μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με την μονότονη προσθήκη αναμφισβήτητων θεωρημάτων, αλλά με τη βελτίωση εικασιών, με τη δοκιμή και την κριτική, με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών. Υπογραμμίζει το γεγονός ότι οι εικασίες προηγούνται των αποδείξεων στην ευρετικη διαδοχή, κάτι που ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους μαθηματικούς και σημειώνει τη ρήση του Polya ότι «πρέπει να μαντέψεις ένα μαθηματικό θεώρημα πριν το αποδείξεις».

Ακόμα και σε μικρότερη ηλικία όμως, οι μαθητές έρχονται στις τάξεις με μαθηματικές υποθέσεις που οι περισσότερες ίσως είναι λαθεμένες. Αυτές οι υποθέσεις επηρεάζουν το συλλογισμό τους (Tall & Vinner, 1981 στο Maher & Weber 2009). Η αποτελεσματική διδασκαλία απαιτεί το να κάνεις φανερά τα νοήματα των μαθητών, ώστε να έχεις την ευκαιρία να χειριστείς τις λαθεμένες πεποιθήσεις τους ευθέως. Αν οι μαθητές δίνουν διαφορετικές απαντήσεις στο ίδιο μαθηματικό πρόβλημα, θα παρακινούνται με φυσικό τρόπο να ξανασκεφτούν τις υποθέσεις τους και να τις ερευνήσουν γιατί οδηγήθηκαν σε κάποια προφανή αντίφαση. Καθώς οι μαθητές συζητούν, εξηγούν και επιχειρηματολογούν για τις ιδέες τους γίνονται γνωστά βέβαια γνωρίσματα των εσωτερικών γνωστικών αναπαραστάσεων τους (Maher 2005). Τέλος, αποτελέσματα ερευνών των Blanton, et al., (2003) έδειξαν ότι μαθητές που συμμετέχουν σε συζητήσεις όλης της τάξης μεταγνωστικού επιπέδου, έχουν όφελος στην ικανότητα κατασκευής τους μαθηματικών αποδείξεων. Οι μαθητές μπορούν να εσωτερικεύουν τη δημόσια επιχειρηματολογία με τρόπους που διευκολύνουν την προσωπική τους κατασκευή απόδειξης, αν η ενίσχυση (scaffolding) σχεδιαστεί κατάλληλα για να το υποστηρίξει.

Άρα είδαμε ότι οι εικασίες των παιδιών, πρώτον, είναι ιδέες που προκύπτουν φυσιολογικά από τις πεποιθήσεις τους και τα γνωστικά τους σχήματα και δεύτερον, μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε ως μέσο προσέλκυσης ενδιαφέροντος, ως μέσο εξωτερίκευσης των εσωτερικών αναπαραστάσεων αλλά και ως μέσο διδασκαλίας του αποδεικτικού μηχανισμού.

Μορφές αιτιολόγησης

Ο Duval (1992-3 στο Dreyfus 1999) κάνει μία επιστημολογική και γνωστική ανάλυση και διακρίνει **τρεις μορφές αιτιολόγησης**: την ***επεξήγηση***, το ***επιχείρημα*** και την ***απόδειξη***. Δύο κριτήρια καθορίζουν την αποδοχή των λόγων που δίνονται για να αιτιολογήσουν έναν ισχυρισμό : η συνάφεια τους και η δύναμη τους. Σύμφωνα με τον Duval η κύρια λειτουργία μιας επεξήγησης είναι περιγραφική. Ο σκοπός της είναι να εξηγήσει τους λόγους, να αιτιολογήσει. Τα επιχειρήματα και οι αποδείξεις από την άλλη πλευρά, εξετάζουν τη δύναμη αυτών των αιτιολογήσεων και συγκεκριμένα αν δεν υπάρχει κάποια αντίφαση. Η λειτουργία τους είναι να καθορίσουν και πιθανόν να αλλάξουν την αξία της αλήθειας ενός ισχυρισμού.

Ο Duval συνεχίζει το διαχωρισμό μεταξύ επιχειρημάτων και αποδείξεων λέγοντας ότι: Στα *επιχειρήματα, το σημασιολογικό περιεχόμενο των αιτιολογήσεων είναι σημαντικό* και καθορίζει την επιστημολογική αξία του ισχυρισμού. Οι αποδείξεις από την άλλη πλευρά είναι απομακρυσμένες από το περιεχόμενο. Πρέπει να είναι αξιόπιστες παρά συναφείς. Το κύρος μιας απόδειξης, παρά το περιεχόμενο καθορίζει την επιστημολογική της αξία. Κατά συνέπεια, η γλώσσα των επιχειρημάτων είναι πιο φυσική από αυτή των αποδείξεων ενώ ο διάλογος που περιέχει επιχειρήματα έχει συνοχή στο θέμα. Παρόλα αυτά, ο Duval δηλώνει ότι δεν υπάρχουν κριτήρια που οριστικά διαχωρίζουν τα επιχειρήματα από άλλες επεξηγήσεις ή αποδείξεις. Στην καλύτερη των περιπτώσεων μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει χαρακτηριστικά όπως η συνοχή μιας ομιλίας.

Η Sierpinska (1994 στο Dreyfus 1999) ανέλυσε τις επιστημολογικές διαφορές μεταξύ επεξήγησης και απόδειξης υπό το φως των ρόλων τους στη διαδικασία κατανόησης των μαθηματικών. Η ανάλυσή της, βασισμένη στην εργασία του φιλοσόφου Ajdukiewicz, αναγνωρίζει μια στενή σχέση ανάμεσα στην διαδικασία της απόδειξης και της εξήγησης. Ο λόγος είναι ότι και με τις δύο διαδικασίες απαντούμε στην ερώτηση «γιατί». Αναγνωρίζει όμως μερικές σημαντικές διαφορές. Η πρώτη είναι ότι *η απόδειξη έχει σκοπό να αυξήσει το βαθμό της σταθερότητας* με την οποία αποδεχόμαστε ένα γεγονός σαν βάση για την κατανόησή μας, ενώ η επεξήγηση δεν υπηρετεί σαν βάση για μια πιο θετική αποδοχή μιας πρότασης. Η δεύτερη διαφορά είναι ότι *οι επεξηγήσεις χρησιμοποιούν παραδείγματα, μοντέλα, οπτικοποιήσεις και παρόμοια μέσα ώστε να εκφράσουν κάτι για τα μαθηματικά.* Μπορεί, για παράδειγμα, να περιλαμβάνει τους λόγους για τους οποίους ένα γεγονός είναι σημαντικό στα

μαθηματικά, κάτι που δεν ανήκει στο πεδίο της απόδειξης. Ομοίως, μία απόδειξη μπορεί να ζητάει μια εξήγηση που θα υπογραμμίσει την κεντρική ιδέα της απόδειξης. Η απόδειξη και η επεξήγηση είναι επομένως συνυφασμένες στη διαδικασία της κατανόησης.

Τελικά, οι διαφορές μεταξύ των κατηγοριών δεν είναι μεγάλες, αλλά χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή για την αποσαφήνισή τους. Προκύπτουν όμως δύο θέματα από τα παραπάνω. Σαν επιστήμονες της ς πρέπει να οξύνουμε την ενημερότητά μας για τις διαφορές μεταξύ εξήγησης, επιχειρήματος και απόδειξης και πρέπει να προβληματιστούμε σχετικά με το τι μπορούμε και τι πρέπει να περιμένουμε από μαθητές διαφορετικής ηλικίας, επιπέδου και διδασκαλίας. Σαν δάσκαλοι, πρέπει να προσπαθήσουμε να κάνουμε στους μαθητές κατανοητό τι περιμένουμε από αυτούς. Τι περιμένουμε δηλαδή όταν τους ζητάμε να εξηγήσουν, να αιτιολογήσουν, να αποδείξουν και να δείξουν ότι. Η φράση «να δείξεις» σημαίνει «να αποδείξεις με τυπικό τρόπο» ή «να χρησιμοποιήσεις ένα παράδειγμα για να το δείξεις»; Η λέξη «εξήγησε» σημαίνει να εξηγήσεις σε ένα συμμαθητή σου ή να εξηγήσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να πείσεις το δάσκαλο ότι κατανοείς το συλλογισμό πίσω από τον ισχυρισμό σου;

Ο ρόλος που έχουν οι νόρμες της τάξης στην εξήγηση και δικαιολόγηση

Οι νόρμες της τάξης που σχετίζονται με τη μαθηματική εξήγηση και αιτιολόγηση είναι κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές στη φύση τους. Η ***νόρμα*** είναι μια κοινωνιολογική κατασκευή και αναφέρεται σε αυτά που κατανοούνται ή στις αποσαφηνίσεις που θεωρούνται δεοντολογικές/κανονιστικές ή ως κοινές (taken-as-shared) για την ομάδα (Yackel 2001). Επομένως η νόρμα δεν είναι ατομική αλλά συλλογική έννοια. Ένας τρόπος να περιγράψει κανείς νόρμες, στη περίπτωσή μας νόρμες των μαθητών, είναι να περιγράψει προσδοκίες και υποχρεώσεις που σχηματίζονται στη τάξη. Ως ***κοινωνικομαθηματικές νόρμες*** θεωρούνται οι κανονιστικές όψεις αλληλεπίδρασης που ισχύουν ειδικά στα μαθηματικά (Yackel & Cobb, 1996 στο Yackel 2001). Η δεοντολογική κατανόηση του τι θεωρείται σαν μαθηματικά διαφορετικό, εξελιγμένο, αποτελεσματικό και ελκυστικό είναι παραδείγματα κοινωνικομαθηματικών νορμών. Ομοίως, το τι θεωρείται ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση και αιτιολόγηση είναι μια κοινωνικομαθηματική νόρμα. Η

απόσταση μεταξύ κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών είναι ανεπαίσθητη. Για παράδειγμα, η κατανόηση ότι οι μαθητές αναμένονται να εξηγήσουν τις λύσεις τους είναι μια κοινωνική νόρμα, ενώ η κατανόηση του τι μετρά ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση είναι κοινωνικομαθηματική νόρμα.

Σύμφωνα με τη συμβολική αλληλεπίδραση (Blumer, 1969 στο Yackel 2001), η σημασία προκύπτει μέσα από την αλληλεπίδραση. Αντίστοιχα, η σημασία μιας αποδεκτής μαθηματικής εξήγησης δεν είναι κάτι που μπορεί να περιγραφεί ώστε οι μαθητές να το εφαρμόσουν. Αντιθέτως, σχηματίζεται μέσα και μέσω των αλληλεπιδράσεων των συμμετεχόντων στην τάξη. Άμεσες και έμμεσες διαπραγματεύσεις συμβάλλουν στην ανάπτυξη αυτών των νοημάτων (Yackel 2001).

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον Rav, η απόδειξη είναι ο τρόπος που χρησιμοποιούν οι καθηγητές μαθηματικών για να αιτιολογήσουν για μια προτεινόμενη λύση ενός προβλήματος ότι είναι πράγματι μία λύση και να δείξουν το μαθηματικό μηχανισμό για την επίλυση προβλημάτων (Rav, 1999, p. 13 στο Hanna 2000). Ο Rav μας διευκρινίζει ότι οι μαθηματικές αποδείξεις περιλαμβάνουν σειρές ισχυρισμών όπου το πέρασμα από τον ένα ισχυρισμό στον άλλο είναι γενικά μη τυπικό:

«μία απόδειξη στα κλασσικά μαθηματικά ορίζεται από μια σειρά ισχυρισμών, όπου το πέρασμα από έναν ισχυρισμό σε έναν άλλο βασίζεται σε επερχόμενες συνέπειες με βάση τα νοήματα ή μέσω αποδεκτού συμβολικού χειρισμού, όχι αναφέροντας κανόνες προκαθορισμένης (predicate) λογικής» (Rav 1999 στο Knipping 2004).

Ο Rav (στο Hanna & Barbeau 2008) κάνει ένα διαχωρισμό μεταξύ δύο ειδών απόδειξης. Το πρώτο είδος το αποκαλεί ***παραγωγή*** (‘derivation’ εννοεί μάλλον παραγωγικό συλλογισμό), το οποίο είναι μια επίσημη απόδειξη, που σημαίνει ένα «συντακτικό αντικείμενο από ένα επίσημο σύστημα». Τέτοια απόδειξη είναι η συντακτική εφαρμογή κανόνων ενός λογικού συμπεράσματος. Μία μηχανή θα μπορούσε να επαληθεύσει τέτοιους παραγωγικούς συλλογισμούς χωρίς να στηριχθεί στη σημασία των συντακτικών τύπων. Το δεύτερο είδος της απόδειξης είναι η ‘***εννοιολογική απόδειξη***’ (conceptual proof) με την οποία ο Rav εννοεί μια μη τυπική απόδειξη «του συνηθισμένου μαθηματικού διαλόγου, που έχει αναλλοίωτο σημασιολογικό περιεχόμενο». Τέτοια απόδειξη αποτελείται από ένα αυστηρό

επιχείρημα, αποδεκτό στους μαθηματικούς, αλλά κάνει έκκληση στο νόημα των εννοιών και των τύπων που χρησιμοποιούνται. Ο Rav διευκρινίζει ότι όταν χρησιμοποιεί τον όρο 'συνήθεις μαθηματικές αποδείξεις' εννοεί 'εννοιολογικές αποδείξεις'. Κι όταν λέει ότι οι αποδείξεις είναι οι κομιστές της μαθηματικής γνώσης, εννοεί τις εννοιολογικές αποδείξεις. Οι συνήθεις μαθηματικές αποδείξεις, παρά οι επίσημοι παραγωγικοί συλλογισμοί, είναι αυτές που οι μαθητές αντιμετωπίζουν σε όλα τα επίπεδα, κι έτσι η εργασία του Rav έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Hanna, Barbeau 2008).

Η Douek (1998) από τη δική της μεριά, μιλά για τη διαφορετική έννοια της απόδειξης σαν διαδικασία (proving) και της απόδειξης σαν προϊόν (proof). Συχνά η διδασκαλία των μαθηματικών βασίζεται στην παρουσίαση της μαθηματικής γνώσης σαν μία επισημοποιημένη θεωρία που βασίζεται σε αυστηρές αποδείξεις. Σε αυτή τη περίπτωση το κύρος καλλιεργείται μέσα από τη μορφή της παρουσίασης (Hanna 1989 στο Douek 1998). Με αυτόν τον τρόπο, μας λέει η Douek (1998), το σχολείο επιβάλλει τη μορφή της παρουσίασης πάνω από τη σκέψη και απαιτεί μία διαδικασία σκέψης που μοντελοποιείται από τη μορφή της παρουσίασης (περιορίζοντας κάθε δυναμισμό). Αυτή η ανάλυση μπορεί να εξηγήσει το ότι δίνεται αξία στην ιδέα της γραμμικότητας στη μαθηματική σκέψη σαν αναγκαία και χαρακτηριστική άποψη των μαθηματικών. Υπό αυτή τη σκοπιά, βλέπει κανείς την απόδειξη και την επιχειρηματολογία σαν εντελώς διαφορετικές και δε λαμβάνει υπόψη του τη συνθετότητα της διαμόρφωσης εικασιών και της αποδεικτικής διαδικασίας.

Ο ρόλος της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση

Ο De Villiers (1999 στο Harel & Sowder 2007) βασίστηκε σε εργασίες άλλων ακαδημαϊκών, συγκεκριμένα των Hanna (1990), Balacheff (1988), Bell(1976) & Hersh (1990), για να μελετήσει σημαντικά ερωτήματα για το ρόλο της απόδειξης. Ειδικότερα μελέτησε τι είδους λειτουργίες έχει η απόδειξη στα μαθηματικά και πώς μπορούν αυτές να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά μες στην τάξη για να κάνουν την απόδειξη μια διαδικασία με νόημα. Υποστηρίζει λοιπόν ότι η απόδειξη έχει έξι ρόλους[1]:

Α) Την επαλήθευση

[1] Ο De Villiers σε σχετική εργασία του/της το 1990 παρουσίασε τις 5 από τις παραπάνω λειτουργίες της απόδειξης. Με την εργασία του/της το 1999, προσθέτει τη λειτουργία της διαλεκτικής πρόκλησης

Β) Την επεξήγηση

Γ) Την ανακάλυψη

Δ) Την συστηματοποίηση

Ε) Την επικοινωνία

Στ) Τη διαλεκτική πρόκληση

Α) Η επαλήθευση ή εξακρίβωση αναφέρεται στο ρόλο της απόδειξης σαν μέσο επίδειξης της αλήθειας ενός ισχυρισμού, σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο σύνολο κανόνων λογικής και προϋποθέσεων –αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα.

Β) Η επεξήγηση είναι διαφορετική από την επαλήθευση στο ότι δεν αρκεί σε έναν μαθηματικό να γνωρίζει μόνο ότι μια πρόταση είναι αληθής. Ψάχνει πιο βαθιά γιατί ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Γ) Η ανακάλυψη αναφέρεται σε καταστάσεις όπου μέσα από τη διαδικασία της απόδειξης, νέα αποτελέσματα μπορεί να ανακαλυφθούν. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να συνειδητοποιήσει ότι μπορεί να γενικεύσει την πρότασή του σε ευρύτερη κατηγορία περιπτώσεων. Ή μπορεί να ανακαλύψει αντιπαραδείγματα στον ισχυρισμό, τα οποία θα οδηγήσουν στην τελειοποίηση του ισχυρισμού, με το να προσθέσει τους απαραίτητους περιορισμούς που θα εξαλείψουν τα αντιπαραδείγματα.

Δ) Η συστηματοποίηση αναφέρεται στην παρουσίαση επαληθεύσεων σε οργανωμένη μορφή, όπου κάθε αποτέλεσμα επέρχεται από τα προηγούμενα αποτελέσματα, ορισμούς, αξιώματα και βασικές έννοιες. Και αυτό είναι περίπτωση του αξιωματικού αποδεικτικού σχήματος. Η διαφορά μεταξύ επαλήθευσης και συστηματοποίησης είναι ο βαθμός τυπικότητας.

Ε) Η επικοινωνία αναφέρεται στην κοινωνική αλληλεπίδραση για το νόημα, την εγκυρότητα και τη σημασία της μαθηματικής γνώσης που μας δίνει η απόδειξη που παράχθηκε. Η επικοινωνία μπορεί να θεωρηθεί σαν το περιεχόμενο των δύο διαδικασιών που ορίζουν την απόδειξη: την επιβεβαίωση (ascertaining) και τη διαβεβαίωση (persuading). Με την πρώτη διαδικασία πείθει κανείς τον εαυτό του, ενώ με τη δεύτερη πείθει και τους άλλους.

Στ) Η διαλεκτική πρόκληση (intellectual challenge) αναφέρεται στη νοητική κατάσταση της αυτό-συνειδητοποίησης και εκπλήρωσης που μπορεί κανείς να λάβει από την κατασκευή μιας απόδειξης.

Η Hanna (2000) προσθέτει μερικές ακόμα λειτουργίες της απόδειξης που είναι οι εξής:

- κατασκευή εμπειρικής θεωρίας
- διερεύνηση της σημασίας ενός ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης
- η ενσωμάτωση ενός οικείου γεγονότος σε ένα νέο πλαίσιο κι επομένως η όψη από νέα οπτική.

Όλες οι προαναφερθείσες λειτουργίες δεν σχετίζονται στον ίδιο βαθμό με τη μάθηση των μαθηματικών και φυσικά δε θα πρέπει να δίνεται το ίδιο βάρος στη διδασκαλία (De Villiers, 1990; Hersh, 1993 στο Hanna 2000). Η Hanna (2000) θεωρεί ότι μία από τις σημαντικές δραστηριότητές μας σαν δάσκαλοι των μαθηματικών είναι να κατανοήσουμε το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία. Στην τάξη, ο βασικός ρόλος της απόδειξης είναι η προώθηση της μαθηματικής κατανόησης και επομένως πρόκληση μας είναι να βρούμε πιο αποτελεσματικούς τρόπους να χρησιμοποιούμε την απόδειξη γι' αυτό το σκοπό. Οι μαθηματικοί γνωρίζουν ότι η μαθηματική κατανόηση είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Γνωρίζουν όμως ότι *μια απόδειξη είναι μεγαλύτερης αξίας όταν οδηγεί στην κατανόηση*, αφού βοηθά στο να σκεφτεί κανείς πιο καθαρά και αποτελεσματικά για τα μαθηματικά (Rav, 1999; Manin, 1992, 1998; Thurston, 1994 στο Hanna 2000). Οι μαθηματικοί τότε βλέπουν τις αποδείξεις όχι μόνο σαν συντακτικούς σχηματισμούς, αλλά, τις βλέπουν και σαν εννοιολογικές, βάζοντας τη τεχνική προσέγγιση σε δεύτερη θέση.

Η Hanna (2000) είναι υπέρ της άποψης οι μαθητές να διδάσκονται τη φύση και τις αρχές του παραγωγικού συλλογισμού έτσι ώστε να είναι σε θέση να πουν πότε ένα αποτέλεσμα έχει επιτευχθεί ή όχι. Αλλά τονίζει ότι η απόδειξη μπορεί να προσφέρει τη μέγιστη συμβολή στην τάξη μόνο όταν ο δάσκαλος είναι ικανός να χρησιμοποιήσει αποδείξεις που ενισχύουν την κατανόηση. Να δει κάποιος όχι μόνο ότι είναι αλήθεια αλλά και γιατί είναι αλήθεια. Μια τέτοια απόδειξη είναι πιο πειστική και το πιο πιθανό είναι να οδηγήσει και σε άλλες ανακαλύψεις. Φυσικά δε μπορεί κανείς να βρίσκει πάντα επεξηγηματική απόδειξη για κάθε θεώρημα. Κάποιες αποδείξεις είναι από τη φύση τους πιο επεξηγηματικές από άλλες. Μια επεξηγηματική απόδειξη κάνει αναφορά σε μια χαρακτηριστική ιδιότητα μιας οντότητας ή δομής που παρατηρείται στο θεώρημα (Steiner 1978 στο Hanna 2000).

Εκτός όμως το σπουδαίο επεξηγηματικό ρόλο της απόδειξης οι Hanna & Barbeau (2008) εξέτασαν τις κεντρικές ιδέες του Rav στην απόδειξη και μιλούν για την ***απόδειξη ως κομιστή της μαθηματικής γνώσης.*** Με το χαρακτηρισμό αυτό εννοούν ότι οι αποδείξεις μεταφέρουν σημαντικά στοιχεία των μαθηματικών όπως στρατηγικές

και μέθοδοι, κι έτσι «οι αποδείξεις παρά τα θεωρήματα είναι οι κομιστές της μαθηματικής γνώσης».

Η κεντρική θέση του Rav (Hanna & Barbeau, 2008) είναι ότι «η ουσία των μαθηματικών εδρεύει στην εφεύρεση μεθόδων, εργαλείων, στρατηγικών και εννοιών για την επίλυση προβλημάτων». Από αυτή τη θέση ο Rav συμπεραίνει ότι οι αποδείξεις πρέπει να είναι το επίκεντρο του μαθηματικού ενδιαφέροντος, επειδή οι αποδείξεις είναι αυτές που ενσωματώνουν τέτοιες μεθόδους, εργαλεία, στρατηγικές και έννοιες κι επομένως είναι οι κομιστές της μαθηματικής γνώσης.

Οι μαθηματικοί, οι φιλόσοφοι και οι καθηγητές των μαθηματικών συμφωνούν ότι οι αποδείξεις είναι κεντρικές στα μαθηματικά, κυρίως επειδή μία απόδειξη καθιερώνει την αλήθεια ενός μαθηματικού ισχυρισμού. Με βάση την άποψη του Rav όμως, μία απόδειξη δεν έχει αξία μόνο επειδή δείχνει ένα αποτέλεσμα, αλλά επειδή μπορεί να αναδείξει νέες μεθόδους, εργαλεία, στρατηγικές και έννοιες που είναι ευρύτερης εφαρμοσιμότητας στα μαθηματικά κι ανοίγουν νέους μαθηματικούς ορίζοντες. Πράγματι, ο Rav πιστεύει ότι, αν ο μόνος σκοπός της απόδειξης ήταν να εξωθήσει την αποδοχή ενός μαθηματικού θεωρήματος, τότε οι μαθηματικοί θα ήταν ευχαριστημένοι αν είχαν μια μηχανή που θα απαντούσε ‘ναι’ ή ‘όχι’ σε κάθε πρόταση που μπορούσαν να φανταστούν. Αυτό βέβαια είναι ένα νοητικό πείραμα. Δεν ισχυρίζεται ότι τέτοια μηχανή μπορεί να υπάρξει. Αυτό που θέλει να πει είναι ότι ακόμα κι αν υπήρχε μια τέτοια μηχανή, οι μαθηματικοί δεν θα ήταν ευχαριστημένοι, επειδή, το να βασιστούν σε μια μηχανή, κάνοντας τις αποδείξεις μη αναγκαίες, θα εμπόδιζε την ανάπτυξη των μαθηματικών (Hanna & Barbeau, 2008).

Στο άρθρο των Hanna & Barbeau (2008) φαίνεται ότι την άποψη του Rav ενισχύουν οι Zeilberger, et al. (1992). Οι Zeilberger, et al. λένε ότι «η αξία της απόδειξης μιας εικασίας θα αξιολογηθεί, όχι από την εξυπνάδα και την κομψότητά της, ούτε ακόμα από την επεξηγηματική της δύναμη, αλλά από το βαθμό στο οποίο διευρύνει την εργαλειοθήκη μας». Ο Dawson (2006, στο Hanna & Barbeau, 2008) δείχνει με την ανάλυσή του ότι υπάρχουν οκτώ λόγοι για τους οποίους οι μαθηματικοί ψάχνουν νέες αποδείξεις για θεωρήματα που έχουν ήδη αποδεχτεί. Μεταξύ αυτών είναι και οι εξής:

- Να βρουν πιο απλό συλλογισμό ή πιο ευκρινή από τις προηγούμενες αποδείξεις
- Να διευρύνουν το αποτέλεσμα ή να το γενικεύσουν σε άλλα περιεχόμενα
- Να ανακαλύψουν νέα πορεία

- Ανησυχούν για την καθαρότητα της μεθοδολογίας
- Να δείξουν τη δύναμη των διαφορετικών μεθοδολογιών

Παρατηρούμε ότι οι προαναφερόμενοι λόγοι έχουν σχέση με τις μεθόδους. Ο Gorfield (2003) συμφωνεί επίσης ότι «αυτό που ψάχνουν οι μαθηματικοί από τις αποδείξεις του ενός και του άλλου, είναι νέες έννοιες, τεχνικές και ερμηνείες».

Ο ρόλος της διερεύνησης και των εμπειρικών δοκιμών στην απόδειξη- ο ρόλος των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων

Κάθε ειδική περίπτωση για την οποία ισχύει μια μαθηματική πρόταση ονομάζεται ***παράδειγμα*** της ισχύος ή της ορθότητας αυτής της πρότασης (Πούλος 2009). Ο Πούλος μας λέει πως μία πρόταση που ισχύει για όλα τα παραδείγματα που μπορεί αυτή να περιλάβει, ονομάζεται θεώρημα. Έτσι, ουσιαστικά το έργο ενός μαθηματικού, όταν ψάχνει να βρει την απόδειξη μιας πρότασης, είναι να βρει επιχειρήματα για να πείσει ότι η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει για όλα τα παραδείγματα που αυτή περιλαμβάνει. Το σύνολο των παραδειγμάτων ισχύος μιας πρότασης διαμορφώνει το πεδίο εγκυρότητάς της.

Κάτω από αυτό το σκεπτικό προφανώς και οι μαθητές μας, όταν θέλουν να δουν αν μια εικασία τους ισχύει, το πρώτο πράγμα που σκέφτονται να κάνουν είναι εμπειρικές δοκιμές για να βρουν παραδείγματα ισχύος της πρότασής τους. Με τη διαδικασία αυτή, πολλές φορές οι μαθητές οδηγούνται κατόπιν αρκετών επιτυχών δοκιμών, στο συμπέρασμα ότι η εικασία τους είναι σωστή. Η διαδικασία ονομάζεται γενίκευση. Αν στηριχθεί μόνο στο πλήθος των επιτυχών εμπειρικών δοκιμών τότε μιλάμε για ***εμπειρική γενίκευση*** (Zazkis et al., 2007).

Είναι γνωστό ότι η απόδειξη της ορθότητας μιας μαθηματικής σχέσης δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη μόνο από τη δοκιμή κάποιων περιπτώσεων. Μόνο όταν πρόκειται για μια υπαρκτική πρόταση, ακόμη κι ένα υποστηρικτικό παράδειγμα είναι αρκετό να αποδείξει την πρόταση. Ωστόσο, για μια καθολική πρόταση, παρ' ότι οι δοκιμές- έλεγχοι της ισχύος δεν την αποδεικνύουν, έχουν μια χρησιμότητα, διότι μέσω αυτών την κατανοούμε καλύτερα, ελέγχουμε τα όρια της εγκυρότητάς της κλπ. (Πούλος 2009) Αυτό εξηγεί και το ότι οι μαθητές, παρόλο που τους έχει δείξει κάποιος μια απόδειξη ενός θεωρήματος, και παρόλο που λένε ότι την έχουν κατανοήσει, πολύ συχνά ζητάνε να κάνουν εμπειρικές δοκιμές (Fischbein,1982 στο Hanna 2000). Από

μια πτωχή μαθηματική άποψη, τέτοια ενέργεια φαίνεται αδικαιολόγητη και οι δάσκαλοι συνήθως το λαμβάνουν ως ένδειξη ότι οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν πραγματικά τι είναι μια μαθηματική απόδειξη. Από την άποψη ενός ερευνητή όμως, αυτό φαίνεται απόλυτα φυσιολογικό. Κανένας Φυσικός για παράδειγμα, δε θα δεχόταν ένα γεγονός ως αληθές μόνο απ' τη βάση ενός παραγωγικού συλλογισμού. Επομένως η θεώρηση της μαθηματικής απόδειξης στις πειραματικές επιστήμες μπορεί να δώσει φως στο πώς βλέπουν οι μαθητές την απόδειξη.

Ακόμη, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο (βλ. δομημένη επιχειρηματολογία) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις επιτυχείς εμπειρικές δοκιμές ώστε να παρατηρήσουμε τη δομή τους και να καταλήξουμε σε ***δομική ή θεωρητική γενίκευση*** (Zazkis et al., 2007) που διαφέρει από την εμπειρική, καθώς αναγνωρίζει βασικές μεταβλητές από πρωτότυπα και είναι αφαιρετική διαδικασία. Οι μαθητές έχουν δυσκολία στο να εκφράσουν μία δομική γενίκευση. Τα παραδείγματα που δημιουργούν μια στροφή στην επίλυση προβλήματος ή αλλιώς βοηθούν να επιτευχθεί ***εννοιολογική αλλαγή*** (Vosniadou & Verschaffel 2004; Tirosh & Tsamir 2004) ονομάζονται ***παραδείγματα στροφής (pivotal examples***) σύμφωνα με τους Zazkis & Chernoff (2008). Όταν τα παραδείγματα αυτά καταφέρουν να λειτουργήσουν ως γέφυρα από μια ατελή εικασία σε μια πιο κατάλληλη και να επιτευχθεί η επίλυση της γνωστικής σύγκρουσης που υπήρχε προηγουμένως ονομάζονται ***γεφυρωτικά παραδείγματα (bridging examples***). Εφόσον επιτευχθεί, η δομική γενίκευση θα μπορέσει να βοηθήσει τους μαθητές στην κατασκευή της απόδειξης.

Τι γίνεται όμως όταν οι εμπειρικές δοκιμές δεν είναι επιτυχείς; Ή όταν βρίσκουν κάποιες που είναι επιτυχείς και κάποιες που δεν επαληθεύουν την εικασία; Ένα τέτοιο παράδειγμα που δεν επαληθεύει την εικασία κι έρχεται σε αντίθεση με τη καθολική ισχύ του ισχυρισμού ονομάζεται ***αντιπαράδειγμα*** (Πούλος 2009, σ.7). Για να καταρριφθεί ο ισχυρισμός της ορθότητας μιας καθολικής μαθηματικής πρότασης, αρκεί ένα μόνο αντιπαράδειγμα. Από την άλλη μεριά, για μια υπαρκτική πρόταση, ένα μόνο υποστηρικτικό παράδειγμα είναι αρκετό να αποδείξει την πρόταση, ενώ ένα αντιπαράδειγμα δεν είναι αρκετό να την απορρίψει. Χρειάζεται μια γενική απόδειξη που θα καλύπτει όλες τις σχετικές περιπτώσεις, για να απορρίψει κανείς την πρόταση.

Είναι μεγάλης αξίας πάντως το ότι, όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν αντιπαραδείγματα στην εικασία τους, έρχονται σε γνωστική σύγκρουση και προσπαθούν να κατανοήσουν το λόγο που η εικασία είναι ψευδής μέσα από την ανάλυση της απόδειξής της. Άρα τα αντιπαραδείγματα λειτουργούν ως παραδείγματα

στροφής ***(pivotal examples***), όπως αναφέραμε προηγουμένως. Είναι όμως, παραγωγικό, να βρεθεί το κομμάτι της απόδειξης που είναι εφαρμόσιμο και στα αντιπαραδείγματα, επειδή αυτό το κομμάτι οδηγεί να επινοηθούν πιο πλήρεις προτάσεις που περιλαμβάνουν τα αντιπαραδείγματα (Komatsu 2010).

Ο Lakatos διακρίνει τα αντιπαραδείγματα σε καθολικά και τοπικά, ανάλογα με το μέγεθος και την έκταση της ισχύος ή της βαρύτητας που εμπεριέχουν για τη ριζική ή τοπική ανασκευή μιας εικασίας (Πούλος 2009, σ.17) Κατ' αυτόν η αλήθεια ή όχι μιας μαθηματικής πρότασης με τη βοήθεια των αντιπαραδειγμάτων, έχει ανάλογη σημασία με τη σχεδίαση των «κρίσιμων πειραμάτων» που χρησιμοποιούν οι φυσικές επιστήμες για την απόρριψη ερευνητικής υπόθεσης. Ο Lakatos (στο Πούλος 2009,σ.19) περιγράφει τα στάδια της μαθηματικής ανακάλυψης, με τα οποία δείχνει τη σημασία που έχουν τα αντιπαραδείγματα:

1. διατυπώνεται κάποια αρχική εικασία
2. παρουσιάζεται μια απόδειξη: ένα σχηματικό νοητικό πείραμα ή επιχείρημα που αποσυνθέτει την αρχική εικασία σε ένα σύνολο υποεικασιών ή λημμάτων
3. αναδύονται καθολικά αντιπαραδείγματα
4. επανεξετάζεται η απόδειξη: εντοπίζονται τα ένοχα λήμματα για τα οποία το καθολικό αντιπαράδειγμα είναι τοπικό.

Τα παραπάνω στάδια αποτελούν τον πυρήνα της αποδεικτικής διαδικασίας. Συχνά όμως εμφανίζονται μερικά ακόμα τυπικά στάδια, όπως το να επανεξεταστούν αποδείξεις άλλων θεωρημάτων, για να διαπιστωθεί αν απαντάται σε αυτές το νεότευκτο λήμμα, ελέγχονται οι αποδεκτές συνέπειες της αρχικής και πλέον ανασκευασμένης εικασίας και αντιπαραδείγματα μεταστρέφονται σε νέα παραδείγματα και ανοίγουν νέες περιοχές μελέτης.

Ο Πούλος υπογραμμίζει ότι η ευρετική της μαθηματικής ανακάλυψης σε ερευνητικό επίπεδο διαφέρει από την ευρετική που ακολουθείται κατά τη μελέτη εικασιών σε απλά μαθηματικά προβλήματα. Ωστόσο, παραδέχεται ότι με την εξοικείωση στο χειρισμό εικασιών, ο εκπαιδευόμενος εισέρχεται βαθμιαία στο κλίμα και στη λογική της μαθηματικής ανακάλυψης. Ιδιαίτερη σημασία έχει και η άποψη των Annie & John Selden ότι «η επιτυχία στα Μαθηματικά ειδικά σε προχωρημένο μεταπτυχιακό και πτυχιακό επίπεδο, φαίνεται ότι σχετίζεται με την ικανότητα κατασκευής παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων». Το ζεύγος θέτει το εξής ερώτημα σε άρθρο του (Selden J. & Selden A., 1995 στο Πούλος 2009): «Ποιος είναι ο

καλύτερος τρόπος να αναπτυχθεί αυτή η ικανότητα; Είναι οι μικροί μαθητές σε θέση να κατασκευάζουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα ή απλώς αποστηθίζουν τα ήδη προκατασκευασμένα από άλλους;»

Παρατηρούμε πως η διερεύνηση μαζί με τις εμπειρικές δοκιμές, μέσα από τις οποίες προκύπτουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα έχουν ιδιαίτερη αξία. Χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη διδασκαλία με σκοπό να ενισχύσουν την πεποίθηση για την ορθότητα μαθηματικών προτάσεων, να αποσαφηνίσουν έννοιες και είναι ο πρόδρομος της αποδεικτικής διαδικασίας (Πούλος 2009, σ.8). Στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη, η πλειοψηφία των διδασκόντων κάνει χρήση των παραδειγμάτων, ιδιαίτερα στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, ώστε να κατανοηθούν σε βάθος οι έννοιες και τα ερωτήματα που εξετάζονται. Εξάλλου, όπως αναφέρει ο Πρόκλος, τη μέθοδο των αντιπαραδειγμάτων χρησιμοποιούσαν οι άριστοι των διδασκάλων (Πούλος 2009, σ.9). Τα αντιπαραδείγματα είναι επιτυχείς προσπάθειες για την απόρριψη ορισμένων εικασιών. Παρά την αρνητική σημασία που έχει η λέξη «απόρριψη», η διαδικασία κατασκευής ενός αντιπαραδείγματος είναι μια διαδικασία επιστημονική, αφού απαλλάσσει τα Μαθηματικά από προτάσεις για τις οποίες είχαμε αμφιβολίες αν ήταν αληθείς ή ψευδείς. Η Hanna (2000) υποστηρίζει ότι, ενώ η διερεύνηση και η απόδειξη είναι ξεχωριστές δραστηριότητες, είναι συμπληρωματικές και υποστηρίζουν η μία την άλλη. Η διερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη, ενώ η απόδειξη είναι επιβεβαίωση. Η διερεύνηση ενός προβλήματος μπορεί να οδηγήσει κάποιον να αντιληφθεί τη δομή και υποδιαίρεσή του, αλλά όχι μια καθαρή κατανόηση κάθε συνδέσμου. Επομένως, παρά την αλήθεια μιας πρότασης που μπορεί να φαίνεται προφανής από τη διερεύνηση, χρειάζεται ακόμη, αιτιολόγηση τέτοια που αποδεικνύει (Giaquinto 1994, στο Hanna 2000). Μόνο μια απόδειξη που έχει προέλευση αποδεκτές προτάσεις, μπορεί να προσφέρει αυτή την αιτιολόγηση.

Αποδεικτικά σχήματα των μαθητών για την επαλήθευση εικασιών

Η έρευνα στην απόδειξη έχει εστιάσει σε διαφορετικά είδη συλλογισμού και επιχειρημάτων στην αποδεικτική διαδικασία των μαθητών (Reiss et al. 2002, Reid 1999 & 1995, Healy & Hoyles 1998, Balacheff 1988 στο Knipping 2004). Οι Harel & Sowder (2007) χρησιμοποιούν τον όρο αποδεικτικό σχήμα (proof scheme) για να περιγράψουν την πεποίθηση που έχει κάποιος για το τι είναι απόδειξη. Ένα ***αποδεικτικό σχήμα*** ενός ατόμου ή μιας κοινότητας αποτελείται από αυτό που συνιστά την επιβεβαίωση και διαβεβαίωση μιας εικασίας ως γεγονός για το άτομο ή την κοινότητα. Με τον όρο επιβεβαίωση (ascertaining) οι Harel & Sowder (2007) εννοούν τη διαδικασία με την οποία το άτομο προσπαθεί να απομακρύνει τις αμφιβολίες του για την αλήθεια ενός ισχυρισμού. Ενώ με τον όρο διαβεβαίωση (persuading) είναι η διαδικασία με την οποία το άτομο ή μια κοινότητα προσπαθεί να απομακρύνει τις αμφιβολίες των άλλων για την αλήθεια ενός ισχυρισμού.

Η ταξινόμηση των αποδεικτικών σχημάτων αποτελείται από 3 κατηγορίες:

Α) αποδεικτικών σχημάτων εξωτερικής πεποίθησης,

Β) εμπειρικών αποδεικτικών σχημάτων και

Γ) παραγωγικών αποδεικτικών σχημάτων.

Α) *Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πεποίθησης* (external convictions) λέγονται εκείνα με τα οποία οι μαθητές πείθουν με βάση εξωτερικές πηγές, όπως: α) μια *αυθεντία*, που μπορεί να είναι ένα βιβλίο ή ένας δάσκαλος β) η *αυστηρή εμφάνιση* ενός επιχειρήματος κι όχι το περιεχόμενό του (για παράδειγμα οι αποδείξεις στη γεωμετρία πρέπει να έχουν μια μορφή δύο στηλών) ή γ) *οι 'μηχανιστικοί' συμβολικοί χειρισμοί*, που γίνονται χωρίς οι μαθητές να καταλαβαίνουν το νόημα ή το σύστημα αναφοράς αυτών των διαδικασιών. Έτσι, αντιστοίχως, οι Harel και Sowder (2007) προτείνουν 3 διδακτικά σχήματα που εντάσσονται στα αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πεποίθησης (external convictions) και είναι :

- Το αυταρχικό αποδεικτικό σχήμα
- Το τελετουργικό αποδεικτικό σχήμα
- Και το μη-αναφορικό συμβολικό σχήμα

Β) Εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα λέγονται αυτά που χρησιμοποιούν οι μαθητές από την εμπειρία τους, είτε τη γενική όταν πρόκειται για διάφορες *αντιλήψεις* που διαμορφώθηκαν με την πάροδο του χρόνου, είτε τη συγκεκριμένη όταν πρόκειται για προσωρινή αντίληψη που διαμορφώνει ο μαθητής από την παρουσία ενός πλήθους παραδειγμάτων, ακόμη κι ενός. Στην περίπτωση αυτή όμως ο μαθητής για την εξήγηση αναφέρεται μόνο στο πλήθος των παραδειγμάτων κι όχι σε κάτι άλλο. Κάνει δηλαδή μία *επαγωγική σκέψη*, ότι εφόσον μία εικασία ισχύει γι' αυτές τις δοκιμές, θα ισχύει και για τις άλλες. Τα παραδείγματα μπορούν να προκύψουν από άμεσες μετρήσεις ποσοτήτων, αντικατάσταση συγκεκριμένων αριθμών σε αλγεβρικές εκφράσεις κ.λ.π.. Έτσι σε αυτή τη κατηγορία εντάσσονται δύο αποδεικτικά σχήματα:

- Τα επαγωγικά αποδεικτικά σχήματα
- Τα αντιληπτικά αποδεικτικά σχήματα

Γ) Τα αναλυτικά (ή παραγωγικά) αποδεικτικά σχήματα είναι αυτά με τα οποία το άτομο προσδίδει εγκυρότητα σε έναν ισχυρισμό μέσω της παραγωγικής λογικής, δηλαδή μέσω λογικών συνεπαγωγών. Αποτελούνται από δύο υποκατηγορίες αποδεικτικών σχήματα:

- Τα μετασχηματιστικά αποδεικτικά σχήματα
- Τα αξιωματικά αποδεικτικά σχήματα

Όλα τα μετασχηματιστικά αποδεικτικά σχήματα έχουν 3 βασικά χαρακτηριστικά: γενικότητα, λειτουργική σκέψη και λογική εξαγωγή συμπεράσματος. Το χαρακτηριστικό της γενικότητας έχει να κάνει με την πεποίθηση του ατόμου ότι σκοπός είναι να αιτιολογήσει ένα επιχείρημα που θα ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, όχι για μεμονωμένες περιπτώσεις και καμία εξαίρεση δεν επιτρέπεται. Λειτουργική σκέψη υπάρχει όταν ένα άτομο σχηματίζει σκοπούς και στόχους και προσπαθεί να προβλέψει τα συμπεράσματα κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας. Τέλος, το χαρακτηριστικό της λογικής εξαγωγής συμπερασμάτων αναπτύσσεται, όταν ένα άτομο καταλαβαίνει ότι η αιτιολόγηση στα μαθηματικά πρέπει να βασίζεται σε κανόνες λογικών συμπερασμάτων.

Το αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα έχει τα τρία χαρακτηριστικά που ορίζουν το μετασχηματιστικό αποδεικτικό σχήμα, αλλά περιλαμβάνει κι άλλα. Κάθε αποδεικτική διαδικασία πρέπει να αρχίζει από κοινώς αποδεκτές αρχές (αξιώματα). Σχετικά

παραδείγματα είναι η ελληνική αξιωματική μέθοδος (βλ. Στοιχεία του Ευκλείδη), αλλά και η μοντέρνα αξιωματική μέθοδος του Hilbert.

Οι ίδιοι οι Harel & Sowder (2007) λένε ότι το τελευταίο είδος ταξινόμησης τους αντιστοιχεί στο συμβολικό αναφορικό αποδεικτικό σχήμα. Αυτό το σχήμα είναι ακριβώς αντίθετο με το μη αναφορικό σχήμα. Στα αναφορικά συμβολικά αποδεικτικά σχήματα, για να αποδείξει κάποιος ή να απορρίψει έναν ισχυρισμό ή να λύσει ένα πρόβλημα, μαθαίνει να αναπαριστά την κατάσταση αλγεβρικά και να κάνει συμβολικούς χειρισμούς στις εκφράσεις ώστε να λαμβάνει τις πληροφορίες που είναι σχετικές με το πρόβλημα.

Ο Balacheff (1988) από τη δική του μεριά, μιλά για **4 επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης της απόδειξης** τα οποία δεν είναι αποδείξεις με την αυστηρή μαθηματική έννοια, αλλά αναγνωρίζονται ως τέτοιες από το μαθητή, ενώ στο τέλος προσθέτει ως 5^{ο} επίπεδο την μαθηματική απόδειξη που δεν είναι εμπειρική, αλλά νοητική και γίνεται με συμβολικό χειρισμό. Τα επίπεδα είναι:

<u>1^{ο} επίπεδο: Αφελής εμπειρισμός (Naive empiricism.)</u>

Σύμφωνα με αυτό το επίπεδο οι μαθητές, για να πειστούν ή για να συμφωνήσουν ότι μια εικασία είναι αληθής, επαληθεύουν μερικές περιπτώσεις.

<u>2^{ο} επίπεδο: Το κρίσιμο πείραμα (The crucial experiment)</u>

Ελέγχουν την εικασία σε ειδική, ίσως ακραία, περίπτωση και βγάζουν το συμπέρασμα ότι «αν ισχύει ακόμα και γι’ αυτή τη περίπτωση, θα ισχύει πάντα»

<u>3^{ο} επίπεδο: Το παράδειγμα που γενικεύεται (The generic example)</u>

Για να δείξει την αλήθεια ο μαθητής χειρίζεται ένα αντικείμενο που χρησιμοποιείται ως αντιπροσωπευτικό όλων των όμοιων αντικειμένων της κλάσης του. Με τους χειρισμούς αυτούς γίνονται φανεροί οι λόγοι για τους οποίους ένας ισχυρισμός είναι αληθής.

<u>4^{ο} επίπεδο: Το πείραμα σκέψης (The thought experiment)</u>

Το πείραμα σκέψης χαρακτηρίζεται από εσωτερίκευση και αποστασιοποίηση από μια συγκεκριμένη αναπαράσταση. Δεικνύονται οι χειρισμοί και θεμελιώδεις

σχέσεις της απόδειξης, με βάση τις ιδιότητες των αντικειμένων, όχι τα αποτελέσματα των χειρισμών στο αντικείμενο.

5^{ο} επίπεδο: οι συμβολικοί χειρισμοί (calculation on statements)

Πρόκειται για νοητικές κατασκευές που δεν έχουν σχέση με την εμπειρία. Βασίζονται σε τυποποιημένες κατηγορηματικές θεωρίες των ιδεών υπό αμφισβήτηση. Μπορεί να εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα επαγωγικών χειρισμών ή να βασίζονται σε ορισμούς και ιδιότητες.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτά τα επίπεδα ασχολούνται με τη μέθοδο εργασίας του μαθητή, όχι με το πόσο σωστός ή επιτυχής είναι ο μαθητής. Μια μαθητική δραστηριότητα για παράδειγμα μπορεί να ενταχθεί στο 4^{ο} επίπεδο χωρίς να είναι απαραίτητα σωστή ή πλήρης. Ο ίδιος ο Balacheff λέει ότι τα πέντε επίπεδα απόδειξης σχηματίζουν μια ιεραρχία. Για τα πρώτα δύο επίπεδα ο Balacheff (1988) δηλώνει ότι δεν επιβεβαιώνουν την αλήθεια ενός ισχυρισμού, αλλά τα ονομάζει ως ένα είδος απόδειξης διότι έτσι αναγνωρίζονται από αυτούς που τα κατασκευάζουν. Τα επόμενα δύο όμως κάνουν φανερούς τους λόγους για τους οποίους ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Ο Balacheff (1988) επίσης διακρίνει μεταξύ πρακτικών και εννοιολογικών ειδών απόδειξης. Οι πρακτικές (pragmatic) αποδείξεις έχουν ως προσφυγή τη πραγματική ενέργεια (δράση) ή την επίδειξη, ενώ οι εννοιολογικές (conceptual) είναι αυτές που δεν εμπλέκουν συγκεκριμένες δράσεις (εννοεί παραδείγματα), αλλά στηρίζονται σε σχηματισμούς ιδιοτήτων και σχέσεων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, όπως κρίνουν και οι Harel & Sowder (2007), ο Balacheff (1988) εντάσσει στην πρακτική αιτιολόγηση τρία είδη: τον αφελή εμπειρισμό, το κρίσιμο πείραμα και το γενικεύσιμο παράδειγμα. Ενώ στην εννοιολογική αιτιολόγηση φαίνεται να συγκαταλέγει δύο είδη: το πείραμα σκέψης (thought experiment), όπου η αιτιολόγηση συνοδεύεται με ειδικά παραδείγματα και το συμβολικό υπολογισμό (symbolic calculation) που βασίζεται μόνο στο μετασχηματισμό των συμβόλων.

Αν προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία σύγκριση, μεταξύ των θεωριών για τα αποδεικτικά σχήματα, θα δούμε ότι υπάρχουν ομοιότητες. Το εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα και το παραγωγικό αποδεικτικό σχήμα των Harel & Sowder αντιστοιχούν σε αυτά που ο Balacheff (1988) αποκαλεί «πρακτική απόδειξη» και «εννοιολογική απόδειξη» αντίστοιχα, ενώ επίσης ο Bell (1976, στο Harel & Sowder, 2007) αποκαλεί

«εμπειρική αιτιολόγηση» και «παραγωγική αιτιολόγηση». Η μόνη διαφορά έγκειται μάλλον στο ότι το γενικεύσιμο παράδειγμα (generic example) σύμφωνα με την ταξινόμηση των Harel & Sowder, ανήκει στην κατηγορία των παραγωγικών αποδεικτικών σχημάτων, κι έτσι θα το θεωρήσουμε κι εμείς στην παρούσα εργασία, διότι ικανοποιεί τα τρία χαρακτηριστικά του μετασχηματιστικού αποδεικτικού σχήματος.

Αντιστοιχία αποδεικτικών σχημάτων

HAREL & SOWDER (2007)	**BELL (1976)**	**BALACHEFF (1988)**
Α) Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πεποίθησης		
Α.1. Αυταρχικό		
Α.2. Τελετουργικό		
Α.3. μη-αναφορικό		
Β) Εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα	**Εμπειρική αιτιολόγηση**	**Πρακτική απόδειξη**
Β.1. Επαγωγικά		αφελής εμπειρισμός
Β.2. Αντιληπτικά		κρίσιμο πείραμα
		γενικεύσιμο παράδειγμα
Γ) Παραγωγικά αποδεικτικά σχήματα	**Παραγωγική αιτιολόγηση**	**Εννοιολογική απόδειξη**
Γ.1. μετασχηματιστικά (π.χ. γενικεύσιμο παράδειγμα)		πείραμα σκέψης
Γ.2. αξιωματικά		συμβολικός υπολογισμός

Τι γνώμη έχουν οι δάσκαλοι για τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών τους;

Σε μια έρευνα (Bergqvist, 2005) που διεξάχθηκε στη Σουηδία, 8 καθηγητές και καθηγήτριες των μαθηματικών Λυκείου δίνουν συνέντευξη σχετικά με το πως περιμένουν οι μαθητές να επαληθεύσουν εικασίες. Τα αποτελέσματα έδειξαν *ότι υποτιμούν τα επίπεδα αιτιολόγησης- επιχειρηματολογίας των μαθητών και πιστεύουν πως μόνο μια μικρή ομάδα μαθητών σε κάθε τάξη μπορεί να χρησιμοποιήσει υψηλού επιπέδου αιτιολόγηση στα μαθηματικά.* Η κατηγοριοποίηση των αιτιολογήσεων έγινε με βάση τα 4 επίπεδα του Balacheff. Οι περισσότεροι δάσκαλοι είπαν ότι περίπου το 80-90% των μαθητών θα δώσουν απαντήσεις του επιπέδου 1, λίγοι θα δώσουν απαντήσεις επιπέδου 2 και 3 κι ελάχιστοι (ζήτημα αν θα βρεθεί κανείς) επιπέδου 4. Τα αποτελέσματα της έρευνας όμως, δεν επαλήθευσαν τη γνώμη των δασκάλων αφού, πολύ λίγοι μαθητές Λυκείου (ηλικίας 16-17 χρονών) έδειχναν να πιστεύουν ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εμπειρική απόδειξη για να επαληθεύσουν εικασίες. Ο Bergqvist (2005) συλλογίζεται πως, αν οι δάσκαλοι έχουν αυτή την εντύπωση για τους μαθητές τους, ότι δηλαδή μόνο λίγοι μπορούν να είναι ικανοί για μαθηματική επιχειρηματολογία σε υψηλά επίπεδα του Balacheff, τότε θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε αν αυτό είναι ορισμένο να είναι μόνιμη κατάσταση ή αν υπάρχει η σκέψη ότι η ικανότητα μπορεί να μαθευτεί στο σχολείο.

Μία άλλη πεποίθηση των δασκάλων που αναδείχτηκε μέσα από την έρευνα του Bergqvist (2005) είναι ότι οι αλγεβρικές μέθοδοι και η χρήση μαθηματικών εκφράσεων, θεωρούνται σημάδι υψηλής επίδοσης. Ο Bergqvist (2005) όμως διαφωνεί λέγοντας ότι οι αλγεβρικές μέθοδοι δεν είναι πάντα ένα σημάδι υψηλής επίδοσης. Επιχειρηματολογεί λέγοντας ότι είναι πολύ πιο εύκολο κι απλό το να βρεις ένα αντιπαράδειγμα σε μια πρόταση που δεν ισχύει. Με την αφορμή αυτού του γεγονότος, τονίζει ότι η μαθηματική ικανότητα του δασκάλου είναι ένας σημαντικός παράγοντας, καθώς ο δάσκαλος πρέπει να αναλύσει πώς εργάζονται οι μαθητές. Αν ο δάσκαλος δεν αναγνωρίζει το αντιπαράδειγμα σαν τρόπο να απορρίψει μια εικασία, τότε σημαίνει ότι δεν καταλαβαίνει πλήρως τις μαθηματικές οπτικές και θα είναι δύσκολο γι' αυτόν-ή να αξιολογεί τι κάνουν οι μαθητές. Μια προτίμηση στις αλγεβρικές μεθόδους μπορεί να δείχνει επίσης ότι ο δάσκαλος ακολουθεί την πραγματιστική άποψη των μαθηματικών (instrumentalist view of mathematics) που εστιάζει στα γεγονότα (facts), στους κανόνες και στις δεξιότητες με σωστή εκτέλεση.

Ο Bergqvist (2005) συσχετίζει στο άρθρο του τα σχόλια που κάνουν οι δάσκαλοι των μαθηματικών για το μαθηματικό συλλογισμό (mathematical reasoning) με την άποψή τους για τα μαθηματικά. Αναφέρει ένα παράδειγμα δύο καθηγητών που βλέπουν τα μαθηματικά σαν τυπική και περιγραφική επιστήμη, αυτό που ο Ernest (1989, στο Bergqvist, 2005) ονομάζει σαν πραγματιστική άποψη των μαθηματικών (instrumentalist view of mathematics). Η πεποίθησή τους αυτή σύμφωνα με τον Bergqvist, εξηγεί ότι οι δάσκαλοι αυτοί προτιμούν ένα διδακτικό μοντέλο κοντά στο μοντέλο του καθοδηγητή και πως σίγουρα θα είναι της άποψης ότι μια αλγεβρική προσέγγιση είναι σημάδι μαθηματικής κατανόησης κι ότι το επίπεδο 3 είναι υψηλότερο από το επίπεδο 4.

Η απόκρουση των εικασιών

Οι Potari, et al., (2009) μελετούν τα επιχειρήματα με τα οποία οι μαθηματικοί χειρίζονται έναν μη-έγκυρο ισχυρισμό σε περιεχόμενο της γεωμετρίας. Ωστόσο, λένε γενικά πως το να αποκρούσεις εικασίες και να αιτιολογήσεις τη μη-εγκυρότητα των ισχυρισμών απαιτεί αιτιολόγηση πέρα από την παραγωγική απόδειξη, η οποία παραδοσιακά είναι το στόχαστρο στη μέση εκπαίδευση. Η αιτιολόγηση περιλαμβάνει κυρίως τη γενίκευση αντιπαραδειγμάτων, την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων μέσα από εξερεύνηση και πειραματισμό, διαδικασίες οι οποίες σχετίζονται με τη κατασκευή μαθηματικού νοήματος και κατανόησης.

Ο Lin (2005 στο Potari, et al., 2009) δείχνει τη συνθετότητα της διαδικασίας, με το να αναγνωρίζει διάφορα είδη επιχειρημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές για να αποκρούσουν ψευδείς εικασίες. Ανέπτυξε μια κατηγοριοποίηση των σχημάτων απόκρουσης των μαθητών. Έτσι, τα διαχώρισε σε:

- ρητορικά επιχειρήματα (λόγοι σε σχέση με το άτομο στο οποίο απευθύνεται)
- ευρετικά επιχειρήματα (λόγοι που λαμβάνουν υπόψη τους περιορισμούς μιας κατάστασης)
- και μαθηματικές αποδείξεις (η διαδικασία γενίκευσης σωστών αντιπαραδειγμάτων)

Στη μαθηματική πράξη, ως ρητορικά επιχειρήματα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών που εκφράζονται ως επιχείρημα για την απόρριψη μιας εικασίας. Ενώ τα αντιπαραδείγματα συγκαταλέγονται στα ευρετικά.

Οι Bex, et al., (2003) από τη δική τους πλευρά, λένε ότι υπάρχουν τέσσερις τρόποι για να αποκρούσεις μια γενίκευση. Αναφέρεσαι:

Α) στην εγκυρότητα της πηγής της γενίκευσης

Β) στην προέλευση της πηγής

Γ) στην εφαρμογή σε δεδομένες περιπτώσεις

Δ) στη γενίκευση από μόνη της

Η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά

Στη μαθηματική εκπαίδευση δεν υπάρχει κοινός ορισμός για την επιχειρηματολογία, παρόλο που είναι μια διαδικασία που συνεχώς επαναλαμβάνεται στην τάξη. Δεν μπορούμε να δεχτούμε κάθε διάλογο ως επιχειρηματολογία.

Στην εργασία της Douek (1998) η ***επιχειρηματολογία*** προϋποθέτει τη διαδικασία που παράγει λογικά συνδεδεμένο διάλογο για ένα δοθέν θέμα, αλλά και το κείμενο που παράγεται από αυτή τη διαδικασία (γραπτό ή προφορικό). Η λέξη επιχείρημα χρησιμοποιείται σαν «ένας λόγος ή ένα σύνολο λόγων που προσφέρεται υπέρ ή κατά κάποιας πρότασης, γνώμης ή μέτρου»(λεξικό Webster) και μπορεί να περιλαμβάνει προφορικά επιχειρήματα, αριθμητικά δεδομένα, σχήματα κ.α. Εν συντομία, μια επιχειρηματολογία αποτελείται από ένα ή περισσότερα λογικά συνδεδεμένα επιχειρήματα. Η διαλογική φύση της επιχειρηματολογίας δεν αποκλείει την αναφορά σε μη διαλογικά επιχειρήματα όπως οπτικά ή σχηματικά επιχειρήματα.

Επειδή η σύγχρονη έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση δεν διεισδύει πολύ σε αυτά τα θέματα, η Pedemonte (2007) έχει λάβει υπόψη τις σύγχρονες γλωσσολογικές θεωρίες (Anscombre & Ducrot 1983; Perelman & Olbrechts-Tyteca 1958; Plantin 1990; Toulmin 1993) για να προτείνει ένα πιθανό χαρακτηρισμό για την επιχειρηματολογία. Σύμφωνα με αυτές τις θεωρίες, *η επιχειρηματολογία (με το ρόλο της απόδειξης) είναι ένα σύνολο λογικών προτάσεων που δικαιολογούν και εκφράζονται σαν συμπεράσματα (inferences)* (Pedemonte 2008, σελ.387). Για τον Krummheuer (1995 στο Yackel 2001), επιχειρηματολογία είναι οποιαδήποτε κατάσταση «περιέχει κάποιες

δηλώσεις που σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο και που με αυτό τον τρόπο επιτελούνται ορισμένες λειτουργίες για την αλληλεπιδραστική αποτελεσματικότητά τους» (Krummheuer, 1995, p. 247 στο Yackel 2001).

Επίσης, η Yackel (1997 στο Yackel 2001) και ο Krummheuer χρησιμοποιούν τον όρο ***συλλογική επιχειρηματολογία*** (collective argumentation) για να αναφερθούν σε αυτό που σχηματίζεται όταν δύο ή περισσότερα άτομα αλληλεπιδρούν για να αποδείξουν έναν ισχυρισμό (Yackel 2002).

Ποια είναι η σχέση της εικασίας με την επιχειρηματολογία;

Δεν υπάρχει συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των δυο, όπως η σχέση αιτία-αποτέλεσμα. Μπορεί κάποιος να κάνει μια εικασία και να επιχειρηματολογήσει αργότερα ή καθόλου, ή μπορεί ακόμα να συμβεί και το αντίστροφο, να χρησιμοποιεί κάποια δεδομένα κι επιχειρηματολογώντας να φτάσει σε μια εικασία. Έτσι, η Pedemonte (2007) αναφέρει τα δύο είδη επιχειρηματολογίας, ανάλογα με το χαρακτήρα της και τη σχέση της με την εικασία:

Α) Η εποικοδομητική επιχειρηματολογία (constructive argumentation) συμβάλλει στη κατασκευή μιας εικασίας που προηγείται από τη πρόταση-δήλωση.

Β) Η δομημένη επιχειρηματολογία (structurant argumentation) αιτιολογεί μια εικασία που είχε κατασκευαστεί προηγουμένως κι έτσι έρχεται μετά από αυτή.

Θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε τη σχέση που περιγράφει η Pedemonte σχηματικά ως εξής:

Εποικοδομητική επιχειρηματολογία → εικασία → δομημένη επιχειρηματολογία

Να σημειώσουμε όμως ότι στο παραπάνω σχήμα μερικές φορές μπορεί να λείπει κάποιο από τα είδη επιχειρηματολογίας ή να ενυπάρχουν και τα δύο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διαφορετικές περιπτώσεις στο τρόπο σκέψης:

Α’ περίπτωση: Εάν λείπει η δομημένη επιχειρηματολογία, σημαίνει πως ο μαθητής έκανε μια μορφή επιχειρηματολογίας κυρίως για τον εαυτό του και κατέληξε στη διαμόρφωση μιας εικασίας, αλλά δεν μπορεί ή δεν προσπάθησε να αποδείξει ότι ισχύει η εικασία του.

Β’ περίπτωση: Εάν έχουμε το σχήμα και με τα τρία μέλη του, όπως παραπάνω, σημαίνει ότι ο μαθητής έφτασε σε μια εικασία από κάποια δεδομένα που τον βοήθησαν

να επιχειρηματολογήσει στο μυαλό του, και έπειτα κατασκεύασε μια επιχειρηματολογία ώστε να αποδείξει τον ισχυρισμό του.

Γ' περίπτωση: Αν λείπει η εποικοδομητική επιχειρηματολογία, τότε ο μαθητής δίχως κάποια επιχειρηματολογία, πιθανώς από κάποια αντίληψη, διαμορφώνει μια εικασία, την οποία στο τέλος αποδεικνύει με ένα είδος επιχειρηματολογίας.

Η επιχειρηματολογία και η σχέση της με την απόδειξη

Παρά την αναμφισβήτητη επιστημολογική και γνωστική απόσταση μεταξύ επιχειρηματολογίας και τυπικής μαθηματικής απόδειξης, η επιχειρηματολογία και η μαθηματική απόδειξη έχουν πολλές οπτικές κοινές, όπως διαδικασίες και προϊόντα (Douek 1998).

Η Pedemonte (2007) αναλύει τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά και τονίζει ότι είναι κοινά με αυτά της απόδειξης. Τα λειτουργικά χαρακτηριστικά εγκαθιδρύουν την οριστικότητα, τη χρησιμότητα της επιχειρηματολογίας και το ρόλο της στο διάλογο. Αναφέρει επίσης και τα δομικά χαρακτηριστικά, τα οποία παρέχουν ένα δομικό μοντέλο για επιχειρηματολογία.

Τα κοινά λειτουργικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης

1. Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη μπορούν να θεωρηθούν σαν λογικές αιτιολογήσεις

Το χαρακτηριστικό της αιτιολόγησης είναι ορατό στη μορφή της επιχειρηματολογίας: είναι συλλογισμός, όπου το σαφές συμπέρασμα μιας πρότασης προκύπτει από μία άλλη ή άλλες προτάσεις (Duval 1995 στο Pedemonte 2007) . Αυτά τα συμπεράσματα βασίζονται στη λογική, όπως και τα συμπεράσματα που χρησιμοποιούνται στη νομική γλώσσα. (Plantin 1990, p.19 στο Pedemonte 2007). Οι γλωσσολογικές θεωρίες, που θεωρούν το νομικό μοντέλο σαν μοντέλο για την επιχειρηματολογία, (Perelman and Olbrechts-Tyteca 1958; Toulmin 1993 στο Pedemonte 2007) τονίζουν τη σημασία της λογικής στην επιχειρηματολογία. Αλλά υπάρχουν τουλάχιστον 2 είδη λογικής. Οι Perelman και Olbrecht-Tyteca ορίζουν την επιχειρηματολογία χωρίς προσφυγή στην έννοια της αλήθειας (Plantin 1990, p.19). Με αυτή τη λογική, η επιχειρηματολογία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ανανέωση της αριστοτελικής ρητορικής (Aristotle 1991, Rhetoric, I, 2, 1355b). Στην πραγματικότητα η θεωρία περί επιχειρηματολογίας του Toulmin είναι πιο κοντά στην αριστοτελική

διαλεκτική (Aristotle 1974, Topique, I, 100a, 18) Η διαλεκτική, όπως και η ρητορική δεν οδηγεί πάντα σε αληθή συμπεράσματα. Αλλά κάποιος που ενστερνίζεται τη διαλεκτική, αρχίζει από αρχές τις οποίες πιστεύει πως είναι αληθινές , ενώ εκείνος που ενστερνίζεται τη ρητορική δεν είναι απαραίτητα πεπεισμένος για την αλήθεια που υπερασπίζεται. Η επιχειρηματολογία στα μαθηματικά ως απόδειξη είναι πιο κοντά στη διαλεκτική μέθοδο (και έπειτα στη θεωρία του Toulmin), αφού θα παράξει αληθείς προτάσεις.

2. Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη είναι για να πείσουν.

Αναπτύσσονται όταν κάποιος θέλει να πείσει (τον εαυτό του ή άλλους) σχετικά με την αλήθεια για μια δήλωση (Chazan 1993; De Villiers 1990; Hanna 1989, Healy & Hoyles 2000; Lakatos 1976). Υπάρχει διαφορά όμως ανάμεσα στις έννοιες ‘convincing’ και ‘persuading’. Σύμφωνα με τις γλωσσικές θεωρίες ο σκοπός του convincing είναι να τροποποιήσει γνώμες και πεποιθήσεις κάνοντας επίκληση στη λογική, ενώ ο σκοπός του persuading είναι να αποκτήσει τη συγκατάθεση χωρίς απαραίτητα να κάνει επίκληση στη λογική. Convincing συνεπάγεται persuading, ενώ δε συμβαίνει το αντίστροφο. Στα μαθηματικά με τα επιχειρήματα που χρησιμοποιεί κάποιος πραγματοποιεί convincing.

3. Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη απευθύνονται σε ευρύ κοινό (universal audience)

Κατά τη γλωσσολογία, (Plantin 1990) ο όρος αυτός σημαίνει ότι το κοινό είναι σε θέση να απαντήσει. Αντίθετα με ένα συγκεκριμένο κοινό, το universal audience είναι ικανό να υπερασπιστεί τις απόψεις του, σε σχέση με τα επιχειρήματα του συνομιλητή του. Το κοινό αυτό αποτελείται από τη μαθηματική κοινότητα, τη σχολική τάξη, το δάσκαλο και τον ομιλητή τον ίδιο.

4. Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη ανήκουν σε ένα πεδίο.

Οι γλωσσικές θεωρίες λένε ότι η σημασία σε μια επιχειρηματολογία μπορεί να διαφέρει σύμφωνα με την περίσταση επικοινωνίας. Ειδικότερα, οι λέξεις δε μπορούν να εγγυηθούν ακριβή κατανόηση (Ducrot et al. 1980). Ο πολλαπλός χαρακτήρας της επιχειρηματολογίας υπογραμμίζεται και από τον Toulmin (1993) ο οποίος προτείνει την έννοια του ΄΄πεδίου΄΄ . Για την απόδειξη, η έννοια του πεδίου είναι ένα θεωρητικό πεδίο: άλγεβρα, διαφορικός λογισμός, γεωμετρία κ.α. Το πεδίο της επιχειρηματολογίας

στα μαθηματικά οριοθετεί τα κριτήρια της αξιοπιστίας. Για παράδειγμα τα αξιώματα στη γεωμετρία είναι διαφορετικά από τα αξιώματα που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα.

Οι παραπάνω χαρακτηρισμοί της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης δείχνουν τη λειτουργική σύνδεση μεταξύ τους. Ακολουθούν τα δομικά χαρακτηριστικά.

Η κοινωνική διάσταση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στην επιστήμη των μαθηματικών αλλά και στη σχολική πραγματικότητα- Η απόδειξη ως πειστικό επιχείρημα

Ο Mason's (1982, στο Zack 1997) δηλώνει ότι όταν κάνεις απόδειξη, πρώτα πείθεις τον εαυτό σου, μετά πείθεις ένα φίλο και μετά πείθεις έναν εχθρό. Η έρευνα της Zack (1997) δείχνει ότι και τα παιδιά έχουν μια τέτοια άποψη. Ο Ernest (1998, στο Stylianides 2007) επισημαίνει ότι οι αποδείξεις σε μια μαθηματική κοινότητα απορρέουν από μια κοινωνική συζήτηση κατά την οποία οι συμμετέχοντες συμφωνούν να δεχθούν ή να αρνηθούν συγκεκριμένες θεωρίες. Επομένως, οι αποδείξεις είναι τα αποτελέσματα των κοινωνικά συμφωνηθέντων με βάση σύνολα κανόνων και μαθηματικών αντικειμένων (όπως οι ορισμοί, τα αξιώματα και τα θεωρήματα). Η διαδικασία αποδοχής ενός επιχειρήματος ως απόδειξη στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό σε κοινωνικούς μηχανισμούς της μαθηματικής κοινότητας. Συγκεκριμένα έχει επισημανθεί ότι μια απόδειξη γίνεται απόδειξη μετά την κοινωνική πράξη της 'αποδοχής της ως απόδειξη'(Manin, 1977, στο Stylianides 2007) και ότι οι αποδείξεις γίνονται πιστευτές και ενισχύουν την εμπιστοσύνη μας στην αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων εφόσον έχουν υποβληθεί στους κοινωνικούς μηχανισμούς της μαθηματικής κοινότητας (De Millo et al., 1979/1998, στο Stylianides 2007). Η αποδοχή ενός επιχειρήματος ως απόδειξη συχνά εξαρτάται από το αν οι μαθηματικοί είναι πεπεισμένοι από αυτό. Αυτό φαίνεται και στον ορισμό του Hersh's (1993) στο Stylianides (2007): «απόδειξη είναι πειστικό επιχείρημα, όπως αυτή εκτιμάται από καταρτισμένους κριτές». Θα πρέπει να καταστεί σαφές, ωστόσο, ότι το να πειστεί κάποιος στην μαθηματική κοινότητα δεν είναι μια αυθαίρετη διαδικασία. Αντ' αυτού, στηρίζεται σε κοινωνικά αποδεκτούς κανόνες του λόγου που ρυθμίζουν τη λειτουργία του και εγγυώνται την ποιότητα των αποδεκτών αποδείξεων (De Millo et al., 1979/1998 στο Stylianides 2007).

Ο Στυλιανίδης (2007) αναρωτιέται πώς μπορούμε να διαμορφώσουμε τη κοινωνική διάσταση της απόδειξης στο σχολείο; Με βάση τις αρχές της διανοητικής ειλικρίνειας και της συνέχειας που προτείνει, δίνει κάποιες ιδέες που βοηθούν να αναπτυχθεί μια πιθανή διαμόρφωση της έννοιας. Η αρχή της διανοητικής ειλικρίνειας, που ζητά μια ισορροπία μεταξύ επιστήμης των μαθηματικών και των σχολικών μαθηματικών, υποστηρίζει την ακόλουθη ιδέα: ένα επιχείρημα που θα μπορούσε να μετρά ως απόδειξη στη κοινότητα της τάξης, θα πρέπει να είναι αποδεκτό σαν απόδειξη από τη κοινότητα κι επομένως να είναι πειστικό στους μαθητές. Η αρχή της συνέχειας που ζητά συνοχή στο πώς διαμορφώνεται η έννοια της απόδειξης στη διάρκεια της μαθητικής του θητείας υποστηρίζει μια συμπληρωματική ιδέα: Οι σχετικοί με την απόδειξη κανόνες του λόγου που είναι αποδεκτοί από τους μαθητές θα πρέπει να συμβαδίζουν με την ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών σύμφωνα με τη βαθμίδα εκπαίδευσης.

Η σημασία των κοινωνικά αποδεκτών κανόνων του λόγου στην επιχειρηματολογία

Ο Στυλιανίδης (2007) δηλώνει ξεκάθαρα πως η πειστική δύναμη ενός επιχειρήματος από μόνη της δεν είναι αρκετή για να συλλάβει κανείς την κοινωνική διάσταση της απόδειξης στο σχολείο (και, κατά συνέπεια, είναι ανεπαρκής για να χαρακτηρίσει αυτό που μετρά ως απόδειξη σε τέτοιες καταστάσεις). Αν η πειστικότητα είναι αποσυνδεμένη από βέβαιους κανόνες του λόγου που ρυθμίζουν τη λειτουργία του, η διαδικασία της αποδοχής της απόδειξης μπορεί να περιοριστεί σε πρακτικές που δεν έχουν να κάνουν με αυθεντικούς τρόπους σκέψης και μαθηματικού χειρισμού, όπως για παράδειγμα όταν οι μαθητές απλά ψηφίζουν αν το δοσμένο επιχείρημα λειτουργεί ως απόδειξη κλπ. Επίσης, μη έγκυρα επιχειρήματα όπως τα εμπειρικά επιχειρήματα μπορεί να ανεβούν θέση ως απόδειξη.

Έτσι υπογραμμίζεται ο σημαντικός ρόλος που έχουν οι κοινωνικά αποδεκτοί κανόνες του λόγου μέσα σε μια μαθητική κοινότητα. Αν οι μαθητές δεχτούν έγκυρους κανόνες του λόγου σχετικά με το τι αποτελεί αποδεκτή αλήθεια και ποια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να προκύψουν νέες αλήθειες από τις ήδη υπάρχουσες, αυτοί οι κανόνες μπορούν να λειτουργήσουν ως μηχανισμοί για να ξεφορτωθούμε την αυθαιρεσία της πεποίθησης. Οι κανόνες του λόγου βέβαια δε θα πρέπει να δίνονται

στους μαθητές με τη χρήση της εξουσίας του δασκάλου, αλλά θα πρέπει να σχηματίζονται από το δάσκαλο και τους μαθητές στα πλαίσια της μαθητικής δραστηριότητας. (Balacheff,1990; Lampert, 1990; Mariotti, 2000; Yackel and Cobb,1996 στο Stylianides 2007). Επίσης οι κανόνες του λόγου πρέπει να συμβαδίζουν με την ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών ανάλογα με τη βαθμίδα κι έχοντας ως κοινωνική αναφορά τους κανόνες της μαθηματικής κοινότητας (Balacheff, 1991 στο Stylianides 2007).

Ο δάσκαλος έχει σημαντικό ρόλο να παίξει στη διαπραγμάτευση, αποδοχή κι ανάπτυξη των κανόνων του λόγου σε μια μαθητική κοινότητα (Balacheff,1990,1991; Ball and Bass,2003; Lampert,1990; Mariotti,2000; Simon & Blume, 1996; Yackel and Cobb, 1996 στο Stylianides 2007) .

Τα δομικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας

Σύμφωνα με τον Duval (Pedemonte 2007), η δομή της απόδειξης, μπορεί να περιγραφεί από ένα τριαδικό διάγραμμα: δεδομένα, ισχυρισμός, κανόνες (αξιώματα, θεωρήματα, η ορισμοί), ενώ η επιχειρηματολογία όχι. Η Pedemonte (2007) ωστόσο χρησιμοποιεί το μοντέλο του Toulmin (1993) για να αποδώσει τα δομικά χαρακτηριστικά της επιχειρηματολογίας και δείχνει πως και η επιχειρηματολογία μπορεί να έχει τριαδική δομή. Το μοντέλο αυτό, όπως μας πληροφορεί η ίδια, έχει χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί και να τεκμηριωθεί το πως προοδεύει η μάθηση στη σχολική τάξη (Krummheuer 1995; Yackel 2001; Yackel and Rasmussen 2002 στο Pedemonte 2007). Επίσης έχει χρησιμοποιηθεί για να τεκμηριώσει πως να δημιουργήσεις ένα πλαίσιο για να επιχειρηματολογούν τα παιδιά στην τάξη (Wood 1999 στο Pedemonte 2007). Στην έρευνα της Pedemonte, αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για να συγκρίνει και να αναλύσει τη δομή της επιχειρηματολογίας και τη δομή των αποδείξεων από γνωστική άποψη.

Με βάση το μοντέλο αυτό, ένα επιχείρημα (η μια απόδειξη) αποτελείται από 3 στοιχεία:

-τον ισχυρισμό του ομιλητή (c : claim)

-τα δεδομένα που δικαιολογούν τον ισχυρισμό (d : data)

-την εγγύηση (w : warrant) : ο κανόνας αναφοράς που επιτρέπει τα δεδομένα να είναι συνδεδεμένα με τον ισχυρισμό.

Σε οποιοδήποτε επιχείρημα το πρώτο βήμα εκφράζεται από μια γνώμη, έναν ισχυρισμό (claim). Το δεύτερο βήμα αποτελείται από την παραγωγή δεδομένων (data) που στηρίζουν τον ισχυρισμό. Η εγγύηση (warrant) δικαιολογεί γιατί να χρησιμοποιήσεις αυτά τα δεδομένα και μπορεί να είναι μια αρχή, ή ένας κανόνας που δρα σαν γέφυρα μεταξύ των δεδομένων και του ισχυρισμού. Ενώ επίσης, αναφέρεται ότι ενυπάρχει ένα ακόμη δομικό στοιχείο, η *υποστήριξη (backing)* η οποία δείχνει γιατί η εγγύηση πρέπει να είναι αποδεκτή αρχή. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η επιχειρηματολογία όπως και η απόδειξη έχει τριαδική δομή αλλά αυτό που διαφέρει, είναι ότι ο κανόνας αναφοράς (εγγυητή) σε μια απόδειξη είναι ένα αξίωμα, ένας ορισμός, η θεώρημα. Στην επιχειρηματολογία για μια εικασία, αυτά τα στοιχεία δεν ανήκουν απαραίτητα σε ένα θεωρητικό σύστημα (Pedemonte 2008).

Το σύστημα αναφοράς στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη

Προηγουμένως είδαμε ότι η επιχειρηματολογία και η απόδειξη έχουν κοινά λειτουργικά χαρακτηριστικά, ενώ επίσης παρουσιάζουν και οι δυο τριαδική δομή που μπορεί να χαρακτηριστεί με κοινούς όρους, όπως υποστηρίζει τουλάχιστον το μοντέλο Toulmin. Με βάση τα παραπάνω, φαίνεται πως η επιχειρηματολογία και η απόδειξη είναι όμοιες διαδικασίες. Ωστόσο, ο Duval (1991, στο Douek 1998) μας δείχνει τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δυο, κυρίως ως προς το σύστημα αναφοράς και τη γνωσιολογική του αξία.

Ο Duval (1991) κάνει μια γνωστική ανάλυση της παραγωγικής επιχειρηματολογίας (τυπική μαθηματική απόδειξη) έναντι της επιχειρηματολογικής οργάνωσης του συλλογισμού (επιχειρηματολογία) και διατείνεται πως διαφέρουν:

- Ως προς τα βήματα αναφοράς, αφού στον επιχειρηματολογικό συλλογισμό, το σημασιολογικό περιεχόμενο των προτάσεων είναι κρίσιμο, ενώ στον παραγωγικό συλλογισμό οι προτάσεις δεν εμπλέκονται άμεσα με το περιεχόμενό τους αλλά με τη θέση χειρισμού τους.
- Ως προς τα βήματα συνοχής (enchaining), διότι ο συλλογισμός της επιχειρηματολογίας γίνεται με την ενίσχυση ή αντίθεση των επιχειρημάτων. Αντίθετα στο παραγωγικό συλλογισμό, το συμπέρασμα από ένα δοσμένο βήμα είναι η συνθήκη για την εφαρμογή ενός κανόνα αναφοράς του επόμενου βήματος.
- Όσον αφορά την γνωσιολογική αξία, ορισμένη σαν το βαθμό βεβαιότητας ή πεποίθησης, στο συλλογισμό της επιχειρηματολογίας, οι αληθείς

προτάσεις δεν έχουν την ίδια γνωσιολογική αξία, ενώ στα μαθηματικά οι αληθείς προτάσεις έχουν μόνο μία συγκεκριμένη γνωσιολογική αξία.

Αν παρακολουθήσουμε την ανάλυση του Duval για την επιχειρηματολογία, φαίνεται σαν να μην αναγνωρίζεται σύστημα αναφοράς για την επιχειρηματολογία, ενώ για την απόδειξη υπάρχει συστηματικά.

Η γνώμη της Douek (1998) όμως είναι πως καμία επιχειρηματολογία δε θα ήταν δυνατή στην καθημερινή ζωή αν δεν υπήρχε σύστημα αναφοράς να υποστηρίξει τα βήματα του συλλογισμού. Το σύστημα αναφοράς για την καθημερινή επιχειρηματολογία είναι κοινωνικά και ιστορικά καθορισμένο και ιδιαίτερα έμμεσο. Το σύστημα αναφοράς της μαθηματικής απόδειξης θεωρείται άμεσο και όχι κοινωνικά καθορισμένο, αλλά στο άρθρο της η Douek (1998) προσπαθεί να δείξει ότι αυτό δεν είναι αλήθεια, αλλά είναι κι αυτό το σύστημα κοινωνικά και ιστορικά καθορισμένο. Ένα επιχείρημά της είναι ότι το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά εξαρτάται από τους χρήστες και τους ακροατές ή αναγνώστες. Για παράδειγμα, στη 2^{ο}/βάθμια εκπαίδευση κάποιες λεπτομερείς αναφορές αναμένονται να υποστηρίξουν μια απόδειξη, αλλά στην επικοινωνία μεταξύ υψηλότερου επιπέδου καθηγητών αυτά μπορεί να θεωρηθούν προφανή και να παραβλέπονται. Όπως σημείωσαν οι Yackel και Cobb (1998), η ύπαρξη αλμάτων σχετικά με προφανή επιχειρήματα στην παρουσίαση μιας απόδειξης μπορεί να θεωρηθεί ένα σημάδι οικειότητας με τη γνώση που υπάρχει σε αυτή την απόδειξη (Douek, 1998). Από την άλλη πλευρά κάποιες προτάσεις που είναι δεκτές σαν αναφορές στη 2^{ο}/βάθμια εκπαίδευση αμφισβητούνται σε υψηλότερα επίπεδα.

Ο Thurston (Douek, 1998) λέει ότι τα θεμέλια των μαθηματικών είναι πιο επισφαλή (κλονιζόμενα) απ’ ότι τα μαθηματικά που κάνουμε. Επομένως για όλους σχεδόν τους χρήστες των μαθηματικών σε ένα δεδομένο κοινωνικό πλαίσιο το πρόβλημα της γνωσιολογικής αξίας δεν υφίσταται, παρόλο που ήταν και ακόμη είναι ένα σημαντικό ερώτημα για τα μαθηματικά όπως και για κάθε άλλο τομέα γνώσης.

Το σύστημα αναφοράς είναι πιο ευρύ από το σύνολο των άμεσων αναφορών. Στα μαθηματικά, όπως και σε άλλους τομείς, η γνώση που χρησιμοποιείται σαν αναφορά δεν αναγνωρίζεται πάντα άμεσα. Κάποιες αναφορές μπορεί να χρησιμοποιηθούν, αλλά ίσως να ανακαλυφθούν, να κατασκευαστούν ή επανακατασκευαστούν και δηλωθούν έπειτα.

Τελικά, επιχειρηματολογία και απόδειξη συγκλίνουν ή αποκλίνουν;

Σε τι διαφέρουν τελικά η επιχειρηματολογία και η απόδειξη; Και πόσο σημαντικές είναι οι διαφορές τους; Είναι τέτοιες που τις συνδέουν ή τις ξεχωρίζουν; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, την αντλούμε πάλι από την Pedemonte (2008, 2007). Πριν όμως προσπαθήσουμε να βρούμε τις διαφορές μεταξύ τους, είναι σημαντικό να πούμε, ότι κάποιοι ερευνητές όπως οι Harel & Sowder (1998, 2007) δεν διαχωρίζουν την επιχειρηματολογία από την απόδειξη, εφόσον χρησιμοποιούν τη λέξη 'απόδειξη' για να χαρακτηρίσουν όχι μόνο τις παραγωγικές αποδείξεις αλλά και τις εμπειρικές. Αντίθετα, κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν την ετερογένεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης από κοινωνική και επιστημολογική άποψη (Balacheff, 1988 στο Pedemonte 2008) καθώς και από γνωστική και επιστημολογική άποψη (Duval, 1995 στο Pedemonte 2008) .

Συγκεκριμένα, η έρευνα του Duval έδειξε ότι υπάρχει ένα 'δομικό κενό' μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης επειδή οι επαγωγικοί συλλογισμοί της επιχειρηματολογίας βασίζονται στο περιεχόμενο ενώ στην απόδειξη ακολουθούν παραγωγικό σχήμα (δεδομένα, ισχυρισμός και κανόνες επαγωγικού συλλογισμού). Μες στις αποδείξεις, τα βήματα είναι συνδεδεμένα με μια ανακυκλωτική διαδικασία: το συμπέρασμα από ένα βήμα λειτουργεί ως απαραίτητη προϋπόθεση για το επόμενο βήμα. Στην επιχειρηματολογία δεν είναι αυτό τόσο σημαντικό, αφού τα συμπεράσματα βασίζονται στο περιεχόμενο. Ωστόσο, η Pedemonte μιλά και για την επιχειρηματολογία ότι έχει τριαδική δομή, μόνο που στη θέση των κανόνων θέτει τον όρο 'εγγύηση'.

Απ' την άλλη μεριά, κάποιες άλλες έρευνες δείχνουν ότι η διαδικασία απόδειξης και η διαδικασία ελέγχου της απόδειξης ακολουθούν κριτήρια βασισμένα στο περιεχόμενο παρά σε τυπικά κριτήρια (Thurston 1994 στο Pedemonte 2008). Πολλά παραδείγματα συνέχειας έχουν παρατηρηθεί στη σχέση όπου απ' τη μια εξειδικεύεις την εικασία ή καθορίζεις μια αυστηρή υπόθεση και απ' την άλλη κάνεις δοκιμές για να αποδείξεις μια δήλωση (Lakatos, 1976; Thurston, 1994 στο Pedemonte 2008). Υποστηρίζοντας αυτή την άποψη, αλλά για διδακτικό σκοπό, μερικές έρευνες υπογραμμίζουν τη συνέχεια που υπάρχει μεταξύ της επιχειρηματολογίας σαν μια διαδικασία παραγωγής μιας πρότασης και της κατασκευής της απόδειξής της. (Boero, Garuti, Mariotti, 1996 στο Pedemonte 2008). Αυτή η συνέχεια ονομάζεται **γνωστική**

ενότητα. Σε μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος, συνήθως αναπτύσσεται μια επιχειρηματολογία για να παραχθεί μια εικασία. Η υπόθεση της γνωστικής ενότητας είναι ότι σε μερικές περιπτώσεις αυτή η επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για την κατασκευή της απόδειξης, με το να οργανώσουν κάποια από τα επιχειρήματα σε λογική σειρά. Πειραματικές έρευνες (Boero et al., 1996; Garuti, Boero, Lemut, Mariotti, 1996; Garuti, Boero, Lemut, 1998; Mariotti, 2001 στο Pedemonte 2008) δείχνουν ότι η απόδειξη είναι πιο «προσβάσιμη» στους μαθητές εάν έχει αναπτυχθεί επιχειρηματολογία για την κατασκευή ενός συμπεράσματος.

Η ίδια η Pedemonte όμως, σε άρθρο της (2007), δείχνει ότι η ανάλυση της γνωστικής ενότητας δεν καλύπτει όλες τις οπτικές της σχέσης μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Συγκεκριμένα, η γνωστική ενότητα δε λαμβάνει υπόψη της τη δομική συνέχεια μεταξύ των δύο διαδικασιών. Δομική συνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης υπάρχει όταν οι συλλογισμοί, και στη μία διαδικασία και στην άλλη, ακολουθούν την ίδια δομή (απαγωγικός, επαγωγικός ή παραγωγικός συλλογισμός). Για παράδειγμα υπάρχει δομική συνέχεια, αν κάποια απαγωγικά βήματα της επιχειρηματολογίας χρησιμοποιούνται και στην απόδειξη. Η έρευνα της Pedemonte (2007) έχει δείξει ότι η δομική συνέχεια είναι μια από τις πιθανές δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στην κατασκευή της απόδειξης. Γεγονός είναι (Pedemonte 2008) ότι οι μαθητές μερικές φορές δεν δύνανται να κατασκευάζουν απόδειξη, επειδή δε μπορούν να μετατρέψουν τη δομή της επιχειρηματολογίας σε παραγωγική δομή.

Βέβαια, η ίδια η Pedemonte (2008) ισχυρίζεται πως στη περίπτωση αλγεβρικής απόδειξης η δομική συνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης μπορεί να λείπει. Ακόμα κι αν οι μαθητές κάνουν απαγωγικά βήματα στην επιχειρηματολογία τους, δεν τα χρησιμοποιούν στην απόδειξή τους επειδή η παραγωγική δομή είναι πολύ δυνατή. Μέσα σε μια αλγεβρική απόδειξη, είναι ίσως πιο αυθόρμητο για τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν παραγωγική δομή παρά τα απαγωγικά βήματα που δημιουργούνται στην επιχειρηματολογία. Επίσης, όπως θα δούμε παρακάτω, όταν αφορά την επίλυση προβλημάτων για ιδιότητες αριθμών, η επιχειρηματολογία που μεσολαβεί πριν την απόδειξη κι έχει απαγωγικά βήματα, φαίνεται να βοηθά ορισμένες φορές στην απόδειξη.

Από τα παραπάνω, είδαμε ότι εφόσον θεωρήσουμε την επιχειρηματολογία και την απόδειξη σαν διακριτές οντότητες, η επιχειρηματολογία φαίνεται να προηγείται της απόδειξης, όταν δίνονται βέβαια οι κατάλληλες ευκαιρίες (ανοιχτά προβλήματα που

βάζουν το μαθητή να κάνει εικασίες). Η χρονική σχέση παίζει καθοριστικό ρόλο, καθώς η επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για την κατασκευή της απόδειξης και τότε λέμε ότι έχουμε γνωστική ενότητα, αλλά επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η δομή της επιχειρηματολογίας για την απόδειξη και να έχουμε δομική συνέχεια. Η δομική συνέχεια δεν είναι πάντα επιθυμητή, όταν επιθυμούμε για παράδειγμα μια απόδειξη παραγωγικού συλλογισμού, δεδομένου ότι, όπως μας πληροφορεί η Pedemonte (2007) οι περισσότερες επιχειρηματολογίες των παιδιών γίνονται με απαγωγικό συλλογισμό. Ωστόσο, η συνέχεια στο σύστημα αναφοράς, όπως φαίνεται από ένα παράδειγμα που αναφέρεται παρακάτω, είναι απαραίτητη και σε αυτό βοηθούν κάποια απαγωγικά βήματα.

Ο ρόλος της επιχειρηματολογίας στην αλγεβρική απόδειξη προβλημάτων που αφορούν ιδιότητες αριθμών

Στη περίπτωση επίλυσης προβλημάτων σχετικά με ιδιότητες αριθμών, η εποικοδομητική φάση της επιχειρηματολογίας μπορεί να χαρακτηριστεί από μια γενίκευση των αριθμητικών παραδειγμάτων και σε αυτή τη περίπτωση μια δομημένη επιχειρηματολογία μπορεί να βοηθήσει στην αιτιολόγηση μιας εικασίας.

Μερικές γνωστικές έρευνες στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Duval, 2002 στο Pedemonte 2008) υπογραμμίζουν το γνωστικό κενό που υπάρχει μεταξύ της φάσης της εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και αυτής της απόδειξης. Σύμφωνα με τον Duval υπάρχει γνωστικό χάσμα μεταξύ των δύο φάσεων. Αυτό το χάσμα πρέπει να γεφυρωθεί από τους μαθητές όταν εργάζονται από μια επιχειρηματολογία στην αλγεβρική απόδειξη. Χάσμα παρατηρείται επίσης από μεθοδολογική άποψη (Chevallard, 1989 στο Pedemonte 2008). Η επιχειρηματολογία που κατασκευάζεται για να επιλύσει προβλήματα πάνω σε ιδιότητες αριθμών μερικές φορές χαρακτηρίζεται από εξερευνήσεις βασισμένες σε αριθμητικά παραδείγματα. Έτσι το μεθοδολογικό χάσμα μεταξύ της εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι επίσης παρόν.

Ωστόσο, έχουν αναλυθεί δύο υποθέσεις από την Pedemonte, (2007b στο Pedemonte 2008).

Η πρώτη λέει ότι η δομημένη επιχειρηματολογία θα μπορούσε να ήταν χρήσιμη στο να μειώσει το γνωστικό κενό μεταξύ της εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και της απόδειξης. Στην άλγεβρα η απόδειξη χαρακτηρίζεται από μια πολύ παραγωγική δομή. Μόλις το πρόβλημα μετασχηματιστεί σε μαθηματική σχέση, τα παιδιά μετατρέπουν τη μία έκφραση στην άλλη με μηχανικό τρόπο. Επομένως, αντίθετα με τη περίπτωση της γεωμετρίας, οι μαθητές μάλλον δε θα έχουν

δυσκολία με τη δομική συνέχεια στη κατασκευή της απόδειξης. Προσφέρει συνέχεια στο σύστημα αναφοράς.

Η άλλη υπόθεση, που επιβεβαιώνεται κι από την έρευνά της (2008) λέει ότι ένα βήμα απαγωγικού συλλογισμού στη δομημένη επιχειρηματολογία μπορεί να βοηθήσει στο να διατηρήσει τη σύνδεση μεταξύ του συστήματος αναφοράς στην εποικοδομητική επιχειρηματολογία και του συστήματος στην απόδειξη, επειδή βοηθά τους μαθητές να διατηρήσουν τη σημασία των αριθμητικών παραδειγμάτων για να κατασκευάσουν εικασία και αλγεβρικές μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Θα αναφέρω ένα παράδειγμα για να γίνει κατανοητό. Σε έρευνα της Pedemonte (2008), δόθηκαν δύο προβλήματα σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το πρώτο πρόβλημα ήταν: «Πάρε οποιοδήποτε διψήφιο αριθμό. Αντέστρεψε τα ψηφία, ώστε να έχεις τώρα 2 αριθμούς. Κάνε την αφαίρεση του μικρότερου από τον μεγαλύτερο. Τι μπορείς να πεις για το αποτέλεσμα;»

Έπειτα από την ανάλυση των δοκιμίων, αναγνωρίστηκαν δύο διαδικασίες επίλυσης. Μία, όπου οι μαθητές από την εποικοδομητική επιχειρηματολογία (που κάνανε πριν την εικασία) πηγαίνανε και κάνανε κατευθείαν απόδειξη, η οποία έβγαινε λάθος και η άλλη διαδικασία όπου οι μαθητές μετά την εποικοδομητική επιχειρηματολογία, και την διατύπωση εικασίας, κάνανε πρώτα μια δομημένη επιχειρηματολογία με απαγωγικά βήματα κι έπειτα παρήγαγαν απόδειξη.

Παράδειγμα 1^{ης} περίπτωσης επίλυσης του προβλήματος

Η μαθήτρια κατασκευάζει την εικασία γενικεύοντας μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Η δομή της επιχειρηματολογίας είναι επαγωγική και το σύστημα αναφοράς βασίζεται στην αριθμητική.

Αν πάρω το 15και 51, τότε 51-15=36
Αν πάρω 16 και 61, τότε 61-16=45
Αν πάρω 35 και 53, τότε 53-35=18

Τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9

Εποικοδομητική επιχειρηματολογία της μαθήτριας

Η μαθήτρια μεταφράζει το κείμενο του προβλήματος σε αλγεβρική γλώσσα

Μπορώ να γράψω έναν αριθμό σαν αβ και τον αντίστροφό του σαν βα.
Τότε αβ-βα= 9κ
Πρέπει να αποδείξω αυτή τη σχέση

Αν αναλύσουμε την παραπάνω σκέψη, μεταφράζει το κείμενο του προβλήματος χρησιμοποιώντας αλγεβρικό σύστημα αναπαράστασης και κανόνες απ' τους οποίους οι δύο είναι αριθμητικοί και ο 3^{ος} αλγεβρικός.

Οι κανόνες για τους οποίους μιλάμε είναι οι εξής:

Κ1: ένας διψήφιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως αβ

Κ2: αν αβ ο διψήφιος αριθμός, τότε βα ο αντίστροφός του.

Κ3: ένας αριθμός πολλαπλάσιο του 9 μπορεί να γραφεί ως 9κ

Όμως, όταν πάει να κατασκευάσει μια απόδειξη, αλλάζει μορφή μετάφρασης στη μαθηματική σχέση αβ-βα κι εκφράζεται η πεποίθησή της στον αλγεβρικό τομέα, όπου το σύστημα αναπαράστασης και ελέγχου είναι στον αλγεβρικό τομέα. Θεωρεί ότι η παράσταση αβ-βα είναι ισοδύναμη με α*β-β*α . Ετσι, η μαθήτρια δεν κατασκευάζει την απόδειξη, απορρίπτει την εικασία της επειδή δεν αντιστοιχεί στα αποτελέσματα που παίρνει με τα αριθμητικά παραδείγματα.

αβ-βα=0 . τότε 0=9κ… όχι αυτό δεν είναι δυνατό.. αλλά δεν καταλαβαίνω…
ίσως η εικασία δεν είναι σωστή

Στο παραπάνω παράδειγμα, η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα έγινε χωρίς τη διατήρηση του νοήματος των γραμμάτων-μεταβλητών. Δεν υπάρχει συνέχεια στο σύστημα αναφοράς μεταξύ επιχειρηματολογίας και της λαθεμένης απόδειξης. Επίσης δεν υπάρχει απαγωγική επιχειρηματολογία που θα τη βοηθούσε να γεφυρώσει το κενό μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, όπως γίνεται στην επόμενη περίπτωση. Στη διαδικασία της απόδειξης, η μαθήτρια δεν επανέρχεται στα αριθμητικά παραδείγματα αλλιώς θα είχε δει ότι 51-15 δεν είναι ισοδύναμο με 5Χ1 - 1Χ5

Παράδειγμα 2^{ης} περίπτωσης επίλυσης του προβλήματος

Η μαθήτρια κατασκευάζει την εικασία γενικεύοντας από κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Η δομή της επιχειρηματολογίας είναι επαγωγική και το σύστημα αναφοράς βασίζεται στην αριθμητική

Αν πάρω το 32 και 23, τότε 32-23=9
Αν πάρω 63 και 36, τότε 63-36=27
Αν πάρω 13 και 31, τότε 31-13=18

Τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9

Έπειτα, κατασκευάζει μια δομημένη επιχειρηματολογία για να αιτιολογήσει την εικασία. Σε αυτή την επιχειρηματολογία το πρώτο βήμα είναι απαγωγικό: προσπαθεί να αιτιολογήσει την εικασία της σκεπτόμενη τα προηγούμενα παραδείγματα. Υπάρχει συνέχεια μεταξύ εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και της δομημένης.

Τώρα πρέπει να πω γιατί τα αποτελέσματα είναι πολλαπλάσια του 9. είναι δύσκολο.. τότε 32-23=9 … 9 φορές κάτι… αλλά γιατί;
Γράφει:
32-23=3*10 + 2 - 2*10 – 3 = 3* (10-1) – 2* (10-1)
63-36=6*10 + 3 - 3*10 – 6 = 6 * 9 -3 *9

Δομημένη επιχειρηματολογία

Η δομημένη επιχειρηματολογία βοηθά στη κατασκευή της απόδειξης, ενώ επίσης υπάρχει συνέχεια μεταξύ τους ως προς το σύστημα αναφοράς.

Τώρα πρέπει να αποδείξω γενικά.
Από τα παραδείγματα, μπορώ να γράψω τους δύο αριθμούς σαν 10χ+ψ και 10ψ+χ
Τότε, 10χ+ψ- (10ψ+χ) =10χ+ψ -10ψ –χ= 9χ-9ψ =9 (χ-ψ)
Αυτό είναι πολλαπλάσιο του 9.

Απόδειξη

Να πούμε ότι σε αυτό το παράδειγμα η δομημένη επιχειρηματολογία είναι βασισμένη στην αριθμητική, ενώ η απόδειξη σε αλγεβρικούς κανόνες. Υπάρχει συνέχεια μεταξύ των δύο γιατί ο κανόνας Κ1 (όπου ένας διψήφιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως αβ και είναι ίσος με α*10+β) στη δομημένη επιχειρηματολογία εφαρμόζεται και στην αριθμητική και στην άλγεβρα.

Σε αυτό το παράδειγμα, παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εποικοδομητική επιχειρηματολογία έχει επαγωγική δομή, όπου η εικασία-συμπέρασμα βγαίνει από αριθμητικά παραδείγματα. Στη δομημένη επιχειρηματολογία μπορούμε να βρούμε απαγωγικά βήματα, ενώ η απόδειξη είναι παραγωγική. Δεν παρατηρήθηκε δυσκολία στη μετάβαση από τη μια δομή στην άλλη, αντιθέτως τα απαγωγικά βήματα φαίνεται να έχουν ένα σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας επειδή μέσω αυτών η μαθήτρια δεν έχασε τη σύνδεση μεταξύ εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και απόδειξης.

Στις περιπτώσεις όπου τα παιδιά έκαναν σωστή απόδειξη, η Pedemonte σημείωσε δύο κοινές παρατηρήσεις:

Α) Ο έλεγχος της μοντελοποιημένης πεποίθησης στη δομημένη επιχειρηματολογία μπορεί να επικυρωθεί και στην αριθμητική και στην άλγεβρα. Η συνέχεια στο σύστημα αναφοράς βασίζεται σε αυτό το γεγονός: οι πεποιθήσεις των μαθητών είναι έγκυρες και στους δύο τομείς και μπορούν να εκφραστούν και στους δύο τομείς.

Β) Η δομημένη επιχειρηματολογία περιέχει απαγωγικά βήματα, τα οποία πιθανόν μειώνουν το κενό ανάμεσα στην αριθμητική της επιχειρηματολογίας και στην άλγεβρα της απόδειξης. Ενισχυτικό αυτής της άποψης είναι κι ότι στις περιπτώσεις όπου δεν παράχθηκε σωστή απόδειξη, δεν υπήρχαν απαγωγικά βήματα.

Γενικά η Pedemonte (2008) μέσα από τη μελέτη της βγάζει το συμπέρασμα ότι η δομημένη επιχειρηματολογία έχει πολύ σημαντικό ρόλο και σε μερικές περιπτώσεις διατηρεί τη συνέχεια μεταξύ εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και της αλγεβρικής απόδειξης. Το συμπέρασμα αυτό μας καλεί να δώσουμε περισσότερη σημασία στην επιχειρηματολογία των παιδιών κατά την επίλυση προβλημάτων, διότι φαίνεται πως η επιχειρηματολογία έχει πολύ βασικό ρόλο στην απόδειξη.

Θεωρητικό πλαίσιο για να αντιληφθεί κανείς την έννοια της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά

Τι στοιχεία πρέπει να έχει ένα επιχείρημα για να θεωρηθεί ως απόδειξη; Πεποίθηση της Zack (1997) είναι ότι για να θεωρηθεί ένα επιχείρημα ως απόδειξη, οι μαθητές πρέπει όχι μόνο να πείσουν, αλλά και να εξηγήσουν. Η Hanna επίσης έχει δηλώσει ότι οι αποδείξεις που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση και οι οποίες εξηγούν πρέπει να προτιμώνται έναντι εκείνων που απλώς αποδεικνύουν (1995 στο Zack, 1997). Τα κριτήρια που επέλεξαν οι μαθητές στην έρευνα της Zack (1997) για το πώς πρέπει να είναι μια απόδειξη ήταν:

Α) να υπάρχει ανάγκη για απόδειξη

Β) η απόδειξη πρέπει να είναι λογική

Γ) το πρόσωπο που τη παρουσιάζει πρέπει να πει γιατί ισχύει.

Ο Στυλιανίδης (2007) προτείνει ένα θεωρητικό πλαίσιο που καθοδηγεί και την ανάλυση των επεισοδίων του. Το πλαίσιο αποτελείται από δύο κατευθυντήριες αρχές για αντιληφθεί κανείς την έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά του σχολείου: την αρχή της διανοητικής ειλικρίνειας και την αρχή του συνέχειας. Αυτές οι δύο αρχές

μπορούν να είναι χρήσιμες στο να αντιληφθεί κανείς κι άλλες έννοιες στα σχολικά μαθηματικά αλλά και ευρύτερα.

Η αρχή της διανοητικής ειλικρίνειας αναφέρει ότι η έννοια της απόδειξης πρέπει να νοηθεί έτσι ώστε να είναι, ταυτόχρονα, έντιμη στα μαθηματικά ως επιστήμη και να τιμά τους μαθητές σαν μαθητευομένους μαθηματικών. Η αρχή της διανοητικής ειλικρίνειας είναι εμπνευσμένη από το έργο του Bruner (1960) ο οποίος ήταν ένας από τους πρώτους που υποστηρίζουν τη δυνατότητα να επιτευχθεί ισορροπία μεταξύ των επιστημονικών συλλογισμών και αυτών των μαθητών, υποθέτοντας επίσης ότι *«οποιοδήποτε θέμα μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά σε κάποια ειλικρινή μορφή σε οποιοδήποτε παιδί σε οποιοδήποτε στάδιο της ανάπτυξης»*. Από τότε, αρκετοί εκπαιδευτικοί μαθηματικών κι άλλοι εκπαιδευτικοί αποτελούν παράδειγμα για τη δυνατότητα και το πλεονέκτημα του να δημιουργήσεις περιβάλλοντα στην τάξη που δεσμεύονται να τιμήσουν τόσο τους επιστημονικούς όσο και τους απλούς συλλογισμούς των μαθητών (Ball, 1993; Ball and Wilson, 1996; Lampert, 1992 στο Stylianides 2007).

Η αρχή του συνέχειας δηλώνει ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια στο πώς διαμορφώνεται η έννοια της απόδειξης στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης, έτσι ώστε οι εμπειρίες των μαθητών να έχουν συνοχή. Σύμφωνα με αυτό, μια διαμόρφωση της έννοιας της απόδειξης στο δημοτικό, πρέπει να διευθετήσει το πρόβλημα της συνέχειας που χαρακτηρίζει τις εμπειρίες των μαθητών στο σχολείο γενικότερα.

Οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν πρώτη φορά την απόδειξη στη γεωμετρία και όταν αυτό συμβαίνει, η απόδειξη φαίνεται σαν κάτι άγνωστο γι’ αυτούς και παράξενο, παρά σαν φυσική επέκταση των προηγουμένων μαθηματικών εμπειριών τους (Ball et al., 2002; Moore, 1994; Sowder and Harel, 1998; Usiskin, 1987 στο Stylianides 2007). Επίσης, είναι σημαντικό, οι μαθητές να ασχολούνται με μια συνεπή έννοια της απόδειξης κατά τη διάρκεια όλων των βαθμίδων: οι μαθητές δε θα’πρεπε να αναπτύσσουν μια έννοια της απόδειξης στο δημοτικό σχολείο, η οποία θα πρέπει να αναιρεθεί ή να ξεχαστεί στο γυμνάσιο (Martin and Harel, 1989 στο Stylianides 2007).

Ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης

Οι συνέπειες από την άποψη του Duval, για το δομικό κενό μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, υποστηρίζουν την εξειδικευμένη διδασκαλία κανόνων, βασισμένους σε σχεδιαγράμματα για την κατασκευή ενός παραγωγικού βήματος. Ωστόσο, η διδασκαλία της απόδειξης, η οποία βασίζεται σε αναπαραγωγική μάθηση (οι αποδείξεις παρουσιάζονται στους μαθητές, δεν χρειάζεται να τις κατασκευάσουν) φαίνεται να είναι ανεπιτυχής. Αντιθέτως ανοιχτά προβλήματα τα οποία απαιτούν μια εικασία φαίνεται να είναι πολύ αποτελεσματικά για την εισαγωγή στη μάθηση της απόδειξης, επειδή η δραστηριότητα της επιχειρηματολογίας φαίνεται να συνηγορεί υπέρ της κατασκευής απόδειξης. (Boero et al., 1996 στο Pedemonte 2008)

Το NCTM (2000, στο Knuth, 2002) επίσης προτείνει πως τα διδακτικά προγράμματα οφείλουν να στοχεύουν από τη νηπιακή ακόμα ηλικία στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών:

- Να αναγνωρίζουν το συλλογισμό-αιτιολόγηση και την απόδειξη σαν βασικές όψεις των μαθηματικών
- Να διαμορφώνουν και να ερευνούν μαθηματικές εικασίες
- Να αναπτύσσουν και να αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις
- Και να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν ποικίλα είδη αιτιολόγησης και μεθόδους απόδειξης

(Knuth 2002)

Φυσικά, για να επιτύχουν οι παραπάνω στόχοι εννοείται πως οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να παρουσιάσουν τη σκέψη τους, διότι όλοι συμβάλλουν με το να αξιολογεί ο ένας τη σκέψη του άλλου και παρέχουν πλούσια περιβάλλοντα για την εκμάθηση του μαθηματικού συλλογισμού (NCTM *2000, σελ.58* στο Knuth, 2002*)*. Τέτοιες ενέργειες μπορούν επίσης να δράσουν σαν έναυσμα για συζήτηση της επεξηγηματικής ποιότητας διαφόρων επιχειρημάτων. Έτσι, οι μαθητές ενθαρρύνονται να ψάχνουν επιχειρήματα που δείχνουν τους λόγους για τους οποίους οι προτάσεις είναι αληθείς. Επιπλέον, η παρουσίαση και συζήτηση επιχειρημάτων μπορεί να βοηθήσει να φανούν σχέσεις μεταξύ περιοχών των μαθηματικών που οι μαθητές

έβλεπαν να μη συνδέονται (Knuth 2002). Επίσης, δε πρέπει να παραλείπεται η απόδειξη, όπου είναι δυνατό. Η Hanna (2000) υποστηρίζει πως στόχος των εκπαιδευτικών είναι να χρησιμοποιήσουν τον ενθουσιασμό κι ευχαρίστηση της διερεύνησης για να ενεργοποιήσουν τους μαθητές να δώσουν απόδειξη ή να παρακολουθήσουν μια απόδειξη που τους δίνεται.

Ποιος όμως είναι ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού στη φάση της διερεύνησης;

Κατά τη διάρκεια των ερευνών της, η Yackel (2002) παρατήρησε μια κοινή λανθασμένη πεποίθηση ως προς τις προσεγγίσεις των δασκάλων των μαθηματικών. Αυτή η πεποίθηση υποστηρίζει ότι αν οι δάσκαλοι θέλουν οι μαθητές τους να κατασκευάζουν τα δικά τους μαθηματικά νοήματα, τότε οι ίδιοι πρέπει να αποφύγουν να δίνουν μαθηματικές ιδέες στη συζήτηση. Πρέπει να απέχουν εντελώς δηλαδή. Κάτι με το οποίο η Yackel (2002) δε συμφωνεί. Θεωρεί ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι καθαρά συνδεδεμένος με αυτό που αποκαλείται μαθηματικό περιεχόμενο. Στο άρθρο της [Yackel (2002)] δείχνει πώς ο δάσκαλος μπορεί να προκαλέσει τη προσοχή σε σημαντικές μαθηματικές έννοιες. Δεν πρέπει όμως να καθοδηγεί προς συγκεκριμένη κατεύθυνση ακόμα κι όταν οι μαθητές της βρίσκονται σε διαφωνία.

Σύμφωνα με την Yackel (2002), αν οι εκπαιδευτικοί δώσουν έμφαση στην επιχειρηματολογία μπορούν να παραθέσουν ερεθίσματα για μαθηματικές συζητήσεις για νέες μαθηματικές ιδέες και εργαλεία. Επισημαίνει επίσης ότι οι δάσκαλοι πρέπει να έχουν σε βάθος κατανόηση της μαθηματικής εννοιολογικής ανάπτυξης των μαθητών καθώς και μια προχωρημένη κατανόηση μαθηματικών εννοιών που κρύβονται πίσω από τις δραστηριότητες. Η βαθιά μαθηματική γνώση των δασκάλων μπορεί να βοηθήσει, δρώντας συμπληρωματικά στα λεγόμενα των μαθητών, ώστε να γίνουν συνδέσεις και με άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Ακόμη, οι δάσκαλοι πρέπει να κατανοούν πώς οι μαθητές τους νοούν κάποιες μαθηματικές ιδέες και να αξιολογούν τι μπορούν και τι δε μπορούν να κάνουν οι μαθητές από μόνοι τους. Τέλος, είναι σημαντικό ο δάσκαλος να αντιλαμβάνεται την ιδέα του μαθητή. Αν δε μπορεί να το κάνει αυτό, θα είναι πλήγμα και για τον ίδιο το μαθητή ο οποίος θα αμφισβητεί την αξιοπιστία της ιδέας του και πιθανόν την ικανότητά του να παράγει μαθηματικά επιχειρήματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Γιατί να μιλήσουμε για την απόδειξη στο Δημοτικό σχολείο;

Η Απόδειξη είναι θεμελιώδους σημασίας για να κάνει κανείς και να γνωρίζει μαθηματικά - είναι η βάση της μαθηματικής κατανόησης και έχει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη, στην κατάρτιση και στην επικοινωνία με μαθηματική γλώσσα (Kitcher,1984;Polya,1981 στο Stylianides 2007). Ο κεντρικός ρόλος της απόδειξης στη μαθηματική πράξη έχει οδηγήσει αρκετούς μελετητές σε πολλές χώρες να τονίσουν τη σημασία της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά (π.χ. Balacheff, 1988; Ball et al., 2002; Healy and Hoyles, 2000; Mariotti, 2000 στο Stylianides 2007).

Παρά την αυξανόμενη εκτίμηση του ρόλου της απόδειξης στις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών σε όλες τις βαθμίδες, λίγη έρευνα έχει επικεντρωθεί στο θέμα της κατανόησης και του χαρακτηρισμού της έννοιας της απόδειξης στο δημοτικό σχολείο (Zack 1997, Stylianides 2007). Ωστόσο, στη Βόρεια Αμερική, η τρέχουσα έρευνα και πολιτική της παιδείας συνιστά ότι η απόδειξη πρέπει να ενσωματωθεί στις μαθηματικές εμπειρίες, ακόμη και μαθητών δημοτικού σχολείου (π.χ. Ball & Bass, 2003; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994; Yackel and Hanna 2003 στο Stylianides 2007 & στο Komatsu 2010). Μάλιστα, η έκδοση του NCTM 'Principles and Standards' (2000, στο Knuth, 2002) προτείνει *ότι επιχειρηματολογία κι απόδειξη πρέπει να είναι μέρος του αναλυτικού προγράμματος σε όλες τις βαθμίδες, ακόμα κι από το νηπιαγωγείο*. Επίσης, οι Maher & Martino (1996, στο Zack 1997) και η Lampert (1990, στο Zack 1997) προτείνουν ότι η ανάμειξη στον επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό που οδηγεί στη κατασκευή απόδειξης πρέπει να αρχίσει από το επίπεδο του δημοτικού σχολείου.

Όμως, και στην Ελλάδα, σύμφωνα με το νέο πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., 2011), επιδιώκεται να αναδειχθούν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης: η γενίκευση, η αφαίρεση, η ακρίβεια, η συντομία, καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Η μαθηματική εκπαίδευση έχει στρέψει πλέον το ενδιαφέρον της από την τυπική εκμάθηση μαθηματικών εννοιών στη δυναμική προσέγγιση των τρόπων με τους οποίους δημιουργούνται και λειτουργούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Η εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει δράσεις όπως η αναγνώριση, η συμπλήρωση, η περιγραφή και η

γενίκευση κανονικοτήτων (γεωμετρικών και αριθμητικών), η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διάφορων αναπαραστάσεων (λεκτικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και η μετάβαση από τη μία παράσταση στην άλλη (Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., 2011). Τονίζεται όμως ότι η εισαγωγή των μαθητών στις αλγεβρικές έννοιες και δομές, ειδικά στις μικρές τάξεις, είναι αναγκαίο να γίνεται με δραστηριότητες που αναδεικνύουν τις αλγεβρικές έννοιες (κανονικότητα, συνάρτηση, ισότητα, ανισότητα) μέσα από τη *διερεύνηση καταστάσεων της πραγματικής ζωής*.

Αυτό το νέο είδος μαθηματικών του δημοτικού σχολείου μοιάζει με αυτό που *οι* Robert & Kaput (1999 στο Blanton & Kaput, 2004) αποκαλούν ως πρώιμη άλγεβρα. Οι Robert & Kaput (1999) υποστηρίζουν ότι λόγω των αυξανόμενων σύνθετων μαθηματικών του 21^{ου} αι., απαιτείται από τα παιδιά του δημοτικού σχολείου, μια εμπειρία πέρα από την αριθμητική και υπολογιστική ικανότητα, που να ασχολείται με πιο βαθιά δομή των μαθηματικών. Σκοπός αυτής είναι να εμβαθύνει στην κατανόηση της δομής και της γενικευσιμότητας των μαθηματικών, κι όχι να παρέχει μεμονωμένες εμπειρίες υπολογισμών.

.Ο Gardiner (1992 στο Zack 1997) τονίζει ότι «για να δαμάσουμε το άπειρο, χρειαζόμαστε απόδειξη» και υποστηρίζει ότι η μορφή και η γλώσσα του συλλογισμού αλλάζει όσο μεγαλώνουν οι μαθητές, αλλά δεν αλλάζει η απαίτηση ότι ο μαθηματικός συλλογισμός πρέπει να είναι:

α) γενικός (δηλαδή έγκυρος για όλα τα πιθανά παραδείγματα)

β) απόλυτα πειστικός (1992,σελ.4).

Ο Στυλιανίδης (Stylianides, 2007) επισημαίνει πως αν η έρευνα αναπτύσσει μια διαμόρφωση της έννοιας της απόδειξης για τις μικρές βαθμίδες, που θα είναι κατάλληλη και για τους μικρούς μαθητές αλλά και σύμφωνη με το πώς κατανοείται η απόδειξη στις μεγαλύτερες βαθμίδες, θα υπάρξει ένα γερό θεμέλιο πάνω στο οποίο εκπαιδευτικοί μαθηματικών μπορούν να αναπτύξουν ένα συνεκτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία της απόδειξης σε όλες τις βαθμίδες. Η ανάπτυξη ενός τέτοιου προγράμματος είναι σημαντική γιατί στις μέρες μας, αρκετή διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό εστιάζει σε αριθμητικές έννοιες, υπολογισμούς και αλγορίθμους και έπειτα όταν οι μαθητές πηγαίνουν στο γυμνάσιο, απαιτείται ξαφνικά από αυτούς να κατανοήσουν και να γράψουν αποδείξεις, κυρίως στη γεωμετρία. (Ball et al., 2002, σελ.907–908 στο Stylianides 2007). Αρκετοί ερευνητές (Mariotti, 2000; Moore, 1994; Sowder and Harel, 1998; Usiskin, 1987 στο Stylianides 2007) έχουν αναγνωρίσει την απότομη εισαγωγή των μαθητών στην απόδειξη της δευτεροβάθμιας

εκπαίδευσης ως μια πιθανή εξήγηση για τις πολλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές της δευτεροβάθμιας με την απόδειξη (Coe and Ruthven, 1994; Fischbein, 1982; Healy and Hoyles, 2000 στο Stylianides 2007). Έτσι λοιπόν, θα ήταν καλό, να σκεφτούμε λίγο καλύτερα μήπως μπορούμε να εντάξουμε την έννοια της απόδειξης από το Δημοτικό.

Τι εννοούμε όμως ως απόδειξη στο Δημοτικό σχολείο;

Η ιδέα της εισαγωγής της απόδειξης στις μαθηματικές εμπειρίες μαθητών από την έναρξη της σχολικής τους ζωής δημιουργεί το σημαντικό ζήτημα του τι θα νοείται ως απόδειξη στις μικρές βαθμίδες (Stylianides 2007).

Οι αρχές της διανοητικής ειλικρίνειας και της συνέχειας, που περιγράψαμε προηγουμένως, μπορούν να μας κάνουν να δούμε ποια επιχειρήματα πιστοποιούνται ή όχι σαν απόδειξη στο δημοτικό σχολείο. Για παράδειγμα, ένα εμπειρικό επιχείρημα, σύμφωνα με τον Στυλιανίδη (2007), δε μπορεί να πιστοποιηθεί σαν απόδειξη στο δημοτικό σχολείο, επειδή, αν γίνει αυτό, θα παραβιαστούν και οι δύο αρχές. Η αρχή της διανοητικής ειλικρίνειας θα παραβιαστεί γιατί α) στα μαθηματικά, η εμπειρική απόδειξη δε συνιστά απόδειξη και β) ψυχολογικές διαπιστώσεις και τα υπάρχοντα αποδεικτικά στοιχεία δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά του δημοτικού μπορούν να ασκηθούν επιτυχώς στο παραγωγικό συλλογισμό και στην απόδειξη (Carpenter et al 2003., Galotti et al., 1997; Light et al., 1989; Maher and Martino, 1996 στο Stylianides, 2007). Η αρχή της συνέχειας θα παραβιαζόταν επειδή, αν οι δάσκαλοι των δημοτικών σχολείων οδηγήσουν τους μαθητές τους να πιστεύουν ότι μερικά καλοδιαλεγμένα παραδείγματα αποτελούν απόδειξη, είναι φυσικό να περιμένουμε ότι η έννοια της απόδειξης στη γεωμετρία του γυμνασίου και σε άλλα μαθήματα θα είναι δύσκολη για τους μαθητές. (Martin & Harel, 1989, σελ. 41-42 στο Stylianides 2007)

Το άρθρο του Στυλιανίδη (2007) στοχεύει να βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τα γνωρίσματα τα οποία πρέπει να έχει ένα μαθηματικό επιχείρημα (ή απλά επιχείρημα) για να μετρηθεί ως απόδειξη σε αυτό το πλαίσιο.

Για το σκοπό αυτό αναλύει ένα επεισόδιο από Τρίτη τάξη Δημοτικού, που προσφέρει ένα βαθύ υπόβαθρο για να εξερευνηθούν τα τέσσερα στοιχεία ενός επιχειρήματος που είναι σημαντικά ώστε να αποφασίσουμε για το αν το επιχείρημα λειτουργεί σαν απόδειξη. Τα τέσσερα στοιχεία είναι τα εξής:

- Το θεμέλιο του επιχειρήματος (δηλαδή, αυτό που αποτελεί τη βάση του: ορισμοί αξιώματα, κ.λπ.)

- Η διαμόρφωση (δηλαδή, πώς αναπτύσσεται: ως λογικός παραγωγικός συλλογισμός, σαν γενίκευση μέσα από συγκεκριμένες περιπτώσεις, κλπ)
- Η αναπαράσταση (δηλαδή πώς εκφράζεται: με τη χρήση καθημερινής γλώσσας, αλγεβρικά κ.λπ.)
- Κοινωνική διάσταση (δηλαδή, πώς ακούγεται έξω στο κοινωνικό πλαίσιο της κοινότητας όπου δημιουργείται)

Ο Στυλιανίδης (2007β στο Komatsu 2010) περιέγραψε μια διαμόρφωση της έννοιας της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά που θα μπορούσε να εφαρμοστεί στο περιεχόμενο της τάξης όπως ακολουθεί:

Η **απόδειξη** είναι ένα μαθηματικό επιχείρημα, μια συνδεδεμένη σειρά ισχυρισμών υπέρ ή ενάντια σε ένα μαθηματικό ισχυρισμό, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. χρησιμοποιεί προτάσεις αποδεκτές από τη κοινότητα της τάξης που είναι αληθείς και διαθέσιμες χωρίς περαιτέρω αιτιολόγηση

2. χρησιμοποιεί μορφές επιχειρηματολογίας που είναι έγκυρες και γνωστές ή μέσα στο επίπεδο εννοιών που μπορεί να φτάσει η κοινότητα της τάξης.

3. για την επικοινωνία χρησιμοποιούνται μορφές έκφρασης (αναπαραστάσεις του επιχειρήματος) που είναι κατάλληλες και γνωστές ή μέσα στο εννοιολογικό επίπεδο που μπορεί να φτάσει η κοινότητα της τάξης.

Σύμφωνα με αυτή τη διαμόρφωση της έννοιας, οι αποδείξεις δεν περιορίζονται στις επίσημες αποδείξεις που αναπαρίστανται με μαθηματικά σύμβολα σε πολλές περιπτώσεις. Ακόμη, χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη η μαθηματική αυθεντικότητα και η ανάπτυξη των μαθητών. Ανεπίσημες αποδείξεις, για παράδειγμα αποδείξεις με διαγράμματα ή αποδείξεις βασισμένες σε generic παραδείγματα (Balacheff 1988), θα πρέπει να αναγνωρίζονται σαν αποδεκτές ειδικά στο δημοτικό σχολείο (Komatsu 2010).

Η επιλογή των τεσσάρων αυτών στοιχείων ενός επιχειρήματος βρίσκει υποστήριξη από το πώς επιχειρήματα και αποδείξεις διαμορφώνονται στην επιστήμη των μαθηματικών, όπου επιχειρήματα και αποδείξεις βασίζονται σε αποδεκτές προτάσεις όπως οι ορισμοί και τα αξιώματα (βλ. θεμέλιο), χρησιμοποιούν αποδεκτούς

κανόνες της ορθής εξαγωγής συμπερασμάτων, όπως οι λογικές ισοδυναμίες (βλ. διαμόρφωση) και εκφράζονται χρησιμοποιώντας κατάλληλη μαθηματική γλώσσα (βλ. αναπαράσταση) (Kitcher, 1984 στο Stylianides 2007).

Επιπλέον, η διαδικασία αποδοχής ενός επιχειρήματος ως απόδειξη στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό σε κοινωνικούς μηχανισμούς της μαθηματικής κοινότητας (Ernest, 1998; Tymoczko 1986/1998 στο Stylianides 2007). Μπορούμε να βασιστούμε στην κρίση μιας μαθητικής κοινότητας κάποιας τάξης δημοτικού για την αποδοχή ενός επιχειρήματος; Με ένα παράδειγμα που μας παρουσιάζει, ο Στυλιανίδης (2007) μας προτρέπει να δίνουμε περισσότερη έμφαση στα τρία πρώτα στοιχεία του επιχειρήματος κι έπειτα στη κοινωνική διάσταση κι εξηγεί γιατί.

Σ' ένα επιχείρημα που δόθηκε από ένα κορίτσι γ' τάξης δημοτικού, στην έρευνά του ο Στυλιανίδης (2007) το δέχτηκε σαν απόδειξη, αφού πληρούσε τα τρία πρώτα στοιχεία, ενώ δεν πληρούσε το 4^{ο} της κοινωνικής διάστασης, δεδομένου ότι οι συμμαθητές του κοριτσιού δεν πείστηκαν. Ο Στυλιανίδης εξηγεί ότι παρέβλεψε το 4^{ο} στοιχείο, επειδή η τάξη δεν έχει αναπτύξει ακόμα όλους τους απαραίτητους κανόνες του λόγου για να υποστηρίξουν το επιχείρημα σαν απόδειξη. Οι μαθητές μικρής ηλικίας τώρα μόλις αρχίζουν να σχηματίζουν αλληλεπιδραστικά με τους δασκάλους τους σίγουρους κανόνες του λόγου. Η ανάπτυξη και αποδοχή τέτοιων κανόνων είναι μακρόχρονη και απαιτητική διαδικασία (Yackel and Cobb, 1996 στο Stylianides 2007). Έτσι, σε μια τέτοια περίπτωση, ο Στυλιανίδης προτείνει ο δάσκαλος να κάνει το επιχείρημα του παιδιού επίσημο και δεκτό σαν απόδειξη, στο τέλος του επεισοδίου να εξηγήσει στους μαθητές γιατί πιστοποιείται το επιχείρημα αυτό ως απόδειξη, ενώ τα άλλα όχι. Για την εξήγησή του θα μπορούσε να αναφερθεί στα 3 στοιχεία του επιχειρήματος (θεμέλιο, διαμόρφωση, αναπαράσταση). Η πράξη αυτή θα ξεκινούσε μια κατάσταση για θεσμοθέτηση (Brousseau, 1981 στο Stylianides 2007) που θα νομιμοποιούσε το επιχείρημα και θα εγγυόταν ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστεί θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως γνώση που θα διατηρηθεί για μελλοντική εργασία. Η πράξη αυτή του δασκάλου επίσης θα βοηθούσε να ιδρυθούν στη μαθητική κοινότητα βέβαιοι κανόνες του λόγου που θα υποστήριζαν το επιχείρημα σαν απόδειξη.

Ενδεικτικές έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές δημοτικού

Οι Harel & Sowder (2007) τονίζουν το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που έχουν έρευνες που έχουν γίνει για την απόδειξη σε παιδιά δημοτικού**.** Λόγω του πνεύματος των 'νέων μαθηματικών' κάποιες έρευνες κατά το 1970 εστίασαν στην απόδειξη σε μικρά παιδιά. Ο Lester (1975 στο Harel & Sowder, 2007) για να δει αν και πότε τα παιδιά μπορούν να ασχοληθούν με την απόδειξη ή με περίπου αποδεικτικές δραστηριότητες, επινόησε ένα παραγωγικό σύστημα εμπνευσμένο από τις αρχές λειτουργίας του υπολογιστή. Το σύστημα αυτό είχε τη μορφή παιχνιδιού με καλά ορισμένους κανόνες (αξιώματα) και σκοπούς (θεωρήματα) που επιτυγχάνονται με το να εφαρμοστούν οι κανόνες (με αποδείξεις). Δηλαδή οι μαθητές ασχολούνταν έμμεσα με ένα αξιωματικό σύστημα. Πήρε ως δείγμα 19 μαθητές για καθεμία από τις 4 ομάδες. Μία ομάδα από τις τάξεις 1-3, η δεύτερη ομάδα από τις τάξεις 4-6, η τρίτη από τις τάξεις 7-9 και η τέταρτη από τις τάξεις 10-12. Η 3^{η} ομάδα των 7-9 είχε παρόμοια επίδοση με αυτή των 10-12. Και οι μαθητές των 4-6 έλυσαν περίπου όσες δραστηριότητες έλυσαν και οι μεγαλύτεροι , αλλά πήρε πιο πολλή ώρα. Ο Lester έτσι υποστήριξε ότι «ακόμα και οι μαθητές των μεγάλων τάξεων δημοτικού μπορούν να είναι επιτυχείς σε μαθηματικές δραστηριότητες που σχετίζονται στενά με την απόδειξη».

Πράγματι ο King (1970,1973 στο Harel & Sowder, 2007) ανέπτυξε μία ενότητα διάρκειας 17 ημερών σε σχέση με θεωρία αριθμών του δημοτικού. Βρήκε ότι μια ομάδα δέκα μαθητών έκτης τάξης μπορούσε να επαναπαράγει τις αποδείξεις που είχαν αναπτύξει αρχικά με την βοήθεια των δασκάλων τους (σε αντίθεση με μια ομάδα ελέγχου) αλλά επίσης φάνηκε ότι οι αποδείξεις γίνονταν από μηχανιστική μνήμη (παπαγαλία) . Άλλο παράδειγμα πρώιμης εμφάνισης της απόδειξης έρχεται από μια εργασία (Schifter, et al., 2003 στο Harel & Sowder, 2007) που σκοπεύει να εντάξει την άλγεβρα στο δημοτικό σχολείο). Η εργασία τους δείχνει ότι οι μαθητές μπορεί να είναι πεπεισμένοι ότι η απάντηση σ' ένα ερώτημα είναι 'ναι' επειδή έχουν δοκιμάσει πολλά παραδείγματα (εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα), αλλά πιο μετά ίσως επιστρέψουν στην αβεβαιότητα επειδή είναι ενήμεροι ότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που δεν εξέτασαν. Και, όχι απρόσμενα, κάποιοι μαθητές θα υπερ-γενικεύσουν.

Η Lampert (1990 στο Dreyfus 1999), δίδαξε σε μια τάξη ε' δημοτικού και υποστήριξε τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που είναι κατάλληλες για τη δημιουργία μαθηματικών επιχειρημάτων. Στην έρευνα της, οι μαθητές της άρχισαν να κάνουν υποθέσεις που βασίζονταν στην επαγωγική θεώρηση των μοτίβων και να εξετάζουν

επίσης αυτά που παρατηρούσαν και τους λόγους που το μοτίβο τους συνεχιζόταν, ακόμα και σε αριθμούς που δεν έχουν δοκιμαστεί. Η Lampert συμπέρανε από την έρευνα της πως οι μαθητές της πέμπτης τάξης μπορούν να δείξουν παρόμοια ικανότητα με μαθητές κολλεγίου.

Οι Maher & Martino (1996 στο Dreyfus 1999) έκαναν μία μακρόχρονη έρευνα, διάρκειας πέντε ετών και αναφέρουν μια σειρά 11 επεισοδίων που τεκμηριώνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης κι επιχειρημάτων μιας μαθήτριας από την α' έως ε' δημοτικού. Η μαθήτρια προοδευτικά ανέπτυξε όχι μόνο την ικανότητά της να κατηγοριοποιεί και να οργανώνει τα δεδομένα, καθώς και να κάνει αποδείξεις σε περιβάλλοντα που ενθάρρυναν την ανάπτυξη των ιδεών της.

Ο Reid (2002 στο Komatsu 2010) έκανε μια έρευνα σε μαθητές ε' δημοτικού, όπου τους ζητούσε να βρουν το πλήθος τετραγώνων σε πίνακες ν*ν. Οι μαθητές του δεν απέδειξαν τις εικασίες τους αλλά τις εξέτασαν μόνο εμπειρικά. Αντίστοιχη δραστηριότητα, αλλά ζητούσε το άθροισμα αυτή τη φορά τέτοιων πινάκων ($1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots$) είχε πραγματοποιήσει και η Zack (1997) με μαθητές δημοτικού. Τα ευρήματα τους έδειξαν ότι οι μαθητές που πέτυχαν στο να πείσουν τους συμμαθητές τους είναι εκείνοι των οποίων οι αιτιολογήσεις βασίστηκαν σε γενικεύσεις. Επίσης φάνηκε ότι μια πεποίθηση προηγείται της απόδειξης και ότι τα επιχειρήματα είναι βασισμένα στη πεποίθηση ότι το μοτίβο τους 'δουλεύει' σε όλα τα παραδείγματα. Οι μαθητές δεν προσπαθούσαν να εξηγήσουν, γιατί ισχύει το μοτίβο. Μόνο όταν είχαν εμφανιστεί κι άλλα μοτίβα από άλλους συμμαθητές προσπάθησαν να αντεπιχειρηματολογήσουν για να δείξουν ότι εκείνα δεν ισχύουν.

Ο/Η Kotaro Komatsu σε άρθρο του (2010) μιλά για την έρευνά του σε δύο μαθητές δημοτικού στην Ιαπωνία ως προς τον τρόπο που επανεξετάζουν τις εικασίες τους και αποδείξεις τους όταν αντιμετωπίζουν αντιπαραδείγματα στις εικασίες τους που έχουν αποδείξει. Η δραστηριότητα που δόθηκε αφορούσε σχέσεις αριθμών και συγκεκριμένα την πρόσθεση αντίστροφων διψήφιων αριθμών (π.χ. 36+63). Οι μαθητές απέδειξαν την αρχική εικασία τους με χειραπτικά υλικά. Μετά το αντιπαράδειγμα όμως που τους έδωσε ο δάσκαλος, ανέλυσαν την απόδειξη τους και βρήκαν γιατί η εικασία ήταν λάθος και αναγνώρισαν το κομμάτι της απόδειξης που μπορούσε να εφαρμοστεί και για το αντιπαράδειγμα και συνέχισαν από κει και πέρα φτιάχνοντας μια νέα απόδειξη για νέα εικασία. Η τροποποίηση των εικασιών, σύμφωνα με τον/την Komatsu, δείχνει να είναι "the exception-barring method" με όρους του Lakatos (1976) όπου επανεξετάζεται η απόδειξη εντοπίζοντας τα ένοχα λήμματα για τα οποία το

καθολικό αντιπαράδειγμα είναι τοπικό. Επιπλέον, το ότι ειλικρινά αποδέχτηκαν το λάθος της αρχικής τους εικασίας και τη τροποποίησαν περιορίζοντας το εύρος της, ενδεικνύουν την «επαγωγική συμπεριφορά» ('inductive attitude') την οποία ο Polya (1954) ανέδειξε ως την ηθική ποιότητα του επιστήμονα. Αυτή η επαγωγική συμπεριφορά είναι σημαντική για να κάνει και να γνωρίζει κανείς μαθηματικά (Lampert, 1990).

Τέλος, αρκετοί ερευνητές έχουν δώσει έμφαση στην κοινωνικοπολιτισμική άποψη της εξερεύνησης και ενίσχυσης της ανάπτυξης των αποδεικτικών σχημάτων των μαθητών. Οι Blanton, et al. (2003 στο Harel & Sowder 2007) έχουν ερευνήσει τη φύση και το ρόλο αυτής της 'σκαλωσιάς' (scaffolding) στη μάθηση και διδασκαλία της απόδειξης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μαθητές που συμμετέχουν σε συζητήσεις όλης της τάξης μεταγνωστικού επιπέδου, έχουν όφελος στην ικανότητα κατασκευής μαθηματικών αποδείξεων. Επίσης, το να συμμετέχουν σε τέτοιου είδους συζητήσεις είναι μια συνήθεια του μυαλού που μπορεί να ενισχυθεί από τις παρακινήσεις των δασκάλων. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές μπορούν να εσωτερικεύουν τη δημόσια επιχειρηματολογία με τρόπους που διευκολύνουν την προσωπική τους κατασκευή απόδειξης, αν η ενίσχυση (scaffolding) σχεδιαστεί κατάλληλα για να το υποστηρίξει (Blanton et al., 2003 στο Harel & Sowder 2007)

Τα αποτελέσματα των ερευνών είναι ενθαρρυντικά. Ωστόσο, πρέπει να 'χει κανείς στο νου του ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου που παρακολούθησαν οι ερευνητές ήταν σε τάξεις προσεκτικά σχεδιασμένες και με διδασκαλίες που υποστηρίζουν το μαθηματικό συλλογισμό, το επιχείρημα και την αιτιολόγηση. Επομένως οι μελέτες δείχνουν μόνο ότι η μεταφορά στο παραγωγικό συλλογισμό είναι δυνατή, όχι ότι συμβαίνει συχνά αυτό. Δε συμβαίνει συχνά αυτό διότι οι περισσότεροι μαθητές δεν έμαθαν ποτέ τι μετρά ως μαθηματικό επιχείρημα (Dreyfus 1999). Παρατηρούμε επίσης, μία έλλειψη ερευνών όσον αφορά τις εικασίες που διαμορφώνουν οι μαθητές Δημοτικού και τον τρόπο ή τα αποδεικτικά σχήματα που χρησιμοποιούν για να τις αιτιολογήσουν. Ούτε έχει βρεθεί κάποια έρευνα με τα είδη των συλλογισμών που κάνουν. Ενώ επίσης δεν έχει εξεταστεί αν η θεωρία της Pedemonte (2007, 2008) για το ρόλο της επιχειρηματολογίας στην απόδειξη μπορεί να έχει εφαρμογή στο Δημοτικό σχολείο. Όλες τις παραπάνω ελλείψεις που επισημάναμε, επιχειρούμε να αποκαταστήσουμε με τη δική μας έρευνα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ερευνητικό πρόβλημα-ερευνητικά ερωτήματα

Το ερευνητικό μας πρόβλημα διαμορφώθηκε από τις διάφορες διαμάχες μεταξύ ακαδημαϊκών ή εκπαιδευτικών ως προς τη σημασία και τα είδη της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης που χρησιμοποιούν οι μαθητές, αλλά και τους ισχυρισμούς από έρευνες (σε μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ότι η επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται συνηγορεί υπέρ της κατασκευής απόδειξης (Boero et al., 1996; Garuti et al., 1996; Garuti, et al., 1998; Mariotti, 2001 στο Pedemonte 2007). Επίσης κρίναμε σκόπιμο να εξετάσουμε το παραπάνω πρόβλημα σε μαθητές Ε' και Στ' Δημοτικού, μιας και το NCTM (2000 στο Knuth, 2002) προτείνει την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας και απόδειξης, ακόμα και στις μικρές βαθμίδες της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η επίλυση του ερευνητικού προβλήματος κρίνεται αναγκαία, καθώς οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία στην απόδειξη (Balacheff,1991) και το σχολείο εστιάζει κυρίως στη μορφή της απόδειξης πάνω από τη σκέψη (Proof vs proving) και δε λαμβάνει υπόψη του τη συνθετότητα της διαμόρφωσης εικασιών και της αποδεικτικής διαδικασίας (Douek,1998).

Συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή μελετούμε τα εξής ερωτήματα:

- Ποιες εικασίες κάνουν οι μαθητές σε σχέση με ιδιότητες και σχέσεις αριθμών και πώς τις διαμορφώνουν;
- Τι είδους επιχειρηματολογία και αποδεικτικά σχήματα χρησιμοποιούν;
- Πως εξελίσσεται η αποδεικτική δραστηριότητα των μαθητών κατά τη διάρκεια της ς συνεδρίας;

Επιπρόσθετα κατά τη διάρκεια της έρευνας, μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, έβγαιναν κάποια συμπεράσματα σχετικά με το βαθμό εσωτερίκευσης και πλήρους γνώσης των εννοιών που διαπραγματεύονταν οι μαθητές και που είχαν ήδη διδαχθεί από το σχολείο. Έτσι κρίθηκε σκόπιμο να απαντηθεί ακόμα ένα ερώτημα:

- Τι πληροφορίες μας δίνουν οι εικασίες και τρόποι επιχειρηματολογίας των μαθητών όσον αφορά στις γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών;

Μέθοδος

Η έρευνα μας επιλέξαμε να είναι ***ποιοτική*** και συγκεκριμένα μία ***μελέτη περίπτωσης*** ώστε να είναι διεξοδική και σε βάθος η ανάλυση των παραγόντων που συντελούν στη διαμόρφωση των εικασιών και των αποδεικτικών σχημάτων που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για τη μελέτη του παραπάνω θέματος ήταν αυτή που θεωρήσαμε την πλέον καταλληλότερη και ήταν το ***πείραμα σχεδιασμού.*** .

Το πείραμα σχεδιασμού αποτελεί μια από τις πιο πρόσφατες και πολλαπλά υποσχόμενες μεθόδους έρευνας στα πλαίσια της ς και της εκπαιδευτικής ψυχολογίας. Αναπτύχθηκε ως μια μέθοδος διεξαγωγής διαμορφωτικής αξιολόγησης για τη συνεχή βελτίωση εκπαιδευτικών σχεδιασμών (Brown, 1992; Collins et al., 2004; Design-Based Research Collective, 2003 στο Καρασαββίδης et al., 2002. Ο σκοπός είναι να ερευνήσει τις δυνατότητες για εκπαιδευτική βελτίωση επιφέροντας νέες μορφές μάθησης για να μελετηθούν. Υπάρχει μια ασυνέχεια μεταξύ των τυπικών μορφών μάθησης της εκπαίδευσης και αυτών του πειράματος σχεδιασμού (Cobb et al., 2003).

Η διαφορά του πειράματος σχεδιασμού από άλλες ερευνητικές μεθόδους συνίσταται στην ***παρεμβατική*** και ***πλαισιοθετημένη*** φύση του. Αναφορικά με το πρώτο, ο σκοπός του πειράματος σχεδιασμού είναι να καταστήσει μια συνεδρία αποτελεσματική. Κατά συνέπεια, ο ερευνητής δεν περιορίζεται μόνο στην παρατήρηση ή τη συμμετοχική παρατήρηση. Αντίθετα, εμπλέκεται ενεργά, διορθώνοντας ό,τι δεν λειτουργεί αποτελεσματικά και βελτιώνοντας ό,τι λειτουργεί. Αναφορικά με το δεύτερο, η ισχύς του πειράματος σχεδιασμού πηγάζει από το γεγονός ότι λαμβάνει υπόψη την ζωτική σημασία του πλαισίου εντός του οποίου διεξάγεται μια δραστηριότητα (Edelson, 2002 στο Καρασαββίδης et al., 2002).

Λόγω του παρεμβατικού χαρακτήρα του, το πείραμα σχεδιασμού εφαρμόζεται σε μια σειρά από διαδοχικές φάσεις (ή κύκλους). Έτσι, στην παρούσα εργασία το πείραμα σχεδιασμού ολοκληρώθηκε σε 12 συναντήσεις με τους μαθητές. Τα αποτελέσματα από την υλοποίηση ενός αρχικού σχεδιασμού χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση του και την εκ νέου υλοποίηση του σε επόμενη φάση. Το πείραμα σχεδιασμού περιλαμβάνει ταυτόχρονα το σχεδιασμό συγκεκριμένων μορφών μάθησης αλλά και τη συστηματική μελέτη αυτών των μορφών μέσα στο πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα που υποστηρίζουν τη μάθηση. Σκοπός του είναι να αναπτύξει μια σειρά θεωριών για τη διαδικασία της μάθησης και τα μέσα που σχεδιάστηκαν να υποστηρίξουν τη μάθηση (Cobb et al., 2003). Για όλους τους παραπάνω λόγους

επιλέξαμε το πείραμα σχεδιασμού ως την πιο κατάλληλη μέθοδο για την προοδευτική ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας των μαθητών σε ερωτήσεις θεωρίας αριθμών.

Για τις ανάγκες των πειραμάτων, η ερευνήτρια σχεδίασε, έπειτα από σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση, ***ανοιχτά ερωτήματα***, που αφορούσαν σχέσεις και ιδιότητες αριθμών και τα οποία θα προκαλούσαν την ελεύθερη διαμόρφωση εικασιών από μεριά των μαθητών και το έναυσμα για επιχειρηματολογία και απόδειξη.

Θέματα που απασχόλησαν τους μαθητές ήταν η διάκριση πρώτων και σύνθετων αριθμών και πράξεις μεταξύ τους, ομοίως η διάκριση άρτιων και περιττών και πράξεις μεταξύ τους, αθροίσματα διαδοχικών φυσικών αριθμών και κριτήρια διαιρετότητας, ιδιότητες κοινών πολλαπλασίων και ανάλυσης ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Τα θέματα αλλά και τα ερωτήματα που δόθηκαν ήταν τέτοια ώστε να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με μια εμπειρία πέρα από την αριθμητική και υπολογιστική ικανότητα, που να ασχολείται με πιο βαθιά δομή των μαθηματικών, δηλαδή με ***πρώιμη άλγεβρα*** (Blanton & Kaput 2005) . Τέλος, να σημειώσουμε ότι παρόλο που οι μαθητές είχαν ακουστά από τη διδακτέα ύλη τους τις παραπάνω έννοιες, τα ερωτήματα που θέτονταν ήταν πρωτόγνωρα γι' αυτούς κι έτσι οποιαδήποτε απάντηση έδιναν την είχαν σκεφτεί εκείνη τη στιγμή.

Οι δραστηριότητες ήταν εσκεμμένα σχεδιασμένες ώστε οι μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι (ατομικά ή ομαδικά) τη γνώση ή έστω με λίγη βοήθεια (scaffolding), σύμφωνα με τις αρχές της θεωρίας Κατασκευής της Γνώσης (constructivism: Κλαουδάτος, 1996), λαμβάνοντας υπόψη τη πιθανότητα να κάνουν συγκεκριμένο λάθος κι έπειτα να ξεκινήσουν από αυτό την έρευνά τους. Τέτοιες δραστηριότητες ονομάζονται ***error activities*** κατά την Borasi (1996). Σε πειραματική διδασκαλία της Borasi (1992, 1996, στο Komatsu 2010), φάνηκε πως τέτοιες δραστηριότητες προωθούν σπουδαίες μαθητικές εμπειρίες. Αντιπαραθέσεις, αβέβαιες υποθέσεις και ορισμοί, αντιφατικά αποτελέσματα ή αποτελέσματα που δεν έχουν λογικό νόημα, θεωρούνται σημεία έναρξης για τις δραστηριότητες αυτού του είδους. Αυτές οι δραστηριότητες θα λέγαμε επίσης ότι έχουν τη βάση τους στις αρχές του Lakatos (1976 στο Komatsu 2010) σύμφωνα με τον οποίο η βελτίωση των εικασιών με προσεκτική ανάλυση των αποδείξεων ήταν πιο μεγάλης αξίας όταν κάποιος αντιμετώπιζε αντιπαραδείγματα, επειδή ονόμαζε μια τέτοια βελτίωση «η μέθοδος της συμπερίληψης λήμματος» (lemma-incorporation) ενώ αργότερα τη μετονόμασε σε «η μέθοδος της απόδειξης και των ανασκευών[2]». Έτσι λοιπόν ο Komatsu προτείνει να

[2] Μετάφραση του όρου refutations σύμφωνα με τον Α. Πούλο (2009)

εισάγονται και στο δημοτικό σχολείο καταστάσεις στις οποίες οι μαθητές τείνουν να αποδεικνύουν τις εικασίες τους και έπειτα αντιμετωπίζουν αντιπαραδείγματα στις εικασίες τους.

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν με δική τους συγκατάθεση αλλά και των γονέων τους, τρεις μαθητές ολιγοθέσιου Δημοτικού σχολείου ενός χωριού του Ν. Βοιωτίας. Πρόκειται για ένα κορίτσι Ε' τάξης Δημοτικού και ένα κορίτσι κι ένα αγόρι Στ' τάξης. Τα παιδιά αυτά, τα οποία ήταν και συμμαθητές διότι συνδιδάσκονταν, επιλέχτηκαν ως μία ομάδα βοηθητικής περίπτωσης για τη μελέτη και εμβάθυνση του θέματος που μας απασχολεί (Stake 2000 στο Ανδρεάτου 2007), και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα. Να σημειώσουμε ότι τα παιδιά αυτά διαμένουν σε ένα χωριό αρκετά μακριά από την πόλη και δεν είχαν άλλες εξωσχολικές, μαθητικές εμπειρίες πέραν του φροντιστηρίου Αγγλικών σε ένα άλλο γειτονικό χωριό. Το βιοτικό επίπεδο του χωριού θα λέγαμε ότι είναι χαμηλό. Ωστόσο τα παιδιά αυτά, αν και με διαφορετική επίδοση το καθένα στα Μαθηματικά, έχουν πολλή όρεξη για μάθηση. Για λόγους δεοντολογίας, στην έρευνα θα χρησιμοποιηθούν ψευδώνυμα:

Σοφία: για το κορίτσι της Ε΄ τάξης

Ελπίδα: για το κορίτσι της Στ' τάξης

Μιχάλης: για το αγόρι της Στ' τάξης

Διαδικασία

Πρώτα καθορίστηκε το ερευνητικό πρόβλημα, επιλέχτηκε η μέθοδος έρευνάς του, ο τόπος και χρόνος διεξαγωγής της καθώς και τα <u>εργαλεία συλλογής δεδομένων</u>, που ήταν η συμμετοχική παρατήρηση, η μαγνητοφώνηση και τα φύλλα εργασίας.. Αφού έγινε μία σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση, διατυπώθηκαν τα πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, σχεδιάστηκαν ορισμένα ανοιχτά προβλήματα και ξεκίνησε η πραγματοποίηση του πειράματος σχεδιασμού, το οποίο ολοκληρώθηκε σε 12 συναντήσεις με τους μαθητές, κατά τις απογευματινές ώρες, 1-2 φορές την εβδομάδα.

Η κάθε συνάντηση μπορεί να διαρκούσε από μισή έως μιάμιση ώρα, ανάλογα με το πώς ανταποκρίνονταν οι μαθητές κάθε φορά στην κάθε δραστηριότητα. Συνήθως ασχολούμασταν με 1 ή 2 ερωτήματα-ανοιχτά προβλήματα, τα οποία είχαν άμεση συνάφεια μεταξύ τους και θα λέγαμε πως υπήρχε ένας αύξων βαθμός δυσκολίας. Υπήρξαν όμως και μέρες που το ένα ερώτημα έφερνε το άλλο και ασχοληθήκαμε ακόμα και με 4 ερωτήματα σε μία συνάντηση. Το μάθημα άρχιζε με τους μαθητές να

διερευνούν το πρόβλημα της ημέρας ο καθένας μόνος του. Έπειτα από λίγη ατομική επεξεργασία, οι μαθητές εξέφραζαν τις απόψεις τους και γινόταν συζήτηση. Με το διάλογο που μεσολαβούσε, λειτουργούσαν επιπλέον σαν ομάδα, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη ο ένας τα επιχειρήματα του άλλου. Ο κάθε μαθητής είχε το δικό του φύλλο εργασίας, όπου έκανε τις διερευνήσεις του κι έγραφε τις απαντήσεις τις δικές του, αλλά και αυτές στις οποίες κατέληγε η ομάδα.

Μετά την διεκπεραίωση των συναντήσεων, οι οποίες είχαν μαγνητοφωνηθεί, έγινε απομαγνητοφώνησή τους κι ακολούθησε μία πρώτη ανάγνωση-ανάλυση των δεδομένων και η οποία συντέλεσε στον τελικό καθορισμό των ερευνητικών ερωτημάτων. Ακολούθησε η κύρια ανάλυση που οδήγησε σε καταγραφή κι έκθεση των ευρημάτων και συμπερασμάτων.

Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκε με την αναγνώριση των *κρίσιμων επεισοδίων* (critical events) που προτείνει η Maher (2004) σε συνδυασμό με ορισμένες αρχές της μεθόδου της Ποιοτικής (και Ποσοτικής) **Α*νάλυσης Περιεχομένου*** (content analysis).

Η βασική ιδέα ήταν να καθοριστούν από τα απομαγνητοφωνημένα δεδομένα, τα αποσπάσματα που είχαν να προσδώσουν απαραίτητες πληροφορίες και σημαντικά μηνύματα που κρύβονται στο σύνολο της συζήτησης (Hancock, 1998 στο Ανδρεάτου, 2007). Από αυτά αναγνωρίστηκαν κάποια *κρίσιμα επεισόδια* (critical events), τα οποία σύμφωνα με την Maher (2004) είναι αυτά όπου φάνηκε μεγάλη πρόοδος, εννοιολογική αλλαγή, συμβαίνουν ενοράσεις ή έρχονται στην επιφάνεια γνωστικά εμπόδια. Έπειτα ακολούθησε μία οργάνωση των κρίσιμων επεισοδίων, τα οποία ενώθηκαν και περιγράφονται σαν μία πλοκή ενός έργου (storyline). Η πλοκή αυτή είναι μια περίληψη των συνεδριών του πειράματος σχεδιασμού που βλέπει ολιστικά αυτά τα γεγονότα.

Η Ανάλυση Περιεχομένου (Berelson 1952; Prasad, 2008; Mayring, 2000) είναι μία διαδικασία για την κατηγοριοποίηση των λεκτικών δεδομένων ή τον δεδομένων που προκύπτουν από τη συμπεριφορά των ατόμων που συμμετέχουν στη συζήτηση, με σκοπό την ταξινόμηση, τη συνάθροιση και τη διάταξή τους (Ανδρεάτου,2007). Το βασικό επίπεδο της ανάλυσης είναι ένας περιγραφικός απολογισμός των δεδομένων, αλλά το υψηλότερο επίπεδο ανάλυσης είναι ερμηνευτικό κι έχει να κάνει με το τι συνάγεται και τι υπονοείται.

<u>Συγκεκριμένα ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία για την ανάλυση:</u>

Έγινε ανάγνωση του κάθε απομαγνητοφωνημένου κειμένου (*transcript*) και χωρίστηκε σε μικρά αποσπάσματα, με βάση τη χρονική διάρκεια (5-10 λεπτών) και το θέμα τους. Ταυτόχρονα συμπληρωνόταν μία λίστα (στο λογισμικό του Microsoft Excel) με τα αποσπάσματα κάθε συνάντησης και δύο στήλες που είχαν την περίληψη και το σημαντικό μήνυμα του αποσπάσματος, αν υπήρχε.

Στη συνέχεια έγινε ανάγνωση των περιλήψεων και των σημαντικών μηνυμάτων και συνδέθηκαν με τη μορφή μιας έκθεσης για την κάθε συνεδρία. Στην έκθεση αυτή ερμηνεύτηκε κάθε σημαντική συμπεριφορά του μαθητή που αφορούσε το ερευνητικό πρόβλημα, ενώ στο τέλος γραφόταν μία συνοπτική παράγραφος η οποία συνόψιζε τα συμβάντα της συνεδρίας κι απαντούσε στα ερευνητικά ερωτήματα.

Έπειτα έγινε μία λίστα από διαφορετικούς τύπους πληροφορίας που είχαν βρεθεί και κατηγοριοποιήθηκαν, άλλα με την ***αναγωγική μέθοδο*** (deductive category application; Mayring, 2000) όταν η βιβλιογραφία έδινε αυτή τη δυνατότητα κι άλλα με την ***επαγωγική*** (inductive category development; Mayring, 2000) όταν δεν βρέθηκε συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα, για τα είδη των εικασιών που διαμορφώθηκαν από τους μαθητές, καθώς και για τους παράγοντες διαμόρφωσής τους, χρησιμοποιήθηκε η επαγωγική μέθοδος ανάπτυξης κατηγοριών, ενώ για τα αποδεικτικά σχήματα που χρησιμοποίησαν εφαρμόστηκε αναγωγική μέθοδος.

Αργότερα έγινε κωδικοποίηση των ερωτημάτων και των κατηγοριών που δημιουργήθηκαν και αναλύθηκαν ποσοτικά, με τη βοήθεια πινάκων στο λογισμικό Microsoft Excel (for Windows) αλλά και ποιοτικά με τη διαρκή συνεξέταση της έκθεσης. Οι κωδικοί των ερωτημάτων και οι πίνακες, μάλιστα, κρίθηκαν απαραίτητοι τόσο για την ερευνήτρια όσο και για τους αναγνώστες οι οποίοι μπορούν όταν θέλουν να ανατρέξουν στην αρχική έκθεση και να δουν περισσότερες πληροφορίες για ένα θέμα. Για το λόγο αυτό, τα ερωτήματα συμβολίστηκαν με έναν αριθμό (1-12) που δήλωνε σε ποια συνεδρία τέθηκε κι ένα μικρό ελληνικό γράμμα (α-δ) που δήλωνε ποιο ερώτημα κατά σειράν ήταν στην συνεδρία. Οι εικασίες όμως που διαμόρφωσαν οι μαθητές κωδικοποιήθηκαν με αύξουσα χρονική σειρά (1-17) ενώ επίσης κωδικοποιήθηκαν τα γνωστικά σχήματα των. Harel & Sowder με βάση τις γενικότερες κατηγορίες (Α,Β,Γ) και τις υποκατηγορίες τους (π.χ. Α.1, Α.2)

Αφού έγινε η παραπάνω διαδικασία έγινε επανέλεγχος κι απαντήθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα από τη σύνθεση των ποσοτικών και ποιοτικών αναλύσεων. Βρέθηκαν τα γενικά συμπεράσματα και συζητήθηκαν με βάση άλλες έρευνες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Α) Περιγραφή των αποτελεσμάτων ανά συνεδρία

1η συνεδρία: «Το γινόμενο πρώτων είναι πρώτος αριθμός; Τι ισχύει με το γινόμενο σύνθετων και τι με το γινόμενο πρώτου με σύνθετο;»

Εφόσον εγώ η ερευνήτρια ήμουν και δασκάλα των παιδιών, έτυχε η εισαγωγή σε αυτού του είδους τις δραστηριότητες να γίνει με αφορμή ενός ερωτήματος που συνάντησαν οι μαθητές στο σχολείο. Μία άσκηση του βιβλίου των Μαθηματικών της Στ' τάξης ζητούσε από τους μαθητές να πολλαπλασιάσουν τους δύο τελευταίους πρώτους πριν το 100. Οι μαθητές κοίταξαν το κόσκινο του Ερατοσθένη (που υπήρχε στο σχολικό τους βιβλίο) και είδαν ότι οι τελευταίοι πρώτοι ήταν το 89 και το 97. Το ερώτημα ήταν αν το γινόμενο αυτών των πρώτων είναι πρώτος. Τότε αμέσως εκφράστηκε από μία μαθήτρια, την Ελπίδα, μία **εικασία**. Η εικασία ήταν ότι *αφού έχουμε γινόμενο πρώτων θα είναι κι αυτοί πρώτοι*.

Ο συμμαθητής της όμως ο Μιχάλης, απάντησε πως έχουν κάνει πράξεις με πρώτους που δε βγήκαν πρώτοι. Δεν κατάφερε να βρει συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα και τον πρόλαβε μία άλλη μαθήτρια η Σοφία, η οποία βρήκε ότι 7 Χ 2 =14. Τότε ζήτησα από τους μαθητές να εξηγήσουν γιατί το 14 δεν είναι πρώτος. Αφού εξέτασαν το συγκεκριμένο παράδειγμα (με την ανάλυση του σε ένα γινόμενο), επανήλθα στο προηγούμενο ερώτημα στο αν ισχύει η εικασία της Ελπίδας και ζήτησα από τους μαθητές να απαντήσουν. Οι μαθητές όμως αδυνατούσαν και είπαν *ότι ισχύει μερικές* φορές. Έτσι ζήτησα να βρουν μία περίπτωση που να ισχύει η εικασία της Ελπίδας.

Οι μαθητές έκαναν διάφορες δοκιμές. Βρήκαν ότι 11 Χ 11=121 και είπαν ότι το 11 είναι πρώτος, άρα και το 121 θα είναι πρώτος. Έγινε μια συζήτηση γύρω από το αν το 121 είναι πρώτος ή όχι. Οι μαθητές έτειναν να επιμένουν ότι είναι πρώτος. Η Σοφία το έψαξε, κάνοντας διαιρέσεις με το 121 για να βρει διαιρέτες. Σε ένα σημείο είπε ότι διαιρείται μόνο με τη μονάδα και τον εαυτό του. Είχε σταματήσει μέχρι το 10 να εξετάζει αν διαιρείται. Η Σοφία κατάλαβε από την έκφρασή μου ότι πρέπει να συνεχίσει να κάνει διαιρέσεις και βρήκε ότι το 121 διαιρείται με το 11. Άρα κατέληξε ότι το 121 δεν είναι πρώτος. Τους ζήτησα τότε να καταγράψουν τη διαίρεση 121:11=;

Και οι μαθητές βρήκαν το πηλίκο 11 με το κομπιουτεράκι. Τους ζήτησα να παρατηρήσουν. Τότε το παράδειγμα του 11*11=121 και η αντίστοιχη διαίρεση 121:11=11 έδρασε ως ***παράδειγμα στροφής*** (pivotal example) για την Ελπίδα που αρχικά πίστευε πως το γινόμενο πρώτων είναι πρώτος αριθμός και κάνει αμέσως μετάβαση στον προηγούμενο αριθμό έχοντας καταλάβει πια τη δομή του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης!

Ε: Α!!!!!!!!!! Κυρία! 8.633 διά 89.

Δ: Πόσο θα μας δώσει Ελπίδα;

Ε: 97

Δ: Α…α μάλιστα!

Ε: Άρα είναι σύνθετος γιατί εκτός από τη μονάδα και τον εαυτό του έχει και το 97; και το 89; τι; το βρήκα;

Δ: Το βρήκες!

Έπειτα προσπάθησα να δω αν αυτό που κατάλαβε η Ελπίδα έγινε αντιληπτό κι από τους άλλους. Οι υπόλοιποι όμως δεν φαινόταν να το έχουν καταλάβει. Η Σοφία κάτι κατάλαβε αλλά δεν μπορούσε να το διατυπώσει. Ο Μιχάλης κατάλαβε για το 121, δεν μπορούσε όμως να γενικεύσει, ούτε για το 8.633. Εξήγησα ότι από κάθε πολλαπλασιασμό βγαίνουν 1 ή 2 τέλειες διαιρέσεις, χρησιμοποιώντας παραδείγματα. Μετά από λίγο, η Σοφία εξήγησε γιατί το 8.633 δεν είναι πρώτος και στο τέλος κατάλαβε κι ο Μιχάλης.

Σ: Εγώ κατάλαβα ότι είναι σύνθετος (το 8.633) γιατί δε διαιρείται μόνο με δύο αριθμούς αλλά μπορεί να υπάρξει και τρίτος.

Δ: Ποιος τρίτος μπορεί να υπάρξει για το 8.633;

Σ: Το 89, το 97

Δ: Το 89 λοιπόν και το 97. πώς ξέρεις Σοφία ότι είναι διαιρέτες το 89 και το 97;

Σ: Γιατί αν διαιρέσουμε το 8.633 με το 89 και το 97 θα βγουν ακριβώς.

Δ: Μιχάλη, προσέχεις;

Μ: Ναι προσέχω

Δ: 8.633 διά 89 Μιχάλη τι θα μας βγει;

Μ: 97

Δ: Μπράβο Μιχάλη

Μ: Το κατάλαβα

Δ: Κι αν κάνουμε 8.633 διά 97 τι θα μας βγει;

Μ: Ε, 89

Δ: Θα μας βγει 89. Άρα;

*Μ: Ότι , στην αρχή μόλις κάναμε αυτή την άσκηση και μας έδωσε αυτό εδώ (δείχνει τον πολλαπλασιασμό 89*97=8.633) αυτό μας έδωσε τη λύση από μόνο του.*

Έπειτα, ζήτησα από κάποιον να συνοψίσει και το ρόλο ανέλαβε η Σοφία που είπε πως «*είδαμε ότι σε πολλαπλασιασμό πρώτου με πρώτου ότι μπορεί να μη βγει πρώτος αριθμός*». Μετά από μια ερώτησή μου, διόρθωσε ότι σίγουρα δε θα βγει. Η Ελπίδα αναρωτήθηκε ***μήπως είναι αυτό κάποιος κανόνας και μήπως ισχύει και το αντίστροφο*** δηλαδή «αν πολλαπλασιάσουμε σύνθετους θα βγει πρώτος;» Δεν αιτιολόγησε την άποψή της όμως. Η Σοφία φαινόταν να διαφωνεί και προσπαθούσε να αιτιολογήσει τη δική της άποψη αλλά δυσκολευόταν στη διατύπωση. Η νέα εικασία που σχημάτισαν φαίνεται απ' τη μία λογικό να έχει διαμορφωθεί, αλλά απ' την άλλη το ότι δεν μπόρεσαν να την απορρίψουν δείχνει ότι προηγουμένως είχαν μια επιφανειακή κατανόηση και δεν αντιλήφθηκαν τους λόγους που συμβαίνει αυτό.

Αφού είδα ότι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν τη βαθύτερη δομή των παραπάνω πραγμάτων κατέφυγα ξανά στο προηγούμενο παράδειγμα του 11Χ11=121 και ζήτησα από τα παιδιά να πουν τι καταλαβαίνουν. Η Σοφία όμως αιτιολόγησε γιατί είναι σύνθετος το 8633 λέγοντας «αν 89Χ97=8633 τότε και 8633:89=97 και 8633:97=89». Αδυνατούσαν όμως και πάλι να αιτιολογήσουν γενικά. Η Ελπίδα βασιζόταν στον ***επαγωγικό συλλογισμό*** και είπε ότι *αφού δοκιμάσαμε και ισχύει για μερικά θα ισχύει για όλα.* Την ίδια άποψη περίπου είχε κι ο Μιχάλης αν και καταλάβαινε από τις ερωτήσεις μου ότι δεν αρκούσαν 3 περιπτώσεις και έλεγε μετά να κάνουμε 1.000.000 περιπτώσεις! Αργότερα προσπάθησε να αιτιολογήσει βασιζόμενος στο προηγούμενο παράδειγμα. Δεν κατάφεραν όμως να εξηγήσουν γιατί ισχύει γενικά και έτσι σκέφτηκα να εισαγάγω τον συμβολισμό, ώστε να τους βοηθήσει στην αφαιρετική διαδικασία. Μόλις δόθηκαν τα σύμβολα στους μαθητές, οι μαθητές έδειξαν ότι μπορούσαν να τα χειριστούν και να κατανοήσουν τη σημασία τους καθώς και τη ζητούμενη δομή! Αυτό ήταν κάτι απρόσμενο για μένα καθώς οι μόνες εμπειρίες που είχαν οι μαθητές με μεταβλητές ήταν στις εξισώσεις α' βαθμού με έναν άγνωστο ή το πολύ σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις με δύο μεταβλητές.

Δ: Ένας πρώτος επί έναν άλλο πρώτο μας κάνει έναν αριθμό Α.

(Γράφω και διατυπώνω ταυτόχρονα) Π1 Χ Π2= Α

Δ: Αν κάνουμε τη διαίρεση Α διά Π1 τι θα βρούμε;

Σ: Π2

Δ: Γιατί;

Μ: Πήραμε παράδειγμα από 8633

Ε: π1 με το π2 μας κάνει Α και μπορούμε να κάνουμε πράξη το Α με το π1 και το Α με το π2

Μ: Κι αν κάνουμε Α: Π2 θα βγει Π1

Δ: Άρα τι καταλαβαίνουμε; Ότι ο Α διαιρείται…. με ποιον;

Σ: Διαιρείται με το Π1 ή το π2

Δ :Ή με το π2;

Σ: Και με το π1 και το π2

Δ: Άρα τι είναι αυτά;

Ε: Παρά… όχι. Διαιρέτες;

Δ: Διαιρέτες. Άρα τι έχουμε βρει; διαιρέτες του Α : 1, το Α, ..

Ε: Π1, Π2

Δ: Μπράβο ! άρα τι αριθμός είναι ο Α;

Ε, Σ: Σύνθετος

Δ: Γιατί είναι σύνθετος;

Ε: Γιατί οι αριθμοί που τους πολλαπλασιάζουμε , διαιρείται

Δ: Μπράβο! Γιατί οι αριθμοί που τους έχουμε πολλαπλασιάσει για να φτιάξουμε αυτόν τον αριθμό τον Α, τον διαιρούν. Άρα αυτούς τους αριθμούς τους έχει;

Μ: Διαιρέτες.

Ήθελα όμως να βεβαιωθώ για την κατανόηση των μαθητών μου κι επανήλθα σε μια ερώτηση της Ελπίδας που ήταν: «αν πολλαπλασιάσουμε σύνθετο με σύνθετο τι θα βγει;» . Τότε συνέβη κάτι παράξενο. Ο Μιχάλης που μέχρι πριν λίγο έδειχνε να μην καταλαβαίνει τώρα ήταν αυτός που συμμετείχε πιο πολύ και καταλάβαινε ότι ακολουθείται η ίδια διαδικασία (***μεταφορικός συλλογισμός***) κι ότι θα βγει σύνθετος. Χρησιμοποίησε μάλιστα τα σύμβολα για να το εξηγήσει και στις συμμαθήτριές του.

Μ: Λοιπόν.. το ίδιο πράγμα δεν είναι; Τώρα που το σκέφτομαι .. σαν να κάνουμε αντιγραφή ότι έχουμε γράψει.

Δ: Ναι Μιχάλη… για πες

Μ: Να το βάλουμε σ1 Χ σ2 = Β. Αν διαιρέσουμε τον Β με το σ1 θα δώσει σ2. αν διαιρέσουμε το Β με το σ2 θα δώσει σ1. δε χρειάζεται να βγάλεις πανεπιστήμιο!

(τα παιδιά γελάνε)

……

Δ: Άρα το σ1 και σ2 τι είναι;

Σ: Διαιρέτες

Δ: Άρα το Β έχει διαιρέτες το σ1 και σ2. Άρα το Β είναι;

Μ: Σύνθετος

Δ: Άρα τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Μ: Το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

Σ: Αν κάνεις πρώτο με πρώτο θα βγει σύνθετος κι αν κάνεις σύνθετο με σύνθετο θα βγει πάλι σύνθετος

Θέλησα όμως να συνεχίσω τη διερεύνηση των σκέψεών τους και των επιχειρημάτων τους και ρώτησα τι γίνεται στην περίπτωση πολλαπλασιασμού πρώτου με σύνθετο. Η Ελπίδα έπεσε στην παγίδα κι απάντησε στην τύχη. Η Σοφία όμως και ο Μιχάλης, έδειξαν να έχουν καταλάβει και γενίκευσαν την προηγούμενη διαδικασία με παρόμοιο συμβολισμό.

Δ: Κι αν κάνεις πρώτο με σύνθετο;

Ε: Θα βγει πρώτος!

Δ: Για να το εξετάσουμε. π1 Χ σ1 =Γ Τι είναι ο αριθμός αυτός;

Ε: Σύνθετος

Σ: Σύνθετος γιατί αν το Γ το διαιρέσουμε με το σ θα βγει

Μ: Το π. Και Γ: π = σ . αυτό δεν ήθελες να πεις;

Σ: Άρα όταν πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς μας βγαίνει ένας αριθμός. Αυτός αν τον διαιρέσουμε με έναν από αυτούς τους αριθμούς θα βρούμε τον άλλο.

Δ: Και τι θα είναι αυτός ο αριθμός;

Σ: Σύνθετος

Μία λεπτομέρεια μόνο δεν είχε αποσαφηνιστεί εκ μέρους μου και την ανέφερα στο τέλος του μαθήματος. Η λεπτομέρεια αυτή είναι ότι δεν μπορεί να βγάλει κανείς το συμπέρασμα ότι προκύπτει σύνθετος, αν οι παράγοντες είναι η μονάδα και ο εαυτός του. Τότε τόνισα ότι πρέπει να εξετάζεται σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Τα παιδιά όμως είχαν κουραστεί και η συζήτηση σταμάτησε κάνοντας δύο παραδείγματα για την παραπάνω αποσαφήνιση.

Δ: Για παράδειγμα 1Χ11=11 . Το 11 είναι σύνθετος επειδή βγαίνει από πολλαπλασιασμό;

Μ: Όχι

Σ: Όχι διαιρείται με το 1, 11

Δ: Τι είναι αυτά;

Ε: Μονάδα κι ο εαυτός του

Δ: Ωραία, άρα αυτό που είπαμε ισχύει εκτός κι αν οι παράγοντες του γινομένου είναι η μονάδα κι ο εαυτός του

Δ: Άρα αν έχουμε έναν αριθμό που προκύπτει από πολλαπλασιασμό δύο άλλων, αλλά αυτοί δεν είναι η μονάδα κι ο εαυτός του, τι θα είναι αυτός ο αριθμός;

….

Δ: Σύνθετος

Δ: 1Χ131. Τι είναι το 131;

Ε: Σύνθετος

Σ: Έχει διαιρέτες το 1 και το 131

Δ: Δε ξέρουμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος. Πρέπει να το εξετάσουμε. Ενώ αν σου έλεγα 2Χ70=140 , τι είναι το 140;

Ε: Σύνθετος, γιατί έχει διαιρέτες το 2, το 5,…

Μ: Δεν έχει μόνο τη μονάδα και τον εαυτό του

Έτσι οι μαθητές φαίνεται να κατανόησαν ότι ένας αριθμός που γράφεται σαν γινόμενο δύο παραγόντων εκτός του εαυτού του και της μονάδας, είναι σύνθετος. Αυτό βέβαια θα διαπιστωθεί αν ισχύει και στα επόμενα μαθήματα. Ως προς τα ερευνητικά ερωτήματα τώρα παρατηρούμε:

Η πρώτη εικασία που σχηματίστηκε ήταν πως το γινόμενο πρώτων αριθμών είναι πρώτος. Αυτό δείχνει ένα είδος αναλογικής σκέψης θα λέγαμε. Αφού αποδείχτηκε πως το γινόμενο πρώτων είναι σύνθετος τότε η ίδια μαθήτρια που έκανε την αρχική εικασία σκέφτηκε πάλι με αναλογικό τρόπο για το αν είχαμε την αντίστροφη περίπτωση (δηλ. γινόμενο σύνθετων) ότι θα έδινε όπως και πριν το αντίθετο αποτέλεσμα (δηλ. πρώτο αριθμό)! Οι εικασίες αυτές εκφράστηκαν αβίαστα, χωρίς πολλή σκέψη κι έπειτα μέσα από παραδείγματα κυρίως προσπαθούσαν οι ίδιοι και οι συμμαθητές τους να τις ελέγξουν αν ισχύουν.

Η πρώτη τους επαφή με το αντιπαράδειγμα στην αρχική εικασία της Ελπίδας ήρθε αμέσως. Κάτι τέτοιο όμως δεν είχαν ξανασυναντήσει και μέσα από τις συζητήσεις τους βλέπουμε ότι το αντιπαράδειγμα δεν ήταν αρκετό για να καταρρίψει την εικασία της Ελπίδας. Ανέφεραν ότι θα υπάρχουν περιπτώσεις που ισχύει και περιπτώσεις που δεν ισχύει. Σαν πρώτη αντίδραση, είναι σωστή βέβαια, δεδομένου ότι δεν κατανόησαν τη δομή του παραδείγματος, και φαίνεται να υπάρχει στο ένστικτό τους ότι κάποιες προτάσεις δίνουν πάντοτε ένα είδος αποτελέσματος και είναι καθολικές, ενώ σε κάποιες άλλες υπάρχουν διαφορετικά είδη και θα μπορούσαμε να τις εξετάσουμε εμείς στα μαθηματικά ως υπαρκτικές προτάσεις. Ένα ακόμη αντιπαράδειγμα όμως που δίνεται αργότερα παίζει καθοριστικό ρόλο και στρέφει τους μαθητές από την επιφανειακή αντιμετώπιση σε άλλη που δίνει έμφαση στη δομή. Τότε το παράδειγμα αυτό λειτουργεί σαν ***παράδειγμα στροφής (pivotal example***).

Αυτό όμως που παρατηρήθηκε ήταν πως μπορούσαν να εξηγήσουν μόνο τα παραδείγματα, δεν μπορούσαν να εξηγήσουν γενικά γιατί ισχύει παρά μόνο σκέφτονταν ότι εφόσον σε τρία παραδείγματα που κάναμε, μπορούσαν να δικαιολογήσουν ότι το γινόμενο των πρώτων είναι σύνθετος, άρα θα ίσχυε και για τα άλλα παραδείγματα. Στην περίπτωση αυτή πιστεύω πως δεν μιλάμε για αφελή εμπειρισμό με όρους του Balacheff (1988), αλλά για παραδείγματα που μπορούν να γενικευτούν ***(generic examples***). Τον ισχυρισμό μου ενισχύει το γεγονός ότι, μόλις τους έδωσα τα σύμβολα, οι μαθητές φάνηκε ότι είχαν κατανοήσει τη δομή και μπόρεσαν να επιχειρηματολογήσουν για το τι ισχύει πάντα, χρησιμοποιώντας και τα σύμβολα. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι η εξήγηση του παραδείγματος λειτούργησε ως ***απαγωγικό βήμα*** με όρους της Pedemonte (2007, 2008) και βοήθησε πάρα πολύ στην αιτιολόγηση με βάση τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και των πρώτων που εκφράστηκε αργότερα. Σημαντικό είναι επίσης ότι οι μαθητές μπόρεσαν να δώσουν μια γενική αιτιολόγηση όταν τους δόθηκαν τα σύμβολα, και χρησιμοποίησαν οι ίδιοι αντίστοιχο συμβολισμό σε επόμενο ερώτημα ως βοήθημα για την αιτιολόγησή τους.

Τέλος, αν και είναι η πρώτη συνεδρία που έγινε, για εμένα που ήμουν και η δασκάλα τους και γνώριζα ήδη τους μαθητές, είναι αισθητή η εξέλιξη των μαθητών, ειδικά του Μιχάλη, μαθητή της Στ’ τάξης αλλά και της Σοφίας, μαθήτριας της Ε’ τάξης. Το γεγονός ότι μπόρεσαν να εξηγήσουν αυτοί οι δύο μαθητές, με εντυπωσίασε καθώς η Σοφία ανήκει σε μικρή τάξη σε σχέση με το αντικείμενο και ο Μιχάλης δεν έχει ιδιαίτερα υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά του σχολείου. Μία εξήγηση είναι ότι

λειτούργησαν σαν ομάδα και ο ένας συνέβαλλε στη σκέψη του άλλου. Αυτό άλλωστε μάλλον είναι και η γνώμη του Μιχάλη που εξέφρασε στο τέλος της δραστηριότητας λέγοντας: «Για μια στιγμή, δηλαδή όλοι το βρήκαμε το πρόβλημα;».

2η συνεδρία: Πρόσθεση πρώτων αριθμών

Το βασικό θέμα της ήταν η πρόσθεση πρώτων αριθμών. Συγκεκριμένα απαντήθηκαν τρία ερωτήματα τα οποία δεν δόθηκαν εξαρχής στους μαθητές αλλά προέκυπταν μετά την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος. Τα ερωτήματα ήταν τα εξής:

1. **Πρώτος + πρώτος δίνει πρώτο;**

2. **Πρώτος +πρώτος+ πρώτος = πρώτος σ ή λ ;**

3. **Πρώτος + πρώτος + πρώτος = σύνθετος** ;

Στο 1ο ερώτημα που αφορά την πρόσθεση δύο πρώτων και οι τρεις μαθητές βρήκαν εύκολα ***αντιπαράδειγμα***, το 5+7=12, όπου το 12 είναι σύνθετος αριθμός κι έτσι κατάλαβαν πως δεν ισχύει η πρόταση. Στην περίπτωση αυτή είναι εντυπωσιακό πως οι μαθητές δεν έκαναν άλλη δοκιμή. Αντιθέτως το αντιπαράδειγμα αυτό τους ήταν αρκετό για να απορρίψουν την πρόταση.

Το 2ο ερώτημα αφορούσε την πρόσθεση τριών πρώτων. Οι μαθητές δοκίμασαν τρεις πρώτους 3+5+7=15 και αναγνώρισαν ότι το 15 ήταν σύνθετος αριθμός. Έτσι εύκολα κατέληξαν ότι δεν ισχύει η πρόταση. Όμως, κατά τη διάρκεια της συζήτησης, τέθηκε το ερώτημα αν πάντα θα βγαίνει σύνθετος κι έτσι αυτό ήταν το επόμενο ερώτημα.

Ως προς το 3ο και τελευταίο ερώτημα της ημέρας, λοιπόν, η Ελπίδα βλέποντας το παράδειγμα στο προηγούμενο ερώτημα, όπου πρόσθεσε τρεις πρώτους και βρήκε σύνθετο, απάντησε ότι *«πάντα θα βγαίνει αυτό (σύνθετος) γιατί κάναμε ένα παράδειγμα και μας βγαίνει αυτό (σύνθετος), οπότε δεν είμαστε χαζοί για να κάνουμε κι άλλα, είναι μάταιο»*. Έπειτα στο φύλλο εργασίας της, δοκίμασε δύο προσθέσεις πρώτων με δύο προσθετέους κι αφού είδε ότι μπορεί αυτοί οι προσθετέοι να βγάλουν πρώτο, (ενώ στην 1η δραστηριότητα έκανε ένα μόνο παράδειγμα που έβγαλε σύνθετο κι αυτό αρκούσε ως

αντιπαράδειγμα), τότε συνέχισε τις δοκιμές με τρεις προσθετέους πρώτους, όπου στην 1η δοκιμή βρήκε σύνθετο (5+2+3=10), αλλά στη 2η δοκιμή βρήκε πρώτο (7+7+3=17). Όμοια παραδείγματα βρήκε και η Σοφία με το Μιχάλη (5+5+7=17 πρώτος). Αν παρατηρήσουμε τους προσθετέους στα αντιπαραδείγματα, έχει χρησιμοποιηθεί ο ίδιος πρώτος δύο φορές. Αυτό όμως έκανε τους μαθητές να διστάζουν για την καταλληλότητα των παραδειγμάτων. Ο Μιχάλης μάλιστα είχε ρωτήσει προηγουμένως αν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσει τον ίδιο πρώτο δύο φορές. Του απάντησα πως το καλύτερο ήταν να έβρισκε διαφορετικούς, αλλά του επέτρεψα να τους χρησιμοποιήσει για να δούμε αν τους βοηθήσει. Όμως μετά διατυπώθηκε μια ***αμφιβολία-εικασία*** από τη Σοφία, μήπως βγαίνει πρώτος μόνο όταν έχουμε δύο φορές τον ίδιο προσθετέο. Τότε τους προέτρεψα να συνεχίσουν την προσπάθεια με διαφορετικούς αριθμούς και οι μαθητές κατάφεραν να βρουν παραδείγματα τριών διαφορετικών πρώτων που το άθροισμά τους βγαίνει πρώτος.

17+7+5=29 παράδειγμα Σοφίας & 29+17+11=57 παράδειγμα Ελπίδας

Όταν κλήθηκαν οι μαθητές να γράψουν τα συμπεράσματά τους όμως, η Ελπίδα, έγραψε κατευθείαν ότι «όταν προσθέτουμε τρεις πρώτους, το αποτέλεσμα βγαίνει πρώτος». Ξέχασε το αρχικό παράδειγμα που είχε βρει στη 2η δραστηριότητα (3+5+7=15 σύνθετος). Η Σοφία όμως, ήταν πιο συγκεντρωμένη και συμπέρανε ότι «όταν προσθέτουμε τρεις πρώτους το αποτέλεσμα βγαίνει άλλοτε πρώτος κι άλλοτε σύνθετος.»

Ως προς τα ερευνητικά ερωτήματα, σε αυτή την συνεδρία παρατηρήθηκαν τα εξής: Στο 1ο και 2ο ερώτημα, οι μαθητές δεν πρόλαβαν ή δεν θέλησαν να εκφράσουν κάποια εικασία, καθώς η πρώτη δοκιμή που έκαναν λειτούργησε ως αντιπαράδειγμα και αυτό ήταν αρκετό για τους μαθητές. Ωστόσο το αντιπαράδειγμα του 2ου ερωτήματος του οποίου το άθροισμα ήταν σύνθετος (3+5+7=15) ήταν αντιληπτό στους μαθητές ότι απέρριπτε την πρόταση ότι το άθροισμα τριών πρώτων είναι πρώτος, αλλά αποτέλεσε το ερέθισμα για τη διατύπωση μιας άλλης εικασίας που λέει μήπως το άθροισμα τριών πρώτων είναι πάντα σύνθετος. Η Ελπίδα σε αυτό το σημείο υπεργενίκευσε το παράδειγμα που αναφέραμε και θεώρησε ότι θα βγαίνει πάντοτε σύνθετος. Το γεγονός όμως ότι δεν απάντησε η δασκάλα, την έκανε να κάνει δοκιμές για να δει αν η εικασία της ισχύει. Το ευχάριστο είναι ότι μια εικασία που εκφράστηκε από μαθήτρια έγινε αφορμή για περαιτέρω διερεύνηση. Έτσι οι μαθητές έκαναν κι άλλες δοκιμές και βρήκαν ότι το άθροισμα δύο ή τριών πρώτων είναι άλλοτε πρώτος κι άλλοτε σύνθετος. Κάτι που παρατηρήθηκε επίσης ήταν πως πρόσεχαν ιδιαίτερα τους

αριθμούς που έπαιρναν ως προσθετέους. Χρησιμοποίησαν τυχαία δυο φορές τον ίδιο προσθετέο κι αυτό τους έκανε να αναρωτηθούν αν το παράδειγμά τους ήταν έγκυρο για το ερώτημα ή έπρεπε να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς. Ήταν μια ευχάριστη έκπληξη αυτό για την ερευνήτρια καθώς δεν τους είχε αναφέρει για πρόσθεση τριών διαφορετικών πρώτων, αλλά ωστόσο εκείνοι το πρόσεξαν κι ας μην είχαν έρθει ποτέ σε επαφή με τέτοιου είδους ερωτήματα. Τελικά οι μαθητές απέρριψαν και τις τρεις εικασίες με αντιπαραδείγματα και με βάση αυτά, σχημάτισαν αυθόρμητα τη σωστή εικασία ότι το άθροισμα δύο ή τριών πρώτων είναι άλλοτε πρώτος κι άλλοτε σύνθετος. Τέλος, θα μπορούσαμε να τολμήσουμε να πούμε πως η παραπάνω διαδικασία συγγενεύει με την ευρετική της μαθηματικής ανακάλυψης που περιγράφει ο Lakatos (1976 στο Komatsu 2010)

3η συνεδρία: Αφαίρεση και διαίρεση με πρώτους αριθμούς

Στην 3η συνεδρία ασχοληθήκαμε με τις άλλες δύο πράξεις που μπορούσαμε να κάνουμε με τους πρώτους, την αφαίρεση και τη διαίρεση. Ιδιαίτερο γνωστικό ενδιαφέρον παρουσίασε η διαίρεση, όπου φαίνεται και αν ο μαθητής σκέφτεται τον ορισμό του πρώτου αριθμού.

1ο ερώτημα:

Να εξετάσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής:

Πρώτος-πρώτος = πρώτος

Η Σοφία δοκίμασε την αφαίρεση 17-5=12 όπου βρήκε ότι η διαφορά δεν είναι πρώτος, αλλά συνέχισε κάνοντας την πράξη 7-2=5 πρώτος και κατέληξε στην απάντηση ότι δεν βγαίνει πάντα πρώτος. Τις ίδιες πράξεις αλλά με αντίστροφη σειρά έκανε κι ο Μιχάλης στο φύλλο εργασίας του και κατέληξε κι εκείνος στο ίδιο συμπέρασμα. Είναι σημαντικό δε, ότι ο Μιχάλης παρόλο που στην πρώτη δοκιμή του βρήκε πρώτο αριθμό δεν έμεινε σε αυτό μόνο το παράδειγμα για να βγάλει το συμπέρασμά του, αλλά έκανε και 2η δοκιμή όπου βρήκε ότι δε βγαίνει πάντα πρώτος. Την ίδια συμπεριφορά έδειξε και η Ελπίδα, η οποία δεν έβγαλε αυθαίρετο συμπέρασμα όπως στην προηγούμενη συνεδρία ότι θα βγαίνει πάντα έτσι. Κατάλαβε ότι ένα παράδειγμα δεν είναι αρκετό για γενίκευση. Έτσι, στις επόμενες δοκιμές της βρήκε σύνθετο και κατέληξε ότι «μερικές φορές βγαίνει πρώτος και μερικές φορές βγαίνει

σύνθετος». Σημαντικό επίσης είναι και ότι και η Σοφία έκανε 2η δοκιμή παρόλο που με την πρώτη της δοκιμή βρήκε αντιπαράδειγμα για την πρότασή της. Από την ενέργειά της όμως φαίνεται όχι πως δεν είχε κατανοήσει πως το αντιπαράδειγμα αρκούσε για να απορρίψει την πρόταση, αλλά φαίνεται πως ήθελε να συνεχίσει τις δοκιμές της για να δει τι συμβαίνει τελικά στην αφαίρεση πρώτων, δηλαδή αν βγαίνει πάντα σύνθετος. Κι έτσι και οι τρεις μαθητές βρήκαν μόνοι τους ότι η διαφορά πρώτων άλλοτε είναι πρώτος κι άλλοτε σύνθετος αριθμός.

2ο ερώτημα:

Αν κάνουμε διαίρεση πρώτου με πρώτο, τι είδους αριθμός θα είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης;

Για το ερώτημα αυτό θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί τον ορισμό του πρώτου αριθμού που είναι ο αριθμός που έχει ως διαιρέτες μόνο την μονάδα και τον εαυτό του. Έτσι θα σκεφτόταν ότι ένας πρώτος δε διαιρείται με κανέναν άλλο αριθμό πέραν του εαυτού του! Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε ένα πείραμα σκέψης (thought experiment σύμφωνα με τον Balacheff). Τα παιδιά όμως είδαν πως μέχρι τώρα οι δοκιμές τους απαντούσαν τα ερωτήματα κι έτσι έδρασαν ξανά με τον ίδιο τρόπο, εμπειρικά.

Ο Μιχάλης έκανε δύο διαιρέσεις με πρώτους και βρήκε, όπως ήταν αναμενόμενο για έναν εκπαιδευτικό, δεκαδικούς αριθμούς. Όμως δεν τολμούσε να εκφράσει τα αποτελέσματα. Δεν μπορούσε να τα εξηγήσει. Τον ρωτούσα τι βρήκε και του φαινόταν παράξενο που έβρισκε δεκαδικό. Αυτό που τον προβλημάτιζε ήταν το ότι δεν μπορούσε να τον κατατάξει σε πρώτο ή σύνθετο. Η Ελπίδα αντίθετα, με μία πράξη είδε ότι βγαίνει δεκαδικός και μου το ανέφερε, κι όταν τη ρώτησα αν μπορεί να εξηγήσει το αποτέλεσμα τότε, μετά από μισό λεπτό και με επιφώνημα ενθουσιασμού, απάντησε ότι «*βγαίνει δεκαδικός αριθμός γιατί ο πρώτος διαιρείται μόνο με την μονάδα και τον εαυτό του*». Εδώ, στην περίπτωση της Ελπίδας, το παράδειγμα που βρήκε λειτούργησε σαν ***παράδειγμα στροφής*** (pivotal example) και γενικεύσιμο παράδειγμα, αφού την έκανε να σταματήσει την αναζήτηση της εμπειρικής αιτιολόγησης και βασίστηκε στον ορισμό του πρώτου κι έκανε ένα πείραμα σκέψης! Σε όμοιο συμπέρασμα κατέληξε και η Σοφία, αλλά χρειάστηκε περισσότερο χρόνο. Ο Μιχάλης δεν κατάφερε μόνος του να εξηγήσει το αποτέλεσμα αλλά μετά που το είπαν τα

κορίτσια, φάνηκε να κατάλαβε. Για να εξετάσω αν όντως είχε κατανοήσει ο Μιχάλης αλλά και τα κορίτσια την ιδιότητα των πρώτων αριθμών, έθεσα το επόμενο ερώτημα.

3^{ο} ερώτημα:

Αν κάνουμε διαίρεση πρώτου με σύνθετο, τι αριθμός θα προκύψει;

Εδώ, θα περίμενε κανείς να συνεχίσουν με την ίδια αιτιολόγηση- εξήγηση ότι, όπως είπαμε και προηγουμένως, ο πρώτος διαιρείται μόνο με την μονάδα και τον εαυτό του, άρα με οποιονδήποτε σύνθετο κι αν διαιρεθεί, η διαίρεση θα έχει πάντα υπόλοιπο ή αλλιώς θα βγαίνει το πηλίκο δεκαδικός. Κι εδώ συνέβη κάτι παράξενο. Η Ελπίδα που προηγουμένως πρώτη είχε βρει την εξήγηση και μάλιστα σε σύντομο χρόνο, τώρα έκανε μία διαίρεση, είδε ότι βγαίνει δεκαδικός, αλλά η εξήγηση που έδωσε ήταν η εξής: «πάλι δεκαδικός βγαίνει γιατί είναι διαφορετικό το είδος τους». Σε αυτή την περίπτωση, αντίθετα με την απάντηση που είχε δώσει στο προηγούμενο ερώτημα, η Ελπίδα φαίνεται πως στηρίχτηκε στην επιφανειακή δομή των δεδομένων της κι αγνόησε τον ορισμό του πρώτου που πριν λίγο η ίδια διατύπωσε! Να σημειωθεί όμως ότι πριν από αυτή την ερώτηση, επειδή η Ελπίδα είχε απαντήσει σύντομα τις προηγούμενες, απάντησε το 4^{ο} ερώτημα που ακολουθεί ώσπου να ολοκληρώσουν οι συμμαθητές της το 2^{ο} ερώτημα. Το 4^{ο} ερώτημα αφορούσε τη διαίρεση σύνθετου με πρώτου. Το γεγονός αυτό, φαίνεται την επηρέασε, αφού όταν της ζήτησα να αποσαφηνίσει τι εννοεί, τότε συνέχισε γράφοντας τα συμπεράσματα από τις προηγούμενες ερωτήσεις: «Γιατί :

πρώτος Χ πρώτος= φυσικός

Πρώτος: πρώτος =δεκαδικός

Σύνθετος: πρώτος= δεκαδικός, φυσικός

Πρώτος: σύνθετος = δεκαδικός»

Είναι σημαντικό που ανατρέχει στα προηγούμενα συμπεράσματα, ωστόσο όμως το γεγονός αυτό λειτούργησε αρνητικά καθώς παρατήρησε μόνο την επιφανειακή δομή των συμπερασμάτων κι όχι την βαθύτερη αιτιολόγησή τους. Έτσι αποπροσανατολίστηκε. Πιστεύω πως αν της είχε δοθεί μόνο του το ερώτημα αυτό θα μπορούσε να απαντήσει ξανά με το πείραμα σκέψης που απάντησε στο 2^{ο} ερώτημα. Το θετικό είναι πως η Σοφία κατάφερε να αιτιολογήσει με τον ορισμό του πρώτου αριθμού, διατυπώνοντας έτσι ένα ***πείραμα σκέψης***. Ο Μιχάλης ωστόσο στράφηκε στις δοκιμές, αλλά οι επιλογές των αριθμών που έκανε ήταν λαθεμένες. Το ερώτημα αφορούσε τη διαίρεση πρώτου διά σύνθετου κι εκείνος έκανε τις διαιρέσεις 21:3=7 και

15:6=2,5 . Δε γνωρίζω πού οφείλεται η επιλογή των αριθμών αυτών. Στην πρώτη περίπτωση μόνο θυμάμαι πως του διευκρίνισα πως «δε ζητούσα σύνθετο διά πρώτο, αλλά πρώτο διά σύνθετο κι ότι αυτό το παράδειγμα είναι για το επόμενο ερώτημα». Τότε ο Μιχάλης τράβηξε ένα βελάκι από τη διαίρεση 21:3 προς τα κάτω κι έγραψε μετά 15: 6. Σε αυτή την περίπτωση πιθανολογώ πως νόμιζε ότι το 15 είναι πρώτος. Δεν έγραψε κάποια αιτιολόγηση στο φύλλο εργασίας του και δυστυχώς δεν έχουμε το ηχητικό ντοκουμέντο από την παρούσα συνάντηση.

4^{ο} ερώτημα:

Αν κάνουμε διαίρεση σύνθετου με πρώτο, τι αριθμός θα προκύψει;

Εδώ, μετά από διαιρέσεις, και οι τρεις μαθητές, είδαν ότι πότε βγαίνει φυσικός και πότε δεκαδικός. Βέβαια, ακόμα κι εδώ όμως οι μαθητές βασίστηκαν στις δοκιμές τους και δε χρησιμοποίησαν τον όρο ‘φυσικός’, καθώς δε φαίνεται να τη γνώριζαν, αλλά ανάλογα με το αποτέλεσμα έλεγαν ‘πρώτος’ ή ‘σύνθετος’. Έπειτα από δική μου παρότρυνση όμως, έκαναν κι άλλες δοκιμές κι έβλεπαν ότι μπορεί να βγαίνουν και δεκαδικοί και τους μίλησα και για την έννοια των φυσικών αριθμών.

Στην συνεδρία αυτή, παρακολουθούμε πως οι μαθητές βασίζονται πάλι στις εμπειρικές δοκιμές, αλλά μία από αυτές λειτούργησε ως παράδειγμα στροφής κι έτσι είχαμε ένα πείραμα σκέψης, που εκφράστηκε την πρώτη φορά από την Ελπίδα στο 2^{ο} ερώτημα, ενώ εκφράστηκε το ίδιο κι από τη Σοφία στο 2^{ο} & 3^{ο} ερώτημα. Ένα ακόμη πράγμα που με ευχαρίστησε είναι που δεν αρκούσε στους μαθητές μόνο το να απορρίψουν μία πρόταση, αλλά ήθελαν να μάθουν και την αλήθεια της πρότασης αυτής. Έτσι δείχνει τουλάχιστον η ενέργεια της Σοφίας στο 1^{ο} ερώτημα. Κάτι ακόμη που παρατηρήθηκε στην Ελπίδα είναι ότι παρόλο που μπορεί να σκεφτεί πιο βαθιά, εστιάζει στην επιφανειακή δομή μερικές φορές και ψάχνει να βρει μοτίβα.

4η συνεδρία : Το άθροισμα 4 άρτιων αριθμών είναι άρτιος;

Όταν τέθηκε το ερώτημα, φάνηκε πως οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι τελικά με τις έννοιες άρτιος-περιττός, αλλά ούτε και μονός-ζυγός, παρόλο που η ερευνήτρια πίστευε το αντίθετο. Έτσι στην αρχή χρειάστηκε μια εισαγωγή. Παρόλα αυτά οι μαθητές αρκετές φορές χρειάστηκαν επιβεβαίωση για το αν οι αριθμοί είναι άρτιοι ή περιττοί. Η Σοφία έκανε κάθε φορά διαιρέσεις με το 2 για να δει αν ο αριθμός ήταν άρτιος. Το κριτήριο διαιρετότητας του 2 το είχαν διδαχθεί αλλά δε φάνηκε να το χρησιμοποιεί ούτε εκείνη αλλά ούτε και οι άλλοι καθώς φαινόταν να απαντούσαν διαισθητικά, όχι με σιγουριά. Για την απάντηση στο αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής, και οι τρεις μαθητές εργάστηκαν με δοκιμές. Η Ελπίδα και η Σοφία έκαναν τρεις δοκιμές κι ο Μιχάλης έξι.

Οι δοκιμές του Μιχάλη ήταν οι εξής:

4+2+12+14=32	16+18+14+12=60
4+8+2+6=20	60+50+14+20=144
10+8+14+6=38	6+10+12+14=44

Οι δοκιμές που έκαναν και οι τρεις μαθητές ενδεικνύουν έναν αφελή εμπειρισμό καθώς στηρίχτηκαν μόνο στα παραδείγματα αυτά και δεν έδωσαν κάποια εξήγηση. Η δε δοκιμή του Μιχάλη και σε πιο μεγάλους αριθμούς ίσως αποτέλεσε για εκείνον το ***κρίσιμο πείραμα*** (Balacheff 1988). Μία μορφή εξήγησης έλαβα μόνο από την Ελπίδα, η οποία επέμενε ότι «με την πρόσθεση τελειώνουν όλα σε 2,4,6,8,0». Αλλά όταν τη ρώτησα γιατί συμβαίνει αυτό, δε μπορούσε να εξηγήσει περαιτέρω. Τότε έκανα μια μικρή συνεδρία θέλοντας να αναδείξω τον ισχυρισμό της σε πιο αφηρημένο επίπεδο λέγοντας: «Ας πάρουμε περιπτώσεις. Σε τι μπορεί να τελειώνουν οι προσθετέοι μας;» Οι μαθητές απάντησαν: «σε 0, 2, 4, 6, 8».

Δ: ωραία. Πόσους προσθετέους έχουμε;

Π: τέσσερις

Δ: Ας πάρουμε μία περίπτωση. Μία περίπτωση είναι να τελειώνουν ο ένας σε 0, ο άλλος σε 2 ο άλλος σε 4 κι ο άλλος σε 6. (Παράλληλα έγραφα σε ένα φύλλο

…….0
…….2
…….4
+…….6

Δ: Σε τι θα τελειώνει το άθροισμα;

Π: (προσθέτουν 0+2+4+6=12) άρα σε 2

Δ: Ωραία ας πάρουμε μια άλλη περίπτωση: οι προσθετέοι να τελειώνουν σε 2,4,6,8

Οι μαθητές τότε μόνοι τους πήραν χαρτί και μολύβι και έκαναν την ίδια διαδικασία, άλλοι γράφοντας όπως το παραπάνω σχήμα κι άλλοι προσθέτοντας κατευθείαν 2+4+6+8=20. έτσι απάντησαν ότι τελειώνει σε 0.

Έτσι φάνηκε να καταλαβαίνουν και τα άλλα παιδιά την άποψη της Ελπίδας ότι όταν προσθέτουμε άρτιους θα τελειώνει το άθροισμά τους πάντοτε ή σε 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8, ενώ η Ελπίδα ικανοποιήθηκε που η άποψή της επιβεβαιώθηκε κατά κάποιον τρόπο. Επεσήμανα δε το γεγονός ότι πρέπει να πάρουμε κανονικά και τις άλλες περιπτώσεις, αλλά επειδή είναι πολλές κι εδώ μπαίνουμε στα χωράφια της συνδυαστικής, δεν το συνεχίσαμε. Εξάλλου οι μαθητές δεν το θεωρούσαν σκόπιμο.

Τέλος να σημειώσουμε κάτι που έγραψε ως παρατήρηση στο φύλο εργασίας της η Ελπίδα, αλλά δεν το εξέφρασε προφορικά κι έτσι δεν έγινε αντικείμενο συζήτησης. Είχε γράψει το εξής «άμα διαιρέσουμε άρτιο με άρτιο μας βγαίνει άρτιος. Άρα αυτοί οι αριθμοί και αν τους προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε πάλι άρτιος θα βγει.» Δυστυχώς δεν έχουμε τεκμήρια για τον τρόπο που σκέφτηκε αυτή την εικασία.

Περιληπτικά, στη συνάντηση αυτή, οι απαντήσεις των μαθητών στηρίχθηκαν στον ***αφελή εμπειρισμό*** αλλά και σε μια υποτυπώδη μορφή ***κρίσιμου πειράματος***. Η Ελπίδα παρατήρησε την επιφανειακή δομή των αποτελεσμάτων και αναγνώρισε ότι τελειώνουν όλα σε 0,2,4,6,8 αλλά δε μπόρεσε να δώσει κάποια εξήγηση. Έτσι, η ερευνήτρια χρησιμοποίησε την παρατήρηση της Ελπίδας για να δώσει μια μορφή εξήγησης κι όχι τόσο μαθηματική απόδειξη, επειδή ήθελε να βγει η εξήγηση από τη σκέψη των παιδιών, και στη προκειμένη περίπτωση της Ελπίδας. Ως προς τις ***εικασίες***, τα παιδιά μάλλον περίμεναν ότι θα έβγαινε άρτιος, το σιγοψιθύριζαν, αλλά θέλησαν να επιβεβαιωθούν από τις εμπειρικές δοκιμές τους κι ύστερα να εκφράσουν τη γνώμη τους. Εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι η Ελπίδα, χωρίς κανείς να της το ζητήσει έγραψε στο φύλλο της, εικασία της ότι *όλες οι πράξεις με άρτιους θα δίνουν άρτιους*.

5η συνεδρία: Υπάρχουν 4 περιττοί που αν τους προσθέσουμε δίνουν περιττό;

Ο Μιχάλης συνέχισε την ίδια τακτική με την 4η συνεδρία, κάνοντας πολλές ***δοκιμές*** (επτά στο σύνολο). Σε δύο από αυτές όμως, μπερδεύτηκε και χρησιμοποίησε και άρτιους αριθμούς αντί για περιττούς (4+2+11+15=32 & 35+50+30+19=134). Πάντως σε όλες τις δοκιμές βρήκε άρτιο όπως ήταν φυσικό.

Παρόμοια εργάστηκε και η Σοφία κάνοντας οκτώ ***δοκιμές***, απ' τις οποίες στις τέσσερις έκανε πάλι την διαίρεση του αποτελέσματος με το 2 για να δει αν είναι άρτιος ή περιττός. Στο τέλος έγραψε την εξής απάντηση: «*δεν γίνεται να βγει περιττός γιατί είναι μεγαλύτερο κατά ένα από τους ζυγούς και αν είναι μεγαλύτερος κατά ένα θα βγαίνει πάντα ζυγός. Μόνο με 3 περιττούς γίνεται 17+3+3=23*». Η εξήγησή της δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική. Μας δίνει όμως ένα μήνυμα αισιοδοξίας ότι δοκίμασε αυτοβούλως και με τρεις περιττούς και ***εικάζει*** ότι μόνο το άθροισμα τριών περιττών είναι περιττός, ενώ το άθροισμα τεσσάρων περιττών είναι σίγουρη ότι είναι άρτιος. Εδώ έχουμε χαρακτηριστική περίπτωση, να έχει κάνει μια σωστή εικασία , αλλά δεν μπορεί να τη δικαιολογήσει.

Η Ελπίδα έκανε δύο παραδείγματα όπου βρήκε ότι το άθροισμα ήταν άρτιος. (11+11+11+11=44 ζυγός & 5+9+11+17=42 ζυγός). Η απάντησή της όμως ήταν η εξής: «*μερικές φορές βγαίνουν περιττοί και μερικές φορές βγαίνουν άρτιοι, γιατί οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι περιττοί*». Η απάντηση αυτή αξίζει να προσεχθεί γιατί δείχνει ότι παρόλο που στα παραδείγματά της δε βρήκε περιττό, θεωρεί σύμφωνα με τη ***φύση των προσθετέων*** ότι σίγουρα κάποια στιγμή θα βγαίνει περιττός. Έπειτα, με δική της πρωτοβουλία, ζήτησε ένα φύλλο χαρτί κι άρχισε να κάνει υπολογισμούς. Οι υπολογισμοί ήταν οι εξής:

1+3+5=9 μονός (3 προσθετέοι)

7+5+3=15 μονός (3 προσθετέοι)

7+5+9+11+21+3=119 μονός (5 προσθετέοι!)

7+5+9+11+21+3=56 ζυγός (6 προσθετέοι)

Εδώ έχει κάνει κάποιο λάθος στους υπολογισμούς της. Οι προσθετέοι είναι **6** και το αποτέλεσμα **56.** Εν τω μεταξύ γράφει το σωστό, ακριβώς από κάτω, αλλά δεν διορθώνει το προηγούμενο. Αντιθέτως το λαμβάνει υπόψη.

Παρά το λάθος της όμως, το σημαντικό είναι ότι μέσα από αυτή τη διαδικασία φαινόταν σαν να έψαχνε κάποιο ***μοτίβο.*** Κι όντως το βρήκε όπως φαίνεται από την εξήγηση που έδωσε, δείχνοντας κάθε φορά με το μολύβι της: «Κυρία κοιτάξτε! Όταν έχουμε 3, 5, 7 προσθετέους βγαίνει μονός κι όταν έχουμε ας πούμε 2, 4, 6 προσθετέους βγαίνει ζυγός!». Η συγκεκριμένη μαθήτρια κατάλαβε λοιπόν το σκοπό των δραστηριοτήτων, παρόλο που δεν μπόρεσε να το αιτιολογήσει.

Κι ο Μιχάλης έπειτα ζήτησε νέο φύλλο κι έγραψε 3 νέες προσθέσεις:

9+5+7=21 μονός (3 προσθετέοι)

19+11+37=67 μονός (3 προσθετέοι)

37+19+11+67+70+99=303 μονός (6 προσθετέοι, αλλά ο ένας είναι άρτιος!)

Προφανώς ήθελε να επιβεβαιώσει κι εκείνος αυτά που άκουγε από τα κορίτσια, σχετικά με το πλήθος των προσθετέων και το αποτέλεσμά τους μόνο που στην τελευταία πρόσθεση χρησιμοποίησε άρτιο αριθμό τον 70, χωρίς να το καταλάβει.

Στο τέλος, αφού τα παιδιά εξέφρασαν όλες τις παραπάνω απόψεις τους, θέλησα να τους δείξω και έναν τρόπο να αιτιολογήσουμε ή να αποδείξουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Τους ζήτησα έτσι να προσπαθήσουν να χρησιμοποιήσουν τα σύμβολα. Τότε το μυαλό τους πήγε αμέσως στη διαδικασία συμβολισμού με γράμματα όπως είχαμε κάνει στην 1η συνεδρία για τους πρώτους και έγραφαν κι έλεγαν συγχρόνως:

$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4$

Όμως δεν μπορούσαν να προχωρήσουν παρακάτω.

Τότε τους ζήτησα να μου πουν τους περιττούς από την αρχή. Και απάντησε η Ελπίδα : «1,3,5,7,9,11…». «Ωραία», είπα, «οι ζυγοί ποιοι είναι;» και απάντησε τότε η Σοφία μαζί με το Μιχάλη: «2,4,6,8…». «Άρα;» τους ρώτησα. Και οι μαθητές απάντησαν πως *πάνε εναλλάξ*. Τότε εγώ στο δικό μου φύλλο σχεδίασα μία γραμμή θέλοντας να αναπαραστήσω το 'εναλλάξ' των ζυγών και μονών αριθμών.

μ Ζ μ ζ μ ζ μ ζ μ ζ μ ζ μ

«Μετά από το ζυγό είναι ένας μονός» είπε ο Μιχάλης. «Ωραία, πώς θα συμβολίσουμε τον μονό αριθμό;» ρώτησα. Μετά από δευτερόλεπτα σιγής, συνέχισα: «αν αυτός (κι έδειχνα έναν ζυγό) είναι ζυγός, τότε πόσο είναι ο μονός που είναι δίπλα του;» Τότε η Ελπίδα απάντησε ότι είναι «+1»! Κι ακολούθησε ο εξής διάλογος:

Δ: Ωραία, πώς θα συμβολίσουμε δηλαδή έναν μονό;»

…

Δ: Όσο είναι ο ζυγός …

Π: +1

Δ: Ωραία για γράψτε λοιπόν. Πώς θα συμβολίσουμε τους περιττούς; (που είχαμε γράψει $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4$ *)*

Μ: $\zeta+1+\zeta+1+\zeta+1+\zeta+1$

Δ: Όχι ζ, γιατί δεν είναι ο ίδιος αριθμός…

Σ: $\zeta_1+1+\zeta_2+1+\zeta_3+1+\zeta_4+1$ *(Η Σοφία συνεχίζει να γράφει, ενώ η Ελπίδα έδειχνε απλά να παρακολουθεί)*

Σ: $4+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4$

(Η Ελπίδα παρακολουθούσε κι έγραφε, όμως δεν συνέχιζε μόνη της. Η Σοφία έπειτα προσπάθησε να συνεχίσει αλλά μπερδεύτηκε στο σύμβολο της πράξης)

Σ: $4*(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4) = \psi*\omega$ όπου ψ: ζυγός (εδώ εννοούσε το 4)

Έτσι, πήρα το δικό μου φύλλο εργασίας και άρχισα να γράφω από την αρχή, επιχειρώντας με τη μέθοδο των ερωταποκρίσεων να καταλάβουν ότι $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4=\zeta$, όπου ζ=ζυγός & 4 ζυγός κι άρα 4+ζ = ζυγός. Τα κορίτσια παρακολουθούσαν, αλλά σταμάτησαν και δεν έγραψαν κάτι άλλο. Ο Μιχάλης όμως συνέχισε κι έγραφε:

$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 =$

$\zeta+1+\zeta+1+\zeta+1+\zeta+1=$

$=4+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4=\zeta$

$=4+\zeta=\zeta$

Εδώ εννοεί $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4=$ζυγός
Και μετά 4+ζ = ζυγός

Έπειτα η Σοφία συνέχισε στο φύλλο της να αποδείξει ότι το άθροισμα 3 περιττών, θα βγαίνει πάντα περιττός κι έγραψε:

$\kappa_1+1+\kappa_2+1+\kappa_3+1 = 3+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3= 3+\zeta$

και απάντησε «*ναι θα βγαίνει πάντα μονός, γιατί το 3 είναι μονός ενώ το ζ είναι ζυγός και ο ζυγός με το μονό πάνε εναλλάξ*». Πολύ σημαντικό άλμα για παιδί ε' δημοτικού. Στο τέλος ο Μιχάλης είδε στο δικό μου φύλλο εργασίας ότι είχα και μία απόδειξη της $4^{ης}$ συνεδρίας, που αφορούσε την πρόσθεση τεσσάρων άρτιων, την οποία δεν τους είχα δείξει, επειδή έδωσα μια εξήγηση σχετική με παρατήρηση της Ελπίδας.

Ήταν παράξενο δε που ενδιαφέρθηκε να γράψει και αυτή την απόδειξη κι έτσι εξηγήσαμε κι αυτή:

Είπαμε ότι ένας άρτιος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2. Κι έτσι αφού είχαμε τέσσερις διαφορετικούς άρτιους ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 τους γράψαμε ως πολλαπλάσια του 2.

$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 2\mu+2\nu+2\xi+2\rho=2 * (\mu+\nu+\xi+\rho) =2*\omega=$ ζυγός

Εν περιλήψει, στη συνεδρία αυτή, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές προσπάθησαν να απαντήσουν το ερώτημα ήταν στην αρχή ο ***αφελής εμπειρισμός***, αφού οι δύο από τους τρεις μαθητές έκαναν 7-8 δοκιμές για να βγάλουν ένα συμπέρασμα. Η Ελπίδα έκανε δύο δοκιμές, αλλά δεν έβγαλε το συμπέρασμά της μόνο από αυτές, αφού παρόλο που τα αθροίσματά της ήταν άρτιοι, θεώρησε ότι *λόγω της φύσεως των προσθετέων* θα βγαίνουν και περιττά αθροίσματα! Άρα, ίσως κρύβει πάλι μια *αναλογική σκέψη στην εικασία της*. Έπειτα, έκανε νέους υπολογισμούς με διαφορετικό αριθμό προσθετέων και βρήκε το ***μοτίβο*** ότι με άρτιο πλήθος περιττών προσθετέων το άθροισμα είναι άρτιος, ενώ με περιττό πλήθος το άθροισμα είναι περιττός! Αρκετά κοντά στο μοτίβο ήταν και η Σοφία, αλλά δεν μπόρεσε να το πει τόσο ολοκληρωμένα. Επειδή οι μαθητές όμως δε μπορούσαν να αιτιολογήσουν, τότε χρειάστηκε δική μου συνεδρία κι έγινε με τη χρήση συμβόλων και μιας αριθμογραμμής. Μέσα από συνεχή διάλογο, κατασκευάστηκε τελικά η μαθηματική απόδειξη για το άθροισμα τεσσάρων περιττών. Με δική της πρωτοβουλία, τότε η Σοφία έκανε τη δική της ***απόδειξη*** για το άθροισμα τριών περιττών κι επέλεξε αυτό προφανώς γιατί από την αρχή ήταν σίγουρη με μία μόνο δοκιμή ότι το άθροισμα των τριών περιττών θα είναι περιττός, μόνο που δε μπορούσε να το εξηγήσει. Στο τέλος επιδείχτηκε η απόδειξη και για το άθροισμα τεσσάρων ζυγών (της $4^{ης}$ συνεδρίας) ύστερα από αίτημα του Μιχάλη.

Ως προς την εξέλιξη των παιδιών, είναι εκπληκτικό, σε αυτή τη συνεδρία, το πώς έχουμε μία αντιστροφή των ρόλων. Ο Μιχάλης που ήταν ένα παιδί που μιλούσε τελευταίος και μάλιστα όχι πολύ, φαίνεται πως στο τέλος δείχνει ενδιαφέρον να μάθει τελικά τι ισχύει και πώς αποδεικνύεται. Προς την ίδια κατεύθυνση κινείται και η Σοφία. Η Ελπίδα, αντίθετα που έχει περισσότερες δυνατότητες, ανάλογα με τη διάθεσή της ή θα ανακαλύψει μόνη της τη θεωρία ή θα δυσανασχετεί όταν της αποκαλύπτεται και δείχνει κάτι σαν αδιαφορία.

6η συνεδρία: Το άθροισμα από 5 οποιουσδήποτε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς διαιρείται με το 5;

Όταν διατυπώθηκε το ερώτημα, οι πρώτες απαντήσεις ήταν όχι, χωρίς ιδιαίτερη σκέψη. Η Ελπίδα δικαιολόγησε λέγοντας πως *δε τελειώνουν όλοι σε 5*. Η ερευνήτρια τότε θεώρησε αναγκαίο να εξηγήσει τη διατύπωση του ερωτήματος θέλοντας να είναι σίγουρη ότι όλοι οι μαθητές το κατανοούν. Και πράγματι το είχαν ανάγκη. Δεν ήξεραν καταρχήν ποιους λέμε διαδοχικούς αριθμούς.

Η Σοφία κατάλαβε τη διαδικασία και είπε από μόνη της τι πρέπει να κάνουν. Η Ελπίδα απάντησε μάλλον διαισθητικά και σκέφτηκε πως *επειδή είναι 5 οι αριθμοί και είναι με τη σειρά θα διαιρούνται με το 5*. Υπάρχει μια δυσκολία γενικά και στα τρία παιδιά. Ο Μιχάλης δεν έχει καταλάβει ακόμα τη διατύπωση της ερώτησης.

Μ: Πήρα το 20,21,22,23,24

Δ: Και;

Μ: Το 20 διά 5 διαιρείται.

Δ: Δεν είπαμε ο καθένας ξεχωριστά να διαιρείται, είπαμε το άθροισμά τους, δηλαδή αν τους προσθέσουμε.

Μ: Δηλαδή δεν διαιρούμε;

Δ: Αν τους προσθέσω θα βρούμε έναν αριθμό. Αυτός ο αριθμός θα διαιρείται με το 5;

Η Σοφία μετά από δύο δοκιμές (55+56+57+58+59=285 & 105+106+107+108+109=535), κάνει κι αυτή μια ***εικασία*** *ότι όλα τα αθροίσματα τελειώνουν σε 0 ή 5, αφού οι αριθμοί είναι 5*. Η Ελπίδα, έπειτα, παρατήρησε ένα ***μοτίβο***, στον τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος ενός παραδείγματος, του 1+2+3+4+5. Είχε γράψει: *«1+2+3+4+5 διαιρείται με το 5, γιατί είναι σαν την προπαίδεια του 5, 5+5+5=15 3*5=15»* Προφανώς εδώ είχε προσθέσει 1+4=5, 3+2=5. Όμως αυτό δεν είχε εφαρμογή σε άλλα παραδείγματα κι έτσι της υπέδειξα να κάνει δοκιμές και με άλλους μεγαλύτερους διαδοχικούς, που να μη ξεκινάνε αναγκαστικά από το 1 . Ο Μιχάλης τελικά κατάλαβε κι εκείνος τι έπρεπε να κάνει. Πρόσθεσε τους αριθμούς 20,21,22,23,24 και βρήκε 110, το διαίρεσε με το 5 και βρήκε 22. Επομένως συμπέρανε ότι διαιρείται. Όμως έμεινε μόνο σε αυτό το παράδειγμα. Δεν έκανε κάποια εικασία.

Μετά από δική μου επιμονή να ρωτάω αν ισχύει ή δεν ισχύει η πρόταση τότε απάντησαν όλοι ναι. Ρώτησα όμως αν «ισχύει πάντα ή ισχύει μερικές φορές;». Οι απαντήσεις τότε που πήρα ήταν ποικίλλες:

Σ: Πάντα

Ε: Μερικές φορές

Σ : Είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε 5 φορές έναν αριθμό.

Δ: Γιατί το λες αυτό; Αφού προσθέτουμε διαφορετικούς αριθμούς.

Σ: Ναι αλλά και τις άλλες φορές που προσθέταμε 3 αριθμούς, ήταν πολλαπλάσια του 3. (Αργότερα κατάλαβα πως δεν κάναμε τέτοια δραστηριότητα)

Δ: Ναι αλλά τότε προσθέταμε περιττούς αριθμούς όχι διαδοχικούς.

Ε: (προς τη Σοφία) ***Ναι κι άμα δεν είχαμε κάνει εκείνα τι θα απαντούσες τώρα;***

Δ: Μήπως πρέπει να ψάξουμε πιο βαθιά για να απαντήσουμε κι όχι να αρκεστούμε σε λίγα παραδείγματα;

Οι μαθητές έδειχναν έτοιμοι να τα παρατήσουν κι έτσι αποφάσισα να δώσω μια βοήθεια. Τους πρότεινα να ξεκινήσουν από το 8. Η Σοφία αντιλήφθηκε ότι από τους πέντε διαδοχικούς αριθμούς ο ένας διαιρείται με το 5 κι έτσι διευκόλυνε το έργο μου.

Δ: Για παρατηρήστε τους αριθμούς λίγο τον καθένα ξεχωριστά όπως έκανε ο Μιχάλης πριν.

Σ: Μέσα σ' αυτούς τους 5 αριθμούς ο ένας είναι ή πολλαπλάσιο ή διαιρέτης του 5.

Δ: Πολύ ωραία ! για δείτε τους άλλους είναι;

Π: Όχι

Σ: Εγώ έκανα και κάτι άλλο. Εγώ έκανα, εμ… βρήκα το 5,6,7,8,9 κι έβγαλα το 5 και μένουν οι άλλοι……..

Ε: Λοιπόν ο καθένας θα κρατήσει την απάντησή του

Σ: Πρόσθεσα τους άλλους που δεν είναι πολλαπλάσια του 5 και το άθροισμά τους βγήκε πολλαπλάσιο του 5

Δ: Ωραία γιατί συμβαίνει αυτό; Για κοιτάξτε

Η παρατήρηση που έκανε η Σοφία στο παράδειγμα ήταν πάρα πολύ καλή. Τότε όμως η Ελπίδα παρατήρησε πάλι κάτι στη δομή των διαδοχικών και οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα ***σύμβολα*** για να εξηγήσουν, μόνο με μία μικρή παρότρυνση!

Ε: Προσθέτουμε και ένα! Κοίτα 8+1! (εκείνη είχε κάνει άλλο παράδειγμα το 8 + 9+10+11+12)

Δ: Για συμβόλισέ το. Μπορείς;

Ε: 8+α , όπου α=1 κι όλα αυτά τα ενάρια θα μας κάνουν 5

Δ: Περίμενε-περίμενε γιατί είσαι κοντά

Μ: Επιτέλους θα φύγουμε ; (καταλαβαίνει ότι είμαστε κοντά στη λύση και χαίρεται!)

Δ: Το 8 δε θα το κρατήσουμε γιατί θέλουμε να δείξουμε για όλους τους αριθμούς. Άρα αν α που θα σημαίνει τον πρώτο αριθμό για δείξε μου τους άλλους. Ο δεύτερος πώς θα τον πούμε; α+…..;

Ε: α+β

Σ: α+1 (διορθώνει την Ελπίδα)

Δ: Ωραία . α+1. ο τρίτος;

Σ: β+1

Δ: Ποιος β;

Μ: α+2 (απαντάει σωστά και ο Μιχάλης, άρα προσέχει και κατανοεί)

Δ: Ο τέταρτος;

Σ: α+3

Δ: Ο πέμπτος;

Σ: α+4

Δ: Έχουμε 5 για μετρήστε τους.

Ε: Οπότε αυτοί πάνε με τη σειρά!

Έμμενε τώρα οι μαθητές να χειριστούν το α και να υπολογίσουν τη παράσταση. Τους βοήθησα όμως λίγο γιατί δεν ήταν πολύ εξοικειωμένοι. Αξιοπρόσεχτη είναι η παρατήρηση του Μιχάλη, ενδιάμεσα, ότι «***τα α είναι σαν τα χ»*** κι αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί συνδέει τα δύο αντικείμενα (τη μεταβλητή και το άγνωστο χ) και μέσω του γνωστού αντικειμένου για εκείνον, κατανοεί και το ξένο αντικείμενο. Η συγκεκριμένη σκέψη είναι είδος ***αναλογικού συλλογισμού***, αφού περιλαμβάνει τις

διαδικασίες της συσχέτισης και της μεταφοράς, όπως τις ορίζει η Douek (1998) και η οποία τις θεωρεί πολύ σημαντικές ικανότητες για τα μαθηματικά.

Δ: Επομένως πόσο μας κάνει αυτό τώρα; γράψτε την παράσταση.

Σ: α+5

Δ: Πόσα α έχουμε Σοφία;

Σ: 5

Δ: Άρα έχουμε 5 α

Μ: Δηλαδή ***τα α είναι σαν τα χ***

Δ: Έχουμε 5 φορές το α…

Σ: Και 5. 5 φορές το α, και 5

Δ: Για μετρήστε 5 α και 1+2+3+4

Σ: 5 α +10

Τέλος, προσπαθήσαμε να αιτιολογήσουμε γιατί η παράσταση διαιρείται με το 5. Στο σημείο αυτό, παραλίγο η Ελπίδα να μπερδευτεί και να το λύσει σαν εξίσωση, αλλά μετά κατάλαβε το λάθος της και γέλασε. Για την εξήγηση αν διαιρείται η παράσταση φάνηκε χρήσιμη η αρχική στρατηγική του Μιχάλη, που έλεγχε τον κάθε προσθετέο κι αυτό τον ευχαρίστησε ιδιαίτερα. Περισσότερη κατανόηση πάντως έδειξε η Σοφία αφού συνέβαλε πολύ στην εξήγηση του ερωτήματος, αν και οι άλλοι ίσως κατανόησαν αλλά δε συμμετείχαν τόσο πολύ.

Δ: Το 5 α +10 διαιρείται με το 5; Μιχάλη τι έκανες εσύ πριν για να δεις αν διαιρείται;

Μ: Κοιτούσα αν διαιρείται ο καθένας μόνος του.

Μ: Ρε είναι στο χαρτί και να μην μπορώ να απαντήσω

Σ: Ναι διαιρούνται με το 5. μόνο το α δε ξέρουμε.

Δ: Το α πάει μαζί με το 5

Σ: ***5 α είναι ένα πολλαπλάσιο του 5 ! Άρα διαιρείται κι αυτό***!

Δ: Μπράβο! Άρα ανεξάρτητα από το τι είναι το α, το 5 φορές το α διαιρείται με το 5. Και το 10 διαιρείται με το 5 . Άρα όλο το 5 α +10 διαιρείται με το 5.

Σ: ναι

Δ: Άρα η πρόταση είναι σωστή ή λάθος;

Σ: Σωστή!

Δ: Ισχύει για πάντα ή για μερικές φορές;

Σ: Για πάντα!

Η συνεδρία αυτή είναι διαφορετική από τις άλλες. Οι μαθητές ναι μεν έκαναν 1-2 δοκιμές ο καθένας, αλλά όχι περισσότερες όπως στο προηγούμενο μάθημα. Οι δοκιμές αυτές ήταν και απαραίτητες για εκείνους γιατί δυσκολεύονταν με το ερώτημα κι έπρεπε να το οπτικοποιήσουν. Η Ελπίδα παρατήρησε στην $1^{η}$ δοκιμή της ένα πολύ σημαντικό μοτίβο, αλλά δε μπορούσε να εφαρμοστεί και στις άλλες περιπτώσεις. Έτσι έκανε ακόμα μία δοκιμή με άλλους διαδοχικούς αριθμούς, όπως της είπα. Η Σοφία όμως χρησιμοποίησε την στρατηγική του Μιχάλη, που κι εγώ στην αρχή βιάστηκα να 'καταδικάσω' και κατάφερε να εντοπίσει γιατί ισχύει η πρόταση στο παράδειγμα. Επρόκειτο για καθαρά ***απαγωγικό βήμα***, που θα λειτουργούσε σαν παράδειγμα που γενικεύεται ***(generic example)*** αν δε διέκοπτε η Ελπίδα, η οποία παρατήρησε ένα άλλο στοιχείο στη δομή των διαδοχικών μέσα από ένα παράδειγμα και μεταφερθήκαμε σε άλλα μονοπάτια! Μάλιστα με αφορμή τη σκέψη της Ελπίδας, την προέτρεψα να χρησιμοποιήσει έναν ***συμβολισμό*** και τότε και οι τρεις μαθητές έκαναν πολύ καλές προσπάθειες με έναν ενθουσιασμό που δεν περίμενα! Τελικά σχηματίσαμε μια αλγεβρική παράσταση, που αντιπροσώπευε το άθροισμα 5 οποιωνδήποτε διαδοχικών αριθμών, και με λίγη καθοδήγηση, η Σοφία εξήγησε για ποιο λόγο διαιρείται η παράσταση αυτή με το 5! Με τον τρόπο αυτό έγινε μια ***μαθηματική απόδειξη*** της πρότασης! Τέλος, κάτι ακόμα που παρατηρήθηκε στην εξέλιξη των μαθητών, ήταν ο ***αναλογικός συλλογισμός*** του Μιχάλη, σύμφωνα με τον οποίο για να κατανοήσει τη μεταβλητή α , τη παρομοίωσε με το άγνωστο χ, καθώς και η ***νόρμα*** που φαίνεται να έχει καλλιεργηθεί ότι πρέπει να δίνουμε μία πειστική εξήγηση ο ένας στον άλλο, όταν η Ελπίδα ζήτησε από τη Σοφία να μη μαντεύει αναλογικά με ότι έχουμε βρει σε άλλα ερωτήματα, αλλά να ψάξει να βρει μια καλή εξήγηση*: «ναι κι άμα δεν είχαμε κάνει εκείνα τι θα απαντούσες τώρα;»*

7η συνεδρία : Το άθροισμα 4 διαδοχικών αριθμών θα διαιρείται με το 4;

Και το άθροισμα 6 διαδοχικών θα διαιρείται με το 6;

Επειδή στην προηγούμενη συνεδρία, η εικασία ότι το άθροισμα 5 διαδοχικών διαιρείται με το 5, αποδείχτηκε σωστή, θεώρησα να θέσω παρόμοια ερωτήματα για να δω αν θα σκεφτούν αναλογικά. Επειδή είχαν μεσολαβήσει και οι διακοπές του Πάσχα, το φύλλο εργασίας τους δόθηκε έτσι ώστε να τους υπενθυμίζει τι είχαμε βρει:

Σε προηγούμενη άσκηση διαπιστώσαμε ότι το άθροισμα από 5 οποιουσδήποτε διαδοχικούς αριθμούς διαιρείται με το 5. Ένα παιδί λοιπόν, ο Κώστας σκέφτηκε ότι ισχύει αυτός ο κανόνας και για άλλους αριθμούς.
Έτσι σκέφτηκε:

Άρα το άθροισμα τεσσάρων οποιωνδήποτε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 4.

Και το άθροισμα έξι οποιωνδήποτε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6

Τι έχεις να πεις στον Κώστα; Είναι σωστή η άποψή του; Αν όχι βοήθησέ τον να καταλάβει

Πράγματι, οι μαθητές δεν θυμόντουσαν αρκετά πράγματα. Ο Μιχάλης θυμήθηκε όμως αμέσως το συμβολισμό που είχαμε κάνει (α, α+1, …). Ωστόσο δεν το χρησιμοποίησε. Αντιθέτως ακολούθησε την ίδια στρατηγική που είχε ακολουθήσει και τότε, αρχικά. Πήρε 4 διαδοχικούς κι εξέταζε έναν- έναν αν διαιρείται με το 4. Έπειτα, όλοι οι μαθητές έλεγχαν αν το άθροισμα των 4 διαδοχικών αριθμών που πήρε ο καθένας διαιρούταν με το 4. Η Ελπίδα κι ο Μιχάλης είδαν από την πρώτη δοκιμή ότι από τη διαίρεση βγαίνει δεκαδικός, αποφάνθηκαν ότι το άθροισμα δε διαιρείται, αλλά ωστόσο συνέχισαν τις δοκιμές. Η Σοφία έκανε πράξεις αλλά δε συμμετείχε στη συζήτηση.

Δ: Τι λες; (προς το Μιχάλη) Διαιρείται το άθροισμα από 4 διαδοχικούς με το 4;

Μ: Όχι, όχι

Μ: Κάνω άλλη μία και θα σας απαντήσω

Μετά από λίγο, εξέφρασε την άποψή της και η Σοφία που δούλευε σιωπηρά και είπε: «Όχι, δεν είναι σωστή η άποψη του Κώστα, γιατί (ανέφερε 2 παραδείγματα) *και γιατί είναι 4 διαδοχικοί και δε διαιρούνται όλοι με το 4, αλλά υπάρχει πάντα ένας αριθμός που θα διαιρείται με το 4*». Παρατηρούμε πως η Σοφία έκανε μεν δύο δοκιμές αλλά προσπάθησε να βρει και μια πιο βαθιά εξήγηση. Η εξήγηση αυτή δεν είναι αρκετή για να απορρίψει την πρόταση, όμως είναι ένα σημαντικό βήμα αφού την οδηγεί και στην εύρεση ότι *ανάμεσα από τους 4 διαδοχικούς πάντα ο ένας διαιρείται με το 4*. Πρόκειται για μια εικασία που διαμορφώθηκε από την παρατήρηση των αριθμών και η οποία είναι σωστή.

Για την απάντηση του ερωτήματος που αφορούσε το άθροισμα 6 διαδοχικών, η Ελπίδα, αναρωτήθηκε μήπως για τους 6 βρούμε κάτι διαφορετικό, επειδή είναι μετά το 5. Βρήκε όμως αμέσως ένα αντιπαράδειγμα, όπως και οι υπόλοιποι μαθητές, κι έτσι δε συνέχισε την εικασία της. Την ανέφερε όμως ξανά λίγο παρακάτω. Να σημειώσουμε εδώ ότι αυτή τη φορά οι μαθητές *αρκέστηκαν σε ένα μόνο αντιπαράδειγμα* για την απόρριψη της πρότασης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα. Ο Μιχάλης παρουσίασε το αντιπαράδειγμα του σαν απάντηση στο ερώτημα και δικαιολόγησε πως «*και με τα άλλα το ίδιο θα βγαίνει*». Η Σοφία όμως επιπλέον επέκτεινε την προηγούμενη εικασία της και στην περίπτωση των 6 διαδοχικών, και είπε *πως «πάντα θα υπάρχει ένας αριθμός από αυτούς τους έξι διαδοχικούς που διαιρείται με το 6»*. Εν τω μεταξύ, την εικασία αυτή την είχε γράψει στο φύλλο της, αλλά δεν την είπε προφορικά.

Έπειτα, τέθηκε το ερώτημα αν υπάρχει έστω και μία περίπτωση που να ισχύουν οι εικασίες του Κώστα. Με άλλα λόγια μετέτρεψα τις εικασίες του Κώστα, τις οποίες με αντιπαραδείγματα απορρίψαμε ότι ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις, από καθολικές σε υπαρκτικές. Η Ελπίδα τότε έκανε μία **εικασία** ότι *μέχρι 5 διαδοχικούς μπορεί να υπάρχει τέτοια περίπτωση, ενώ παραπάνω όχι.*

Δ: Βρήκατε κάποια παραδείγματα που δεν διαιρούνται με το 4 και το 6. αυτά τα λέμε αντιπαραδείγματα.. Μπορεί να υπάρχουν όμως κάποιοι 4 διαδοχικοί που να τους προσθέσουμε και να διαιρείται το άθροισμα με το 4;

Ε: Με το 4 μπορεί και να υπάρχουν. Με το 6 όχι.

Δ: Πώς το λες αυτό;

Ε: Έτσι. Δε ξέρω μπορεί μέχρι το 5 να υπάρχουν.

Δ: Μέχρι τώρα έχουμε βρει κάποια τετράδα που να διαιρείται το άθροισμά της με το 4;

Π: Όχι

Οι μαθητές τότε δοκίμασαν ξανά άλλους διαδοχικούς για να επανεξετάσουν μήπως ισχύει η πρόταση για κάποιες περιπτώσεις. Στην προσπάθεια αυτή ο Μιχάλης, μάλλον επειδή ήθελε να δοκιμάσει 'διαφορετικούς' αριθμούς, μπερδεύτηκε και θεώρησε τους αριθμούς 60,70,80,90 σαν διαδοχικούς. Έπειτα όμως από δική μου εξήγηση έκανε άλλες δύο δοκιμές που ήταν κι εκείνες αντιπαραδείγματα στην εικασία του Κώστα. Η Σοφία επίσης βρήκε άλλα τρία αντιπαραδείγματα για τη κάθε εικασία κι είπε πως δεν υπάρχει περίπτωση να διαιρείται το άθροισμα ούτε με το 4 ούτε με το 6. Η Ελπίδα δυσκολεύεται να απαντήσει κι αντιδρά λέγοντας: *«Ε: τώρα εγώ πρέπει να τα πάρω όλα 1,2,3,4 5,6,7,8 μέχρι το 100 μέχρι να βρω αν υπάρχει;». Δεν της έδωσα σαφή απάντηση, της είπα ότι θα έπρεπε έτσι να κάνει, εκτός κι αν έβρισκε άλλο τρόπο να αιτιολογήσει.* Κι ενώ έκανα κάποιες σημειώσεις σε δικό μου φύλλο, η Ελπίδα είδε ότι χρησιμοποιούσα τα σύμβολα και προσπάθησε να δει πώς λύνεται με τα σύμβολα. Τη ρώτησα αν ήθελε να χρησιμοποιήσει τα **σύμβολα**. Τότε αντί να απαντήσει η Ελπίδα, πετάχτηκε η Σοφία και δέχτηκε με μεγάλη προθυμία! Ακολούθως, ενεπλάκη κι ο Μιχάλης στα σύμβολα παρόλο που δεν τα κατάφερνε πολύ καλά. Αντιθέτως η Σοφία κατάφερε να τα συμβολίσει σωστά, θυμίζοντάς της ότι «τον πρώτο αριθμό τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα κι ο επόμενος θα είναι ένα παραπάνω από τον πρώτο». Έπειτα εργαστήκαμε όλοι μαζί, με βάση το συμβολισμό που έκανε η Σοφία. Η Ελπίδα έκανε τις πράξεις και μας έδωσε την πιο απλή μορφή του αθροίσματος που ήταν «4ν+6». Τότε ακολούθησε διάλογος κι εξηγήσαμε ότι το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών δε διαιρείται με το 4. Στην κατανόηση της απόδειξης βοήθησα κι εγώ, αλλά και η εξήγηση της Σοφίας, για το 4ν ότι διαιρείται με το 4. Η εξήγηση που έδωσε δείχνει ότι κατάλαβε πολύ καλά, αυτά που είχαμε πει στην 1η συνεδρία, ότι από κάθε πολλαπλασιασμό προκύπτουν δύο τέλειες διαιρέσεις.

Δ: Θέλουμε να δούμε τώρα αν αυτό διαιρείται με το 4. το 4ν διαιρείται με το 4;

Σ: ***Ναι γιατί πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 4 και αν το διαιρέσουμε με το 4 θα μας βγει πάλι.***

Δ: Το 6 διαιρείται με το 4;

Ε: Όχι

Δ: Όχι…. Άρα; Αυτό εδώ δε διαιρείται με το 4.

Εν τω μεταξύ, αργότερα η Σοφία μας αποκάλυψε πως είχε βρει ένα ***μοτίβο***! Βρήκε ότι «*όλες οι διαιρέσεις βγαίνουν συνέχεια 0,5, 2,5 όλα σε κόμμα 5*». Στην αρχή ξαφνιάστηκα με την παρατήρησή της, όμως αμέσως κατάλαβα πως το γεγονός αυτό δεν ήταν τυχαίο. Κοίταξα την παραπάνω δομή του αθροίσματος των τεσσάρων διαδοχικών (4ν+6) και κατάλαβα πως το μοτίβο που παρατήρησε η Σοφία είχε αιτιολόγηση. Επειδή όμως το θεώρησα υπερβολικά δύσκολο για να το σκεφτούν τα παιδιά δημοτικού, το εξήγησα εγώ, αφού πρώτα τους ρώτησα αν ήθελαν να μάθουν το γιατί συμβαίνει αυτό. Η απάντηση ήταν θετική κι έτσι προχώρησα στην εξήγηση.

Δ: Έχουμε 4ν+6. Το 4ν το κρατάω, γιατί διαιρείται με το 4. Το 6 γιατί δε διαιρείται με το 4; Γιατί είναι 4+2 έτσι;

Σ: Ναι

Δ: Άρα αν είχαμε 4ν+4, τοτε όλο αυτό θα διαιρούνταν με το 4. γιατί και αυτό(4ν) και αυτό (4) θα διαιρούνταν με το 4. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε;

Σ: Συμφωνώ.

Δ: Τώρα τι έχουμε όμως; ***Έχουμε +2. που αυτό τι είναι;***

Σ: Μισό.

Δ: Μπράβο! Γι' αυτό μας βγαίνει συνέχεια το μισό.

Ε: Καλά γεια!

Μ: Εγώ πάντως το μόνο καλό είναι που βρήκα είναι ότι βγαίνει συνέχεια κόμμα.

Στο παραπάνω απόσπασμα διακρίνουμε την έντονη προσοχή που έδειξε η Σοφία στην εξήγηση που έδινα για το μοτίβο που ανακάλυψε, ενώ η προσοχή της αυτή είχε σαν αποτέλεσμα και την κατανόηση. Δεν φαινόταν όμως να είχαν καταλάβει οι υπόλοιποι μαθητές κι αυτό έμενε να το διαπιστώσω παρακάτω όπου οι μαθητές έπρεπε να εργαστούν παρόμοια και για την περίπτωση του αθροίσματος 6 διαδοχικών .

Δ: Πάμε να αιτιολογήσουμε για τους 6 τώρα.

(Τα παιδιά γράφουν μόνα τους τη μορφή που θα έχει το άθροισμα 6 διαδοχικών, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα.)

Δ: Πόσο μας κάνει η αριθμητική παράσταση;

……..

Δ: Πόσα ν έχουμε;

Π: 6

Δ: Έχουμε 6ν + …

Ε: 15

Δ: 6ν+15 λοιπόν. Διαιρείται με το 6;

Ε: Ναι, γιατί το μισό του 6 είναι το 3 και το 3 διαιρείται με το 15*. Αυτό που είπε η Σοφία.*

Μ: Ντόιγκ…

Δ: Πρόσεξε λίγο. ***Έβγαλες νέο κανόνα ότι όταν προσθέτουμε 6 διαδοχικούς , το άθροισμά τους διαιρείται με το 3.*** *Με το 6 διαιρείται όμως;*

……..

Ε: 15 δια 3 μας κάνει 5.

Δ: Μη μπερδεύεσαι (προς Ελπίδα)

Σ: *Ελπίδα κοίτα αυτό που κάναμε πριν.* ***(****Η Σοφία το έχει βρει εν τω μεταξύ.)*

Δ: Για εξήγησέ της εσύ Σοφία

Σ: 6ν+15. το 15 είναι 12+3. Το 6 δε διαιρείται με το 3.

Δ: Δε διαιρείται το 6 με το 3; *Μπερδεύτηκες.****(εννοούσε το 3 δε διαιρείται με το 6)***

Δ: Είπαμε ότι αν είχαμε πάρει 6 διαδοχικούς π.χ. 20+21+22+23+24+25 θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα με αυτό τον τρόπο 6ν+15 ,δηλ. 6 φορές τον πρώτο αριθμό, (εδώ το 20) και 15. Και λέμε διαιρείται το 6ν+15 με το 6; Το 6ν διαιρείται. Το 15 όμως; Όχι. Γι' αυτό δε διαιρείται. Άρα δεν υπάρχει καμία 6-αδα διαδοχικών που να διαιρείται με το 6 και καμία 4-άδα διαδοχικών που να διαιρείται με το 4.

Από τους τελευταίους διαλόγους, φάνηκε πως οι μαθητές απέκτησαν μια ***άνεση με τη χρήση συμβόλων***, αλλά υστερούσαν στο να κατανοήσουν κάτι μέσα από αυτά. Η Σοφία βέβαια, αποτέλεσε εξαίρεση, αφού ήταν καλή και στα δύο. Κατάφερε και να χρησιμοποιήσει τα σύμβολα αλλά και να εξηγήσει μέσα από αυτά, ύστερα από την προηγούμενη επίδειξη που της έγινε. Έκανε ένα λάθος μόνο στη διατύπωση που αφορούσε τη διαιρετότητα του 3 με το 6. Αν δει κανείς όμως τον τρόπο που 'έσπασε' το 15 σε 12+3 κι εννοούσε ότι το 3 δε διαιρείται με το 6, αυτή ήταν μία τέλεια εξήγηση στο ότι ισχύει το ίδιο μοτίβο με αυτό που παρατήρησε στις διαιρέσεις με το άθροισμα των τεσσάρων διαδοχικών. Τα πηλίκα δηλαδή των διαιρέσεων των αθροισμάτων των έξι διαδοχικών με το 6, θα ήταν όλοι δεκαδικοί αριθμοί, που είχαν ως δεκαδικό μέρος 5 δέκατα (λήγουν σε …,5). Η Ελπίδα, επίσης ήταν πολύ κοντά στην εξήγηση ότι δε διαιρείται το άθροισμα των 6 διαδοχικών με το 6, αλλά μπερδεύτηκε στο τέλος με τους

αριθμούς με τους οποίους διαιρούσε και δεν κατανόησα ακόμα το γιατί. Φάνηκε πάντως πως προσπάθησε να παρακολουθήσει προηγουμένως τη σκέψη της Σοφίας, αλλά δεν την κατάλαβε. Ανέφερε μάλιστα ότι εργαζόταν όπως η Σοφία, κι άρα παρανόησε κάτι από την εξήγησή της. Εγώ σαν ερευνήτρια, όμως, έκανα κι εγώ μια **εικασία**, που θα φανεί σε επόμενες συνεδρίες αν ισχύει, ότι η Ελπίδα θεωρεί *ότι εφόσον το άθροισμα των έξι διαδοχικών διαιρείται με το 3, θα διαιρείται και με το 6*. Δεν εξηγείται αλλιώς, να τη ρωτάω αν διαιρείται με το 6 και να μου απαντάει θετικά, αλλά να εξηγεί ότι διαιρείται με το 3. Εικάζω λοιπόν ότι η μαθήτρια είχε αυτή την εικασία λόγω του ότι το 3 είναι το μισό του 6 και θεωρώ ότι έχει υπάρξει μια μετασχηματισμός, μιας και το αντίστροφο ισχύει. Δηλαδή όταν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε διαιρείται και με το 3. Δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο, όπως θεωρώ ότι νόμισε η Ελπίδα. Για να λύσω την απορία μου αυτή, για το αν ισχύει η εικασία μου για τον τρόπο που σκέφτεται η Ελπίδα ή όχι, διαμόρφωσα ανάλογα και τα επόμενα ερωτήματα που θα μας απασχολούσαν στις επόμενες συναντήσεις μας.

Περιληπτικά, στην συνεδρία αυτή τέθηκαν δύο ερωτήματα με παρόμοια δομή με ένα της προηγούμενης συνεδρίας, ώστε να δούμε αν οι μαθητές θα σκέφτονταν αναλογικά, αλλά και για να έρθουν έπειτα σε γνωστική σύγκρουση, αν συνέβαινε αυτό. Τελικά, μόνο η Ελπίδα συσχέτισε τα δύο ερωτήματα και σκέφτηκε ότι θα ισχύει το ίδιο και σε αυτά. Για το πρώτο ερώτημα που αφορούσε το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών, οι μαθητές απάντησαν με βάση τα ***αντιπαραδείγματα,*** ενώ ο κάθε μαθητής βρήκε περισσότερα από ένα. Μόνο η Σοφία, εκτός από τα αντιπαραδείγματα που βρήκε, έκανε και μια ***εικασία***, από παρατήρησή της, που τη παρουσίασε σαν ***πείραμα σκέψης,*** μιας και με βάση αυτή προσπαθούσε να εξηγήσει γιατί δεν ισχύει η πρόταση. Η εικασία ήταν σωστή, όμως δεν επαρκούσε σαν εξήγηση. Για το δεύτερο ερώτημα οι μαθητές απάντησαν πάλι με αντιπαραδείγματα, αλλά αυτή τη φορά αρκέστηκαν σε ένα αντιπαράδειγμα ο καθένας!

Έπειτα, τέθηκε το ερώτημα αν υπάρχει έστω και μία περίπτωση που να ισχύουν οι εικασίες των ερωτημάτων. Με άλλα λόγια μετέτρεψα τις εικασίες της άσκησης ***από καθολικές σε υπαρκτικές***. Για τον έλεγχο αυτών των υπαρκτικών εικασιών, οι μαθητές προθυμοποιήθηκαν να εμπλακούν στο ***συμβολισμό,*** μιας και οι δοκιμές μέχρι στιγμής ήταν αντιπαραδείγματα και θεώρησαν χρονοβόρο και κουραστικό να συνεχίσουν έτσι.. Παρουσίασαν μια μικρή δυσκολία στην αρχή, όμως μετά την εξήγηση του πρώτου ερωτήματος, στο δεύτερο ερώτημα μπόρεσαν να διαχειριστούν πολύ εύκολα τα σύμβολα. Αυτό που δυσκόλεψε τους δύο μαθητές, αλλά όχι τη Σοφία, ήταν η

μαθηματική εξήγηση μέσα από αυτά. Πάντως και η Ελπίδα ήταν πολύ κοντά, αλλά μια λαθεμένη εικασία της την αποπροσανατόλισε. Για το Μιχάλη, δε γνωρίζουμε πόσο κατανόησε την εξήγηση μέσω του συμβολισμού, αλλά το σίγουρο είναι πως είχε αμείωτο ενδιαφέρον και παρακολουθούσε τα όσα γίνονταν. Τέλος, να πούμε ότι για την απόδειξη των ερωτημάτων αυτών βασιστήκαμε στο ότι *όταν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς, τότε διαιρεί και το άθροισμά τους*. Αυτό είναι κάτι που δεν είχαν διδαχθεί οι μαθητές, αλλά υπονοήθηκε στη σημερινή δραστηριότητα. Το πόσο κατανοήθηκε θα το μάθουμε στη 12η συνεδρία.

8η συνεδρία : «Διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 2 με το 4;»

Πριν προλάβω καλά καλά να ολοκληρώσω τη διατύπωση του ερωτήματος, οι μαθητές με διέκοψαν κάνοντας εικασίες για το τι ήθελα να ρωτήσω. Έτσι ακολούθησε ένας διάλογος. Στο διάλογο αυτό φάνηκε πως η Σοφία και ο Μιχάλης ήταν σίγουροι ότι τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 2, όμως η Ελπίδα τους οδήγησε και σε άλλα μονοπάτια, αφού εξέφρασε αμέσως ότι «*τα πολλαπλάσια του 2 δε διαιρούνται μόνο με το 2, αλλά και με το 4, 6, 8 κι όλη την προπαίδεια του 2*» όπως μας είπε. Η Σοφία τότε επηρεάστηκε και πρόσθεσε κι εκείνη ότι «*διαιρούνται και με το 3 και το 6*». Αυτά που έλεγαν, ίσχυαν για κάποια πολλαπλάσια, όχι όμως για όλα. Όταν λοιπόν τους ρώτησα αν όλα τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με αυτά, η Σοφία απάντησε ότι μόνο για το 2 είμαστε σίγουροι, ενώ με το 4 ισχύει πολλές φορές. Η Ελπίδα όμως δε φαινόταν να είχε αλλάξει γνώμη. Ο Μιχάλης δεν μπορούσε να πάρει θέση. Πάντως για να αιτιολογήσουν ότι τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 2, η Σοφία βασίστηκε στις ***ιδιότητες*** λέγοντας ότι *«ναι γιατί όταν έχουμε πολλαπλασιάσει έναν αριθμό με το 2, πάλι θα διαιρείται γιατί το έχουμε πολλαπλασιάσει με το 2»*, ενώ η Ελπίδα ανέφερε μερικά ***παραδείγματα*** «4 διά 2 μας κάνει 8, 8 διά 2 μας κάνει 4 , 10 διά 2 μας κάνει 5. Βγαίνουνε»

Το ερώτημά μας έπειτα ήταν αν διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 2 με το 4. Και τα τρία παιδιά εργάστηκαν με τον ίδιο τρόπο. Πήραν απ' την αρχή τα πολλαπλάσια του 2 κι έκαναν διαιρέσεις με το 4. Η Σοφία δικαιολόγησε αμέσως με βάση τα παραδείγματα που βρήκε κι έγραψε αρχικά: ««*όχι πάντα γιατί π.χ. 2:4=0,5 4:4=1 6:4=2,5 8:4=2 10:4=2,5 12:4=3 14:4=3,5*» Έπειτα αναφώνησε ότι βρήκε έναν ***κανόνα***! Και πρόσθεσε ότι: «*Λοιπόν δε θα διαιρείται συνέχεια γιατί είναι ανά 1 ας*

πούμε δηλαδή βγαίνει πρώτα όχι και μετά ναι. Ανεβαίνει ανά 0,5». Κι ο Μιχάλης όμως βρήκε το ίδιο ***μοτίβο*** και το είπε προφορικά, ενώ έπειτα συμφώνησε μαζί του και η Ελπίδα.

Μ: Κυρίες και κύριοι βρήκα κάτι! Αλλά δε ξέρω… Κυρία μπορώ να σας επιδείξω αυτό εδώ..

Δ προς Μ: Για να δω.. Τι απαντάς καταρχήν ; Ναι ή όχι;

Μ: Για να δω ποια είναι η ερώτηση… ναι

Δ: Ναι; Ναι απαντάς;

Μ: Όχι όχι. (γελάει) Λοιπόν βρήκα κάτι εν τω μεταξύ : στο 2ο (4:4) βγήκε 1, στο 4ο (8:4) βγήκε 2 , στο 6ο (12:4) βγήκε 3 και κατάλαβα ότι πάνε έτσι 1,2,3,4,5 και τα υπόλοιπα βγαίνουνε σε ,5 στο τέλος

Δ: Σε μισό ε;

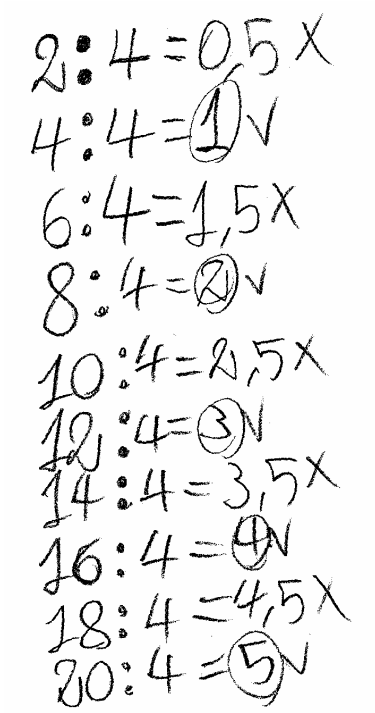
Μ: Ναι .

Σ: Αυτό βρήκα!

Ε: Κι εγώ!

Μ :Εδώ είναι 0,5 1,5 2,5 3,5 4,5

Δ: Μπράβο Μιχάλη!



Έπειτα, έγινε μία προσπάθεια να συγκεκριμενοποιήσουμε το μοτίβο και να προσπαθήσουμε να το εξηγήσουμε. Αρχικά οι μαθητές παρατήρησαν ότι από τα πολλαπλάσια του 2, το ένα διαιρείται με το 4 , ενώ το επόμενο δε διαιρείται. Πάνε δηλαδή εναλλάξ. Στην αρχή η Ελπίδα δεν ήξερε πώς να εκφράσει ή να εξηγήσει αυτό που παρατηρεί. Έπειτα είπε ότι πάνε ανά δύο, ανέφερε τους αριθμούς και τότε η Σοφία βρήκε το κοινό στοιχείο αυτών των αριθμών, ότι είναι τα πολλαπλάσια του 4. Τη διαδικασία αυτή παρακολουθούσε και ο Μιχάλης και έκανε κι αυτός την ίδια παρατήρηση.

Δ: Τι συμπέρασμα βγάζετε τώρα;

Σ: Ανεβαίνει ανά μισό

Δ: Θέλω να παρατηρήσετε και να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό

Ε: Πάει ανά 5 δέκατα. Ένα διαιρείται ένα δε διαιρείται.

Δ: Α μπράβο… γράψτε και γιατί

Μ: Μία διαιρείται, μία δε διαιρείται

……..

Δ: Ναι, ποιοι διαιρούνται;

Ε: Το 4, το 8, το 12, το 16 και το 20 … πάνε ανά δύο

Δ: Τι σχέση έχουν αυτοί οι αριθμοί;

Σ: Α! είναι τα πολλαπλάσια του 4!

Δ: Ωραία! Άρα ποια πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 4;

Σ: Αυτά που είναι και πολλαπλάσια του 4!

Μ: Για μια στιγμή εδώ πέρα αυτά που διαιρούνται είναι του 4.

Δ: Ναι, Μιχάλη

Έπειτα, έγινε μία επανάληψη στο πώς τέθηκε το ερώτημα, για να τους θέσω ξανά τα αρχικά ερωτήματα που δημιουργήθηκαν με βάση τις εικασίες τους. Οι μαθητές πλέον κατάλαβαν πως κάποια μόνο από τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 3, το 4, το 6. Για τη διαίρεση με το 3, η Σοφία απάντησε *πως πρέπει να είναι και πολλαπλάσια του 3,* ενώ η Ελπίδα έδωσε όμοια απάντηση για τη διαίρεση με το 6, αλλά φάνηκε να έκανε κι έναν συνειρμό για το 6 που είναι ίσο με 4+2. Δεν μιλήσαμε περισσότερο όμως γιατί ήθελα το 6 να το αναλύσουμε με την ησυχία μας σε επόμενη δραστηριότητα. Εντύπωση προκαλεί ο ενθουσιασμός του Μιχάλη για όλες αυτές τις 'ανακαλύψεις' που κάνουμε.

Δ: Άρα τι θα γράψουμε; Δε διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 2 με το 4 αλλά διαιρούνται μόνο… όσα από αυτά είναι πολλαπλάσια … ποιανού;

Μ: του 4

Δ: Αν ρωτήσω τώρα, τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 3, τι έχεις να πεις Σοφία;

Σ: Μόνο τα πολλαπλάσια του 3

Δ: Μόνο αυτά που είναι ταυτόχρονα και πολλαπλάσια του 3

Μ: Καλά πώς τα καταφέρνουμε και βγάζουμε όλα αυτά;

Δ: Λοιπόν… τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται με το 6;

Ε: Μόνο όσα είναι πολλαπλάσια και του 6

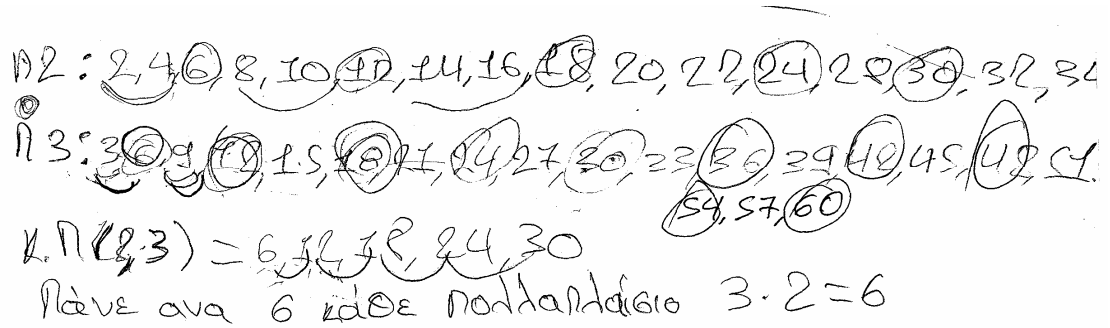
Ε: 4+2 , 6 ναι…

Στο μάθημα αυτό, επιβεβαιώθηκε το γεγονός ότι η Ελπίδα είχε κάποιες ***παρανοήσεις*** ή αλλιώς λαθεμένες εικασίες. Η Ελπίδα συχνά εντοπίζει κάποια σχέση

ανάμεσα στους αριθμούς και διαμορφώνει εικασίες που πολλές φορές είναι κοντά στην αλήθεια, αλλά δεν ισχύουν έτσι όπως τις διατυπώνει. Όπως λοιπόν στην 7η συνεδρία φάνηκε να εννοεί ότι *όταν ένας αριθμός διαιρείται με το 3, θα διαιρείται και με το 6,* έτσι κι εδώ διατυπώνει παρόμοια εικασία ότι *τα πολλαπλάσια του 2, τα οποία φυσικά διαιρούνται με το 2, θα διαιρούνται και με το 4, το 6, το 8,… κι όλα τα πολλαπλάσια του 2.* Ωστόσο, στο τέλος, πιστεύω πως οι μαθητές κατανόησαν ότι δεν ισχύει η εικασία αυτή της Ελπίδας καθολικά, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις που συντρέχουν ειδικές συνθήκες. Για να διαιρούνται για παράδειγμα, τα πολλαπλάσια του 2 και με το 4, θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα και πολλαπλάσια του 4. Ενώ για να διαιρούνται και με το 6, θα πρέπει να είναι και πολλαπλάσια του 6. Το ποιες είναι αυτές οι ειδικές συνθήκες όμως που μας δίνουν αυτά τα αποτελέσματα, επιχείρησα να υπονοήσω στην επόμενη συνεδρία (9η). Πάντως κάτι αξιοσημείωτο είναι πως και σε αυτή την συνεδρία, οι μαθητές έδωσαν προσοχή στη μορφή των αποτελεσμάτων και βρήκαν και οι τρεις ένα ***μοτίβο***, χωρίς να τους το έχει ζητήσει κανείς! Χρησιμοποιούν δηλαδή τα ***παραδείγματα***, αλλά έχουν αρχίσει και δίνουν έμφαση και στο αν υπάρχουν κάποιες ***ιδιότητες***. Ιδιαίτερα με χαροποίησε η επιτυχία του Μιχάλη σε αυτό, αλλά και ο ενθουσιασμός του για όλα αυτά που ανακαλύπτουν. Ως προς τα μοτίβα, όταν ζήτησα να πουν γιατί συμβαίνει αυτό που παρακολουθούν, δόθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές κάποιες εξηγήσεις αρκετά ικανοποιητικές για το επίπεδό τους κι αμέλησα έπειτα να εξαντλήσουμε τη μαθηματική εξήγηση για το λόγο που εναλλάξ βγαίνει ,5. Ίσως ήταν τέτοια η χαρά μου, αλλά και η δική τους που εξηγούσαν αυτά που έβλεπαν, που δεν ήθελα να τη χαλάσω με κάτι που μπορεί και να μη καταλάβαιναν. Κι έτσι δεν έκανα κάποια συνεδρία. Εκ των υστέρων όμως, αντιλήφθηκα πως ήταν αρκετά κοντά κι αν κοιτούσαν τα παραδείγματα, μάλλον θα καταλάβαιναν.

9η συνεδρία: «Να παρατηρήσετε τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 και να βρείτε τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν»

Οι μαθητές ξεκίνησαν αμέσως να βρίσκουν τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3, ο καθένας μόνος του. Η πρώτη παρατήρηση της Ελπίδας ήταν ότι *«τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 πάνε ανά 6»* χωρίς να αναφέρει ότι είναι πολλαπλάσια του 6. Παρόμοια συμπεριφορά με την Ελπίδα, έδειξε και ο Μιχάλης, ο οποίος παρατήρησε ότι τα κοινά πολλαπλάσια πάνε ανά 6, αλλά δεν ανέφερε ότι είναι και πολλαπλάσια του 6.



Η Ελπίδα όμως πρόσθεσε κι ότι 2*3=6, αλλά χωρίς να κατανοεί το ρόλο που έχει αυτός ο πολλαπλασιασμός, αφού απλά θεωρεί ότι αυτή η πράξη δικαιολογεί το ότι πάνε ανά 6. Επίσης παρατήρησε **μοτίβα** κατά τη διαδικασία της εύρεσης των κοινών πολλαπλασίων του 2 & του 3. Έγραψε πως *«τα πολλαπλάσια του 3 πάνε ανά ένα και κοινό με το 2 ενώ τα πολλαπλάσια του 2 πάνε ανά δύο και κοινό γιατί 2+1=3 * 2=6»*. Από αυτά που έγραψε φαίνεται πως κατανοεί ότι παίζει κάποιο ρόλο ο πολλαπλασιασμός 2*3=6, αλλά ψάχνει διακαώς να βρει ποιος είναι αυτός ο ρόλος! Λίγο αργότερα, ανακάλυψε κι ο Μιχάλης το ίδιο μοτίβο με αυτό της Ελπίδας. Ωστόσο, θεώρησα ότι αυτό δε θα βοηθούσε στο σκοπό της δραστηριότητας και προσπαθούσα να τους αποτρέψω από αυτό.

Η Σοφία στην προσπάθειά της να βρει κάποιο χαρακτηριστικό που έχουν τα κοινά πολλαπλάσια του 2 & του 3, ανέφερε αρχικά, το αυτονόητο ότι είναι όλα πολλαπλάσια του 3. Μάλιστα, προσπάθησε να το εξηγήσει και με παραδείγματα. Αργότερα, παρατήρησε κι εκείνη το ίδιο μοτίβο και προσπαθούσε κάτι να μου εξηγήσει αλλά δεν τα κατάφερνε στη διατύπωση και δυσκολευόμουν να την καταλάβω. Εν τω μεταξύ εγώ ακόμα δεν είχα καταλάβει τι εννοούσε η Σοφία. Αυτό όμως που τελικά είχε παρατηρήσει ήταν *πως αν πολλαπλασιάσουμε τα πολλαπλάσια του 2 με το 3, βρίσκουμε τα κοινά τους πολλαπλάσια*! Αφού έλεγε: «*……..όταν πολλαπλασιάζεις τα 2,4,6 με το 3 ανεβαίνει ανά 6 και οι αριθμοί είναι 6,12,18*». Κι όταν της ζήτησα να

παρατηρήσει τα κοινά πολλαπλάσια και να μου πει τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν, τότε η Σοφία ξεκάθαρα μου είπε πως είναι πολλαπλάσια του 6! Τότε και οι άλλοι μαθητές είπαν πως το ήξεραν. Ήταν έτσι όμως;

Μ: Το ξέραμε.

Σ: Εμένα περιμένατε;

Ε: Ναι κι εγώ που το βρήκα πρώτη;

Μ: Κι εγώ που το βρήκα δεύτερος;

Έπειτα ζήτησα από τους μαθητές να μπορέσουν να εξηγήσουν γιατί αυτά τα κοινά πολλαπλάσια είναι πολλαπλάσια του 6. Και οι τρεις μαθητές αντιλήφθηκαν ότι η εξήγηση έχει σχέση με το ότι 2*3=6. Πόσο το κατανοούσαν όμως; Αυτό ήταν ένα ερώτημα που ήθελα να διαλευκάνω. Διατύπωσα άλλο ερώτημα ώστε να δω αν όντως οι μαθητές είχαν καταλάβει το κοινό χαρακτηριστικό των κοινών πολλαπλασίων του 2 & του 3. Το ερώτημα ήταν αν ***με τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 βρίσκουμε όλα τα πολλαπλάσια του 6 ή μερικά***. Οι πρώτες απαντήσεις που έλαβα ήταν ότι βρίσκουμε μερικά μόνο πολλαπλάσια. Από τις απαντήσεις αυτές φάνηκε πως δεν είχαν περάσει σε πιο αφηρημένο επίπεδο να καταλάβουν ότι με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε όλα τα πολλαπλάσια του 6. Αργότερα, η Ελπίδα απάντησε πως στα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 βρίσκονται όλα τα πολλαπλάσια του 6 επειδή όπως λέει "2*3=6 και του 6 τα πολλαπλάσια βρίσκονται ανά δύο αριθμούς με το 3». Η Σοφία αφού έκανε ξανά την ίδια διαδικασία για να βρει κι άλλα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3, απάντησε κι αυτή θετικά στο ερώτημα, δηλαδή ότι είναι όλα τα πολλαπλάσια του 6, δικαιολογώντας όμως κι εκείνη ότι 2*3=6. Τέλος, να σημειώσουμε ότι το γεγονός ότι η Σοφία συνέχισε να βρίσκει κι άλλα κοινά πολλαπλάσια για να απαντήσει δείχνει ότι δε μπορεί να προβλέψει αν και τα υπόλοιπα αποτελέσματα θα είναι πολλαπλάσια του 6. Το εμπόδιο αυτό είναι χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης σκέψης αυτής της ηλικίας. Το ίδιο φαίνεται να σκέφτεται κι ο Μιχάλης, όπως δείχνει ο διάλογος που κάναμε:

Δ : Κοίτα τα κοινά πολλαπλάσια. Υπάρχουν όλα τα πολλαπλάσια του 6 ή λείπουν κάποια;

Μ: Λείπουν κάποια

Δ: Ποια λείπουν;

Μ: Τα υπόλοιπα

Δ: Εκεί αν συνέχιζες τα πολλαπλάσια του 2 και του 3 θα έβρισκες κι άλλα;

Μ: Θα τα 'βρισκα

Δ: Αν συνεχίσεις τα πολλαπλάσια του 2 και του 3 θα βρεις όλα τα πολλαπλάσια του 6;

Μ: Ναι

Σ: Εγώ τα συνέχισα! (γελάει!)

Δ: Άρα βγαίνουν όλα τα πολλαπλάσια του 6. Σοφία γιατί;

Σ: Γιατί αν πολλαπλασιάσουμε το 2 με το 3 θα μας βγει το 6, οπότε είναι όλα τα πολλαπλάσια του 6

Δ: Μάλιστα γιατί όλα αυτά είναι κοινά πολλαπλάσια και του 2 και του 3.

Έκανα έπειτα κάποια επιπλέον ερωτήματα, για να δω τι πραγματικά είχαν καταλάβει. Αφού είδαμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια του 2 και του 3 είναι πολλαπλάσια του 6, ζήτησα να μου απαντήσουν άμεσα, χωρίς να κάνουν ξανά την ίδια διαδικασία, *τα κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 4, τι πολλαπλάσια θα βγουν*. Η Σοφία κι ο Μιχάλης απάντησαν σωστά ότι θα είναι του 12. Έκανα μετά 2η ερώτηση *για τα κοινά πολλαπλάσια του 2, 3 & 5 τι αριθμοί θα είναι***.** Πάλι, η Σοφία απάντησε σωστά. Αντέστρεψα τότε το είδος της ερώτησης και ζήτησα να μου πουν για ***τα πολλαπλάσια ενός αριθμού*** *π.χ. το 27* ***από ποια κοινά πολλαπλάσια προκύπτουν.*** Οι μαθητές δίσταζαν να απαντήσουν. Βλέποντας ότι δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα για τα πολλαπλάσια του 27, έβαλα έναν μικρότερο αριθμό για τους βοηθήσω. Ζήτησα λοιπόν για τα πολλαπλάσια του 10 από ποια κοινά πολλαπλάσια βγαίνουν. Ο Μιχάλης τότε έκανε το πρώτο βήμα και κατάφερε να απαντήσει σωστά του 2 και του 5. Έπειτα, ρώτησα για τα πολλαπλάσια του 20 πώς προκύπτουν. Ο Μιχάλης ξαναπήρε το λόγο αν και τον διέκοψε η Σοφία. Οι δυο τους έφτιαξαν τη μία περίπτωση των κοινών πολλαπλασίων του 2 και του 10. Ζήτησα να μου βρουν κι άλλη περίπτωση. Η Ελπίδα δε φαινόταν να κατανοεί πλήρως τι έπρεπε να κάνει και έκανε μια προσπάθεια να πει τους διαιρέτες του 20. Πήρα τότε τον αριθμό 4 που ανέφερε η Ελπίδα για να τους βοηθήσω να βρουν την άλλη περίπτωση. Η Σοφία τους πρόλαβε πάλι. Επανήλθα έπειτα και στο 27 και απάντησαν πάλι με τον ίδιο τρόπο ο Μιχάλης και η Σοφία. Δυστυχώς, η Ελπίδα φάνηκε πως δεν είχε κατανοήσει εντελώς τη διαδικασία και δεν ακολουθούσε τη συζήτηση.

Δ: Άντε να πω ένα πιο εύκολο. Τα πολλαπλάσια του 10 από ποια κοινά πολλαπλάσια βγαίνουν;

Μ: Του 2…

Δ: Ναι ….

Μ: Του 4, όχι, περιμένετε και του 5

Δ: Του 2 και του 5 γιατί;

*Μ: Γιατί 2*5=10*

*Ε: Εγώ έβαλα 2,5 (γελάει, είχε κάνει την πράξη 4*2,5)*

Δ: Τα πολλαπλάσια του 20 από ποια κοινά πολλαπλάσια βγαίνουν;

Μ: Του 2 και…

Σ: και του 10

Δ: Του 2 και του 10, μία περίπτωση. Ή ; άλλη περίπτωση;

Ε: Του 2,4,5,6

Δ: Ή του 4 και …

Σ: Του 4 και του 5.

Δ: Και τελευταίο τα πολλαπλάσια του 27 από πού βγαίνουν , από τα κοινά πολλαπλάσια

Μ: Του 3

Δ: Του 3 και του ;

Σ: 9.

Στην συνεδρία αυτή, ζητήσαμε από τους μαθητές να παρακολουθήσουν τα κοινά πολλαπλάσια του 2 & του 3, τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν, με σκοπό να κατανοήσουν ότι πρόκειται για τα πολλαπλάσια του 6. Είναι μια βαθύτερη σκοπιά στη διαδικασία του Ε.Κ.Π.. Και οι τρεις μαθητές φάνηκαν να έχουν ιδιαίτερη ικανότητα ***στην εύρεση αριθμητικών μοτίβων***, αλλά μόνο μία, η Σοφία κατάφερε να παρατηρήσει και κάτι πιο βαθύ, ότι *«τα πολλαπλάσια του 2, πολλαπλασιάζονται με το 3 και δίνουν τα κοινά πολλαπλάσια του 2 & 3, και τα οποία είναι πολλαπλάσια του 6»*. Οι άλλοι δύο μαθητές διατύπωσαν μόνο ότι *«πάνε ανά 6»*. Όταν ζήτησα να εξηγήσουν γιατί βγαίνουν τα πολλαπλάσια του 6, τότε, όλοι οι μαθητές αποφάνθηκαν πως 2*3=6. Δεν ήμουν σίγουρη όμως πόσο βαθιά το κατανοούσαν αυτό γι’ αυτό τα επόμενα ερωτήματά μου ήταν τέτοια που ήθελα να δω αν μπορούσαν να γενικεύσουν αυτή την περίπτωση και σε άλλες. Πρώτα όμως η ερώτηση που τους έκανα, αφορούσε αν με αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε όλα τα κοινά πολλαπλάσια του 6 ή μερικά. Στην αρχή απάντησαν με βάση αυτά που έβλεπαν πως είναι μόνο μερικά, κι έπειτα σκέφτηκαν πως αν συνέχιζαν τη διαδικασία θα τα έβρισκαν όλα. Κάποιες επιπλέον δοκιμές βοήθησαν τη Σοφία σε αυτή τη σκέψη. Τέλος έλεγξα αν μπορούσαν να εφαρμόσουν

παρόμοια σκέψη και γι' άλλες περιπτώσεις, όπως τα κοινά πολλαπλάσια του 3 & 4, ή και αντιστρόφως δηλαδή πώς προκύπτουν τα πολλαπλάσια του 27. Συμμετείχαν αρκετά και συμπλήρωνε ο ένας τον άλλο, η Σοφία με το Μιχάλη, όχι όμως η Ελπίδα, παρόλο που προς το τέλος ήταν αρκετά κοντά στον τρόπο σκέψης. Θα λέγαμε ότι παρατηρούμε μια θετική εξέλιξη στη Σοφία και στο Μιχάλη, αλλά μια στασιμότητα στην Ελπίδα.

10η συνεδρία: Δίνεται ο $A=2^3*3*5$. Να απαντήσετε τα ερωτήματα.

Α) Διαιρείται ο αριθμός Α με το 2;

Β) διαιρείται ο αριθμός Α με το 6;

Γ) διαιρείται ο αριθμός Α με το 10;

Δ) διαιρείται ο αριθμός Α με το 15;

Ε) διαιρείται ο αριθμός Α με το 30;

Οι μαθητές επεξεργάστηκαν το ερώτημα αρχικά ο καθένας μόνος του. Και οι τρεις μαθητές βρήκαν την τιμή του Α. Είχαν ζητήσει και κομπιουτεράκι και παρόλο που τους είπα ότι δε χρειάζεται, εκείνοι το θέλανε κι έτσι τους το έδωσα. Η Ελπίδα για το α) ερώτημα απάντησε με κριτήριο διαιρετότητας, ενώ για τα υπόλοιπα σύνθετε το 120 που ήταν ίσο το Α, με γινόμενο όπου ο ένας παράγοντας ήταν ο αριθμός του ερωτήματος. Είχε γράψει «*2*6=12, 2*60=120*» για τη διαίρεση με το 6, *«10*12=120» για το 10 και «3*4=12 δηλ. 30 *4=120»* για το 30. Της είπα ότι ήταν σωστά αυτά που είχε γράψει, αλλά της ζήτησα αν δεν είχε κομπιουτεράκι και δεν είχε υπολογίσει πόσο κάνει ο Α, αν θα μπορούσε να απαντήσει. Το ίδιο ζήτησα έπειτα κι απ' τον Μιχάλη και τη Σοφία που είχαν βρει την τιμή του Α και έκαναν τις διαιρέσεις για να δουν αν διαιρείται ακριβώς.

Η Ελπίδα φάνηκε πως κατάλαβε το ρόλο που παίζει η δομή του Α και απάντησε με ***κατανεμημένο συλλογισμό***, αν και δυσκολεύτηκε στην αρχή να το διατυπώσει. Είχε γράψει όμως ότι *«2*3=6, 2*5=10, 2,3,5 → 5*6=30 Τα πολλαπλάσια του 2,6,10, 30 είναι πολλαπλάσια και των 2,3,5!»*. Κι εδώ η φράση της αυτή αναιρεί την εντύπωση που είχα ότι δεν κατανόησε την προηγούμενη συνεδρία. Πώς είναι δυνατόν, αφού χρησιμοποίησε την ίδια σκέψη; Έπειτα, διευκρίνισε ακόμα καλύτερα πως *«ο Α διαιρείται με το 2, γιατί έχει το 2. Με το 6 γιατί έχει το 2 και το 3, και με το 10 γιατί έχει το 5 και το 2»*. Τότε για να βεβαιωθώ ότι το κατάλαβε, τη ρώτησα αν διαιρείται ο Α με

το 60. Και η απάντηση που πήρα, έδειξε ότι όντως είχε κατανοήσει, μιας και σύνθεσε το 60 ως γινόμενο των πρώτων παραγόντων από τους παράγοντες του Α. Εξήγησε μάλιστα ότι το ότι πήρε δύο φορές το 2, μπόρεσε να το κάνει επειδή είχαμε 2^3 .

*Ε: 3*5=15 15*2=30 30*2=60*

Δ: Το άλλο το 2 από πού το βρήκες;

Ε: Από το 2^3

Η Σοφία όμως δεν κατάλαβε τη δομή του Α και προσπάθησε να βρει τη λύση με άλλη, αντίστροφη πορεία, θα έλεγα, αφού ξεκίνησε από τους αριθμούς των ερωτημάτων και βρήκε όλα τα πολλαπλάσια τους μέχρι να φτάσει στο 120, ενώ στόχος της ήταν το 300, γιατί θεωρούσε πως έπρεπε να φτάσει να κάνει 10*30, για να ολοκληρώσει την προπαίδειά του (αυτό είναι μία ***νόρμα***)! Αν υπήρχε το 120 στα πολλαπλάσια τους, τότε καταλάβαινε πως το 120 θα διαιρούσε αυτούς τους αριθμούς. Η σκέψη της Σοφίας παρουσιάζει ομοιότητες με τη σκέψη της Ελπίδας στο ότι ξεκινούν από τους 'υποψήφιους' διαιρέτες (δεν είμαστε σίγουροι αν διαιρούν τον Α) και προσπαθούν να κάνουν κάποιου είδους συνθέσεις του Α. Χρησιμοποιούν αυτό που έμαθαν στην $1^η$ συνεδρία ότι από έναν πολλαπλασιασμό προκύπτουν τέλειες διαιρέσεις. Η μόνη διαφορά είναι ότι η Ελπίδα κατανόησε το ρόλο που έχει η δομή του Α και έκανε την σύνθεσή της πολύ πιο εύκολα. Ενώ η Σοφία, χρησιμοποιεί το αριθμητικό αποτέλεσμα και κάνει μια διαδικασία πολύ πιο χρονοβόρα, ενώ θα μπορούσε να κάνει τη διαίρεση του Α με αυτούς τους αριθμούς για να δει αν διαιρείται. Με τον τρόπο αυτό εργάστηκε ο Μιχάλης.

Σ: Εγώ κυρία επειδή δεν τα έχω καταλάβει και πολύ καλά βρήκα τα πολλαπλάσια του 2, 6, 10, 15, 30..

Δ: Και που θες να φτάσεις μέχρι το 120;

Σ: Μέχρι το 300 που είναι η προπαίδεια του 30.

Δ: Γιατί ; τι θες να δείξεις;

Σ: Ότι βγαίνουν από τα πολλαπλάσια. Ότι ναι μπορούσαμε να απαντήσουμε γιατί βγαίνουν από τα πολλαπλάσια του 2,6,10,15,30 και κοιτάζω αν υπάρχει..

Δ: Ποιο; Το 120;

Σ: Ναι.

Ο Μιχάλης ενώ πριν δε μιλούσε και αμφέβαλλα αν παρακολουθούσε, μετά από την ερώτησή μου σχετικά με τους διαιρέτες του Α έδειξε ένα βαθμό κατανόησης. Αντιλήφθηκε ότι οι παράγοντες του Α αποτελούν και τους διαιρέτες τους. Όταν όμως ρώτησα αν αυτοί είναι οι μοναδικοί διαιρέτες, η Ελπίδα ανέφερε πως και <u>όλα τα πολλαπλάσια</u> των παραγόντων είναι διαιρέτες, ενώ η Σοφία έκανε μια ***εικασία*** πως και τα πολλαπλάσια των διαιρετών του Α (*2, 6, 10 , 15 & 30)* <u>*μπορεί*</u> *να διαιρούν τον Α***.** Τα δύο κορίτσια ήταν αρκετά κοντά στην αλήθεια. Η Ελπίδα πιστεύω πως έκανε λάθος στη διατύπωση, κι εννοούσε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των παραγόντων, μιας και η εξήγηση που είχε δώσει προηγουμένως για τη διαίρεση με το 60, ήταν ικανοποιητική, ενώ και η Σοφία όπως το έθεσε αργότερα ότι μπορεί να ισχύει μερικές φορές, έχει μια δόση αλήθειας. Η ανάλυση του Α όμως έμελλε να μας δώσει τις απαντήσεις στις εικασίες αυτές.

Δ: Ποιοι είναι οι διαιρέτες αυτού του αριθμού; Του Α;

Μ: Οι διαιρέτες φαίνονται από χιλιόμετρα

Μ: Το 3, το 5

Σ: Το 2

Δ: Μόνο το 2, 3 ,5; Δηλαδή ο Α διαιρείται μόνο με το 2 το 3 και το 5;

Σ: Όχι

Ε: Με όλα τα πολλαπλάσιά τους

Σ: Με τα πολλαπλάσια του 2, 6, 10 , 15 και του 30

Δ: Διαιρείται με όλα αυτά;

Σ: Περίπου

Τους ανέθεσα λοιπόν να κάνουν συνδυασμούς των παραγόντων του Α για να βρούμε τους διαιρέτες του Α. Οι μαθητές τότε τα πήγαν πολύ καλά και έβρισκαν διαιρέτες μέσα από την ανάλυση παραγόντων. Πρώτοι έδειξαν να καταλαβαίνουν η Ελπίδα κι ο Μιχάλης, ενώ στο τέλος κατάλαβε και η Σοφία και μάλιστα πολύ καλά κι αυτή. Αφού βρήκαμε τους διαιρέτες, έτσι αυθόρμητα σκέφτηκα να τους κάνω άλλη μία σχετική ερώτηση για να δω αν μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτή τη γνώση και όταν δίνεται με άλλη μορφή. Η ερώτηση ήταν «αν το επταπλάσιο του Α διαιρείται με το 7». Φάνηκε όμως αρκετά εύκολη, μετά από αυτά που είχαν κατανοήσει! Ωστόσο τα δίχτυα μου αυτά έπιασαν τη Σοφία να αναρωτιέται πώς να το απαντήσει, με το μυαλό ή με

πράξεις. Η Ελπίδα όμως θεώρησε αυτονόητη την απάντηση, εξηγώντας μάλιστα πως με τη διαίρεση θα βρούμε πάλι τον Α, ενώ μαζί της συμφώνησαν και οι υπόλοιποι.

Η συνεδρία αυτή έδωσε στους μαθητές μία περαιτέρω εξήγηση στη σημασία που έχει η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, όσον αφορά στη διαιρετότητα του αριθμού, κάτι στο οποίο δε δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο δημοτικό σχολείο παρόλο που διδάσκεται η ανάλυση στην στ' δημοτικού, αλλά υπάρχει σχετική άσκηση στην α' γυμνασίου που προαπαιτεί τα παραπάνω. Είναι πολύ ευχάριστο που η Ελπίδα σκέφτηκε από μόνη της, να λειτουργήσει με ***κατανεμημένο συλλογισμό***, με τον οποίο έδωσε την πιο απλή λύση, εκμεταλλευόμενη το άμεσο περιβάλλον των δεδομένων αλλά και οι υπόλοιποι μαθητές αντιλήφθηκαν αργότερα, με επεξήγηση, τη σημασία των παραγόντων ενός αριθμού. Οι στρατηγικές των δύο κοριτσιών πάντως, αν και διαφορετικές, ήταν διεργασίες «***από κάτω προς τα πάνω»***, ενώ του Μιχάλη «***από πάνω προς τα κάτω***» και η πιο αναμενόμενη για έναν μαθητή. Ως προς τις εικασίες των μαθητών φαίνεται η Σοφία να έχει πάλι παρόμοια ***εικασία*** όπως στην 8^{η} συνεδρία ότι *όταν ένας αριθμός α διαιρείται με έναν αριθμό β, μικρό όπως το 2, πιθανότατα να διαιρείται και με τα πολλαπλάσιά του β*. Η εικασία αυτή ισχύει μερικές φορές, αλλά με την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αποσαφηνίστηκε, θέλω να πιστεύω, ο μηχανισμός που 'αποφασίζει' σε ποιες περιπτώσεις ισχύει αυτή η εικασία.

11η συνεδρία: Α) Το 3 διαιρεί το 18; Β) Το 3 διαιρεί το 18*2800;

Σκοπός της συνεδρίας αυτής ήταν να εξεταστεί κατά πόσο θα μπορούσαν να γενικεύσουν τη στρατηγική που έμαθαν στην προηγούμενη συνεδρία που αφορούσε το γινόμενο παραγόντων και τη διαιρετότητα, μόνο που αυτή τη φορά οι παράγοντες δεν ήταν αποκλειστικά πρώτοι.

Η Ελπίδα απάντησε αμέσως για το α' ερώτημα «ναι γιατί 3*6=18». Την ίδια απάντηση έδωσε κι ο Μιχάλης, συμπεριλαμβάνοντας και την αντίστοιχη διαίρεση 18:3=6, ενώ η Σοφία έγραψε μόνο τη διαίρεση. Αυτό που με απασχολούσε όμως ήταν η απάντηση στο β' ερώτημα. Το α' ερώτημα τέθηκε ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να απαντήσουν το β'. Έγινε έτσι όμως;

Η Σοφία κι ο Μιχάλης έδρασαν όπως έκαναν αρχικά και στην 10η δραστηριότητα. Βρήκαν την τιμή του 18*2800 κι έκαναν μετά τη διαίρεση με το 3 για να δουν αν διαιρείται. Παρόμοια εργάστηκε και η Ελπίδα, αφού βρήκε κι εκείνη την τιμή του γινομένου, αλλά μετά εφάρμοσε το κριτήριο διαιρετότητας του 3, για να δει αν διαιρείται ο αριθμός. Κανένας από τους τρεις μαθητές δεν έκανε επέκταση αυτών που έμαθε στη 10η συνεδρία.

Κι ενώ δέχτηκα αυτά που έγραψαν οι μαθητές, ζήτησα να σκεφτούν κι έναν δεύτερο τρόπο. Οι μαθητές τότε πάλι με εξέπληξαν. Η Σοφία είχε πάει σε άλλη κατεύθυνση, η οποία έχει σχέση με τα παραπάνω που έχει γράψει, απλά τα γράφει με άλλη μορφή: "*2800:3=933,3333 & 933,3333 * 18=16800"* και από κάτω συνεχίζει *"3/2800 :18 = 3/2800 * 1/18= 3/ 50.400=16800*" . Με αυτή τη 2η σειρά προφανώς ήθελε να γράψει με άλλη μορφή (χρησιμοποιώντας τη κλασματική γραμμή αντί για διαίρεση) ότι έγραψε και πιο πάνω, μόνο που έβαλε αντίστροφα το κλάσμα κι έκανε λάθος. Προφανώς όταν της ζήτησα έναν άλλο τρόπο, εκείνη κατάλαβε μάλλον έναν άλλο τρόπο για να βρει ξανά αυτό το αποτέλεσμα. Εκείνη την ώρα όμως, όπως τα είδα δεν έβγαζα νόημα.

Εν τω μεταξύ, ο Μιχάλης, απάντησε πως ο αριθμός 50400 δε διαιρείται με το 3, λόγω του ότι του φαινόταν παράξενο ένας τέτοιος αριθμός να είναι στην προπαίδεια του 3 ή αλλιώς στα πολλαπλάσια του 3. Δεν είμαι σίγουρη αν κρύβεται κάποια ***πεποίθηση*** κάτω από αυτή τη σκέψη. Ίσως όμως, λόγω του μικρού πεδίου

παραδειγμάτων του σχολείου, πιστεύει ότι τα πολλαπλάσια του 3 είναι αυτά στην προπαίδεια του 3 ή τα ίδια με επιπλέον μηδενικά. Π.χ. το 90 ή το 120 ή το 270. Είναι αλήθεια πάντως πως τα συγκεκριμένα παραδείγματα είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα. Έτσι φάνηκε κι από όταν τον ρώτησα για τον αριθμό 90. Το ίδιο υποδεικνύει και το παράδειγμα που επιλέγει η Σοφία για να πείσει το Μιχάλη. Ο Μιχάλης τότε επέλεξε τη διαίρεση για να διαπιστώσει αν το 50400 διαιρείται με το 3. Αφού βρήκε το αποτέλεσμα ότι βγαίνει ακριβώς 16.800, τότε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το 50400 διαιρείται με το 3.

Δ: Τι απαντάς στο β' ερώτημα Μιχάλη; Στο α' ερώτημα ξέρω απαντήσατε όλοι.

Μ: Η απάντηση είναι όχι, δε διαιρείται.

Δ: Γιατί;

Μ: Δεν είναι αυτό, η κουμούτσα, στην προπαίδεια του 3, στα πολλαπλάσια του 3

Δ: Ποιο λες; Το 50.400 ;

Μ: Ναι

Δ: Δεν είναι λες το 50400 στα πολλαπλάσια του 3. Δηλαδή μέχρι το 30 διαιρούνται με το 3; Το 90 δε διαιρείται με το 3;

Μ: Διαιρείται

Δ: Εμ! εκεί σταματάει η προπαίδεια;

Σ: Το 120 δε διαιρείται; Διαιρείται.

Αφού απέτυχαν να βρουν τον τρόπο που θα ήθελα να ακούσω, τους έθεσα ένα ακριβώς το ίδιο ερώτημα μόνο που αντί να διαιρούνται με το 3 έβαλα τον αριθμό 6, ώστε να επανενεργοποιήσω τη σκέψη τους. Η Ελπίδα, τότε απάντησε αμέσως θετικά και για το β' ερώτημα. Δεν ήμουν σίγουρη όμως ότι μπορούσε να δικαιολογήσει και έδωσα λίγο χρόνο στον καθένα.

Δ: Να βάλω ένα άλλο ερώτημα. Με το 18 ποιος άλλος αριθμός διαιρείται; Να βάλουμε το 6;

Ε: Ναι

*Δ: Το 6 διαιρεί το 18 γιατί 3*6=18. Γράψτε λοιπόν* ***το 6 διαιρεί το 18;***

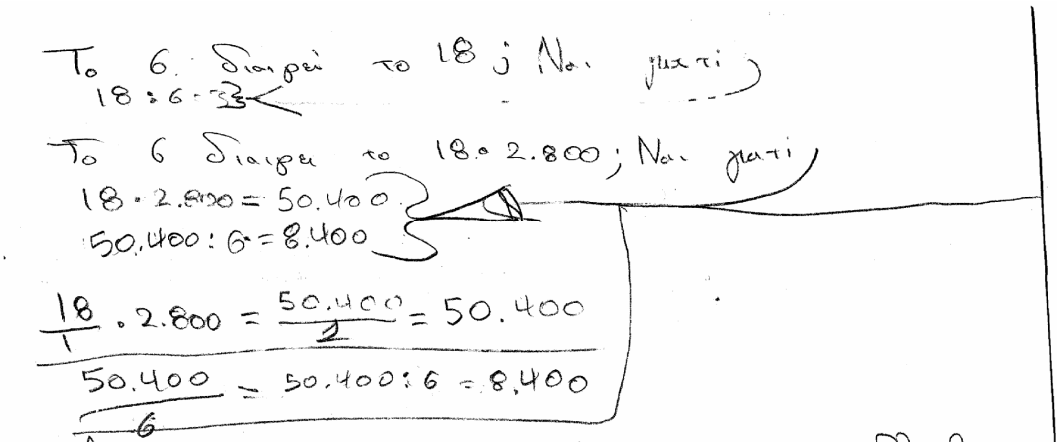
Ε: Ναι..

Δ: Γιατί; Για σκεφτείτε ο καθένας μόνος του.

Προσπάθησα να τους θυμίσω τι κάναμε στο προηγούμενο μάθημα μήπως και κατάφερναν να τα συσχετίσουν. Μιας και αυτός ήταν ο στόχος (να δούμε αν τα συσχετίσουν).

«Δε θυμάστε λίγο τι κάναμε στο προηγούμενο μάθημα, που σας έδινα τον $A=2^3*3*5$ και σας ρωτούσα διαιρείται με το 2; Κι απαντούσατε.»

Ωστόσο ο στόχος αργούσε ακόμα να επιτευχθεί. Ο Μιχάλης και η Σοφία εργάστηκαν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως πριν, κάνοντας διαίρεση του 50.400 με το 6. Η Σοφία μάλιστα έκανε και την ίδια προσπάθεια να τα αναπαραστήσει με κλάσματα! Αυτή τη φορά πιο ξεκάθαρα!



Ξαφνικά, προς μεγάλη μου έκπληξη, η Σοφία αντιλήφθηκε, από μόνη της, *ότι εφόσον διαιρείται το 18 με το 6 θα διαιρείται και το πολλαπλάσιο του 18 με το 6!* Η σκέψη αυτή της Σοφίας μπορεί να χαρακτηριστεί ***πείραμα σκέψης*** και προϊόν ***κατανεμημένου συλλογισμού***, με μια μικρή επιφύλαξη όμως γιατί η εξήγηση που δίνει για άλλους είναι επαρκής, ενώ για άλλους όχι. Ο Μιχάλης τότε αστειευόμενος ανέφερε ότι στενοχωρήθηκε λίγο που δεν το βρήκανε αυτοί που είναι μεγαλύτεροι και θα πάνε στο Γυμνάσιο, ενώ το βρήκε το κορίτσι που θα πάει στην Στ' Δημοτικού.

*Σ: Περιμένετε λίγο! Το 2800*18 είναι πολλαπλάσιο του 18!*

Δ: Μπράβο!

*Σ: Άρα διαιρείται. Αφού διαιρείται το 18 με το 6 θα διαιρείται και το 2800*18. επειδή είναι πολλαπλάσια.*

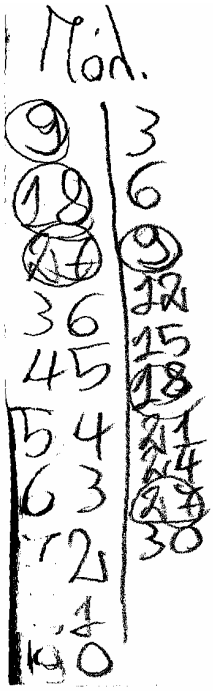
Δ: Πιάσατε τι είπε η Σοφία;

Μ: Ναι, το 'πιασα αλλά αυτό που εκνευρίζει είναι.. Γιατί το είπες εσύ και δεν το είπα εγώ; Αχ.. θα πάμε γυμνάσιο…και θα'μαστε μπούφοι!

Δ: Καταλάβατε αυτό που είπε η Σοφία; Αν ένας αριθμός, ας πούμε ο Α διαιρείται με το 3. Θα διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του Α με το 3;

Σ: Ναι

Αν και φάνηκε από τον τρόπο που αντέδρασα κι εγώ απ' τη χαρά μου, δε δέχτηκα έτσι εύκολα αυτό που είπε η Σοφία, παρόλο που ήταν σωστό. Το έθεσα ως εικασία και ζήτησα από τα παιδιά να εξακριβώσουν αν είναι σωστή. Η Ελπίδα δε μπορούσε να καταλάβει πώς το σκέφτηκε αυτό η Σοφία, ενώ ο Μιχάλης θυμόταν ότι έχουμε κάνει κάτι ανάλογο, αλλά τίποτε περισσότερο. Για να οργανώσω τη σκέψη τους, έκανα το ερώτημα πιο συγκεκριμένο βάζοντας άλλους αριθμούς, αφού στα προηγούμενα είχαμε απαντήσει. Το ερώτημα ήταν το εξής: **«Το 9 διαιρείται με το 3. Θα διαιρούνται και όλα τα πολλαπλάσια του 9 με το 3;»**



Ο Μιχάλης σκέφτηκε κάτι πολύ καλό, να χρησιμοποιήσει ***τη μέθοδο εύρεσης κοινών πολλαπλασίων*** και ήταν πολύ κοντά στην απάντηση, αλλά μάλλον δεν ήταν συγκεντρωμένος στο τι λέει το ερώτημα και μπερδεύτηκε. Είχε κάνει δύο στήλες, μία με τα πολλαπλάσια του 9 και μία με τα πολλαπλάσια του 3. Βρήκε ότι έχουν κοινά πολλαπλάσια, αλλά εστίασε στη 2η στήλη όπου αναγνώρισε το ***μοτίβο*** ότι ανά δύο από τα πολλαπλάσια του 3, το τρίτο είναι πολλαπλάσιο του 9. Στην πραγματικότητα όμως, έτσι όπως εστίασε την προσοχή του, παρατήρησε ότι *κάποια, κι όχι όλα, πολλαπλάσια του 3 διαιρούνται με το 9.* Αν πρόσεχε πιο πολύ το ερώτημα, που είναι τα πολλαπλάσια του 9 αν διαιρούνται με το 3, θα έβλεπε ότι *κάθε πολλαπλάσιο του 9 είναι και στην προπαίδεια του 3 κι επομένως διαιρείται με το 3.* Θύμισα τότε το ερώτημα ξανά, ώστε να τους βοηθήσω τι να προσέξουν. Λίγο αργότερα όμως, η Ελπίδα μας ξάφνιασε εκφράζοντας μια γενική ***εικασία***, που προήλθε από ***μεταφορικό συλλογισμό*** και την οποία αν συμβολίσουμε, θα καταλάβουμε πως πρόκειται για ***μαθηματική πρόταση***!

Ε: Αφού το 9 άμα το κάνουμε διά 3 βγαίνει. Κι ανά τρεις αριθμούς τα πολλαπλάσια του 3 μας βγαίνουν πολλαπλάσια του 9.

Δ: Ωραία. Άρα; Για κοιτάξτε καλά τι συμπέρασμα βγάζουμε

Ε: Ότι ο μικρότερος αριθμός που μέσα στα πολλαπλάσιά του έχει αυτόν που ψάχνουμε να διαιρείται, διαιρούνται και τα πολλαπλάσια αυτού του αριθμού!

Δ: Μπράβο!

Η εικασία- συμπέρασμά της λοιπόν λέει ότι *όταν έχουμε δύο αριθμούς, α<β κι ο μικρότερος αριθμός (α) έχει μέσα στα πολλαπλάσιά του αυτόν που ψάχνουμε να διαιρείται (β), τότε διαιρούνται και τα πολλαπλάσια αυτού του αριθμού* (του β) *με τον α*». Αυτό που μας λέει η Ελπίδα συμβολικά απεικονίζεται ως εξής:

Αν α<β & κ*α=β τότε (εννοείται ότι α/β κι άρα) α / λ*β

(Όπου, α, β, κ, λ € Ν)

Η Ελπίδα θα λέγαμε ότι διατύπωσε τον ***κανόνα-σύστημα αναφοράς*** σύμφωνα με τον οποίο επιχειρηματολόγησε η Σοφία προηγουμένως, με εκείνο το αμφιλεγόμενο πείραμα σκέψης, *ότι εφόσον διαιρείται το 18 με το 6, θα διαιρείται και το πολλαπλάσιο του 18 με το 6!* Και το λέμε αυτό γιατί πριν δε γνωρίζαμε κατά πόσο αυτός ο κανόνας είναι αντιληπτός στα παιδιά αυτά. Στο φύλλο της όμως η Ελπίδα δεν θέλησε να γράψει ούτε να ξαναπεί αυτή την εικασία, γιατί θεωρούσε δύσκολο να επαναδιατυπώσει. Εξήγησε συγκεκριμένα για το ερώτημα αν θ**α** διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 9 με το 3, ότι *«ναι, γιατί είναι επί 3 για να μας κάνει 9 και για να βγουν τα πολλαπλάσια. Κάθε πολλαπλάσιο του 9 είναι διαιρέτης του 3»* . Είναι πολύ σημαντική η σχέση αυτή που βρήκε και θα μπορούσε να αποτελέσει ένα ***πείραμα σκέψης***, δεδομένου ότι εννοεί, αλλά δεν το διατύπωσε καλά, *πως το 9 προκύπτει από το γινόμενο 3*3, γι' αυτό και διαιρείται με το 3. Όλα τα πολλαπλάσια του 9 όμως είναι της μορφής 9 * α, κι άρα 3*3*α, κι άρα διαιρούνται με το 3*. Είναι ακριβώς αυτή η σχέση που ήθελα να βρουν! Η Σοφία αντίθετα πήρε όλα τα πολλαπλάσια του 9, απ' τη προπαίδεια και τα διαίρεσε με το 3 για να δει αν βγαίνει η διαίρεση. Κι ενώ οι διαιρέσεις, εμπειρικά επιβεβαίωναν κατά κάποιο τρόπο πως τα πολλαπλάσια του 9 διαιρούνται με το 3, παρατήρησε στα πηλίκα επιπλέον ότι είναι κι αυτά πολλαπλάσια του 3 και θεώρησε ότι αυτό ήταν η εξήγηση! Να σημειώσουμε ότι τα πηλίκα ήταν ακριβώς τα αποτελέσματα της προπαίδειας του 3 Στο τέλος, πάντως η Σοφία επανήλθε στην προηγούμενη σκέψη που είχε κάνει για την ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο, συζητώντας ένα ακόμη παράδειγμα και κάπως έτσι τελείωσε και αυτή η συνεδρία.

*Δ: Το 18*2800 με ποιο διαιρείται;*

Ε: Με το 9

Δ: Με το 9 γιατί όμως;

*Σ: Γιατί 2*9=18.*

*Δ: Έτσι. Άρα το 18 μπορούμε να το σπάσουμε σε 2*9 και το άλλο να το αφήσουμε 2800. Αυτά κάναμε στο προηγούμενο μάθημα. Όταν έχουμε γινόμενο από πολλαπλασιασμό 2*9*2800 αυτός ο αριθμός διαιρείται με το 9, με το 2, με το 2800.. και το 2800 μπορούμε να το σπάσουμε σε 2*1400 και να πούμε ότι διαιρείται και με το 1400!*

Στη συνεδρία αυτή, είδαμε πως οι μαθητές για να απαντήσουν τα ερωτήματα, έκαναν αυτό που γνώριζαν καλύτερα και στην πραγματικότητα μαθαίνουν και στο σχολείο. Για να δουν δηλαδή αν διαιρείται ένας αριθμός, κάνουν τη διαίρεση, εκτός κι αν είναι ο διαιρετέος με το διαιρέτη έχουν κάποια άμεση σχέση που γνωρίζουν από την προπαίδεια. Τότε μόνο απαντούν άμεσα. Σκοπός αυτής της συνεδρίας, ήταν να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική τους αυτή, αλλά και τη στρατηγική της ανάλυσης ενός αριθμού σε γινόμενο (πρώτων) παραγόντων. Οι δύο μαθήτριες φάνηκε να πέτυχαν έστω και αργά αυτό το στόχο, αφού έκαναν ***σωστές εικασίες***, η Σοφία για συγκεκριμένους αριθμούς και η Ελπίδα με ***μεταφορικό συλλογισμό*** για καθολική ισχύ. Η Ελπίδα τις εξήγησε ολοκληρωμένα με ***πείραμα σκέψης***, βασισμένο στις ιδιότητες της ανάλυσης ενός αριθμού σε γινόμενο (πρώτων) παραγόντων. Ο Μιχάλης, όμως δε φάνηκε να έφτασε σε αυτό το επίπεδο γενίκευσης, αν και κατάφερε να απαντήσει σωστά τα περισσότερα ερωτήματα όταν αφορούσαν σε συγκεκριμένα παραδείγματα και χρησιμοποίησε μία πολύ καλή *εμπειρική* ***μέθοδο***, τη διαδικασία εύρεσης των κοινών πολλαπλασίων, αν και αποπροσανατολίστηκε στο τέλος και δεν κατάφερε να αποτιμήσει σωστά τα δεδομένα του. Στην πραγματικότητα η μέθοδος αυτή δεν απέχει πολύ από τις εμπειρικές δοκιμές, μιας και έλεγχε αν τα πολλαπλάσια του 9, ήταν και πολλαπλάσια του 3, αλλά ήταν έτσι οργανωμένη που η οπτική της την έκανε να δείχνει ότι υπάρχει και ένα μοτίβο, (ότι ανά δύο από τα πολλαπλάσια του 3, το $3^{ο}$ είναι πολλαπλάσιο του 9) που συνεχίζεται και θα ισχύει έτσι και στα επόμενα. Το μοτίβο αυτό εντόπισε ο Μιχάλης, αλλά τον αποπροσανατόλισε και δεν μπόρεσε να το χρησιμοποιήσει σωστά. Είναι σημειωτέα, όμως, για ακόμη μία φορά η παρατηρητικότητα των μαθητών κι ο ***εντοπισμός μοτίβων***, χωρίς να τους ζητηθεί.

12η συνεδρία: Ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς. Διαιρεί και το άθροισμά τους;

Το ερώτημα αυτό τέθηκε και για διερευνητικούς σκοπούς στον τρόπο σκέψης, αλλά και επειδή εφαρμόστηκε σε μια μαθηματική απόδειξη στην 7η συνεδρία.

Και οι τρεις μαθητές δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν την εκφώνηση. Δεν ήταν συνηθισμένοι στη φράση "***διαιρεί***" , παρόλο που τη χρησιμοποίησα και στην προηγούμενη συνεδρία. Φαίνεται όμως ότι στην προηγούμενη συνεδρία οι αριθμοί τους διευκόλυναν, ενώ εδώ που παραλείπονται, εξέφρασαν την παρανόησή τους ότι εφόσον αυτός ο αριθμός που διαιρεί θα είναι ο διαιρετέος. Κάτι απόλυτα φυσιολογικό για την ηλικία τους, μιας και στο Δημοτικό δε χρησιμοποιείται τόσο αυτή η ορολογία.

Αφού διευκρίνισα τη σημασία της εκφώνησης, η Ελπίδα τότε έγραψε στο φύλλο της, ότι «*Τα ψηφία που προσθέτουμε έχουν μέσα κι αυτόν τον αριθμό (εννοεί αυτόν που διαιρεί τους άλλους), κι έτσι θα διαιρείται και το άθροισμα*». Ο τρόπος που εξέφρασε η Ελπίδα την παραπάνω σκέψη μας κάνει να αναρωτιόμαστε αν την είπε διαισθητικά, κι επομένως είναι μια ***εικασία ή*** όντως κατάλαβε, αλλά δεν το διατύπωσε σωστά, ότι *οι αριθμοί που προσθέτουμε, μπορούν να γραφούν ως γινόμενα, που θα έχουν ως ένα παράγοντα τον αριθμό που τους διαιρεί, κι έτσι, θα διαιρείται και το άθροισμά* του κι άρα πρόκειται για **πείραμα σκέψης**!

Εκείνη τη στιγμή όμως, οι άλλοι δύο μαθητές δεν είχαν καταλάβει ακόμα την εκφώνηση κι έτσι τους έδωσα ένα παράδειγμα, μιας και με συγκεκριμένους αριθμούς, τα πάνε καλύτερα. Τους έδωσα λοιπόν δύο αριθμούς, το 189 και το 24 και τους ρώτησα αν διαιρούνται με το 3. Τότε φάνηκε κι άλλη μια ***παρανόηση*** ή αλλιώς ***λανθασμένη εικασία***, που εξέφρασε η Ελπίδα ότι *«αφού ο αριθμός 189 τελειώνει σε 9 θα διαιρείται με το 3»* . Αυτή η παρανόηση ενισχύει μία δική μου εικασία που διαμόρφωσα στην 11η συνεδρία, για τους μαθητές, *ότι αναγνωρίζουν τα πολλαπλάσια των αριθμών με βάση την προπαίδεια*. Έπειτα προέτρεψα να σκεφτούν το κριτήριο διαιρετότητας του 3 κι έτσι κι έκαναν.

Δ: Για πάμε να δούμε ένα παράδειγμα. το 189 διαιρείται με το 3;

Μ: Ελάτε τώρα δε θα διαιρείται…

Ε: Ναι γιατί έχει το 9

Δ: Όχι.. δεν είναι αυτό το κριτήριο διαιρετότητας

Σ: 9+9=18 ναι (εφάρμοσε κριτήριο διαιρετότητας 1+8+9=18)

Δ: Ωραία γράψτε τώρα το 189 διαιρείται με το 3. το 24 διαιρείται με το 3;

Ε: Ναι

Δ: Ναι γιατί

Ε: 2+4=6 ("6:2=3" είχε γράψει στο φύλλο εργασίας της, αλλά δεν συνέχισε να το πει)

Δ: Ή αλλιώς;

*Ε: 3*8=24*

Αφού είδαμε ότι διαιρούνται οι δύο αριθμοί, ρώτησα αν διαιρείται και το άθροισμά τους με το 3. Η Ελπίδα τότε βρήκε το άθροισμα κι εφάρμοσε το κριτήριο διαιρετότητας του 3 κι είδε ότι διαιρείται και το άθροισμα. Επίσης το παράδειγμα αυτό της ενίσχυσε την άποψη που από την αρχή έγραψε στο φύλλο της και αναδιατύπωσε με τον εξής τρόπο: «*εφόσον το άθροισμα των ψηφίων των αρχικών αριθμών διαιρείται, θα διαιρείται και το άθροισμά τους (των αριθμών), αφού προκύπτει από τα ίδια ψηφία*». Εδώ η Ελπίδα έχει στο νου της το κριτήριο διαιρετότητας του 3 που εξαρτάται από το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού. Και πράγματι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί να εφαρμοστεί και το εξηγεί κατά κάποιον τρόπο. Η Ελπίδα χάρηκε όταν της παραδέχτηκα πως αυτό δεν το είχα σκεφτεί. Κατάλαβε όμως πως η ***εικασία*** που είχε κάνει, βασίστηκε στο άθροισμα των ψηφίων και ίσχυε σε αυτή την περίπτωση λόγω του κριτηρίου διαιρετότητας του 3 και δε θα μπορούσε να ισχύει για διαιρέσεις με άλλους αριθμούς όπως το 7.

Ο Μιχάλης ωστόσο, ήταν ακόμα μπερδεμένος. Όταν ζήτησα από την Ελπίδα να βρει κι άλλο τρόπο μου απάντησε αυθόρμητα πως αν μπορούσε να το σκεφτεί θα το είχε κάνει. Πράγματι σκέφτηκα ότι μόνα τους δεν μπορούσαν να σκεφτούν αυτό που σκεφτόμουν εγώ κι έτσι προσπάθησα να τους εισαγάγω στον δικό μου 'μαθηματικό' τρόπο σκέψης, μέσω αυτού του παραδείγματος που θα λειτουργούσε σαν ***generic example***, παράδειγμα που γενικεύεται (Balacheff, 1988) . Προηγουμένως είχαμε πει ότι οι δύο αριθμοί 189 και 24 διαιρούνται με το 3, αλλά απαντήσαμε χωρίς να κάνουμε τις διαιρέσεις. Όμως έπειτα τους καθοδήγησα να τις κάνουν, ώστε από τις διαιρέσεις να βγάλουν τους πολλαπλασιασμούς που προκύπτουν. Να γράψουν δηλαδή το διαιρετέο ως γινόμενο του 3.

Δ: Όταν λέμε 189 διά 3 πόσο μας βγάζει;

Σ: 63

Δ: 24 διά 3 μας κάνει;

Σ, Ε: 8

Δ: Από αυτές τις διαιρέσεις τι βγαίνει; Το 189 πώς μπορώ να το γράψω αλλιώς;

*Ε: 63 * 2;*

*Δ: 63*3. για γράψτε το έτσι λοιπόν. Το 24 πώς μπορείτε να το γράψετε;*

*Ε: 3*8*

Τους ζήτησα τότε να γράψουν το άθροισμα. Όμως δίσταζαν. Δε μπορούσαν να φανταστούν ότι μπορούν να το γράψουν σαν άθροισμα δύο γινομένων. Κι όταν τους προέτρεψα να το κάνουν, λύνανε με τους κανόνες προτεραιότητας πράξεων της αριθμητικής παράστασης. Γι' αυτό φυσικά, δεν ευθύνονται τα παιδιά. Εκείνα έκαναν ό,τι γνώριζαν. Τότε τους εξήγησα το σκοπό που τα γράψαμε έτσι και τους έδειξα πώς μπορούσαμε να χειριστούμε τον κοινό παράγοντα, τον οποίο είχαν εντοπίσει, αλλά δεν ήταν εξοικειωμένοι με την επιμεριστική ιδιότητα, παρόλο που αναφέρεται στο 6ο κεφάλαιο της Στ' Δημοτικού. Σίγουρα τη διδάχτηκαν, αν και δεν τη θυμόντουσαν, αλλά δε διδάχτηκαν την αντίστροφη πορεία, δηλαδή το να βγάζουν κοινό παράγοντα. Κι αυτό είναι ***ευθύνη*** και του αναλυτικού προγράμματος που δεν περιλαμβάνει τέτοιου είδους άσκηση (μπορείτε να δείτε στο 6^{ο} κεφάλαιο/ α' τεύχος τετραδίου εργασιών), αλλά και εμάς των δασκάλων, συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού μου που μάλλον κι εγώ παρέλειψα να τους βάλω τότε μια τέτοια άσκηση. Αλλά η βιασύνη που έχουμε κάποιες φορές να ολοκληρώσουμε την ύλη του αναλυτικού προγράμματος, μας αποσυντονίζει και μας απαγορεύει κάθε αυτενέργεια.

Συνοπτικά, στην συνεδρία αυτή, πρωταγωνιστεί η Ελπίδα, η οποία διατύπωσε ***μία λανθασμένη εικασία*** *ότι ένας αριθμός που τελειώνει σε 9, θα διαιρείται με το 3,* γεγονός που επιβεβαίωσε την πεποίθησή μου ότι οι μαθητές έχουν την προπαίδεια ως οδηγό για την διαιρετότητα, αλλά και δύο ***σωστές εικασίε***ς, που μπορούσαν να θεωρηθούν και ***πειράματα σκέψης*** μιας και ενυπήρχε αιτιολόγηση με βάση τις ιδιότητες των αριθμών. Η πρώτη σωστή εικασία της βέβαια ήταν πιο γενική, αλλά η διατύπωσή της δεν ήταν τόσο καλή και δεν ήταν ξεκάθαρο τι εννοούσε. Μία περίπτωση είναι να κατάλαβε ότι τους διαιρετέους μπορούσε να τους γράψει ως γινόμενα που είχαν ως ένα παράγοντα τον αριθμό που διαιρούνταν (μιας και είπε *ότι είχαν μέσα τους τον αριθμό*), ενώ η άλλη περίπτωση και μάλλον πιο πιθανή είναι η 1^{η} εικασία να συγκλίνει με τη 2^{η} , η οποία είχε σχέση με το κριτήριο διαιρετότητας του 3.

Είναι πολύ ευχάριστο όμως ότι μπόρεσε και έκανε τέτοιες γενικές εικασίες και εξηγήσεις, κάτι που δε συνέβη με τους άλλους δύο, τη Σοφία και το Μιχάλη, οι οποίοι κατάφεραν να αποδείξουν ότι ισχύει η εικασία στο συγκεκριμένο παράδειγμα, κάνοντας πράξεις, αλλά δεν έδωσαν κάποιου είδους εξήγηση. Ομολογουμένως, η απόδειξη αυτής της εικασίας ήταν κάτι δύσκολο έως ανέφικτο για τα παιδιά αυτά, δεδομένης της ηλικίας τους, αλλά κυρίως δεδομένου του ότι, λόγω του αναλυτικού προγράμματος, καλλιεργήθηκε σε αυτούς η νόρμα, να κάνουν πράξεις για να βρίσκουν αποτελέσματα, κι όχι για να ερμηνεύουν, ενώ δεν είχαν μάθει ούτε να βγάζουν κοινό παράγοντα. Τελικά τους έδειξα μέσω ενός ***generic παραδείγματος***, τι είδους μαθηματική εξήγηση κρύβεται πίσω από αυτή την εικασία, που είχαμε ήδη χρησιμοποιήσει ως αληθή στην $7^{η}$ δραστηριότητα. Να πούμε βέβαια ότι την αναφέρουμε ως εικασία, κι όχι ως μαθηματική πρόταση, γιατί έτσι ήταν για τους μαθητές. Αλλιώς δε θα είχε νόημα γι' αυτούς να τη διερευνήσουν!

Β) Αποτελέσματα ανά ερευνητικό ερώτημα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα ανά συνεδρία. Εδώ, παρουσιάζονται συνοπτικά κι απαντούν κάθε ερευνητικό ερώτημα ξεχωριστά.

Β1) Ποιες εικασίες κάνουν οι μαθητές σε σχέση με ιδιότητες και σχέσεις αριθμών και πώς τις διαμορφώνουν;

Θυμίζουμε ότι οι συνεδρίες που έγιναν είχαν ως σκοπό να μελετήσουμε την επιχειρηματολογία των μαθητών στα ερωτήματα που τους κάναμε, αλλά θέλαμε κυρίως να δούμε και τι είδους εικασίες διαμορφώνουν, πού στηρίζονται γι' αυτές και πώς τις επιχειρηματολογούν. Γι' αυτό δίνονταν με ιδιαίτερη μορφή τα ερωτήματα, κυρίως ανοιχτού τύπου. Και πράγματι οι μαθητές μας έβγαλαν ένα κομμάτι του εαυτού τους προς τα έξω, φανερώνοντας μας πεποιθήσεις και τρόπους που σκέφτονται. Οι εικασίες που *εξέφρασαν* οι μαθητές παρατίθενται συνοπτικά παρακάτω. Τονίζουμε ότι δεν είναι οι μοναδικές εικασίες που έκαναν κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, αλλά είναι αυτές που εκφράστηκαν, άλλες φορές επειδή τους ζητήθηκε να εικάσουν κι άλλες φορές επειδή αυθόρμητα σκέφτηκαν κάτι και θέλησαν να το εκφράσουν.

1. Αφού έχουμε γινόμενο πρώτων θα είναι κι αυτοί πρώτοι (Ελπίδα, 1η συνεδρία)

Η Ελπίδα εξέφρασε αυτή την εικασία αυθόρμητα όταν άκουσε για γινόμενο πρώτων αριθμών και τη χρησιμοποίησε μάλιστα σαν πείραμα σκέψης για την απάντηση ενός ερωτήματος με συγκεκριμένους πρώτους αριθμούς. Είναι φανερό πως βασίστηκε στην **αναλογική σκέψη**. Η Σοφία όμως βρήκε αντιπαράδειγμα σε αυτή την εικασία, 7Χ2=14 κι έτσι οι μαθητές απέρριψαν την καθολική ισχύ της πρότασης. Σκέφτηκαν έπειτα μήπως ισχύει μερικές φορές. Μία δοκιμή όμως, που ήταν ακόμη ένα αντιπαράδειγμα, το 11*11=121 και η αντίστοιχη διαίρεση για να δουν αν το 121 είναι πρώτος ή σύνθετος, 121:11=11, έδρασε ως **παράδειγμα στροφής** (pivotal example) για την Ελπίδα και το οποίο τη βοήθησε να κάνει αμέσως μετάβαση στο προηγούμενο γινόμενο πρώτων που της ζητούνταν να απαντήσει, κι εξήγησε το αποτέλεσμα με βάση τη δομή του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ως αντίστροφη πράξη!

2. (α) Αφού πολλαπλασιάσαμε πρώτους και βρήκαμε σύνθετο, μήπως αυτό είναι κανόνας και (β) μήπως ισχύει και το αντίστροφο δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε σύνθετους θα βγει πρώτος; (Ελπίδα, 1η συνεδρία)

Η διατύπωση αυτή της Ελπίδας εμπεριέχει δύο εικασίες. Η πρώτη (α) διαμορφώθηκε από το παράδειγμα στροφής, που την έκανε να αλλάξει γνώμη για την αρχική της εικασία (1) και να αντιληφθεί το ρόλο της διαίρεσης σαν αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Έτσι, στην περίπτωση αυτή όμως, μιλάμε για ***δομική γενίκευση*** που προέκυψε από ένα παράδειγμα που γενικεύεται (***generic example***),

Η δεύτερη εικασία (β) είναι ότι εφόσον ισχύει η (2α) εικασία της, σκέφτεται ότι μπορεί να ισχύει και το αντίστροφο ότι δηλ. *αν πολλαπλασιάσουμε σύνθετους θα βγει πρώτος* κι έτσι σκέφτεται για άλλη μια φορά ***αναλογικά.*** Τη διαμόρφωσε πριν καν αποδειχτεί η αλήθεια της (2α) εικασίας της. Η απόρριψη της εικασίας όμως έγινε αργότερα από τον Μιχάλη, αφού είχε αποδειχτεί ότι ισχύει η 2α εικασία, με τη ***χρήση συμβόλων***. Έτσι ακολούθησε κι εκείνος την ίδια διαδικασία και εξέφρασε παρόμοιο ***πείραμα σκέψης***.

3. Αφού ισχύει για μερικά, θα ισχύει για όλα. (Ελπίδα, Μιχάλης, 1η συνεδρία)

Πρόκειται για μια υπόθεση και συνάμα πεποίθηση των παιδιών, μιας και τη χρησιμοποιούν και σαν τρόπο δικαιολόγησης άλλων εικασιών. Ως αποδεικτικό σχήμα συγκαταλέγεται στον αφελή εμπειρισμό, με βάση τους όρους του Balacheff (1988), σύμφωνα με τον οποίο οι μαθητές κάνουν μερικές δοκιμές κι αν επαληθεύεται οι εικασία τους σε αυτές, τότε υποθέτουν πως η εικασία τους είναι αληθής.

4. Εφόσον κάναμε ένα παράδειγμα πρόσθεσης τριών πρώτων και βγήκε το άθροισμά τους σύνθετος, άρα πάντα θα βγαίνει σύνθετος (Ελπίδα, 2η συνεδρία)

Η Ελπίδα διαμόρφωσε την εικασία αυτή μέσω ενός παραδείγματος ισχύος της που έτυχε να βρει στην προσπάθεια διερεύνησης μιας άλλης εικασίας (ότι το άθροισμα πρώτων είναι πρώτος). Για τον έλεγχο ισχύος της εικασίας της εργάστηκαν και οι τρεις μαθητές, αλλά την απάντηση την πήρε μόνης της η Ελπίδα αφού βρήκε και η ίδια αντιπαράδειγμα.

5. Μήπως το άθροισμα τριών πρώτων βγαίνει πρώτος, μόνο όταν χρησιμοποιούμε τον ίδιο πρώτο δύο φορές στους προσθετέους; (Σοφία, *2η συνεδρία*)

Στην προσπάθεια των μαθητών να βρουν αντιπαραδείγματα για την (4) εικασία της Ελπίδας, δοκίμασαν κάποια στιγμή όλοι τους, οι δύο προσθετέοι να είναι ένας πρώτος αριθμός, ο ίδιος και για τους δύο προσθετέους. Π.χ. 5+5+7=; Ο Μιχάλης μάλιστα είχε ρωτήσει προηγουμένως αν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσει τον ίδιο πρώτο δύο φορές. Πράγματι, με αυτές τις δοκιμές τα αθροίσματα έβγαιναν πρώτοι κι έτσι αποτέλεσαν αντιπαραδείγματα για την εικασία (4). Όμως μετά διατυπώθηκε η αμφιβολία-***εικασία*** από τη Σοφία, *μήπως βγαίνει πρώτος μόνο όταν έχουμε δύο φορές τον ίδιο προσθετέο*. Τότε τους προέτρεψα να συνεχίσουν την προσπάθεια με διαφορετικούς αριθμούς και οι μαθητές κατάφεραν να βρουν παραδείγματα τριών διαφορετικών πρώτων που το άθροισμά τους βγαίνει πρώτος. Κι έτσι και αυτή η εικασία απορρίφθηκε με αντιπαραδείγματα.

6. Όλες οι πράξεις με άρτιους θα δίνουν άρτιους (Ελπίδα, 4η συνεδρία)

Η Ελπίδα έγραψε στο φύλλο της την εικασία αυτή χωρίς κανείς να της το ζητήσει, όταν συζητούσαμε και εξηγούσαμε ότι το άθροισμα τεσσάρων άρτιων είναι άρτιος, αλλά χωρίς περαιτέρω δικαιολόγηση. Υποθέτουμε όμως, σύμφωνα με το διάλογο που είχε γίνει, πως ως αιτιολόγηση δίνει την ίδια με αυτή που έδωσε για την πρόσθεση άρτιων, η οποία έχει σχέση με την δομή των άρτιων που τους κάνει να λήγουν σε 2,4,6,8,0 και το γεγονός ότι αντιλήφθηκε ότι και τα αποτελέσματα δεν μπορούν να έχουν διαφορετική δομή. Ίσως στηρίζεται στην επιφανειακή δομή, αλλά δεν παύει να είναι μία αναφορά στη δομή.

7. Μόνο το άθροισμα τριών περιττών είναι περιττός, ενώ το άθροισμα τεσσάρων περιττών είναι άρτιος (Σοφία, Ελπίδα,5η συνεδρία)

Κάποιες δοκιμές που έκανε η Σοφία τη βοήθησαν να καταλάβει ότι το άθροισμα επηρεάζεται από το ότι ο περιττός είναι «ένα παραπάνω από ένα ζυγό», μόνο που δε μπορούσε να το εξηγήσει περισσότερο κι έτσι ανέφερε αυτή την εικασία, για την οποία όμως ήταν σίγουρη ότι είναι σωστή. Την ίδια εικασία εξέφρασε η Ελπίδα αλλά με γενικότερη μορφή, σχετικά με το άρτιο ή περιττό πλήθος των προσθετέων,

μέσα από αναγνώριση μοτίβου στις δοκιμές που έκανε. Λίγο αργότερα, αποδείχτηκε η εικασία από τους ίδιους τους μαθητές, δίνοντας τους ως βοήθεια να χρησιμοποιήσουν τα σύμβολα.

8. Στο άθροισμα περιττών, περιμένουμε να βγει μερικές φορές άρτιος και μερικές φορές περιττός λόγω του ότι οι προσθετέοι είναι περιττοί. (Ελπίδα, 5η συνεδρία)

Αυτή ήταν η αρχική εικασία της Ελπίδας, για τη δραστηριότητα, και την εξέφρασε μετά από δύο παραδείγματα όπου βρήκε ότι το άθροισμα ήταν άρτιος, λέγοντας ότι «*μερικές φορές θα βγαίνουν και περιττοί, γιατί οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι περιττοί*». Η απάντηση αυτή αξίζει να προσεχθεί γιατί δείχνει ότι παρόλο που στα παραδείγματά της δε βρήκε περιττό, θεωρεί πως, σύμφωνα με τη φύση των προσθετέων, σίγουρα κάποια στιγμή θα βγαίνει περιττός.

9. Για το άθροισμα 5 διαδοχικών: *επειδή είναι 5 οι αριθμοί και είναι με τη σειρά θα διαιρούνται με το 5 (Ελπίδα, Σοφία 6η συνεδρία)*

Ήταν η αρχική διαισθητική εικασία που έκαναν οι μαθήτριες, όταν τους διατυπώθηκε το ερώτημα. Και σ' αυτή την περίπτωση, οι μαθήτριες λαμβάνουν υπόψη τη φύση του ερωτήματος, και πιο συγκεκριμένα, ότι υπάρχει ο αριθμός 5 και στα δεδομένα, αλλά και στο ερώτημα κι έτσι σκέφτονται ότι θα υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους, κι απαντούν με βάση αυτή την αναλογία.

10. Ανάμεσα στους 5 διαδοχικούς, υπάρχει πάντα ένας που διαιρείται με το 5. (Σοφία, 6η συνεδρία)

Το παρατήρησε μέσα από παράδειγμα και είναι σωστή η εικασία. Όμως, οι εκφράσεις της δείχνουν ότι πρόκειται όχι για γενίκευση αφελούς εμπειρισμού, αλλά για δομική γενίκευση μέσα από γενικεύσιμο παράδειγμα. Μάλιστα την πρόβαλε σαν ένα μέρος του τρόπου δικαιολόγησης.

11. Ανάμεσα στους 4 διαδοχικούς υπάρχει πάντα ένας που διαιρείται με το 4. & Από τους έξι διαδοχικούς, πάντα θα υπάρχει ένας αριθμός που διαιρείται με το 6 (Σοφία, 7η συνεδρία)

Η εικασία αυτή αποτελεί επέκταση της 10ης εικασίας και τη διατύπωσε με σιγουριά κι ως μέρος πειράματος σκέψης.

12. Μέχρι 5 διαδοχικούς μπορεί να υπάρχει περίπτωση, το άθροισμά τους να διαιρείται με το πλήθος των προσθετέων, ενώ παραπάνω όχι. (Ελπίδα, 7η συνεδρία)

Ο αριθμός 5 φαίνεται να είναι ένα κομβικό σημείο για την Ελπίδα και ό,τι ισχύει γι' αυτόν, θα ισχύει και για τους αριθμούς μέχρι το 5, ενώ για μετά το 5, θα ισχύει κάτι άλλο. Την εικασία αυτή δεν μπορέσαμε να την κατατάξουμε σε κάποιο είδος συλλογισμού και γι' αυτό την ονομάσαμε «αυθαίρετη».

13. Εφόσον ένας αριθμός διαιρείται με το 3, θα διαιρείται και με το 6. (Ελπίδα, 7η συνεδρία)

Είναι μια εικασία της Ελπίδας, η οποία κατά τη διάρκεια της συνεδρίας, δεν έγινε αντιληπτή, αλλά θεωρήθηκε λάθος στη διατύπωση ή έλλειψη προσοχής. Κατά την 8η συνεδρία όμως, η Ελπίδα έκανε παρόμοια εικασία και τότε βεβαιωθήκαμε πως εννοούσε αυτό που είχε εκφράσει. Μάλλον πρόκειται για μετασχηματισμό της πραγματικής πρότασης που ισχύει και είναι η αντίστροφη, ότι δηλαδή ένας αριθμός όταν διαιρείται με το 6, διαιρείται και με το 3. Κι έτσι αυτού του είδους τις εικασίες τις ονομάσαμε μετασχηματιστικές (βάσει του συλλογισμού τους).

14. Τα πολλαπλάσια του 2 διαιρούνται όχι μόνο με το 2, αλλά και με το 4, το 6, το 8 κι όλη την προπαίδεια του 2. (Ελπίδα, 8η συνεδρία)

Αυτή είναι η επόμενη εικασία της Ελπίδας, που μας επιβεβαίωσε και την προηγούμενη, και είναι μετασχηματιστική για τον ίδιο λόγο. Για τον έλεγχο της εικασίας, διαλέξαμε να εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση να διαιρούνται με το 4, αλλά θέλαμε να διευκρινίσουμε αν ισχύει για όλα τα πολλαπλάσια του 2 ή μερικά. Η Σοφία συμφώνησε μαζί της, αλλά διαισθανόταν πως δεν ισχύει για όλα. Η Ελπίδα επέμεινε πως όλα θα διαιρούνταν και με το 4. Τότε, μέσα από παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που βρήκαν και οι τρεις μαθητές, κατάλαβαν πως μερικά μόνο πολλαπλάσια του 2 που τυχαίνει να είναι και πολλαπλάσια του 4, διαιρούνται με το 4, κι ότι με ανάλογο τρόπο ισχύει και για τους άλλους αριθμούς,

15. Όταν έχουμε δύο αριθμούς, (α<β) κι ο μικρότερος αριθμός (α) έχει μέσα στα πολλαπλάσιά του αυτόν που ψάχνουμε να διαιρείται (β), τότε διαιρούνται και τα πολλαπλάσια αυτού του αριθμού (τα πολλαπλάσια του β) με τον α ! (Ελπίδα, Σοφία 11η συνεδρία)

Αν δηλ. α<β & κ*α=β τότε (εννοείται ότι α/β κι άρα) α / λ*β

Όπου, α,β,κ,λ €Ν

Πρώτα υπονόησε την εικασία η Σοφία, η οποία την εφάρμοσε ως πείραμα σκέψης σε συγκεκριμένο παράδειγμα αριθμών και δεν τη διατύπωσε γενικά. Μετά από μια παρατήρηση μοτίβου του Μιχάλη σε generic παράδειγμα, η Ελπίδα αντιλήφθηκε τη δομή, συμπλήρωσε την παρατήρηση του Μιχάλη κι εξέφρασε την ίδια εικασία με τη Σοφία, αλλά γενικά και πολύ κοντά στη μορφή μαθηματικής πρότασης! Για την εικασία αυτή, η Ελπίδα επιχειρηματολόγησε με πείραμα σκέψης, βάσει των ιδιοτήτων της ανάλυσης ενός αριθμού σε γινόμενο (πρώτων) παραγόντων, αλλά διατυπωμένο σε γενικεύσιμο παράδειγμα.

16. Ένας αριθμός που τελειώνει σε 9 θα διαιρείται με το 3 (Ελπίδα, 12η συνεδρία)

Πρόκειται για μια εικασία που δείχνει τη λανθασμένη πεποίθηση που έχει σχηματίσει από την προπαίδεια που έχει μάθει. Νομίζει πως η προπαίδεια ορίζει τα πολλαπλάσια και τους διαιρέτες. Εδώ συγκεκριμένα επειδή το 9 είναι στην προπαίδεια του 3 κι άρα διαιρείται με το 3, η μαθήτρια θεωρεί ότι όλοι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 9 θα διαιρούνται με το 3. Κατά κάποιον τρόπο, μετασχηματίζει το κριτήριο διαιρετότητας του 3, με βάση το κριτήριο διαιρετότητας του 2. Κάτι ανάλογο υποψιαστήκαμε και για το Μιχάλη και τη Σοφία, όπου το πεδίο παραδειγμάτων που παρουσίασε η Σοφία στο Μιχάλη ως πολλαπλάσια του 3, ήταν εμπνευσμένο απ' την προπαίδεια αλλά βάζοντας μηδενικά στο τέλος, π.χ. 90, 120, 300 και ήταν αναγνωρίσιμα από το Μιχάλη ότι πρόκειται για πολλαπλάσια του 3.

17. Όταν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς τότε διαιρεί και το άθροισμά τους (Ελπίδα, 12η συνεδρία)

Είναι η πρώτη εικασία που έκανε η Ελπίδα μετά την κατανόηση του ερωτήματος. Η εικασία είναι σωστή. Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι το πείραμα σκέψης που χρησιμοποιήθηκε ως αιτιολόγηση. Έγραψε πως «*τα ψηφία που προσθέτουμε έχουν μέσα κι αυτόν τον αριθμό (εννοεί αυτόν που διαιρεί τους άλλους), κι*

έτσι θα διαιρείται και το άθροισμα». Στην περίπτωση του αριθμού 3 όμως, επιχειρηματολόγησε πάλι με πείραμα σκέψης αλλά διαφορετικά, βασιζόμενη στο κριτήριο διαιρετότητας του 3. Είπε ότι *«εφόσον το άθροισμα των ψηφίων των αρχικών αριθμών διαιρείται, θα διαιρείται και το άθροισμά τους (των αριθμών), αφού προκύπτει από τα ίδια ψηφία»*. Ο τρόπος με τον οποίο δικαιολόγησε η Ελπίδα μας κάνει να συγκαταλέγουμε την εικασία της σε αυτές της δομικής γενίκευσης.

Παράγοντες διαμόρφωσης της κάθε εικασίας και χαρακτηρισμός της

α/α	**Χαρακτηρισμός**	**πώς διαμορφώθηκε**	**Σ ή Λ**
1	αναλογική σκέψη	φύση των αριθμών	λάθος
2α	Δομική γενίκευση	από παράδειγμα στροφής που έδρασε ως generic	σωστή
2β	αναλογική σκέψη	σκέφτηκε αναλογικά για το αντίστροφο	λάθος
3	αφελής εμπειρισμός	πεποίθηση που προϋπήρχε	λάθος
4	αφελής εμπειρισμός	μέσω ενός παραδείγματος ισχύος	λάθος
5	αφελής εμπειρισμός	λόγω μιας παρατήρησης στη δομή κάποιων παραδειγμάτων άλλης εικασίας	λάθος
6	Δομική γενίκευση	από παρατήρηση της δομής κατά την εξήγηση άλλης πρότασης	σωστή
7	Δομική γενίκευση	Μέσω παραδειγμάτων, αντίληψη της δομής των περιττών αριθμών	σωστή
8	αναλογική σκέψη	από φύση των προσθετέων	σωστή
9	Αναλογική σκέψη	συσχέτιση δεδομένων & ερωτήματος	λάθος ο τρόπος σκέψης
10	Δομική γενίκευση	από generic παράδειγμα	σωστή
11	Δομική γενίκευση	από επέκταση παρατήρησης δομής της 10ης εικασίας	σωστή
12	αυταρχική σκέψη	Λόγω πεποίθησης για τον αριθμό 5	λάθος
13	μετασχηματιστική	από αντιστροφή αληθούς πρότασης που ενισχύθηκε από ορισμένα παραδείγματα	Λάθος
14	μετασχηματιστική	από αντιστροφή αληθούς πρότασης που ενισχύθηκε από ορισμένα παραδείγματα	λάθος
15	Δομική γενίκευση	από παρατήρηση της δομής σε generic παράδειγμα	σωστή

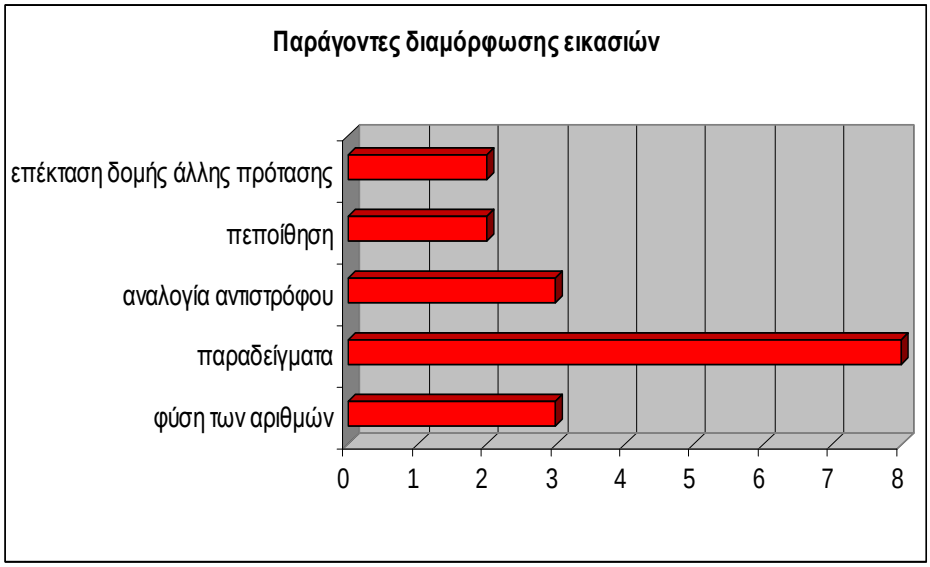
16	μετασχηματιστική	βάσει προπαίδειας & πεδίου παραδειγμάτων	λάθος
17	δομική γενίκευση	βάσει πεδίου παραδειγμάτων και ιδιοτήτων, όπως το κριτήριο διαιρετότητας	Σωστή

Ο προηγούμενος πίνακας συνοψίζεται στον εξής:

Παράγοντες που επηρέασαν τη διαμόρφωση εικασιών

Χαρακτηρισμός εικασίας	φύση των αριθμών	Παραδείγματα			αναλογία αντιστρόφου	πεποίθηση	παρατήρηση δομής άλλης πρότασης	Σύνολο σε κάθε τύπο εικασίας
		Generic παράδειγμα	απλά παραδείγματα	πεποίθηση από πεδίο παραδειγμάτων				
Αναλογική σκέψη	3	0	0	0	1	0	0	4
Δομική γενίκευση	0	3	0	1	0	0	2	6
Μετασχηματιστική	0	0	0	1	2	0	0	3
αφελής εμπειρισμός	0	0	3	0	0	1	0	4
αυταρχική σκέψη	0	0	0	0	0	1	0	1
Σύνολο σε κάθε παράγοντα	3	3	3	2	3	2	2	18

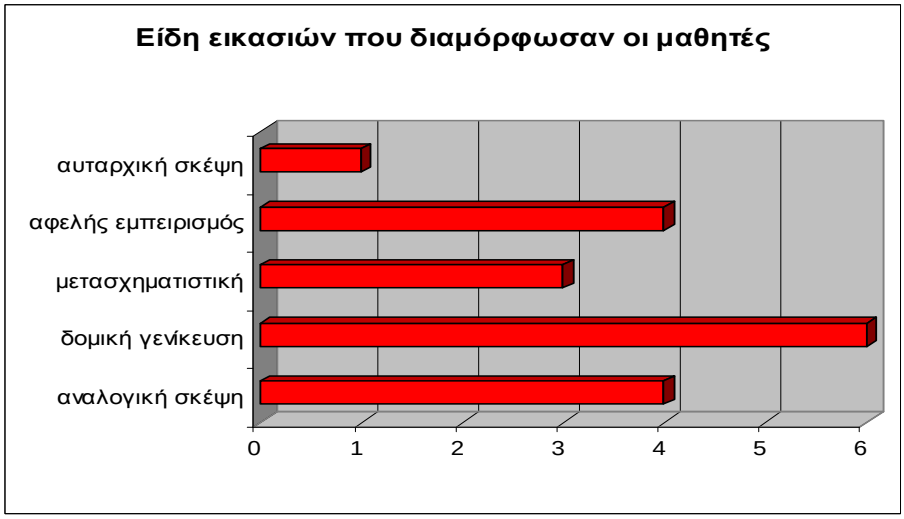
Παρατηρούμε πως ***οι παράγοντες που επηρέασαν τη διαμόρφωση εικασιών*** *των μαθητών είναι πέντε:* τα παραδείγματα, η φύση των αριθμών, η αναλογία του αντιστρόφου, η πεποίθηση και η επέκταση της δομής άλλων προτάσεων.



Ο κυριότερος από αυτούς όμως είναι τα παραδείγματα, τα οποία λειτούργησαν διαφορετικά σε κάθε περίπτωση. Από τις 8 περιπτώσεις στις οποίες επέδρασαν, οι 3 ήταν παραδείγματα που γενικεύονται (generic examples) κι οδήγησαν σε *δομική γενίκευση* (Bills & Rowland,1999 ; Dorfler,1991 στο Zazkis et al., 2007) , οι 3 ήταν απλά παραδείγματα που οδήγησαν στον αφελή εμπειρισμό ενώ οι υπόλοιπες 2

περιπτώσεις ήταν από το γενικότερο πεδίο παραδειγμάτων του μαθητή ή της μαθήτριας. Όταν επέδρασε η φύση των αριθμών, οι μαθητές σκέφτηκαν αναλογικά κι έτσι η εικασία τους χαρακτηρίστηκε αναλογική. Ένας ακόμα παράγοντας που επέδρασε ήταν η αναλογία του αντιστρόφου, σύμφωνα με την οποία, σε κάποιες προτάσεις οι μαθητές θεωρούν ότι ισχύει και το αντίστροφο ή για αντίστροφα/ αντίθετα με τα αρχικά δεδομένα θεωρούν ότι ισχύει και το αντίστροφο/αντίθετο αποτέλεσμα. Ο παράγοντας αυτός οδήγησε σε παρανοήσεις. Αξιοπρόσεχτος παράγοντας όμως είναι και η επέκταση της δομής μιας άλλης πρότασης, η οποία συντελέστηκε δύο φορές και οδήγησε σε δομική γενίκευση.

Ανάλογα όμως με τον παράγοντα που διαμόρφωσε την κάθε εικασία αλλά και το αποτέλεσμα της εικασίας ή αλλιώς το είδος της γενίκευσης που έγινε, έδωσα ένα δικό μου ***χαρακτηρισμό*** των εικασιών**.** Για το χαρακτηρισμό υπήρξε σύγκριση και των τριών παραπάνω στοιχείων και δεν επέδρασε μόνο ένα. Έτσι διακρίναμε 5 είδη εικασιών: α) *δομικής γενίκευσης*, οι οποίες προήλθαν κυρίως από γενικεύσιμα παραδείγματα και επέκταση δομής προτάσεων, β) *αφελούς εμπειρισμού*, οι οποίες διαμορφώθηκαν και αιτιολογήθηκαν από απλά παραδείγματα *γ) αναλογικής σκέψης* των οποίων η διαμόρφωση και αιτιολόγηση είναι αναλογική με τη φύση των αριθμών ή τις ιδιότητες του αντιστρόφου δ) *μετασχηματιστικές*, όπου οι εικασίες προήλθαν από μετασχηματισμό κάποιων προτάσεων, είτε με αντιστροφή δεδομένων-ζητούμενου σε μονόδρομη συνεπαγωγική πρόταση, είτε με ανάλογη εφαρμογή όπως ισχύει σε άλλη πρόταση και *ε) αυθαίρετη* εικασία στην οποία δεν φαίνεται ούτε κάποιος παράγοντας διαμόρφωσης ούτε είδος αιτιολόγησης, εκτός από τον αριθμό 5 *σαν σημείο αναφοράς*, αν και υποψιάζομαι πως έχει σχέση με νόρμα που μάλλον υιοθέτησε η συγκεκριμένη μαθήτρια. Η ***νόρμα*** αυτή είναι μία πεποίθηση που δημιουργείται από τις γενικότερες ενέργειες του δασκάλου σε άλλα ερωτήματα, και στη συγκεκριμένη περίπτωση κρίνει το γεγονός ότι τέθηκαν δύο πανομοιότυπα ερωτήματα αλλά με δύο διαφορετικούς αριθμούς, ο ένας μικρότερος του 5 κι ο άλλος μεγαλύτερος, και θεωρεί ότι, για να τέθηκαν έτσι τα ερωτήματα, δεν μπορεί να βγαίνει και στα δύο το ίδιο αποτέλεσμα.



Τέλος, *ως προς την αλήθεια της κάθε εικασίας*, έχουμε να πούμε πως 8 από τις 18 εικασίες που διαμορφώθηκαν από τους μαθητές ήταν σωστές και οι 7 από αυτές προέκυψαν από δομική γενίκευση, ενώ 1 μόνο από αναλογική σκέψη. Οι υπόλοιπες 10 που ήταν λαθεμένες, 3 από αυτές ήταν αναλογικής σκέψης, 3 αφελούς εμπειρισμού, 3 μετασχηματιστικές και 1 ήταν αυταρχική σκέψη από πεποίθηση ή νόρμα. Οι τελευταίες περιπτώσεις και οι οποίες ήταν λαθεμένες, θα λέγαμε ότι είναι υποκειμενικές κι οφείλονται στο γενικότερο παράγοντα πεποίθηση. Το λέμε αυτό γιατί ακόμα και πίσω από τον αφελή εμπειρισμό υπάρχει πεποίθηση ότι αν ισχύει για μερικά μια πρόταση, θα ισχύει για όλα. Ή όταν σκέφτεσαι αναλογικά, πάλι αυτό είναι μια πεποίθηση. Έτσι, όπου οι παράγοντες διαμόρφωσης ήταν πεποιθήσεως, οι εικασίες αποδείχτηκαν λαθεμένες. Αντίθετα, όπου υπήρξε δομική γενίκευση, οι εικασίες ήταν σωστές και μόνο μία αναλογικής σκέψης ήταν επίσης σωστή.

Β2) Τι είδους επιχειρηματολογία και αποδεικτικά σχήματα χρησιμοποιούν;

Η κάθε επιχειρηματολογία των μαθητών φαίνεται πάρα πολύ καλά στο μέρος του κεφαλαίου που παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ανά συνεδρία. Ωστόσο, στο μέρος αυτό συνοψίζουμε τα είδη των επιχειρηματολογιών τους και τα αντιστοιχίζουμε με το αποδεικτικό σχήμα που ταιριάζουν. Για το σκοπό αυτό, κατασκευάστηκαν πίνακες, οι οποίοι βοήθησαν στην πιστή καταγραφή των αποτελεσμάτων. Στην πρώτη φάση μελετάται η επιχειρηματολογία που έδωσαν οι μαθητές για τις εικασίες που διαμόρφωσαν και εξέφρασαν οι ίδιοι, ενώ στη δεύτερη φάση μελετάται η επιχειρηματολογία που δόθηκε σε κάθε ερώτημα της συνεδρίας από το σύνολο των

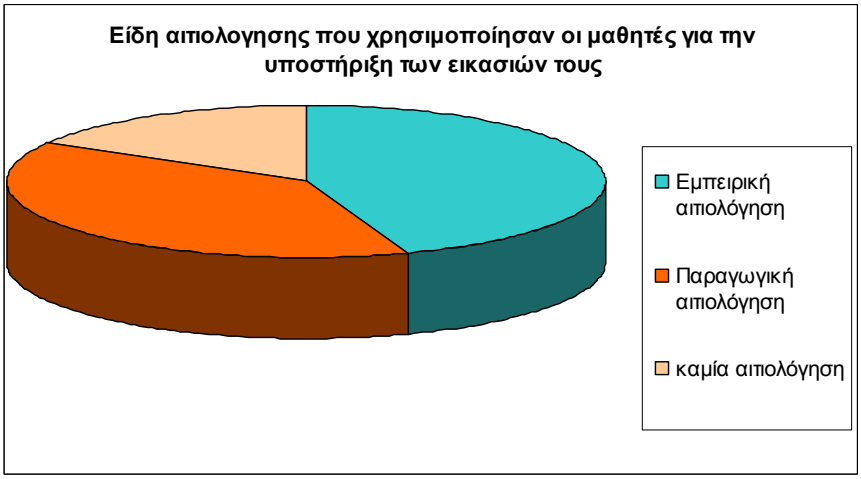
μαθητών. Προσπαθήσαμε όμως σε σημεία που υπήρχε διαφορετικό είδος επιχειρηματολογίας ανά μαθητή, να διευκρινίζουμε ποιος εκφράστηκε με το συγκεκριμένο είδος.

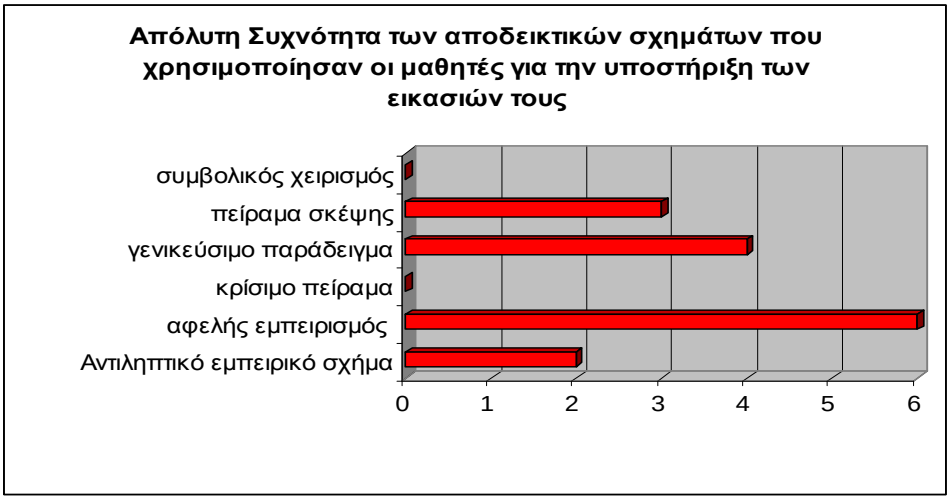
Β.2.1: Μελέτη είδους επιχειρηματολογίας και αποδεικτικών σχημάτων για τις εικασίες που οι ίδιοι οι μαθητές διαμόρφωσαν κι εξέφρασαν

		ΕΙΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ		
α/α Εικασίας μαθητή	**Πώς επιχειρηματολόγησε ο μαθητής**	Ταξινόμηση με βάση τους Harel & Sowder (2007)	ταξινόμηση με βάση τον Balacheff (1988)	ταξινόμηση με βάση τον Bell (1976)
1	πεποίθηση με βάση τη φύση των αριθμών	Β2	δεν εντάσσεται	εμπειρική αιτιολόγηση
$2^{α}$	εξήγησε ότι το παράδειγμα στροφής γενικεύεται	Γ1	γενικεύσιμο παράδειγμα	παραγωγική αιτιολόγηση
2β	πείραμα σκέψης για το αντίστροφο	Γ1	πείραμα σκέψης	παραγωγική αιτιολόγηση
3	Με την ίδια πεποίθηση αφελούς εμπειρισμού και παραδείγματα	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
4	με το παράδειγμα & αφελή εμπειρισμό	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
5	πρόβαλαν την παρατήρηση της δομής σε παραδείγματα και τον αφελή εμπειρισμό	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
6	-	-	-	-
7	παραδείγματα	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
8	με παραδείγματα	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
9	με μοτίβο σε παράδειγμα	Γ1	γενικεύσιμο παράδειγμα	παραγωγική αιτιολόγηση
10	με το ιδιο generic παράδειγμα	Γ1	γενικεύσιμο παράδειγμα	παραγωγική αιτιολόγηση
11	με παραδείγματα	Γ1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
12	πεποίθηση για τον αριθμό 5	Β2	δεν εντάσσεται	εμπειρική αιτιολόγηση
13	με πείραμα σκέψης	Γ1	πείραμα σκέψης	παραγωγική αιτιολόγηση
14	-	-	-	-
15	με το generic παράδειγμα	Γ1	γενικεύσιμο παράδειγμα	παραγωγική αιτιολόγηση
16	-	-	-	-
17	πειράματα σκέψης	Γ1	πείραμα σκέψης	παραγωγική αιτιολόγηση

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε πως για το σύνολο των 18 εικασιών, δόθηκε κάποιου είδους αιτιολόγηση μόνο στις 15 από αυτές, και το είδος της

αιτιολόγησης με βάση την ταξινόμηση του Bell (1976, στο Harel & Sowder, 2007) κατανεμήθηκε σχεδόν ισόποσα. Είχαμε δηλαδή 8 *εμπειρικές αιτιολογήσεις* και 7 *παραγωγικές*. Από τις 8 εμπειρικές, οι 2 ήταν επιχειρήματα με βάση τον τρόπο αντίληψης, γι' αυτό και συγκαταλέγονται στα *εμπειρικά αντιληπτικά σχήματα*, με βάση τους Harel & Sowder (2007) ενώ οι υπόλοιπες (6) ήταν επιχειρήματα με βάση το πλήθος των δοκιμών που έκαναν οι μαθητές, το οποίο μπορεί να ήταν και μικρό (1-10) κι έτσι πρόκειται για αφελή εμπειρισμό με βάση τον Balacheff (1988) και *εμπειρικά επαγωγικά σχήματα* με βάση τους Harel & Sowder (2007). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως έχουν και οι *παραγωγικές αιτιολογήσεις* των μαθητών για τις εικασίες τους, οι οποίες ήταν 7 στο σύνολο και 4 από αυτές ήταν επιχειρήματα με βάση παραδείγματα που γενικεύονταν, *generic examples* σύμφωνα με τον Balacheff (1988) και 3 από αυτές ήταν επιχειρήματα με βάση τις ιδιότητες των αριθμών, των πράξεων και των σχέσεων μεταξύ τους κι ονομάζονται *πειράματα σκέψης*, με όρους του Balacheff (1988). Και οι δύο περιπτώσεις όμως παραγωγικών αιτιολογήσεων που αναφέρθηκαν ανήκουν και στα αντίστοιχα παραγωγικά μετασχηματιστικά σχήματα των Harel & Sowder (2007), λόγω του ότι εμπεριέχουν λειτουργική σκέψη και λογική εξαγωγή συμπεράσματος.





Β.2.2. Μελέτη της επιχειρηματολογίας που δόθηκε σε κάθε ερώτημα

Η κάθε συνεδρία είχε από 1 έως 4 ερωτήματα. Έτσι στον παρακάτω πίνακα, ο αύξων αριθμός του ερωτήματος ορίζεται από την συνεδρία στην οποία τέθηκε και τη σειρά που κατείχε. Για κάθε ερώτημα επίσης καταγράφηκε αν ήταν σωστή ή λάθος η εικασία που πρότεινε ή αν ήταν πιο διερευνητικό.

			ΕΙΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ		
α/α ερωτήματος με βάση την συνεδρία	**Η εικασία του ερωτήματος ήταν**	**Αρχικά έκαναν δοκιμές;**	Ταξινόμηση με βάση τους Harel & Sowder (2007)	ταξινόμηση με βάση τον Balacheff (1988)	ταξινόμηση με βάση τον Bell (1976)
1α	Λάθος	ναι	Γ1	Κρίσιμο πείραμα, γενικεύσιμα παραδείγματα, πείραμα σκέψης στο δικό μου συμβολικό χειρισμό	Μεικτή αιτιολόγηση
1β	διερευνητική	όχι	Γ1	συμβολικός χειρισμός (Μιχάλης, Σοφία)	παραγωγική αιτιολόγηση
1γ	διερευνητική	όχι	Γ1	συμβολικός χειρισμός (Μιχάλης, Σοφία)	παραγωγική αιτιολόγηση
2α	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
2β	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
2γ	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
3α	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
3β	διερευνητική	ναι	Γ1	Γενικεύσιμο παράδειγμα, πείραμα σκέψης (Ελπίδα, Σοφία)	παραγωγική αιτιολόγηση
3γ	διερευνητική	ναι	Γ1	πείραμα σκέψης (Σοφία)	παραγωγική αιτιολόγηση
3δ	διερευνητική	ναι	Β1	αφελής εμπειρισμός	εμπειρική αιτιολόγηση
4	Σωστή	ναι	Β1, Γ1	αφελής εμπειρισμός (όλοι αρχικά), κρίσιμο πείραμα (Μιχάλης), γενικεύσιμο παράδειγμα & πείραμα σκέψης (Ελπίδα)	εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση
5	Λάθος	ναι	Β1, Γ1	αφελής εμπειρισμός(όλοι αρχικά), πείραμα σκέψης με βάση ένα μοτίβο (Ελπίδα), συμβολικός χειρισμός (Σοφία)	εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση
6	Σωστή	ναι	Γ1	συμβολικός χειρισμός (από κοινού)	παραγωγική αιτιολόγηση

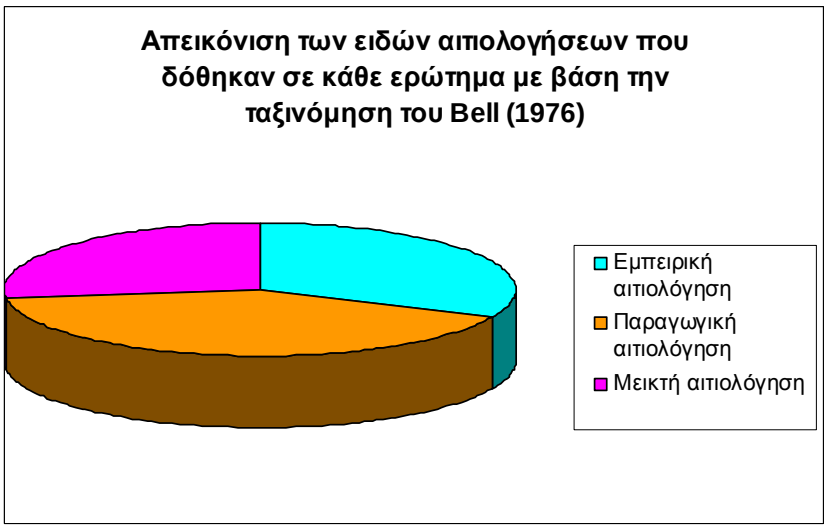
7α	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
7β	Λάθος	ναι	Β1	κρίσιμο πείραμα (αντιπαράδειγμα)	εμπειρική αιτιολόγηση
7α'	Λάθος	όχι	Γ1	συμβολικός χειρισμός (από κοινού)	παραγωγική αιτιολόγηση
7β'	Λάθος	όχι	Γ1	συμβολικός χειρισμός (από κοινού)	παραγωγική αιτιολόγηση
8	Λάθος	ναι	Β1, Γ1	αφελής εμπειρισμός (Ελπίδα), κρίσιμο πείραμα (όλοι) πείραμα σκέψης (Σοφία), με μοτίβο (Μιχάλης)	εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση
9	διερευνητική	ναι	Γ1	εύρεση μοτίβων και πειράματα σκέψης	παραγωγική αιτιολόγηση
10	Σωστή	ναι	Β1, Γ1	(Αφελής) εμπειρισμός (Σοφία, Μιχάλης) και πειράματα σκέψης (Ελπίδα)	εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση
11	Σωστή	ναι	Β1, Γ1	(αφελής) εμπειρισμός (Ελπίδα, Μιχάλης) και πειράματα σκέψης (Σοφία, Ελπίδα)	εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση
12	Σωστή	ναι	Β1, Γ1	πειράματα σκέψης (Ελπίδα), γενικεύσιμο παράδειγμα (με τη βοήθεια μου)	Παραγωγική αιτιολόγηση

Από τον παραπάνω πίνακα, διακρίθηκαν δύο γενικά είδη αιτιολόγησης σε κάθε ερώτημα, με βάση την ταξινόμηση του Bell (1976, στο Harel & Sowder, 2007), η *εμπειρική* και η *παραγωγική*, αλλά επειδή σε αρκετά ερωτήματα παρατηρήθηκαν και τα δύο είδη αιτιολόγησης, προσθέσαμε ένα επιπλέον είδος για να χαρακτηρίσουμε το είδος της αιτιολόγησης στο ερώτημα, *την μεικτή*, που περιλαμβάνει και τα δύο προηγούμενα είδη. Στον προηγούμενο πίνακα καταγράφηκαν τα βασικότερα είδη επιχειρηματολογίας που εκφράστηκαν από τους μαθητές.. Κάποια αντιληπτικά αποδεικτικά σχήματα καταγράφηκαν στα επιχειρήματα των εικασιών των μαθητών και δεν περιλαμβάνονται στον προηγούμενο πίνακα. Η συχνότητα των ειδών επιχειρηματολογίας-αποδεικτικών σχημάτων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα ερωτήματα των παρεμβάσεων συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα. Επισημαίνουμε όμως πως κάποιες φορές το είδος της επιχειρηματολογίας διέφερε ανά μαθητή. Εμείς για την ποσοτική ανάλυση μετρήσαμε τα διαφορετικά είδη επιχειρηματολογίας που αναφέρθηκαν στην ομάδα, κι όχι κατά άτομο, κι αυτό ίσως μπορεί να θεωρηθεί ένα ***πιθανό σφάλμα*** της έρευνας. Όμως η διαδικασία των παρεμβάσεων ήταν κυρίως συλλογική και συχνά εναλλάσσονταν ιδέες, κι ο ένας συμπλήρωνε τον άλλο και γι’

αυτό επιλέχτηκε στην ποσοτική ανάλυση να αντιμετωπιστούν σαν ομάδα, αλλά επισημαίνονται κάποιες διαφορές στην ποιοτική ανάλυση.

	Εμπειρική αιτιολόγηση	Παραγωγική αιτιολόγηση	Μεικτή αιτιολόγηση	σύνολο
Κρίσιμα πειράματα	6	0	3	9
αφελής εμπειρισμός	1	0	5	6
Γενικεύσιμο παράδειγμα	0	2	3	5
πειράματα σκέψης	0	4	6	10
συμβολικοί χειρισμοί	0	5	1	6
Συνολικό πλήθος ερωτημάτων	7	9	6	22

Από τα 22 συνολικά ερωτήματα που δόθηκαν σε όλες τις συνεδρίες, στα 7 από αυτά λάβαμε *εμπειρική αιτιολόγηση*, στα 9 από αυτά *παραγωγική*, ενώ στα 6 από αυτά οι αιτιολογήσεις ήταν *μεικτές*. Ακόμα κι απ' τα 9 ερωτήματα όμως, των οποίων η αιτιολόγηση χαρακτηρίστηκε *παραγωγική*, στα 5 από αυτά οι μαθητές αρχικά ξεκίνησαν με εμπειρικές δοκιμές και μόνο *σε 4 απάντησαν κατευθείαν με συμβολικό χειρισμό*. Κι αυτό δεν έγινε τυχαία.

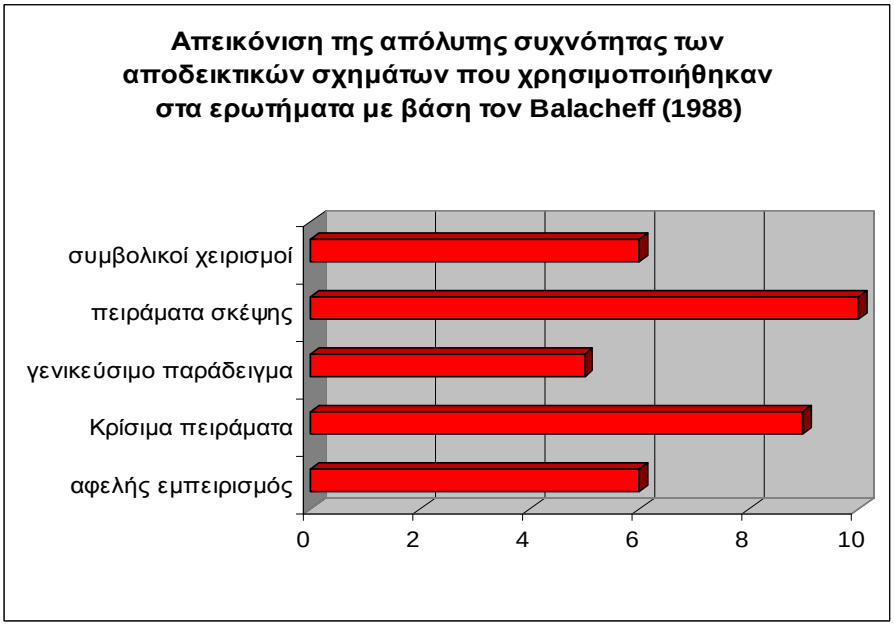


Καταρχήν, οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι στις 7 περιπτώσεις αμιγούς εμπειρικής αιτιολόγησης, μόνο *μία (3δ) από αυτές ήταν αφελούς εμπειρισμού* και η φύση του ερωτήματος ήταν τέτοια που θα μπορούσε να απαντηθεί και με πείραμα σκέψης, αλλά δικαιολογούνταν και με τις εμπειρικές δοκιμές, αφού ήταν διερευνητικό και δεν είχε κάποια μαθηματική απόδειξη. *Οι υπόλοιπες 6 περιπτώσεις* αμιγούς εμπειρικής αιτιολόγησης ήταν εμπειρικές δοκιμές που κατέληξαν σε *αντιπαραδείγματα* και με βάση αυτά απέρριψαν τις προτάσεις, και έδρασαν έτσι ως *κρίσιμα πειράματα*.

Επίσης, από τα ερωτήματα που δόθηκαν μεικτές αιτιολογήσεις (όπου ενυπήρχε εμπειρική και παραγωγική αιτιολόγηση), τα δύο από αυτά (10, 11) αφορούσαν διαιρετότητα συγκεκριμένων αριθμών, άσχετα που είχαν ως σκοπό να διαμορφώσουν μια γενική άποψη. Το αναφέρω αυτό, ως *ελαφρυντικό* για το λόγο που επέλεξαν οι μαθητές να ενεργήσουν κάνοντας εμπειρικές δοκιμές, αφού απαντούσαν το ερώτημα κάνοντας πράξεις όπως είχαν διδαχθεί από το σχολείο. Ενώ στις άλλες τέσσερις (μεικτές) εμπειρικές αιτιολογήσεις (ερωτ. 1α, 4, 5, 8), υπήρχε αρχικά το *κρίσιμο πείραμα* (ερωτ. 1α, 8) κι ο *αφελής εμπειρισμός* όλων (ερωτ. 4, 5) ή ενός μεμονωμένου ατόμου (ερωτ.8), με την έννοια των επαγωγικών αποδεικτικών σχημάτων.

Πάντως αυτές οι ενέργειες ήταν τα αρχικά επιχειρήματα κι αργότερα μέσα από την προσπάθεια εξήγησης των εμπειρικών δοκιμών (*δομημένη επιχειρηματολογία της εικασίας*), ανακαλύφθηκαν σχέσεις, μοτίβα κι εκφράστηκαν πειράματα σκέψης (ερωτ. 4,5,8) ή ακόμα έγιναν και συμβολικοί χειρισμοί (ερωτ.5). Σε δύο περιπτώσεις μάλιστα (ερωτ.1α, 5) είχαμε αυτό που αποκαλεί η Pedemonte (2007,2008) ***γνωστική ενότητα*** μεταξύ δομημένης επιχειρηματολογίας και απόδειξης με συμβολικό χειρισμό, καθώς και ***δομική συνέχεια***, η οποία βοήθησε στην κατασκευή της απόδειξης και δεν στάθηκε εμπόδιο. Γνωστική ενότητα, θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε με λιγότερη αυστηρότητα, μερικές ακόμα περιπτώσεις. Πρόκειται για τα ερωτήματα 3β & 12 όπου η δομημένη επιχειρηματολογία ενός γενικεύσιμου παραδείγματος συμφωνούσε γνωστικά με το πείραμα σκέψης που εκφράστηκε σαν αποδεικτικό σχήμα, ενώ και στην περίπτωση του ερωτήματος 6, ήμασταν πολύ κοντά στην εξήγηση γενικεύσιμων παραδειγμάτων, αλλά, ενώ ξεκίνησαν με την εξήγηση αυτών, την προσπέρασαν κάνοντας ένα γνωστικό άλμα μάλλον, και πέρασαν κατευθείαν στο συμβολικό χειρισμό.

Από τα ερωτήματα που απαντήθηκαν κατευθείαν με συμβολικό χειρισμό, τα δύο από αυτά, (1β, 1γ) είχαν περίπου ίδια δομή, με ένα προηγούμενο στο οποίο είχε συμβεί γνωστική ενότητα μεταξύ δομημένης επιχειρηματολογίας γενικεύσιμου παραδείγματος και συμβολικού χειρισμού. Άρα η προηγούμενη ***γνωστική ενότητα*** συνέβαλε και στα επόμενα ερωτήματα. Στα άλλα δύο ερωτήματα που οι μαθητές δεν έκαναν δοκιμές (7α’, 7β’) ήταν επειδή είχαν ήδη κάνει κάποιες δοκιμές στα αντίστοιχα ερωτήματα τους με καθολική ισχύ (7α, 7β) και τα οποία απέρριψαν με αντιπαραδείγματα, αλλά τώρα που καλούνταν να βρουν αν υπάρχει έστω και μία περίπτωση να ισχύουν οι προτάσεις, οι μαθητές κατάλαβαν πως έπρεπε να βρουν έναν άλλο τρόπο και τότε θυμήθηκαν τα σύμβολα!



Β.2.3. Μελέτη του τρόπου που απέκρουσαν τις εικασίες των συμμαθητών τους και των ερωτημάτων.

Ο τρόπος που έγινε η απόκρουση των εικασιών είναι ένα κομμάτι το οποίο συμπεριλήφθηκε στα προηγούμενα αποτελέσματα ως προς τα είδη επιχειρηματολογίας που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, αλλά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να το δούμε ξεχωριστά.

Καταρχήν θυμίζουμε πως κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων οι μαθητές διαμόρφωσαν 18 συνολικά εικασίες, από τις οποίες οι 10 ήταν λαθεμένες. Στις 7 από αυτές όμως κάποιοι μαθητές διαφώνησαν και απέκρουσαν τις εικασίες αυτές με δική τους πρωτοβουλία. Οι τρόποι απόκρουσης των εικασιών των συμμαθητών τους που χρησιμοποίησαν ήταν δύο: *τα αντιπαραδείγματα* (που μπορούμε να τα θεωρήσουμε κρίσιμα πειράματα, με βάση τον Balacheff) και *τα πειράματα σκέψης*, δύο απ' τα οποία παράλληλα συνοδεύονταν από έναν *συμβολικό χειρισμό*. Τα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιήθηκαν για την απόκρουση 5 εικασιών (με α/α 1,4,5,12,14) και τα πειράματα σκέψης για 3 (με α/α 2β, 12,16). Τα 4/5 των αντιπαραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ικανά να απορρίψουν την αντίστοιχη εικασία τους, η οποία ήταν καθολικής ισχύος. Το 1/5 όμως αναφέρθηκε αυθόρμητα για απόρριψη υπαρκτικής εικασίας (με α/α 12), αλλά αμέσως έγινε αντιληπτό πως δεν επαρκούσε γι' αυτό και συμπληρώθηκε με πείραμα σκέψης και συμβολικό χειρισμό.

Ένα ακόμη σημείο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι η άλλη περίπτωση εικασίας (με α/α 2β) που απορρίφθηκε με πείραμα σκέψης & συμβολικό χειρισμό δεν ήταν υπαρκτική, αλλά καθολικής ισχύος. Θα μπορούσαν να επιχειρηματολογήσουν

και με ένα αντιπαράδειγμα. Δεν το έκαναν όμως. Ο λόγος είναι ότι ένα προηγούμενο αντιπαράδειγμα για την εικασία με α/α 1, ήταν αντιπαράδειγμα που όχι μόνο απέρριψε, αλλά με την παρατήρησή του εξήγησε στους μαθητές και γιατί η συγκεκριμένη εικασία ήταν λάθος. Το αποτέλεσμα ήταν να δράσει σαν ***γεφυρωτικό*** και ***γενικεύσιμο*** παράδειγμα που οδήγησε τους μαθητές σε πείραμα σκέψης και κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης που έγινε αργότερα. Έτσι οι μαθητές στην επόμενη εικασία (με α/α 2β) που ήταν σχετική με την προηγούμενη, επέλεξαν αντί να εφαρμόσουν ένα αντιπαράδειγμα που μόνο θα απέρριπτε, να εφαρμόσουν παρόμοιο πείραμα σκέψης και συμβολικό χειρισμό που θα εξηγούσε γιατί η εικασία ήταν λάθος. Στην άλλη εικασία (με α/α 16) που αναφέρθηκε πείραμα σκέψης, δεν ήταν τόσο ικανό προς απόρριψη, αλλά διόρθωνε κατά κάποιο τρόπο την εικασία, αναφέροντας το κριτήριο διαιρετότητας.

Ας παρατηρήσουμε τώρα τον τρόπο που απέρριψαν τις λαθεμένες εικασίες των ερωτημάτων. Από τα 22 ερωτήματα, τα 16 περιείχαν εικασίες που οι μαθητές έπρεπε να διερευνήσουν αν είναι σωστές ή όχι. Στα 9/11 των λαθεμένων εικασιών αναφέρθηκαν αντιπαραδείγματα για την απόρριψή τους, τα 8/9 των οποίων τα συγκαταλέγω στα *κρίσιμα πειράματα*, τα οποία προβλήθηκαν ως αντεπιχειρήματα κι όντως απέρριψαν τις εικασίες, ενώ σε μία περίπτωση (1/9) όπου η εικασία του ερωτήματος ήταν υπαρκτική, τα αντιπαραδείγματα τα συγκαταλέγω στον αφελή εμπειρισμό, γιατί οι δύο από τους τρεις μαθητές δεν βρήκαν αντιπαράδειγμα από τις δοκιμές που έκαναν και τότε απέρριψαν την εικασία με αυτή τη λογική της επαγωγής, ότι αφού κάναμε μερικές δοκιμές και δεν ισχύει, τότε δε θα υπάρχει καμία περίπτωση να ισχύει. Να σημειώσουμε όμως πως οι δοκιμές αυτές, τους έκαναν αργότερα να σκεφτούν ένα *πείραμα σκέψης* και να απορρίψουν την υπαρκτική εικασία *μέσω συμβολικού χειρισμού*. Με *συμβολικό χειρισμό*, απέρριψαν επίσης, έπειτα από λίγες μέρες, άλλες δύο υπαρκτικές εικασίες (7α’, 7β’), με λίγη δική μου βοήθεια στη διαχείριση της αλγεβρικής παράστασης. Τέλος, αναφέρουμε ότι από τα 8 αντιπαραδείγματα (που ήταν κρίσιμα πειράματα) τα δύο κατάφεραν να εξηγήσουν στους μαθητές τους λόγους που οι εικασίες των ερωτημάτων ήταν λαθεμένες αφού αργότερα τους οδήγησαν σε πειράματα σκέψης.

Μετά από συσχέτιση των παραπάνω και ταύτιση μερικών εικασιών που διαμόρφωσαν οι μαθητές με μερικά ερωτήματα, συνοψίζεται *με ποιο τρόπο απορρίφθηκε η κάθε εικασία- ερώτημα :*

	α) Με αντιπαραδείγματα (Κρίσιμα πειράματα)	β) Με αφελούς εμπειρισμού αντιπαραδείγματα	γ) με πείραμα σκέψης	δ) Με συμβολικό χειρισμό
Ποια ερωτήματα και εικασίες απέρριψαν:	1α (1/εικασίες)*	5	8*	1α (1/εικασίες)*
	$2^{α}$		1α (1/εικασίες)*	7α' (12/εικασίες)
	2β		2β/ εικασίες*	7β'
	2γ		5*	2β/ εικασίες*
	$3^{α}$			5*
	$7^{α}$			
	7β			
	8*			
	5/εικασίες			
Πλήθος ερωτημάτων	9	1	4	5

* σημαίνει ότι η ίδια εικασία-ερώτημα απορρίφθηκε και με άλλο τρόπο

Παρατηρούμε πως 2 από τα 9 αντιπαραδείγματα ήταν ***επεξηγηματικά*** και οδήγησαν επιπλέον σε πείραμα σκέψης, ενώ το ένα οδήγησε και στον συμβολικό χειρισμό της εικασίας στην οποία αναφερόταν, αλλά και σε μια άλλη παρόμοια (2β' εικασίας). Η περίπτωση αυτή είναι χαρακτηριστική της ***γνωστικής ενότητας*** που ονομάζει η Pedemonte (2007, 2008), όπου η δομημένη επιχειρηματολογία με απαγωγικά βήματα (στην περίπτωσή μας η επεξήγηση του παραδείγματος) βοηθά στην κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης. Από τα υπόλοιπα 7 αντιπαραδείγματα, θεωρώ ότι τα δύο (στα 7α,7β ερωτήματα) μπορούσαν κι αυτά να εξηγήσουν κι έτσι θα είχαμε άλλες δύο περιπτώσεις γνωστικής ενότητας. Ήδη βοήθησαν σε ένα βαθμό, μιας και μια μαθήτρια ήταν πολύ κοντά στην εξήγηση, αλλά μια άλλη μαθήτρια διέκοψε τη σκέψη της.

Τα υπόλοιπα 5 αντιπαραδείγματα απλά απέρριπταν, μιας και η φύση των ερωτημάτων δεν βοηθούσε για εξήγηση. Από τα ερωτήματα που απορρίφθηκαν με συμβολικό χειρισμό, τα 3/5 ήταν υπαρκτικές εικασίες και το 2/5 καθολικής ισχύος. Αυτό μας χαροποιεί ιδιαίτερα διότι δείχνει ότι οι μαθητές έφτασαν στο επίπεδο να διακρίνουν το διαφορετικό είδος αποδεικτικού σχήματος που απαιτείται ανάλογα με το αν η εικασία είναι υπαρκτική ή καθολική, ενώ στην αρχή είχε σημειωθεί μία περίπτωση αφελούς εμπειρισμού, όπου από λίγα αντιπαραδείγματα απέρριπταν υπαρκτική πρόταση. Επίσης, το ότι απορρίπτουν με συμβολικό χειρισμό και πείραμα σκέψης καθολικές εικασίες, δείχνει ότι οι μαθητές ζητούν την εξήγηση της αλήθειας ή μη μιας πρότασης.

Β.2.4. Είδη συλλογισμών που παρατηρήθηκαν στην επιχειρηματολογία των μαθητών

Ακολούθως αναφέρονται τα είδη των συλλογισμών που παρατηρήθηκαν στο σύνολο των επιχειρηματολογιών που έδωσαν οι μαθητές ή του τρόπου με τον οποίο διαμόρφωσαν κάποια εικασία. Τα είδη αυτά προέκυψαν επαγωγικά από τα δεδομένα της έρευνάς μας και αναζητήθηκε από τη βιβλιογραφία ο κατάλληλος χαρακτηρισμός. Δεν αποτελούν τα μοναδικά είδη συλλογισμού που υπάρχουν, απλά είναι αυτά που παρατηρήθηκαν στην έρευνα. Καταγράφονται μάλιστα εδώ με μια μορφή αύξουσας σειράς με βάση τη χρονική σειρά που εμφανίζονται στην αποδεικτική δραστηριότητα.

1. Αναλογικός:

Ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες τους (Μοδέστου, 2007). Ο αναλογικός συλλογισμός, μας λέει η Smaling (2003) έχει σχέση με προφανείς ομοιότητες μεταξύ μιας περίπτωσης που έχει ερευνηθεί και μιας άλλης που δεν έχει. Τέτοιος συλλογισμός είναι δυνατός όταν υπάρχουν επιχειρήματα ότι, όταν μια συγκεκριμένη μελετημένη περίπτωση έχει χαρακτηριστικά σχετικά με τα συμπεράσματα της έρευνας, μια άλλη περίπτωση που δεν έχει ερευνηθεί έχει τέτοια

σχετικά χαρακτηριστικά (Smaling, 2003). Είχαμε αρκετές περιπτώσεις αναλογικού συλλογισμού στην έρευνά μας και κυρίως ο συλλογισμός αυτός έδρασε ως παράγοντας διαμόρφωσης εικασιών κι επομένως σαν εποικοδομητική επιχειρηματολογία των εικασιών. Για παράδειγμα, στο ερώτημα για το γινόμενο πρώτων αριθμών, μία μαθήτρια σκέφτηκε αναλογικά με τη φύση των αριθμών στα δεδομένα κι απάντησε ότι και το γινόμενο θα είναι πρώτος. Έπειτα όμως οι μαθητές διερευνούσαν με άλλους συλλογισμούς τις εικασίες τους. Κάποιοι ερευνητές όπως ο/η Copi (1982 στο Smaling, 2003) συγκαταλέγουν τον αναλογικό συλλογισμό στην επαγωγική επιχειρηματολογία, ενώ άλλοι όπως ο/η Walton (1989, Smaling, 2003) τον ξεχωρίζουν.

2. **Επαγωγικός**:

Ο επαγωγικός συλλογισμός επιτρέπει την κατασκευή ενός ισχυρισμού, γενικεύοντας από μερικές, συγκεκριμένες περιπτώσεις (Fann 1970; Polya 1954 στο Pedemonte, 2007). Συνήθως οι μαθητές σκέφτονταν αρχικά τουλάχιστον, ότι τα περισσότερα α που έχουν παρατηρηθεί ήταν β. Έτσι ήταν ένας οφθαλμοφανής λόγος γι' αυτούς, τα α να είναι συνήθως β (Bex et al.,2003). Ο επαγωγικός συλλογισμός στην έρευνά μας ονομάστηκε αφελής εμπειρισμός, με βάση τα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης της απόδειξης που αναφέρει ο Balacheff (1988), αφού στις περιπτώσεις αυτές οι μαθητές στηρίζονταν μόνο στο πλήθος των παραδειγμάτων το οποίο μπορεί να ήταν και πολύ μικρό, ακόμα κι ένα και με βάση αυτό έβγαζαν γενικά, καθολικά συμπεράσματα. Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η εικασία αφελούς εμπειρισμού «*εφόσον κάναμε ένα παράδειγμα πρόσθεσης τριών πρώτων και βγήκε το άθροισμά τους σύνθετος, άρα πάντα θα βγαίνει σύνθετος*» ή η αρχική αιτιολόγηση για την απόρριψη υπαρκτικής εικασίας, σύμφωνα με την οποία, αφού κάποιες δοκιμές δεν την απορρίπτουν, τότε η υπαρκτική πρόταση δεν απορρίπτεται για καμία δοκιμή. Ο επαγωγικός συλλογισμός- αφελής εμπειρισμός, στην περίπτωσή μας- αποτέλεσε κυρίως την εποικοδομητική επιχειρηματολογία που έκανε τους μαθητές να διαμορφώνουν αρχικά κάποιες εικασίες τις οποίες αργότερα διερευνούσαν πιο διεξοδικά γιατί κατανόησαν πως δεν ήταν αρκετές ορισμένες εμπειρικές δοκιμές, ειδικά στην περίπτωση επιβεβαίωσης μιας καθολικής εικασίας.

3. Απαγωγικός

Η απαγωγή ξεκινά από ένα γεγονός και προσπαθεί να βρει την αιτία που το προκάλεσε. Έτσι εξηγούμε γεγονότα που παρατηρούμε, αλλά μπορεί να οδηγήσει στο σχηματισμό υπόθεσης ή θεωρίας (Smaling, 2003; Χερουβείμ 2010)

Ο απαγωγικός συλλογισμός έχει εισαχθεί από τον Pierce (1960 στο Pedemonte, 2007), ο οποίος εξηγεί ότι αρχίζοντας με ένα παρατηρηθεν φαινόμενο, μπορεί να υποτεθεί ένας κανόνας, μέσα από τον οποίο η υπόθεση γίνεται πιο αξιόπιστη. Τέτοιες περιπτώσεις είχαμε κι όταν οι μαθητές μέσα από τις εμπειρικές δοκιμές ανακάλυπταν μοτίβα κι εξηγούσαν για το αν ισχύει η υπόθεση ή όχι με βάση αυτά. Ενώ επίσης, χαρακτηριστική είναι η περίπτωση των γενικεύσιμων παραδειγμάτων που βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή και να εκφράσουν ένα πείραμα σκέψης ή να προχωρήσουν και σε συμβολισμό όπως έγινε σε ερωτήματα γινομένου και διαίρεσης πρώτων ($1^η$ & $3^η$ συνεδρία). Σύμφωνα με τον Polya (1962 στο Pedemonte, 2007) ο απαγωγικός συλλογισμός είναι εύλογη αιτιολόγηση.

4. Μετασχηματιστικός

Ο μετασχηματιστικός συλλογισμός ***(transformational reasoning)*** ορίζεται από τον Simon (1996) ως «η φυσική ή νοητική ενασχόληση με έναν ή περισσότερους χειρισμούς σε ένα ή περισσότερα αντικείμενα που επιτρέπει κάποιον να οραματιστεί μετατροπές που υποβάλλονται αυτά τα αντικείμενα, καθώς και τα αποτελέσματα αυτών των χειρισμών» (Douek, 1998). Τέτοιο συλλογισμό είχαμε όταν οι μαθητές έκαναν χειρισμούς σε γενικεύσιμα παραδείγματα προκειμένου να εξηγήσουν πώς παρόμοια συμβαίνει και με όλες τις άλλες περιπτώσεις (βλ. $1^η$, $4^η$, $6^η$ και $12^η$ συνεδρία). Για παράδειγμα, στην $6^η$ συνεδρία, μία μαθήτρια σκέφτηκε ένα μετασχηματισμό σ’ ένα παράδειγμα 5 διαδοχικών, κρατώντας τον πρώτο ως έχει (8) και γράφοντας τους επόμενους, με βάση τον πρώτο (8+1, 8+2, 8+3, 8+4). Έτσι ο μετασχηματισμός αυτός χρησιμοποιήθηκε άμεσα στην μαθηματική απόδειξη με σύμβολα.. Μετασχηματιστικό συλλογισμό όμως είχαμε και σε περιπτώσεις διαμόρφωσης εικασιών (βλ. μετασχηματιστικές εικασίες), όπου οι μαθητές μετασχημάτιζαν διάφορες προτάσεις και σχημάτιζαν εικασίες, οι οποίες όμως φάνηκε πως δεν είχαν καθολική ισχύ.

5. Μεταφορικός

Οι μεταφορές μπορεί να θεωρηθούν σαν συγκεκριμένα συμπεράσματα από το μετασχηματιστικό συλλογισμό. Σε μια μεταφορά μπορούμε να σκεφτούμε δύο πόλους : ένα γνωστό αντικείμενο κι ένα αντικείμενο που θέλουμε να γίνει γνωστό, καθώς κι έναν σύνδεσμο ανάμεσά τους. Σε αυτή τη περίπτωση η δημιουργικότητα του μετασχηματιστικού συλλογισμού έγκειται στην επιλογή γνωστού αντικειμένου και του συνδέσμου, που μας επιτρέπει να γνωρίσουμε άγνωστες πτυχές του άγνωστου αντικειμένου από τη γνώση του γνωστού αντικειμένου. Οι μεταφορές είναι η βάση του απαγωγικού συλλογισμού (Arzarello et al. 1998 στο Douek, 1998). Χάρη στο μεταφορικό συλλογισμό, υπήρξαν περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκε η δομημένη (απαγωγική) επιχειρηματολογία κάποιων παραδειγμάτων στην κατανόηση της απόδειξης. Όπως ο μετασχηματισμός των συγκεκριμένων 5 διαδοχικών συνέβαλε (χάριν της μεταφοράς) στο συμβολισμό 5 οποιωνδήποτε διαδοχικών αριθμών. Σημειωτέος είναι και ο μεταφορικός συλλογισμός στην περίπτωση του Μιχάλη, που για να κατανοήσει τον τρόπο που χρησιμοποιείται η μεταβλητή «α» την παρομοίωσε με τον άγνωστο «χ» που έμαθε στις εξισώσεις.

5. Παραγωγικός

Παραγωγικός συλλογισμός συμβαίνει όταν ακολουθείται μια λογική διεξαγωγή συμπερασμάτων. Αρχίζουμε από μια γενική πρόταση που θεωρείται αληθής και καταλήγουμε, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μας, σε μια άλλη πρόταση που προκύπτει με λογική αναγκαιότητα ως ακολουθία των προηγούμενων προτάσεων. (Πάλλα, 2006) Τέτοιες περιπτώσεις είχαμε αρκετές όταν οι μαθητές επιχειρηματολογούσαν με πειράματα σκέψης, αναφερόμενοι σε ορισμούς και γνωστές ιδιότητες των αριθμών, ενώ επίσης και στις περιπτώσεις που έγινε απόδειξη με συμβολικό χειρισμό. Παράδειγμα αποτελεί το πείραμα σκέψης που εκφράστηκε για το αποτέλεσμα της διαίρεσης πρώτων ή πρώτου με σύνθετο, όπου οι μαθητές αιτιολόγησαν με βάση τον ορισμό του πρώτου ότι δε διαιρείται με άλλους αριθμούς, εκτός από τη μονάδα και τον εαυτό του, κι επομένως το πηλίκο θα είναι δεκαδικός αριθμός.

6. Κατανεμημένος

Ο μαθητής ή η μαθήτρια με τέτοιο συλλογισμό εκμεταλλεύεται το άμεσο περιβάλλον απευθείας (Gibson, 1979 στο Κουλέτση) και βρίσκει την ευκολότερη- πιο απλοποιημένη λύση που μπορεί να κάνει σε σχέση με το περιβάλλον. Χαρακτηριστικό

παράδειγμα κατανεμημένου συλλογισμού μας έδειξε η Ελπίδα στη 10η συνεδρία, που χρησιμοποίησε την ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, σε αντίθεση με τους συμμαθητές της που δεν σκέφτηκαν να εκμεταλλευτούν το περιβάλλον που τους δόθηκε. Σε άλλη συνεδρία όμως (στη 11η) χρησιμοποίησε η Σοφία αυτό το είδος συλλογισμού, ενώ η Ελπίδα όχι. Αυτό δείχνει ότι ο κατανεμημένος συλλογισμός δεν είναι μόνιμος τρόπος σκέψης ενός μαθητή, αλλά εξαρτάται από την περίπτωση.

Β3) Τι πληροφορίες μας δίνουν οι εικασίες και τρόποι επιχειρηματολογίας των μαθητών όσον αφορά στις γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών;

Κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, μέσα από τις εικασίες και τους τρόπους που επιχειρηματολόγησαν οι μαθητές, φάνηκαν κάποιες φορές μερικές παρανοήσεις ή ελλιπείς γνώσεις των μαθητών, όσον αφορά τη θεωρία αριθμών. Το θέμα αυτό δεν αποτελούσε αρχικά ερευνητικό ερώτημα, αλλά προέκυψε μετά την ανάλυση των παρεμβάσεων και θεωρήθηκε σημαντικό να επισημανθεί.

Οι μαθητές φάνηκε να έχουν μικρό πεδίο παραδειγμάτων των αριθμών που είναι πρώτοι και να τους θεωρούν σχετικά μικρούς, αφού για να ελέγξουν αν ένας αριθμός είναι πρώτος, διαιρούσαν αρχικά μέχρι το 7, ενώ ο αριθμός 121 έδρασε γι' αυτούς ως παράδειγμα στροφής. Ακόμη, το γεγονός ότι οι μαθητές αρχικά *δεν σκέφτονταν τις ιδιότητες των πρώτων* για να απαντήσουν τα σχετικά ερωτήματα, αλλά αντιθέτως σκέφτονταν αναλογικά, μα δίνει την εντύπωση ότι δεν είχαν αφομοιώσει ή δεν σκέφτονταν τι σημαίνει πρώτος αριθμός. Βέβαια δε μπορούσαν όλα τα ερωτήματα να απαντηθούν με βάση τις ιδιότητες, κι έτσι οι περισσότερες εμπειρικές δοκιμές καλώς έγιναν, αλλά μπορούσαν να απαντηθούν αυτά που αφορούσαν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Ωστόσο κάποιες δοκιμές λειτούργησαν γι' αυτούς ως *παραδείγματα στροφής* της σκέψης τους και στράφηκαν έπειτα στις ιδιότητες των πρώτων για την αιτιολόγηση των ερωτημάτων.

Ακόμα και με τις έννοιες άρτιος-περιττός (ή μονός-ζυγός), οι μαθητές πάλι δεν ήταν τόσο εξοικειωμένοι όσο θα έπρεπε. Κάποιες φορές χρειάστηκαν επιβεβαίωση για το αν οι αριθμοί είναι άρτιοι ή περιττοί, διαιρώντας με το 2, ενώ 1-2 φορές

σημειώθηκαν και λάθη. Ακόμη και με το άκουσμα της έννοιας των διαδοχικών αριθμών, ξαφνιάστηκαν, αλλά αμέσως αντιλήφθηκαν για ποιους πρόκειται, με εξαίρεση το Μιχάλη, που κάποια στιγμή θεώρησε τους αριθμούς 60,70,80,90 σαν διαδοχικούς.

Αρκετές επίσης ήταν οι παρανοήσεις και τα λάθη στη διατύπωση σε σχέση τη διαιρετότητα των αριθμών. Για παράδειγμα, ήθελε μια μαθήτρια να πει πως το 3 με το 6 δεν διαιρείται, κι έλεγε το αντίστροφο. Δυσκολία παρουσίασαν επίσης, και οι τρεις μαθητές, στη κατανόηση του ρήματος "*διαιρεί*" . Εν τω μεταξύ, όταν χρησιμοποιούνταν η ίδια λέξη με αριθμούς, έδειχναν ότι καταλάβαιναν, προφανώς απ' τα συμφραζόμενα. Όταν όμως σε επόμενη συνεδρία παραλείπονταν οι αριθμοί και στη θέση τους έμπαιναν μεταβλητές, εξέφρασαν την *παρανόησή* τους ότι αυτός ο αριθμός που διαιρεί θα είναι ο διαιρετέος. Κάτι απόλυτα φυσιολογικό για την ηλικία τους, μιας και στο Δημοτικό δε χρησιμοποιείται τόσο αυτή η ορολογία.

Επίσης είχαν διαμορφώσει και εικασίες από παρανοήσεις ή αυθαίρετες επεμβάσεις σε προτάσεις, οι οποίες ενισχύονταν από ορισμένα παραδείγματα. Έλεγαν για παράδειγμα πως *όταν ένας αριθμός α διαιρείται με έναν αριθμό β, τότε ο α διαιρείται και με τα πολλαπλάσιά του β* ή ότι «*αφού ο αριθμός 189 τελειώνει σε 9 θα διαιρείται με το 3*». Εδώ, επειδή το 9 διαιρείται με το 3, η μαθήτρια θεωρεί ότι όλοι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 9 θα διαιρούνται με το 3. Ίσως επίσης έχει σχέση με μοτίβα που παρατηρούν οι μαθητές στον πίνακα με την προπαίδεια που μαθαίνουν. Κάτι ανάλογο υποδεικνύει και μια άποψη του Μιχάλη, πως ο αριθμός 50.400 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, γιατί, όπως δικαιολόγησε, *δεν είναι στην προπαίδεια του 3*. Αντίθετα ένα άλλο πεδίο παραδειγμάτων που παρουσίασε η Σοφία κι εγώ στο Μιχάλη ως πολλαπλάσια του 3 και ήταν εμπνευσμένο απ' την προπαίδεια, αλλά βάζοντας μηδενικά στο τέλος, π.χ.90, 120, 300, ήταν κατανοητό από εκείνον.

Ακόμη, εντύπωση προξένησε το γεγονός ότι οι ιδιότητες που παρέχει ένας αριθμός όταν γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, δεν ήταν εμφανείς αρχικά για τους δύο απ' τους τρεις μαθητές, αφού μόνο μία μαθήτρια βασίστηκε σε αυτές. Ακόμα και σε επόμενη συνεδρία ($11^{η}$) όμως, όπου δόθηκαν ερωτήματα με άλλη μορφή, αλλά μπορούσαν να απαντηθούν με τον ίδιο τρόπο, κανένας μαθητής δεν σκέφτηκε να αναλύσει το ήδη υπάρχον γινόμενο δύο παραγόντων σε επιπλέον παράγοντες και να απαντήσει το ερώτημα με αυτόν τον τρόπο. Αντιθέτως, βρήκαν πρώτα το αριθμητικό αποτέλεσμα και ύστερα έλεγχαν αν διαιρείται ο αριθμός. Θα έλεγε κανείς πως εφάρμοζαν, όπως έχουν μάθει απ' το σχολείο, την προτεραιότητα πράξεων!

Το ίδιο γνωστικό αντικείμενο, η προτεραιότητα πράξεων, φαίνεται να τους εμπόδισε και σε κάτι ακόμα. Όταν σε ένα γενικεύσιμο παράδειγμα (στη 12η συνεδρία) τους ζήτησα να αντικαταστήσουν το άθροισμα δύο αριθμών με το άθροισμα των γινομένων που γραφόταν ο κάθε αριθμός (και το είχαν βρει), απόρησαν και ήταν έτοιμοι αμέσως να κάνουν ξανά τις πράξεις, να βρουν τα γινόμενα πόσο κάνουν, αλλά και το άθροισμα, ενώ τα γνωρίζαμε αλλά θέλαμε να εξηγήσουμε πώς λειτουργεί μια εικασία μέσα από αυτό το παράδειγμα! Γι' αυτό φυσικά, δεν ευθύνονταν τα παιδιά. Εκείνα έκαναν ό,τι γνώριζαν. Δεν ήταν εξοικειωμένοι με το να βγάλουν κοινό παράγοντα, παρόλο που η επιμεριστική ιδιότητα αναφέρεται στο 6ο κεφάλαιο της Στ' Δημοτικού. Σίγουρα τη διδάχτηκαν, αν και δεν τη θυμόντουσαν, αλλά δε διδάχτηκαν την αντίστροφη πορεία, δηλαδή το να βγάζουν κοινό παράγοντα. Κι αυτό είναι *ευθύνη* και του αναλυτικού προγράμματος που δεν περιλαμβάνει τέτοιου είδους άσκηση (μπορείτε να δείτε στο 6ο κεφάλαιο/α' τεύχος τετραδίου εργασιών), αλλά και εμάς των δασκάλων, συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού μου που μάλλον κι εγώ παρέλειψα να τους βάλω τότε μια τέτοια άσκηση.

Β4) Πως εξελίχθηκε η αποδεικτική δραστηριότητα των μαθητών κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων;

Είναι περίεργο, όμως η εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας των μαθητών δεν συνέβη, όπως θα περίμενε κανείς, μετά από ένα συγκεκριμένο πλήθος παρεμβάσεων, αλλά από την πρώτη κιόλας συνεδρία! Είναι χαρακτηριστικό όλων των παρεμβάσεων ότι υπήρχε συγχρονική εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας των μαθητών κατά τη διάρκειά τους, κι όχι μόνο διαχρονική. Ακολούθως παρατίθενται στοιχεία που αποδεικνύουν τον ισχυρισμό μου.

Β.4.1. Συγχρονική εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις συγχρονικής εξέλιξης της αποδεικτικής δραστηριότητας των μαθητών είναι οι συνεδρίες στις οποίες είχαμε μεικτή αιτιολόγηση. Οι μαθητές δηλαδή αρχικά χρησιμοποίησαν εμπειρική αιτιολόγηση, αλλά κατά τη διάρκεια της συνεδρίας κατάφεραν να προχωρήσουν σε παραγωγική αιτιολόγηση. Η μεικτή αιτιολόγηση συνέβη σε επτά συνεδρίες (1η, 4η, 5η, 7η, 8η, 10η, 11η). Στην 1η συνεδρία, η Ελπίδα έκανε δυο λανθασμένες εικασίες. Κι ενώ αρχικά οι μαθητές απέρριψαν την πρώτη με αντιπαραδείγματα (κρίσιμα πειράματα), πέρασαν στην εξήγηση των αντιπαραδειγμάτων (απαγωγικός συλλογισμός), χρησιμοποιώντας

πειράματα σκέψης (παραγωγικός συλλογισμός) και μόλις, εισήγαγα τα σύμβολα, τότε όλοι τους, ακόμα και ο πιο αδύναμος από αυτούς, ο Μιχάλης, κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν το συμβολισμό (με μετασχηματιστικό συλλογισμό) και για την εξήγηση της γενικής εικασίας, αλλά και άλλων παρόμοιων εικασιών ή ερωτημάτων, που τέθηκαν τη συγκεκριμένη μέρα..

Στην $4^{η}$, $5^{η}$ & $8^{η}$ συνεδρία όλοι οι μαθητές ξεκίνησαν την επιχειρηματολογία τους με αφελή εμπειρισμό (επαγωγικός συλλογισμός), αλλά κατέληξαν σε πειράματα σκέψης με εύρεση μοτίβων κι ακόμα και σε συμβολικό χειρισμό (Σοφία, $5^{η}$ συνεδρία). Παρόμοια εξέλιξη συνέβη και στη $10^{η}$ & $11^{η}$ συνεδρία, όπου βέβαια τα ερωτήματα αφορούσαν συγκεκριμένους αριθμούς, κι έτσι οι μαθητές παρασύρθηκαν αμέσως στο να δοκιμάσουν να απαντήσουν με πράξεις αυτών των αριθμών, όμως λίγο αργότερα που τους ζητήθηκε ένας άλλος τρόπος σκέψης, κατέληξαν στη διατύπωση πειραμάτων σκέψης (Σοφία, Ελπίδα) που έδειχναν τον γενικότερο τρόπο που θα έπρεπε να σκεφτεί κανείς με βάση τις ιδιότητες της ανάλυσης σε γινόμενο (πρώτων) παραγόντων και της διαιρετότητας (κατανεμημένος συλλογισμός).

Τέλος, στην $7^{η}$ συνεδρία, η οποία είχε αρχικά δύο ερωτήματα με καθολικές εικασίες, οι μαθητές απέρριψαν τις εικασίες αυτές με αντιπαραδείγματα (κρίσιμα πειράματα) αλλά μετά διαμορφώθηκαν άλλα δύο ερωτήματα υπαρκτικά, αντίστοιχα με τα προηγούμενα. Οι μαθητές τότε κατάλαβαν πως δεν μπορούσαν να κάνουν συνέχεια δοκιμές για να αποδείξουν ότι δεν υπάρχει περίπτωση να ισχύουν (επαγωγικός συλλογισμός) και στράφηκαν στο συμβολισμό για την απόρριψη των υπαρκτικών εικασιών (με μετασχηματιστικό συλλογισμό), ενώ τους παρείχα κι εγώ λίγη βοήθεια.

Στα παραπάνω περιστατικά που αναφέρθηκαν, παρατηρεί κανείς την εξέλιξη που έκαναν οι μαθητές ως προς το συλλογισμό και τα αποδεικτικά τους σχήματα, κατά τη διάρκεια της ίδιας αποδεικτικής δραστηριότητας. Τα περιστατικά αυτά επιβεβαιώνουν την άποψη αρκετών ερευνητών ότι οι εικασίες συμβάλλουν στο να δοθεί ώθηση στους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν, αλλά και ότι η επιχειρηματολογία, ακόμα κι αν είναι μια εμπειρική δοκιμή, μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή ή κατανόηση ενός πιο παραγωγικού αποδεικτικού σχήματος, είτε αυτό είναι ένα πείραμα σκέψης είτε είναι μια μαθηματική απόδειξη.

Β.4.2. Διαχρονική εξέλιξη της αποδεικτικής δραστηριότητας

Σημαντική είναι όμως και η διαχρονική εξέλιξη ιδιαίτερα στη μεθοδολογία που ακολουθούσαν οι μαθητές για τον έλεγχο ή την αιτιολόγηση μιας εικασίας. Καταρχήν, σιγά-σιγά αναπτύχθηκε η νόρμα για σωστή και έγκυρη αιτιολόγηση σε κάθε έκφραση γνώμης ή εικασίας. Υπήρξαν φορές που οι ίδιοι οι μαθητές αξιολογούσαν την εικασία ή επιχειρηματολογία του συμμαθητή τους ή τη ζητούσαν όταν δεν δινόταν. Ενώ επίσης προσπαθούσαν να δώσουν οι ίδιοι όσο το δυνατό καλύτερη επιχειρηματολογία.

Ένα ακόμη βασικό στοιχείο διαχρονικής εξέλιξης που παρατηρήθηκε είναι η διάκριση μεταξύ υπαρκτικών και καθολικών προτάσεων και των αποδεικτικών σχημάτων που απαιτούνται γι' αυτές. Συγκεκριμένα, από τη 2η κιόλας συνεδρία, οι μαθητές πήραν ως δίδαγμα ότι μία εικασία μπορεί να μην ισχύει καθολικά, αλλά σε μερικές περιπτώσεις να ισχύει και σε άλλες όχι. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, από την 3η συνεδρία, οι μαθητές να μην κρίνουν μόνο από ένα παράδειγμα, αν θα ισχύει μια καθολική εικασία (αφελής εμπειρισμός) και να αυξήσουν τη ερευνητικότητά τους πριν εκφράσουν κάποια εικασία. Αυτό βέβαια δεν σήμανε ότι εξαλείφθηκε τελείως ο αφελής εμπειρισμός. Αντιθέτως συνεχίστηκε να χρησιμοποιείται και σε επόμενα ερωτήματα (3δ,4,5,8) αλλά με μεγαλύτερο πλήθος εμπειρικών δοκιμών. Όμως με εξαίρεση ενός διερευνητικού ερωτήματος (3δ), σε όλα τα άλλα ερωτήματα που οι μαθητές βασίστηκαν αρχικά στον αφελή εμπειρισμό, έπειτα προσπάθησαν να αιτιολογήσουν και με πειράματα σκέψης και συμβολικούς χειρισμούς. Ως προς τις υπαρκτικές εικασίες, ήταν ξεκάθαρο ότι ισχύουν, αν βρουν ακόμα κι ένα παράδειγμα ισχύος.

Ακόμη, ως προς την απόρριψη των εικασιών, είδαμε τους μαθητές να αντιλαμβάνονται σταδιακά ότι ακόμα κι ένα αντιπαράδειγμα αρκεί να απορρίψει μια καθολική εικασία, αλλά όχι μια υπαρκτική. Υπήρξαν όμως και μία περίπτωση όπου μια μαθήτρια (η Σοφία), είχε βρει αντιπαράδειγμα για μία καθολική εικασία και παρόλο που γνώριζε ότι έτσι την απορρίπτει, συνέχισε ακόμα μία δοκιμή για να μάθει αν για κάποιες περιπτώσεις ισχύει. Παρόμοια εργάζονταν οι μαθητές και σε διερευνητικά ερωτήματα. Ως προς την απόρριψη υπαρκτικών εικασιών, στην αρχή εκφράστηκε (από την Ελπίδα) ένα είδος αφελούς εμπειρισμού ότι αρκετά αντιπαραδείγματα μπορούν να την απορρίψουν. Όμως σύντομα οι μαθητές κατάλαβαν πως η απόρριψη μιας υπαρκτικής εικασίας θα μπορούσε να γίνει μόνο με συμβολικό χειρισμό ή πείραμα

σκέψης, όπως έκαναν και για την απόρριψη δύο καθολικών εικασιών στην 1η συνεδρία, κι έτσι έπραξαν.

Ένας επιπρόσθετος κι απρόσμενος παράγοντας που παρατηρήθηκε να συμβαίνει κατά την αποδεικτική διαδικασία, αλλά και να εξελίσσεται διαχρονικά, ήταν η αναζήτηση και εύρεση μοτίβων και από τους τρεις μαθητές. Αυτό ήταν κάτι απρόσμενο, καθώς δεν συνηθιζόταν να γίνεται στα μαθήματα του σχολείου, αν και είχαν διδαχθεί την έννοια του αριθμητικού και γεωμετρικού μοτίβου, αλλά σε υποτυπώδη μορφή. Θεωρώ πως το έντονο ενδιαφέρον τους και η αδιάλειπτη προσοχή τους να εντοπίσουν σχέσεις και αιτίες των εικασιών στη δομή των αριθμών συνέβαλαν σε αυτό. Η χαρά που είχαν οι μαθητές, μετά την ανακάλυψη ενός μοτίβου και ειδικά όταν αυτό συνέβαλλε στην εξήγηση της αποδεικτικής διαδικασίας, ήταν απερίγραπτη! Κι αυτό τους ενίσχυε ακόμα περισσότερο την προσοχή στην αναζήτηση νέων μοτίβων! Περιπτώσεις μοτίβων που συνέβαλλαν στην αποδεικτική διαδικασία είχαμε στην 5η , 8η, 9η & 11η συνεδρία ενώ δύο μοτίβα της 7ης και 8ης συνεδρίας εξηγήθηκαν γιατί ισχύουν, μετά την αποδεικτική διαδικασία και με βάση αυτή.

Τέλος, παρατηρεί κανείς, μελετώντας τις συνεδρίες, πως, εκτός από το μεθοδολογικό κομμάτι των μαθητών υπήρξε μία γενικότερη διαχρονική εξέλιξη και στο συναισθηματικό και γνωστικό κόσμο των μαθητών. Ο συναισθηματικός κόσμος περιλαμβάνει το ενδιαφέρον για εύρεση κι εξήγηση της αλήθειας καθώς και μια ικανοποίηση γι’ αυτή τους την ενασχόληση. Οι μαθητές πραγματικά χαίρονταν, κάθε φορά και περισσότερο, όσο ανακάλυπταν όλα αυτά τα καινούρια πράγματα γι’ αυτούς. Ιδιαίτερα τα δύο κορίτσια, τα οποία συνήθως έβρισκαν τα πειράματα σκέψης ή εξέφραζαν κάποιες σωστές εικασίες, ένιωθαν μεγάλη ικανοποίηση διότι ένιωθαν ότι ανακάλυπταν νέους ‘κανόνες’! Σχεδόν εξίσου χαιρόταν και ο Μιχάλης, ο οποίος ήταν λίγο πιο αδύναμος στα Μαθηματικά και συμμετείχε λιγότερο σε σχέση με τα κορίτσια, αλλά προσπαθούσε με όλες του τις δυνάμεις. Και πράγματι, κατάφερε κι αυτός, σε κάποιες συνεδρίες, να εξηγήσει με πειράματα σκέψης και συμβολικούς χειρισμούς αλλά και να εντοπίσει μοτίβα (8η, 9η & 11η συνεδρία), χάρη στη συνεχή προσοχή του σε όσα λέγονταν κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας. Επίσης, αν και οι μαθητές σε αρχικό στάδιο εργάζονταν ατομικά και συναγωνίζονταν ελαφρώς, με το συνεχή διάλογο που ακολουθούσε, ένιωθαν σαν ομάδα, αφού ο ένας συμπλήρωνε τον άλλο κατά την αποδεικτική διαδικασία. Το σπουδαίο ήταν ότι συναγωνίζονταν όχι μόνο στο ποιος θα βρει το σωστό αποτέλεσμα, αλλά και στο ποιος θα δώσει καλύτερη

επιχειρηματολογία ή απόδειξη. Αλλά στο τέλος αυτό που τους ενδιέφερε ήταν η ομάδα τους να φανεί ικανή στις δοκιμασίες και να κάνει μαθηματικές ανακαλύψεις!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά την ανάλυση των παρεμβάσεων και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, καταλήγει κανείς σε διάφορα συμπεράσματα. Καταρχήν φανερώθηκε ένα μέρος των εικασιών που μπορούν να κάνουν οι μαθητές, όταν ασχολούνται με έλεγχο προτάσεων θεωρίας αριθμών, καθώς και τα διαφορετικά είδη τους, ανάλογα με τον παράγοντα που τις διαμορφώνει και το είδος της γενίκευσης που συντελείται.

Από τους κυριότερους ***παράγοντες διαμόρφωσης των εικασιών*** *ήταν τα παραδείγματα*, ενώ σημαντικό ρόλο είχαν επίσης *η φύση των αριθμών* που εμπλέκονταν, η *επέκταση της δομής μιας άλλης πρότασης*, η πεποίθηση που έχει κανείς για *την αναλογία του αντιστρόφου*, αλλά και άλλες πεποιθήσεις, όπως αυτή του αφελούς εμπειρισμού. Να τονίσουμε όμως πως κάποια μόνο παραδείγματα, κι όχι όλα, συνοδεύτηκαν από την πεποίθηση και το αποδεικτικό σχήμα του αφελούς εμπειρισμού. Απ' τα υπόλοιπα, οι μαθητές είδαν κάποιες ιδιότητες που έδιναν εξήγηση, κι έτσι διαμόρφωσαν εικασία δομικής γενίκευσης.

Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι, με βάση το διαχωρισμό των εικασιών που πραγματοποιήσαμε, *πολλές εικασίες των μαθητών ήταν* ***δομικής γενίκευσης*** που προήλθαν είτε από γενικεύσιμα παραδείγματα είτε από επέκταση της δομής άλλων προτάσεων, *ενώ αρκετές επίσης ήταν οι* ***εικασίες αφελούς εμπειρισμού*** *και* ***αναλογικής σκέψης***. Λιγότερες ήταν οι μετασχηματιστικές εικασίες που προέκυψαν από (αυθαίρετους) μετασχηματισμούς αληθών προτάσεων (συνήθως αντιστροφή δεδομένων-ζητούμενου), ενώ μόνο μία εικασία θεωρήθηκε *αυθαίρετη* και θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί ότι προέκυψε από νόρμα που καλλιεργήθηκε.

Αξίζει επίσης να επισημανθεί ότι από τις 18 εικασίες που διαμόρφωσαν οι μαθητές οι *8 ήταν σωστές, κι απ' τις οποίες οι 7 ήταν δομικής γενίκευσης*. Το γεγονός αυτό μας χαροποιεί, απ' τη μία γιατί θεωρώ μεγάλο επίτευγμα μαθητές δημοτικού να γενικεύουν με βάση τη δομή και να κάνουν ***παραγωγικούς συλλογισμούς***, κι απ' την άλλη γιατί βγήκαν στο φως διάφοροι λανθασμένοι τρόποι σκέψης (***επαγωγικός, αναλογικός συλλογισμός***, αλλά σε ψευδή αναλογία), και μέσα από τις συνεδρίες οι ίδιοι οι μαθητές τους αξιολόγησαν κι έλεγξαν την εγκυρότητά τους, με άλλα είδη συλλογισμών (όπως ο ***απαγωγικός, μετασχηματιστικός***).

Ακόμη και για την επιχειρηματολογία των ερωτημάτων που τους θέτονταν, τα ***αποδεικτικά σχήματα*** των μαθητών ήταν ποικίλα, και δεν υπήρχε μονοτονία ως προς ένα ή δύο αποδεικτικά σχήματα, αν και *οι εμπειρικές δοκιμές είχαν καθοριστικό ρόλο* σε κάθε ερώτημα και ήταν συνήθως το πρώτο πράγμα που έκαναν οι μαθητές. Ωστόσο, το είδος της αιτιολόγησής τους δεν βασίστηκε μόνο σε αυτές ούτε με τον ίδιο τρόπο κάθε φορά. Οι δοκιμές κυρίως είχαν ως ρόλο, αρχικά να απεικονίσουν τι λέει η εκφώνηση, έπειτα να γίνουν κάποιες προβλέψεις και τέλος να τους βοηθήσουν να εξηγήσουν ή να αποδείξουν. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ορισμένες δοκιμές τις έβλεπαν με τη σκοπιά του ***αφελούς εμπειρισμού***, ενώ άλλες αποτέλεσαν αντιπαραδείγματα και στάθηκαν ως ***κρίσιμα πειράματα***. Από αυτές όμως μερικές, ειδικά κάποιες που ήταν αντιπαραδείγματα στην εικασία τους, μετατράπηκαν σε ***παραδείγματα στροφής*** της σκέψης των μαθητών και τους έκαναν να προσπαθήσουν να καταλάβουν αν ισχύει μια εικασία, με βάση τις ιδιότητες. Στην περίπτωση αυτή εξέφραζαν ***πειράματα σκέψης*** ή (και) εξηγούσαν σε ***γενικεύσιμα παραδείγματα*** γιατί ισχύει η εικασία, ενώ δεν έλειψαν μερικές φορές και οι ***συμβολικοί χειρισμοί***. Στις περιπτώσεις που *η παρατήρηση κι εξήγηση των παραδειγμάτων έδρασε ως απαγωγικό βήμα για την διαμόρφωση ενός πειράματος σκέψης ή και ενός συμβολικού χειρισμού,* είχαμε αυτό *που ονομάζει η* Pedemonte (2007,2008) ως ***γνωστική ενότητα*** μεταξύ δομημένης επιχειρηματολογίας των εικασιών και απόδειξής τους.

Επιπλέον, κάτι το οποίο παρατηρήσαμε και μας προξένησε εντύπωση είναι πως ***ο συμβολισμός***, ενώ θα πίστευε κανείς πως δυσκολεύει τους μαθητές στην κατανόηση, στην παρούσα εργασία *φάνηκε να* ***διευκολύνει ορισμένες αιτιολογήσεις***. Υπήρξε από την αρχή, χαρακτηριστική περίπτωση που οι μαθητές μπορούσαν να εξηγήσουν μόνο γιατί ισχύουν τα παραδείγματα, κι όχι γιατί ισχύει γενικά η πρόταση. *Η εισαγωγή του συμβολισμού* από την ερευνήτρια ανέτρεψε τη δυσκολία των μαθητών και κατάφεραν να εξηγήσουν κάθε εικασία τους με συμβολικό χειρισμό σε εκείνη την συνεδρία, αλλά και σε άλλες όπου χρειάστηκε και ήταν δυνατό.

Σε γενικές γραμμές *το* ***πλήθος της παραγωγικών αιτιολογήσεων*** (με βάση τον Bell, 1976 και Harel & Sowder, 2007) *ήταν ελαφρώς μικρότερο από τις εμπειρικές όσον αφορά στον τρόπο που δικαιολόγησαν τις εικασίες που οι ίδιοι διαμόρφωσαν, αλλά αρκετά περισσότερο όσο αφορά στον τρόπο που απάντησαν τα ερωτήματα που τους δόθηκαν*. Διαφορετική ήταν επίσης η φύση των παραγωγικών αιτιολογήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τις εικασίες και τα ερωτήματα. Στην αιτιολόγηση των εικασιών, δεν υπήρξε καθόλου συμβολικός χειρισμός. Τα παραπάνω δικαιολογούνται, καθώς οι

μαθητές δεν έχουν μάθει στο δημοτικό σχολείο να κάνουν μαθηματικές αποδείξεις, αλλά και όταν εκφράζει κανείς μια εικασία, προβάλλει κυρίως την πεποίθησή του ως παράγοντα και ορισμένα παραδείγματα ισχύος, ενώ σε μια πιο επίσημη κατάσταση, όταν καλούνται να απαντήσουν ερωτήματα έχει καλλιεργηθεί η νόρμα ότι η αιτιολόγηση που θα δώσουν πρέπει να είναι έγκυρη και να βεβαιώνει την εικασία 100%. Το παραπάνω μας θυμίζει επίσης ***τη διαφορά της τριπλέτας της εικασίας*** που ορίζει η Pedemonte (2007) ***και*** της τριπλέτας ***του θεωρήματος*** που ορίζουν οι Mariotti et al. (1997 στο Pedemonte, 2007). Με βάση την αντιστοιχία των παραπάνω, για την εικασία απαιτείται επιχειρηματολογία με βάση ένα σύστημα πεποιθήσεων, ενώ για ένα θεώρημα απαιτείται απόδειξη με βάση μια μαθηματική θεωρία.

Κάτι επίσης που παρατηρήθηκε στην έρευνα ήταν *η ιδιαίτερη ικανότητα και των τριών μαθητών να εντοπίζουν* ***μοτίβα*** και να ζητούν την εξήγηση αυτών που παρατηρούν. Βέβαια ανακάλυπταν τα μοτίβα μέσα από παραδείγματα και θεωρούσαν ότι ισχύουν και για τα υπόλοιπα. Η γενίκευση που έκαναν όμως δεν ήταν πάντοτε επαγωγική, με την έννοια του αφελούς εμπειρισμού, καθώς τις περισσότερες φορές προσπαθούσαν να αντιληφθούν τη δομή και αρκετές φορές τα κατάφερναν κι αιτιολογούσαν με βάση αυτή.

Επίσης, σταδιακά κατάφεραν *να διακρίνουν τις εικασίες σε* ***καθολικές και υπαρκτικές,*** *καθώς και* ***το είδος του αποδεικτικού σχήματος*** *που χρειάζεται για την επιβεβαίωση ή απόρριψή τους.* Αντιλαμβάνονταν δηλαδή, από τις πρώτες κιόλας συνεδρίες, αν και χρησιμοποιούσαν συχνά τις εμπειρικές δοκιμές, πως λίγες δοκιμές δεν επαρκούσαν για να είναι σίγουροι πως μια καθολική εικασία ισχύει. Ενώ αντίθετα, ένα αντιπαράδειγμα απέρριπτε την καθολική εικασία, αλλά τους έκανε κάποιες φορές να σκέφτονται μήπως ισχύει η εικασία για μερικές περιπτώσεις. Έτσι η εικασία μετατρεπόταν σε υπαρκτική και γινόταν νέα διερεύνηση, αρχικά με δοκιμές. Όταν όμως οι δοκιμές δεν επιβεβαίωναν την υπαρκτική εικασία, οι μαθητές καταλάβαιναν πως δεν την απέρριπταν κιόλας, γιατί μπορεί να υπήρχε μία άλλη περίπτωση που δε δοκίμασαν. Κάτω από αυτό το σκεπτικό, σταματούσαν τις εμπειρικές δοκιμές και στρέφονταν σε νέα αιτιολόγηση η οποία ήταν αντιληπτό πως έπρεπε να βασίζεται στη δομή και στις ιδιότητες των αριθμών.

Τέλος, όλη αυτή η εξέλιξη των μαθητών είναι ιδιαίτερα σημαντική, ειδικά αν λάβει κανείς υπόψη του και τις ***παρανοήσεις ή ελλιπείς γνώσεις*** *που είχαν οι μαθητές σχετικά με τα αντικείμενα θεωρίας με τα οποία ασχολήθηκαν αριθμών (κυρίως με πρώτους αριθμούς, κριτήρια διαιρετότητας),* κι εκφράστηκαν μέσα από τις εικασίες τους

και τον τρόπο που επιχειρηματολογούσαν. Με την προβολή των εικασιών και πεποιθήσεών τους προς τα έξω, οι μαθητές κατάφεραν να τις εξετάσουν και να τις αναδιαμορφώσουν, βελτιώνοντας κατά πολύ τα γνωστικά τους σχήματα που ήταν ελλιπή. Αυτό ακόμα μας δείχνει πως *η ενασχόληση με τέτοιου είδους δραστηριότητες είναι ικανή για όλους τους μαθητές, ακόμα κι αν δεν είναι εντελώς οικείοι με τις έννοιες αυτές*. Αντιθέτως, *είναι μια ευκαιρία, αυτές οι έννοιες και οι εικασίες να αποσαφηνιστούν*.

Συζήτηση με άλλες έρευνες

Γενικός σκοπός της έρευνας ήταν να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο συλλογίζονται κι επιχειρηματολογούν οι μαθητές σε καταστάσεις διαμόρφωσης κι ελέγχου εικασιών που αφορούν τη θεωρία αριθμών. Το πρώτο πράγμα που επιβεβαιώθηκε στην έρευνα, είναι η άποψη του Πούλου (2009), που λέει πως οι ***εικασίες ελκύουν την προσοχή των μαθητών*** και είναι ένα ερέθισμα για να προκληθεί ενδιαφέρον για τα μαθηματικά προβλήματα. Οι μαθητές πραγματικά ενδιαφέρονταν να μάθουν την αλήθεια που κρύβεται πίσω απ' τις εικασίες, αλλά και την εξήγησή της, όπου αυτό ήταν δυνατό. Ακόμα κι αν ήταν μία 'δύσκολη' γι' αυτούς εξήγηση, ήθελαν ή να την βρουν ή τουλάχιστον να την ακούσουν. Ιδιαίτερη μάλιστα ήταν η χαρά τους, όταν μέσα από τον έλεγχο μιας εικασίας, ανακάλυπταν νέους 'κανόνες' ! Έτσι η έρευνά μας δείχνει αντίθετα αποτελέσματα, με αυτά που κατέγραψαν κάποιες άλλες έρευνες (Doyle, 1986 Desforges & Cockburn, 1987 στο Σακονίδης 2007) οι οποίες βρήκαν ότι σε τέτοιου είδους δραστηριότητες οι μαθητές ήταν ανήσυχοι και απρόθυμοι για διεργασίες υψηλότερου επιπέδου από τις συνηθισμένες, όπως η κατανόηση κι ο συλλογισμός, επειδή δεν ήταν σε θέση να προβλέψουν την απάντηση που αναμενόταν από τον εκπαιδευτικό.

Όμως επιπρόσθετα, στη δική μας έρευνα, χάρη στις εικασίες που διαμόρφωσαν οι μαθητές ή που είχαν ήδη διαμορφώσει και ελεύθερα μας τις εξέφρασαν, μπορέσαμε να δούμε τον γνωστικό τους κόσμο, τρόπους με τους οποίους συλλογίζονται, πώς επιχειρηματολογούν γι' αυτές, όπως διατείνεται και η Maher (2005) αλλά και μέσα από τις συνεδρίες και τις συζητήσεις μεταγνωστικού επιπέδου, εμπλούτισαν τα γνωστικά τους σχήματα σχετικά με τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών που μελετήθηκαν, αλλά και τους σωστούς τρόπους επιχειρηματολογίας, ανάλογα με το αν μια εικασία ήταν καθολική ή υπαρκτική. Κι έτσι επαληθεύτηκαν και οι Blanton, et al. (2003).

Ως προς τις έννοιες τις οποίες διαπραγματεύτηκαν (πρώτοι αριθμοί, άρτιοι ή περιττοί, πολλαπλάσια, διαιρέτες) φάνηκε πως η γνώση τους δεν ήταν πλήρης, αλλά είχε κάποιες ***ελλείψεις ή παρανοήσεις***. Εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι οι δεν βασίζονταν στους ορισμούς των εννοιών αυτών, οι οποίοι και πρόσδιδαν συγκεκριμένες ιδιότητες, βοηθητικές για την απάντηση των ερωτημάτων. Υπήρξε ακόμη περιστατικό όπου επιβεβαιώθηκαν αποτελέσματα των Zazkis et al. (2007) όσον αφορά λανθασμένες γενικεύσεις που κάνουν οι μαθητές για τους πρώτους αριθμούς κι αυτό συμβαίνει λόγω μικρού πεδίου παραδειγμάτων των πρώτων αριθμών που προβάλλονται στο σχολείο. Βρέθηκαν λοιπόν, αν και δεν αναφέρθηκαν με άμεσο τρόπο, αλλά υποκρύπτονταν στις απαντήσεις των μαθητών, δύο λανθασμένες γενικεύσεις για τους πρώτους: α) οι πρώτοι αριθμοί είναι μικροί και β) κάθε σύνθετος αριθμός πρέπει να έχει ως παράγοντα έναν μικρό πρώτο αριθμό. Αν δεν βρίσκεται μικρός πρώτος ως παράγοντας, τότε είναι σύνθετος. Επίσης, επιβεβαιώθηκαν αποτελέσματα των Zazkis & Gadowsky (2001 στο Zazkis et al.,2007) σύμφωνα με τα οποία άλλες μορφές αναπαράστασης αριθμού**,** όπως η ανάλυση σε πρώτους ή το άθροισμα αριθμών θεωρούνται ως ‘εκφράσεις’ ή ‘ασκήσεις’ παρά ως αριθμοί. Ωστόσο μία τέτοια έκφραση φάνηκε χρήσιμο εργαλείο για την διεξαγωγή γενικών συμπερασμάτων και είναι ένα βήμα για την προώθηση της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων. Τέλος, αρκετές ήταν οι παρανοήσεις τους σε σχέση με τη διαιρετότητα των αριθμών, όπου οι μαθητές αυθαίρετα αντέστρεφαν μονόδρομες επαγωγικές σχέσεις, ενώ ακόμη δυσκολεύονταν στη διατύπωση.

Εκτός όμως από αυτές τις παρανοήσεις ή τις περιπτώσεις υπερ-γενίκευσης, οι μαθητές μας έδειξαν ότι ***δεν σκέφτονται πάντοτε με λάθος τρόπο***. Πολλές από τις εικασίες που έκαναν και εξέφρασαν κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων ήταν σωστές. Κι αυτό γιατί, εκτός από τις περιπτώσεις της αναλογικής σκέψης κι αφελούς εμπειρισμού, πραγματοποίησαν και εικασίες δομικής γενίκευσης, στις οποίες χρησιμοποιούσαν απαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.

Ανάλογα αποτελέσματα είδαμε στον τρόπο με τον οποίο επιχειρηματολόγησαν στα ερωτήματα Οι μαθητές βασίστηκαν αρκετά στις εμπειρικές δοκιμές, αλλά ήταν ορισμένες οι φορές που χρησιμοποιήθηκαν με τον αφελή εμπειρισμό ως αποδεικτικό σχήμα. Τις υπόλοιπες φορές ήταν αντιπαραδείγματα, που έδρασαν σαν κρίσιμα πειράματα, ή γενικεύσιμα παραδείγματα. Πολλές ήταν και οι φορές που μετά τις εμπειρικές δοκιμές εκφράστηκαν πειράματα σκέψης και συμβολικοί χειρισμοί, που

ανήκουν στην παραγωγική αιτιολόγηση κατά Bell (1976 στο Harel & Sowder, 2007) και στα αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα κατά Harel & Sowder (2007).

Έτσι με την εργασία μας, επιβεβαιώνεται πως οι μαθητές δεν επιχειρηματολογούν κυρίως με αφελή εμπειρισμό, όπως κάποιοι δάσκαλοι πιστεύουν (Bergqvist, 2005), αλλά χρησιμοποιούν περισσότερο τα υπόλοιπα αποδεικτικά σχήματα του Balacheff (1988), συμπεριλαμβανομένων και των παραγωγικών σχημάτων. Φάνηκε πως ***ο αφελής εμπειρισμός ήταν κυρίως ένα μέσο διαμόρφωσης των εικασιών, κι όχι τόσο ως μέσο επιχειρηματολογίας (τουλάχιστον όχι της δομημένης)***. Σε όμοια αποτελέσματα κατέληξε και η έρευνα των Schifter, et al. (2003 στο Harel & Sowder, 2007) η οποία έδειξε πως οι μαθητές δημοτικού πείθονται για μια καθολική εικασία με βάση το εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα, αλλά μετά επιστρέφουν αρκετές φορές στην αβεβαιότητα επειδή είναι ενήμεροι ότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που δεν εξέτασαν κι έτσι αναζητούν άλλους τρόπους πιο παραγωγικούς.

Δεν συμφωνούν όμως ιδιαίτερα τα αποτελέσματά μας με αυτά του Balacheff (1991), ο οποίος βρήκε ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν πάντα ότι ένα ***αντιπαράδειγμα είναι αρκετό να απορρίψει μια καθολική πρόταση***. Στη δική μας έρευνα, ήταν ελάχιστες οι φορές (μόνο δύο) που παρατηρήθηκε αυτό το φαινόμενο, ενώ από τις πρώτες κιόλας συνεδρίες ένα αντιπαράδειγμα ήταν αρκετό να τους δείξει πως η καθολική εικασία δεν ισχύει και κάποιες φορές έκαναν κι άλλη δοκιμή για να βρουν αν ισχύει για κάποιες περιπτώσεις. Έτσι αρκετά αντιπαραδείγματα οδήγησαν στη ριζική ή τοπική ανασκευή μιας εικασίας σαν μια υποτυπώδη μορφή της ευρετικής διαδικασίας του Lakatos (στο Πούλος, 2009)

Σε αντίθεση έρχονται επίσης τα αποτελέσματα της έρευνάς μας και με τα ευρήματα του Bell (1976 στο Harel & Sowder, 2007), όπου κανένας από τους μαθητές γυμνασίου δεν χρησιμοποίησε ***αλγεβρική απόδειξη*** για καθολική εικασία, ενώ στη δική μας έρευνα οι ίδιοι οι μαθητές τη ζήτησαν και πραγματοποίησαν για επιβεβαίωση καθολικών εικασιών αλλά και απόρριψη υπαρκτικών. Η χρήση του παραγωγικού σχήματος στην απόρριψη των υπαρκτικών, προέκυψε όταν είχε νόημα γι' αυτούς και καλούνταν να αποδείξουν κάτι το οποίο δεν ήταν φανερό, όπως διατείνεται και ο Kline (1973, Dreyfus 1999). Βέβαια, στην αιτιολόγηση των εικασιών που διαμόρφωσαν οι ίδιοι οι μαθητές, όντως δεν υπήρξε αλγεβρική απόδειξη. Ενώ επίσης αν αφήναμε τους μαθητές ελεύθερους, χωρίς καμία συνεδρία όπου με τις μεταγνωστικές συζητήσεις θέτονταν προβληματισμοί, παρά μόνο να απαντήσουν μόνοι τους ένα φύλλο εργασίας, τότε τα αποτελέσματά μας μάλλον θα ήταν διαφορετικά. Σκοπός όμως της έρευνας

μας, δεν ήταν μόνο να παρατηρήσουμε, αλλά και να δούμε ‘εκ των έσω’ τη συμβολή μιας συνεδρίας κι άρα αυτό σημαίνει πως η παρέμβασή μας είχε θετική επίδραση.

Επιπρόσθετα, στις συνεδρίες μας, υπήρξαν και ορισμένες περιπτώσεις ***γνωστικής ενότητας και δομικής συνέχειας*** μεταξύ της δομημένης επιχειρηματολογίας με βάση τα παραδείγματα των εμπειρικών δοκιμών, και του αναλυτικού αποδεικτικού σχήματος που εκφράστηκε αργότερα. Φάνηκε πως η δομική συνέχεια ήταν βοηθητική και η κατανόηση του παραδείγματος λειτούργησε σαν απαγωγικό βήμα για την κατανόηση της απόδειξης. Έτσι επιβεβαιώθηκαν οι πειραματικές έρευνες (Boero et al., 1996; Garuti, et al.,1996; Garuti, et al.,1998; Mariotti, 2001 στο Pedemonte 2008) οι οποίες δείχνουν ότι ***η απόδειξη είναι πιο «προσβάσιμη» στους μαθητές, εάν έχει αναπτυχθεί επιχειρηματολογία*** για την κατασκευή ενός συμπεράσματος, διότι όπως υποθέτει η Pedemonte (2007,2008) η δομημένη επιχειρηματολογία μπορεί να μειώσει το γνωστικό κενό μεταξύ της εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας και της απόδειξης. Δηλώνει στην έρευνά της (2008) κι επιβεβαιώθηκε και στη δική μας, πως ένα βήμα απαγωγικού συλλογισμού (στη δομημένη επιχειρηματολογία) μέσα από τη σημασία των αριθμητικών παραδειγμάτων, μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή αλγεβρικών μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Αρκετές επίσης ήταν οι φορές που οι μαθητές ανακάλυψαν κάποια ***μοτίβα*** στις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και αντιλαμβάνονταν πως το μοτίβο τους ‘δουλεύει’ σε όλα τα παραδείγματα. Αυτό όμως συνέβαινε, ***όχι πάντοτε με την επαγωγική θεώρηση*** όπως λένε αντίστοιχες έρευνες της Lampert (1990 στο Dreyfus 1999) και του Reid (2002 στο Komatsu 2010) αλλά πολλές φορές επειδή αντιλαμβάνονταν τη δομή μέσα από αυτά τα παραδείγματα. Η αιτιολόγηση του μοτίβου, που γινόταν άλλοτε από τους μαθητές κι άλλοτε με δική μου βοήθεια, ήταν πολύ σημαντική, καθώς σχεδόν όλες τις φορές *αποκάλυπτε τη δομή και την ουσία μιας κατάστασης*, όπως υποστηρίζει και ο MacKernan, 1996 (Zack, 1999).

Με όσα περιγράφησαν παραπάνω, αλλά κι αν μελετήσει κάποιος τις περιγραφές των παρεμβάσεων, αντιλαμβάνεται κανείς πως έγινε μία πετυχημένη δοκιμή εισαγωγής της ***πρώιμης άλγεβρας*** σε παιδιά δημοτικού σχολείου, όπου σκοπός αυτής, σύμφωνα με τους Blanton & Kaput (2005), είναι να εμβαθύνει στην κατανόηση της δομής και της γενικευσιμότητας των μαθηματικών. Αναρωτηθήκαμε στην αρχή, αν ήταν εφικτός ένας τέτοιος στόχος, αλλά φάνηκε πως είναι.

Σημαντικό ρόλο όμως έπαιξε η διερεύνηση, η οποία, σύμφωνα με τη Hanna (2000), οδηγεί στην ανακάλυψη, αλλά και οι συζητήσεις όλης της τάξης, κυρίως μεταγνωστικού επιπέδου, οι οποίες, σύμφωνα με τους Blanton et al. (2003 στο Harel & Sowder 2007), ωφελούν την ικανότητα κατασκευής μαθηματικών αποδείξεων. Αλλά το κυριότερο πιστεύω σε αυτή την έρευνα είναι πως οι μαθητές δεν έμαθαν μηχανιστικά πώς να κάνουν μια απόδειξη, αλλά πρωτίστως υπήρξε η ανάγκη γι' αυτή και συνδέθηκε με επιχειρηματολογία που χρησιμοποίησαν οι ίδιοι.

Συμφωνούμε με την άποψη του Duval (1992-3, στο Douek, 1998) ότι η τυπική απόδειξη παράγει την αξιοπιστία της πρότασης. Αλλά, τα ευρήματα της έρευνάς μας συμφωνούν απόλυτα και με τη Douek (1998) που υποστηρίζει ότι η επιχειρηματολογία παρουσιάζει μεγαλύτερη ποικιλία δυνατοτήτων απ' ότι η μαθηματική απόδειξη: όχι μόνο παραγωγικό συλλογισμό, αλλά και αναλογία, μεταφορά, κ.α.. Όπως φάνηκε και στην εργασία μας, η κατασκευή της απόδειξης χρειάζεται μια εντατική δραστηριότητα επιχειρηματολογίας, βασισμένη σε μετατροπές της κατάστασης που παρουσιάζεται από την πρόταση (Douek, 1998). Για να γίνουν τέτοιες μετατροπές, μεσολάβησαν παραδείγματα, η ανάγκη για απαγωγικό συλλογισμό κι έπειτα ο μετασχηματιστικός και μεταφορικός συλλογισμός, οι οποίοι έδιναν τη δυνατότητα της μεταφοράς της παρατήρησης της υπάρχουσας δομής κι αλλού σε ευρύτερα πλαίσια. Επίσης, το παράδειγμα των μεταφορών δείχνει τη σημασιολογική συνθετότητα της διαδικασίας της απόδειξης.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο ρόλος της απόδειξης έχει μελετηθεί από αρκετές έρευνες (Harel & Sowder, 2007). Μέσα από τη δική μας μελέτη όμως, αναδείχθηκε ο ρόλος των εικασιών, των εμπειρικών δοκιμών και της δομημένης επιχειρηματολογίας τους στην απόδειξη. Βρέθηκε πως για το σχηματισμό ή τον έλεγχο εικασιών, οι μαθητές βασίζονταν αρκετά στις εμπειρικές δοκιμές, αλλά όχι όμως πάντοτε με το σχήμα του αφελούς εμπειρισμού, όπως θα περίμενε κάποιος, ειδικά για μαθητές Δημοτικού. Κάποιες δοκιμές από αυτές ήταν αντιπαραδείγματα και στάθηκαν γι' αυτούς παραδείγματα στροφής για να αναδιαμορφώσουν μια εικασία τους ή κρίσιμα πειράματα για να απορρίψουν μια καθολική πρόταση. Ενώ κατάλαβαν πως για την απόρριψη μιας υπαρκτικής δεν αρκούσαν αρκετά αντιπαραδείγματα, αν και εκφράστηκε μια τέτοια άποψη αρχικά.

Κάποια άλλα παραδείγματα έκαναν τους μαθητές να σκεφτούν τις ιδιότητες και τη δομή που κρύβονται πίσω από τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Έτσι βρέθηκαν ακόμα και μοτίβα δομής & αποτελεσμάτων, ενώ επίσης δόθηκαν εξηγήσεις με γενικευμένα παραδείγματα, πειράματα σκέψης, αλλά και συμβολικό χειρισμό όταν η δομή των παραδειγμάτων μπόρεσε να εκφραστεί με μεταβλητές. Κι ενώ προηγουμένως οι μαθητές έδιναν απλά μια επιχειρηματολογία για την εικασία τους, πέτυχαν την κατανόηση ή (και) παραγωγή της μαθηματικής απόδειξης, σε αρκετά από τα ερωτήματα, με λίγη βοήθεια στο συμβολικό χειρισμό. Η όλη διαδικασία ήταν μια διαδικασία διερεύνησης, όπου και οι τρεις μαθητές δρούσαν σαν μικροί μαθηματικοί επιστήμονες που έψαχναν να ανακαλύψουν νέες 'μαθηματικές προτάσεις'.

Για επιστημονικούς και δεοντολογικούς λόγους, το συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να διερευνηθεί και σε μεγαλύτερο δείγμα κι ενδεχομένως και με άλλες μεθόδους. Αν λοιπόν επιβεβαιωθεί κι από άλλες έρευνες, συστήνω, για όλους τους παραπάνω λόγους, (αλλά και για όσα συζητήθηκαν στην εργασία), να ενταχθούν στο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών, ήδη από τις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού κάποιες δραστηριότητες πιο διερευνητικές, οι οποίες μας βοηθούν στην αποκάλυψη των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθητών, αλλά και αναπτύσσουν το συλλογισμό τους.

Βέβαια, πρέπει οι διαδικασίες αυτές να γίνονται με ιδιαίτερη προσοχή από τη μεριά των εκπαιδευτικών, οι οποίοι οφείλουν να λαμβάνουν υπόψη τις αρχές που προτείνει ο Στυλιανίδης (2007) για την αναγνώριση ενός επιχειρήματος ως απόδειξη. Με βάση τις αρχές αυτές (διανοητική ειλικρίνεια & συνέχεια), οφείλουμε πάντοτε να

λαμβάνουμε υπόψη το γνωστικό επίπεδο των μαθητών μας, αλλά και τη συνέχεια που πρέπει να υπάρχει με βάση τον τρόπο που διδάσκονται οι μαθηματικές έννοιες σε μεγαλύτερες βαθμίδες και την επιστήμη των μαθηματικών. Για να είναι εφικτή όμως μια τέτοια διαδικασία απαιτείται κι από τους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης να είναι ικανοί όχι μόνο να γνωρίζουν το επίπεδο του μαθητή, αλλά και το δικό τους για την εγκυρότητα των συλλογισμών αλλά και την παιδαγωγική προσέγγιση του θέματος. Το σίγουρο είναι, αν λάβουμε υπόψη μας έρευνα των Barkai et al. (2002) για τις επιδόσεις των δασκάλων στην απόδειξη ή απόρριψη αριθμητικών ισχυρισμών, ότι θα χρειαστούν μια μικρή επιμόρφωση ή έστω καθοδήγηση μέσα από γραπτές οδηγίες στο βιβλίο του δασκάλου.

Ενδεικτικές οδηγίες θα δανειστούμε από τη Wood (2002), το Στυλιανίδη (2007) και το Σακονίδη (2007) οι οποίοι προτείνουν:

- Η επικοινωνία να γίνεται με μορφές έκφρασης που είναι κατάλληλες και γνωστές στη μαθητική κοινότητα ή εντός της ζώνης επικείμενης ανάπτυξής της (Στυλιανίδης, 2007).

- Να περιγράφουν οι μαθητές τις εναλλακτικές στρατηγικές της επίλυσης προβλήματος, να ακούν και να δοκιμάζουν τις λύσεις άλλων. (Wood, 2002 στο Σακονίδης, 2007)

- Να διαμορφωθούν κοινωνικές νόρμες, σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές οφείλουν να διατυπώνουν τους λόγους για τους οποίους επέλεξαν μια στρατηγική ή διατύπωσαν μια εικασία και να αναζητούν αποσαφηνίσεις για τις λύσεις που προσφέρονται από τους συμμαθητές τους (Wood, 2002 στο Σακονίδης, 2007).

- Τα ερωτήματα να είναι αυθεντικά, να έχουν νόημα για τους μαθητές και να τους προσφέρουν κίνητρο, για να εμπλακούν στη δραστηριότητα που εγείρουν (Σακονίδης, 2007).

- Οι διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων να βρίσκονται, όσο γίνεται περισσότερο, υπό τον έλεγχο των μαθητών, παρά του εκπαιδευτικού (Σακονίδης, 2007) Ο μαθητής δηλαδή να έχει ενεργητικό ρόλο στην κατασκευή της γνώσης.

Ενώ επίσης, ορισμένες προτάσεις που προκύπτουν από τα ευρήματα της έρευνας, είναι οι εξής:

- Να αφήσουμε τους μαθητές ελεύθερους να διαμορφώνουν εικασίες, με τη συνειδητοποίηση όμως της πιθανότητας λάθους και να δοκιμάζουν όποια μέθοδο κι επιχείρημα επιθυμούν, αλλά στο τέλος να γίνεται ανατροφοδοτική αξιολόγηση αυτών.

- Η αξιολόγηση των επιχειρημάτων ας μην γίνεται απευθείας από τον εκπαιδευτικό, αλλά έμμεσα, μέσα από το διάλογο και πάντα έχοντας ως αναφορά την εγκυρότητα των συλλογισμών μας και σκοπό την εύρεση της αλήθειας, κυρίως ως ομάδα, κι όχι κατά άτομο, ώστε να μη νιώσει κάποιος μειονεκτικά.

Γενικότερα, ας μην εμποδίζουμε τη διαίσθηση και την εικασία του κάθε μαθητή μας να εκφραστεί, μιας και μέσω αυτών βλέπουμε τον εσωτερικό γνωστικό τους κόσμο και το σημαντικότερο, μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε μια ευχάριστη για εκείνους ανακάλυψη, η οποία θα τους πείσει γιατί αγωνίστηκαν μόνοι τους να βρουν την αλήθεια και την εξήγηση αυτής. Στο χέρι μας είναι να διευκρινίσουμε ποια μέσα ή τρόποι μας διαμορφώνουν απλά μια εικασία, ποια μας εξηγούν και ποια μας αποδεικνύουν. Το μόνο που χρειάζεται είναι να σχεδιάζουμε δραστηριότητες κατάλληλες (ανοικτά ερωτήματα κυρίως) που θα τους αφήνουν ελεύθερους να εκφράζουν εικασίες, να επιχειρηματολογούν γι' αυτές και να κάνουν μια προσπάθεια, ενδεχομένως και συλλογική, για την κατασκευή απόδειξης. Κι ας έχουμε λίγη εμπιστοσύνη στους μαθητές μας, έχουν πολλά να μας πουν!

Ξενόγλωσσες Αναφορές

1. Balacheff N. (1991). Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In: Von Glasersfeld E. (ed.) *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp.89-110) Dordrecht : Kluwer Academic Publisher. doi: 10.1007/0-306-47201-5_5

2. Balacheff, N. (1988) Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In Pimm D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. (pp.216-235) Kent: The Open University. Ανακτημένο από http://edumat.uab.cat/

3. Ball, D.L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal, 93 (4),* 373-397. Διαθέσιμο από το JSTOR.

4. Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. *In Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 26), (Vol.2, pp.2-57). Norwich, England. Ανακτημένο από: http://www-leibniz.imag.fr/

5. Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (2), 171-191. doi:10.1007/s10857-005-4797-6

6. Bex, F., Prakken, H., Reed, C., & Walton, D. (2003). Towards a formal account of reasoning about evidence: argumentation schemes and generalisations. *Artificial Intelligence and Law*, 11 (2), 125-165. doi:10.1023/B:ARTI.0000046007.11806.9a

7. Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. Invited article in J. Cai & E. Knuth (Ed), Special Edition on Algebraic Thinking, *Zentralblatt fór*

Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education), 37(1), 34-42. Ανακτημένο από http://subs.emis.de/journals/

8. Cobb, P., Confrey, J., Lehrer. R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32 (1), 9-13. doi:10.3102/0013189X032001009

9. Douek, N. (1998). Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications. *Proceedings of the CERME-I Conference*, Osnabrueck. Ανακτημένο από: http://ermeweb.free.fr/

10. Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1), 85-109. doi:10.1023/A:1003660018579

11. Hanna, G. & Barbeau, E.(2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40 (3), 345-353. doi:10.1007/s11858-008-0080-5

12. Hanna, G. (2000) Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 5-23. Ανακτημένο από: http://www.umaine.edu/

13. Harel, G. & Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinksy (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III* (Vol. 7: 234-283). Providence, RI: AMS.

14. Hsu H.-Y., Wu Yu J.-Y., & Chen Y.-C. (2009). Fostering 7th grade students' understanding of validity an instructional experiment. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan, 2, 214-219. Ανακτημένο από: http://140.122.140.1/~icmi19/

15. Inagaki, K., Morita, E., & Hatano, G. (1999). Teaching-learning of evaluative criteria for mathematical arguments through classroom discourse: A cross-

national study. *Mathematical Thinking and Learning*, 1 (2), 93-111. doi:10.1207/s15327833mtl0102

16. Knipping, C. (2001). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. In Törner G., Bruder R., Peter-Koop A., Neill N., & Weigand H.-G. (Ed.), *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, (pp. 73-84}, Ludwigsburg. Ανακτημένο από: http://webdoc.gwdg.de/ebook/

17. Knuth, E.J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95 (7), 486-491. Διαθέσιμο από https://resources.oncourse.iu.edu/

18. Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. The *Journal of Mathematical Behavior*, 29 (1), 1-10. doi:10.1016/j.jmathb.2010.01.003

19. Lay S. R. (2009). Good proofs depend on good definitions. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan, 2, 27-30. Ανακτημένο από: http://140.122.140.1/~icmi19/

20. Lo J., & McCrory R. (2009). Proof And Proving In A Mathematics Course For Prospective Elementary Teachers. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan, 2, 41-46. Ανακτημένο από: http://140.122.140.1/~icmi19/

21. Maher, C. & Weber, K. (2009). Precision in the Teaching, Learning, and Communication of Elementary School Mathematics: A Reply to Wilson's 'Elementary School Mathematics Priorities'. *AASA Journal of Scholarship & Practice, 6 (1), 50-54.* Διαθέσιμο από*:* http://www.aasa.org/

22. Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(1), 1-14. doi:10.1016/j.jmathb.2004.12.006

23. Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Gutiérrez A. & Boero P. (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.173-204). Rotterdam. The Netherlands. Ανακτημένο από http://www.math.unipa.it/

24. Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 1(2). Ανακτημένο από http://www.qualitative-research.net/index.php/

25. Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

26. Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), 40(3)*, 385-400. doi:10.1007/s11858-008-0085-0

27. Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2010). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of CERME 6*, pp.281-290, Lyon, France. Ανακτημένο από http://ife.ens-lyon.fr/publications/

28. Prasad D. B. (2008). Content Analysis. A method in Social Science Research. In Lal Das, D.K & Bhaskaran, V (eds.), *Research methods for Social Work*, New Delhi: Rawat, (*pp.*173-193). Ανακτημένο από http://www.css.ac.in/

29. Smaling, A. (2003). Inductive, analogical, and communicative generalization. *International Journal of Qualitative Methods*, 2 (1), 52-67. Ανακτημένο από https://ejournals.library.ualberta.ca/

30. Stanton R. O. (2006) Proofs that students can do. *Mathematics Teacher*, 99 (7), 478-482. Διαθέσιμο από http://www.nctm.org/

31. Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20. doi:10.1007/s10649-006-9038-0

32. Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2009). Ability to Construct Proofs and Evaluate One's Own Constructions. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan, 2, 166-171. Ανακτημένο από: http://140.122.140.1/~icmi19/

33. Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2009). Teachers' knowledge Of Students' correct and Incorrect Proof Constructions. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Taiwan, 2, 214-219. Ανακτημένο από: http://140.122.140.1/~icmi19/

34. Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. In L., Verschaffel and S. Vosniadou (Guest Editors), Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of *Learning and Instruction*, 14 (5), 445-451. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

35. Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 25), (Vol.1, pp.9-23). Utrecht, Holland. Ανακτημένο από http://didmat.dima.unige.it/miur/miur_dima/

36. Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21 (4), 423-440. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00143-8.

37. Zack, V. (1997) You have to prove us wrong: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 21), (Vol. 4, pp. 291-298) Lahti, Finland. Ανακτημένο από: http://meru-urem.ca/

38. Zack, V. (1999) Everyday and Mathematical Language in Children's Argumentation about proof. *Educational Review*, 51 (2) 129-146 doi:10.1080/00131919997579

39. Zazkis R., & Chernoff E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3), 195-208. doi:10.1007/s10649-007-9110-4

40. Zazkis, R., Liljedahl, P. & Chernoff, E.J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, 40 (1), 131-141. doi 10.1007/s11858-007-0065-9

Ελληνόγλωσσες Αναφορές

1. Ανδρεάτου, Α. (2007). *Συστήματα Διαχείρισης Βιώσιμης Ανάπτυξης* (Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (ΕΜΠ). Ανακτημένο από http://irakleitos.ntua.gr/

2. Καρασαββίδης Η., Μαλανδράκης Γ., Τσιατσιάνας Χ., & Χρυσοστόμου Χ., (2002). Πτυχές της Ανάπτυξης μιας Δραστηριότητας για τη Συνεργατική Μάθηση με Υποστήριξη Υπολογιστή για Μαθητές Ε' και Στ'. *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου ΤΠΕ στην εκπαίδευση*, Σύρος. Ανακτημένο από www.epyna.gr

3. Κασσώτη Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου Θ. (2010). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού: Τετράδιο Εργασιών α' τεύχος*. Αθήνα, ΟΕΔΒ

4. Κασσώτη Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου Θ. (2010). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*. Αθήνα, ΟΕΔΒ

5. Κλαουδάτος, Ν., "*Σημειώσεις του Μαθήματος: των Μαθηματικών*", Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Χειμερινό Εξάμηνο 2009.

6. Κουλέτση Ε. (2010). *Οι Εννοιολογικές Μεταφορές και η Χρήση τους από τους καθηγητές στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. (Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.). Ανακτημένο από www.math.uoa.gr/me/dipl/

7. Μοδέστου, Μ., (2007). Μαθηματική αναλογική σκέψη: Ένα πολυδιάστατο γνωστικό και μεταγνωστικό μοντέλο. Στο Α. Γαγάτσης, (Εκδ.) *Προβλήματα μάθησης των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο*. (σελ. 81-102) Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου. Ανακτημένο από: http://www.rhodes.aegean.gr/ptde/mathlab/9.article3.pdf

8. Πάλλα, Μ. (2006). *Η μαθηματική επαγωγή και η κατανόησή της στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. (Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α). Ανακτημένο από: www.math.uoa.gr/me/dipl/

9. Πούλος, Α. (2009). *Εικασίες και Αντιπαραδείγματα: Για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στη σχολική τάξη*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Μαυρίδη.

10. Σακονίδης, Χ. (2007) *Διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Προτάσεις για την αξιοποίηση του διδακτικού υλικού*. [Adobe reader version]. Ανακτημένο από: http://repository.edulll.gr/739

11. Τύπας Γ., & Ντάφου Ε. (2006) Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις και Αξιολόγηση στα Μαθηματικά. Στο Γ. Τύπας (Εκδ.) *Τα Μαθηματικά του Δημοτικού Μέσα από τα Νέα Διδακτικά Εγχειρίδια*. Επιμορφωτικό υλικό Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Ανακτημένο από: http://www.pi-schools.gr/programs/epimorfosi/

12. Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ. Ψηφιακό Σχολείο. (2011). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό) Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. (ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450). Ανακτημένο από http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/

13. Χερουβείμ Ε. (2010). *Διερεύνηση λογικομαθηματικών δεξιοτήτων (Επαγωγικός συλλογισμός, Αναλογική Σκέψη) μαθητών της Γ' Γυμνασίου μέσα από βιωματικές*

δραστηριότητες.(Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.). Ανακτημένο από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/