Διπλωματική Εργασία

Ειδικά Θέματα Διδακτικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας
Τα επίπεδα van Hiele στην ελληνική σχολική πραγματικότητα

Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού.

Τζίφας Νικόλαος
ΑΜ. Δ.200313

Οκτώβρης 2005

Αθήνα

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) ΣΠΥΡΟΥ Π (επιβλέπων Καθηγητής)	……..	…….
2) ΛΑΠΠΑΣ Δ	……..	……..…
3) ΧΙΟΝΙΔΟΥ Μ	……..	……...…

Ευχαριστώ:

- Τον επίκουρο καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη για την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε με το δικό του τρόπο κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας
- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ Διονύσιο Λάππα για την βοήθεια που μου προσέφερε στην αρχή της εργασίας αυτής και ήταν το σημείο αναφοράς των προσπαθειών μου.
- Την επίκουρο καθηγήτρια κ Χιονίδου-Μοσκοφόγλου Μαρία για τις πολύτιμες συμβουλές της.
- Τους συναδέλφους μου στο μεταπτυχιακό για την πολύτιμη βοήθεια τους στην διενέργεια της ερευνάς μου.
- Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον συνάδελφο κ Γιαννόπουλο Δημήτρη για τις παρατηρήσεις του για την διαμόρφωση της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6
ΜΕΡΟΣ Α - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 10
1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} 11
Η Διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 11
1.1 Ιστορική αναδρομή 11
1.2 Αντιλήψεις, τάσεις και αντιπαραθέσεις στη σύγχρονη διεθνή πραγματικότητα 13
1.3 Θεωρίες για τη διδασκαλία της γεωμετρίας-έρευνες 15
1.4 Το πρόβλημα στην Ελλάδα, έρευνα, ερωτήματα 17
2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} 21
Παράμετροι της θεωρίας των επιπέδων Van Hiele 21
2.1 Η θεωρία των επιπέδων αναλυτικά 21
2.1.1 Συγκριτικά στοιχεία 29
2.2 Συμπεριφορές σε κάθε επίπεδο κατά Usiskin 32
2.3 Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης κατά Fays et al 37
3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} 42
Εμπειρικές έρευνες για τη θεωρία Van Hieles 42
3.1 Έρευνες στο εξωτερικό 42
3.2 Έρευνες στον Ελληνικό χώρο 54
3.3 Η τεχνολογία αρωγός στη γεωμετρική σκέψη 57
ΜΕΡΟΣ Β – Η ΕΡΕΥΝΑ 61
4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} 62
Σχεδιασμός της έρευνας – μεθοδολογία 62
4.1 Χαρακτηριστικά του δείγματος 62
4.2 Οριοθέτηση κριτηρίων 62
4.2.1 Συλλογή δεδομένων 62
4.2.2 Βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας 65
4.3 Στατιστικές τεχνικές 65
5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} 66
Αποτελέσματα για τα επίπεδα 66
5.1 Γενικά 66
5.2 Αποτελέσματα, κριτική αποτελεσμάτων 66
5.3 Αποτελέσματα για τις ερωτήσεις των επιπέδων 75
ΜΕΡΟΣ Γ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 82
6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο} 83
Προτάσεις Δραστηριότητες βασισμένες στο πρότυπο των επιπέδων van Hiele χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τον υπολογιστή 83
6.1 Εισαγωγή 83
6.2 Πρότυπο van Hiele 86
6.3 Επίτευξη 86
6.4 Ο ρόλος του επαγωγικού συλλογισμού 95
6.5 Επιπτώσεις στη διδασκαλία 96
7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο} 98
Συμπεράσματα, συζήτηση, μελλοντικές κατευθύνσεις 98
7.1 Περίληψη 98
7.2 Συμπεράσματα 100
7.3 Συζήτηση 104
7.4 Προτάσεις 105
8 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{Ο} 107

Βιβλιογραφία 107
ΜΕΡΟΣ Δ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ 112
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΠΕΔΟ VAN HIELE ΚΑΤΑ FAYS-GEDDES-TISCHLER . ΤΥΠΙΚΑ ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ VAN HIELE 112
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β -Van Hiele Test 127
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ -ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΤΟΥ ΣΙΚΑΓΟ SALMAN USISKIN 134
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ- ΔΟΚΙΜΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ 137
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε –ΑΔΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ 147
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ -ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 149
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ-ΚΛΙΜΑΚΑ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE 150

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που έχει εγείρει προβληματισμούς σχετικά με την αποτελεσματική διδασκαλία του περισσότερο από κάθε άλλο κλάδο, αναδεικνύοντας προβλήματα στην κατανόηση και χρήση αναλυτικών-συνθετικών και αποδεικτικών μοντέλων από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, γεγονός το οποίο έχουν διαπιστώσει πολλοί καθηγητές μαθηματικών καθώς και αρκετοί ερευνητές.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα .Ποιοι είναι οι λόγοι;

Η Γεωμετρία (όταν λέμε από εδώ και πέρα Γεωμετρία θα εννοούμε την θεωρητική-αποδεικτική Γεωμετρία) παρουσιάζει στη διδασκαλία της προβλήματα για τους παρακάτω κυρίως λόγους:

1. Η συνθετική δομή ανάπτυξης του περιεχομένου απαιτεί μια αυστηρή λογική ιεραρχία και μια διανοητική πειθαρχία, που η σκοπιμότητά τους δύσκολα γίνεται κατανοητή από τους μαθητές.
2. Η έννοια της απόδειξης, που κυριαρχεί στην ανάπτυξη του περιεχομένου, είναι η πηγή των περισσότερων δυσκολιών για την κατανόηση του περιεχομένου.
3. Η συσσωρευτική δομή του περιεχομένου, ιεραρχικά δοσμένου απαιτεί από το μαθητή να εφαρμόζει ανά πάσα στιγμή τις προηγούμενες γνώσεις του (αξιώματα, θεωρήματα, πορίσματα, βασικές προτάσεις). Αυτή η ιδιαιτερότητα δεν συναντάται στα άλλα μαθήματα.
4. Η έλλειψη κινήτρων μάθησης, λόγω της απομόνωσης του μαθήματος από τα άλλα μαθηματικά, αλλά και λόγω του γεγονότος ότι το περιεχόμενο του μαθήματος δεν συνάδει με τις δραστηριότητες του μαθητή.
5. Πολλοί μαθητές δεν είναι έτοιμοι για παραγωγική σκέψη στην ηλικία των 14 ετών, στην οποία διδάσκεται η θεωρητική Γεωμετρία. Συγκεκριμένα , στην ηλικία αυτή οι μαθητές περνούν από τη φάση των συγκεκριμένων ενεργημάτων , όπου η σκέψη τους είναι προσδεμένη με τις αντιλήψεις τους για τα συγκεκριμένα αντικείμενα ,στη φάση των τυπικών-αφηρημένων ενεργημάτων, όπου αρχίζουν πλέον να σκέφτονται υποθετικά και παραγωγικά. Πολλοί από αυτούς δεν έχουν αποκτήσει τις απαραίτητες δεξιότητες και την εννοιολογική κατανόηση, η οποία απαιτείται για να εφαρμόσουν τυπικές-παραγωγικές αποδείξεις. Ποιο είναι το αποτέλεσμα; Οι μαθητές να προσπαθούν να μιμηθούν

τις αποδείξεις των καθηγητών τους, με αποτέλεσμα στο τέλος της χρονιάς να μην έχουν σαφή αντίληψη της διαφοράς αξιωμάτων, θεωρημάτων και ορισμών.

6. Η απουσία οδηγιών προς τους μαθητές. Μερικές φορές τίθεται το ερώτημα από τους μαθητές «Πώς θα αρχίσω να σκέφτομαι για να λύσω αυτό το γεωμετρικό πρόβλημα». Αυτή, νομίζουμε, η ερώτηση συμπυκνώνει όλες τις δυσκολίες που παρουσιάζει η διδασκαλία ενός μαθήματος αυστηρά δομημένου και λογικά ιεραρχημένου όπως είναι η Γεωμετρία.

Οι παραπάνω λόγοι οι οποίοι υπήρχαν και στα προηγούμενα χρόνια καθώς και πολλοί άλλοι που θα αναφερθούν παρακάτω, έθεσαν σε πολλές χώρες στη δεκαετία του 1960 στα πλαίσια της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών» το μάθημα της Γεωμετρίας στο περιθώριο.

Συγκεκριμένα, το Νοέμβριο του 1959, στο σεμινάριο του Royaumont για τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης που είχε διοργανωθεί από τον Ο.Ο.Σ.Α, ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne(1906-1992), ηγετικό στέλεχος των Bourbaki και αναμφισβήτητη «αυθεντία» της σύγχρονης μαθηματικής κοινότητας, είχε εκφράσει με τον πιο ακραίο τρόπο το πνεύμα εκείνης της μεταρρύθμισης, εκφωνώντας το περιβόητο σύνθημα «Να φύγει ο Ευκλείδης!».

Με το σύνθημα αυτό ο Dieudonne επιχειρούσε ουσιαστικά να καταργήσει τη μεγάλη παράδοση που είχε εγκαινιάσει το 1792 ο συμπατριώτης του, A.M. Legendre, με το βιβλίο «Στοιχεία Γεωμετρίας» , το οποίο εκσυγχρόνισε το κλασικό έργο του Ευκλείδη και συνέβαλε αποφασιστικά στη διάδοση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε όλο τον κόσμο.

Η λεγόμενη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» κατάφερε τελικά να εκτοπίσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ως αυτόνομο μάθημα από τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των Μαθηματικών στις περισσότερες χώρες του κόσμου, χωρίς, όμως, να προσφέρει κάποια ισότιμη εναλλακτική λύση. Σήμερα, 45 χρόνια μετά, ενώ βασικές επιλογές εκείνης της μεταρρύθμισης έχουν αποτύχει όπως για παράδειγμα η έμφαση στη διδασκαλία των συνόλων και των αλγεβρικών δομών, κάποιες άλλες, δικαίως, επιβιώνουν όπως η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, του Διανυσματικού Λογισμού, της Γραμμικής Άλγεβρας. Η κατάσταση στο χώρο της Γεωμετρίας παραμένει διεθνώς «θολή». Για αυτή την κατάσταση ο Άγγλος μαθηματικός και παιδαγωγός Douglas Quadling είπε: «Ο Ευκλείδης έχει φύγει, αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος» (Θωμαΐδης , Πούλος ,2000).

Οι Γ. Θωμαΐδης και Α. Πούλος στο βιβλίο τους «Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας» απαντώντας στο ερώτημα, «Γιατί διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία;», παραθέτουν απόσπασμα από τις αυτοβιογραφικές σημειώσεις του Albert Einstein, το οποίο δείχνει μια άλλη, τελείως διαφορετική αντίληψη σχετικά με τη χρησιμότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Γράφοντας για τα γεγονότα της παιδικής και εφηβικής του ζωής, που είχαν μεγάλη επίδραση στη μετέπειτα επιστημονική του εξέλιξη, ο Einstein σημειώνει:

«Σε ηλικία 12 ετών δοκίμασα μια δεύτερη, τελείως διαφορετική έκπληξη: σε ένα μικρό βιβλίο Ευκλείδειας επίπεδης Γεωμετρίας …. Εδώ υπήρχαν ισχυρισμοί, όπως για παράδειγμα ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο , οι οποίοιαν και καθόλου προφανείς- μπορούν ωστόσο να αποδειχτούν με τέτοια βεβαιότητα, ώστε να μη χωρεί η παραμικρή αμφιβολία. Αυτή η σαφήνεια και βεβαιότητα μου προξένησαν μιαν εντύπωση που δεν μπορεί να περιγραφεί. Το γεγονός ότι, τα αξιώματα έπρεπε να γίνουν δεκτά χωρίς απόδειξη δεν με ενόχλησε. Σε κάθε περίπτωση, μου αρκούσε πλήρως το γεγονός ότι μπορούσα να στηρίζω τις αποδείξεις σε προτάσεις, η εγκυρότητα των οποίων ήταν για μένα αναμφισβήτητη.» (Θωμαΐδης, Γ., Πούλος, Α. 2000, σελ. 12)

Συνεχίζοντας οι δύο συγγραφείς διατυπώνουν την άποψη ότι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπως η σαφήνεια στην έκθεση, η ολοκληρωτική απόδειξη, η απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών καθώς και η τάξη και η ομορφιά στο σύνολο της δομής του συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, θα πρέπει να αποτελούν τα ουσιώδη συστατικά της μαθηματικής παιδείας και ως εκ τούτου απαντούν έμμεσα στο ερώτημα σχετικά με την αναγκαιότητα διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μάθημα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αναφέρουν επίσης και τη σύνδεση των παιδαγωγικών σκοπών «καλλιέργεια και ανάπτυξη της συγκροτημένης σκέψης, μύηση στην επιστημονική μέθοδο μελέτης του κόσμου» με τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά, ισχυροποιώντας ακόμη περισσότερο την άποψη ότι η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι αναγκαία ακόμη και στην σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα όπου ο ηλεκτρονικός υπολογιστής παίζει όλο και περισσότερο κυρίαρχο ρόλο.

Έχει παρατηρηθεί πρόσφατα ένα αυξημένο ενδιαφέρον για την ενσωμάτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε αναλυτικά προγράμματα παράλληλα με την διδασκαλία της μέσω εφαρμογών σε υπολογιστικό περιβάλλον και τη σύνδεση της με προβλήματα της πραγματικότητας (Goldenberg, 1999). Τα σύγχρονα εκπαιδευτικά λογι-

σμικά αποτελούν το μέσο με το οποίο οι μαθητές μπορούν να μυηθούν σε ένα σύνολο από προτάσεις, αποδείξεις, κατασκευές, έννοιες κ.λπ. μέσα από μία δυναμική και όχι στατική εικόνα όπου αυτοί οι ίδιοι διαχειρίζονται την εφαρμογή των κανόνων και επαληθεύουν τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από τη χρήση τους. Έχουν, έτσι, τη δυνατότητα μέσω της αλληλεπίδρασης με τα αντικείμενα της οθόνης του υπολογιστή να εμπλουτίζουν τη μάθηση, να επεκτείνουν και να εδραιώνουν τις δεξιότητες τους

Η γεωμετρική σκέψη των μαθητών αναπτύσσεται μέσα και έξω από το σχολείο με τη συμβολή των στοιχείων της εκπαίδευσης και με την ατομική τους εμπλοκή με τα στοιχεία της καθημερινότητας. Οι διδακτικές ενέργειες στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και τα σχολικά εγχειρίδια προσανατολίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και αφηρημένες έννοιες. Η αποτελεσματικότητα αυτών των ενεργειών φαίνεται από το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης το οποίο έχει κατακτήσει ο μαθητής σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων των Van Hiele. Κάποιες φορές επιτυγχάνεται μετάβαση του μαθητή σε ανώτερο επίπεδο και κάποιες όχι.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει τα αποτελέσματα από μία προσωπική έρευνα σχετικά με την κατάκτηση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης όπως αυτά προσδιορίζονται από τη θεωρία van Hiele, από μαθητές ελληνικών σχολείων οι οποίοι διδάσκονται Ευκλείδεια Γεωμετρία. Παράλληλα γίνεται αναφορά σε συμπεράσματα και κατευθύνσεις για την διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο σε μία σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα, σε εμπλουτισμένα περιβάλλοντα καθώς και στην βοήθεια που παρέχουν τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας σε μία σύγχρονη διδασκαλία. Συγκεκριμένα υπάρχουν στην εργασία αυτή, προτάσεις δραστηριοτήτων με την βοήθεια λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας, την ωφελιμότητα των οποίων θα διαπιστώσει μελλοντική έρευνα πάνω στο θέμα αυτό. Στόχος των προτάσεών μας είναι να χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία ως επαγωγικό εργαλείο για να βοηθήσει τους μαθητές στην εκμάθηση του παραγωγικού συστήματος της γεωμετρίας. Για την έρευνα αυτή έγινε χρήση, κατόπιν αδείας του δημιουργού, ενός έγκυρου ερωτηματολογίου το οποίο έχει διαμορφωθεί το 1982 από τον καθηγητή Usiskin.

ΜΕΡΟΣ Α - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Η Διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1.1 Ιστορική αναδρομή

Δεδομένου ότι το έτος 1830 είχαμε την ίδρυση του ελληνικού κράτους και το έτος 1836 είχαμε την οργάνωση του εκπαιδευτικού συστήματος, θα αρχίσουμε την ιστορική αναδρομή της διδασκαλίας της γεωμετρίας από το 1836.

Ο Γαγάτσης (1993) αναφέρει ότι ο Τουμάσης (1989) προτείνει τέσσερις περιόδους για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, με βάση την διδακτική μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε:

- Α΄: 1836-1900, ανυπαρξία μεθοδολογίας
- Β΄: 1900-1930, Ερβατιανή περίοδος
- Γ΄: 1930-1950, σχολείο εργασίας
- Δ΄: 1950- 1982, μεθοδολογία Γεωργούλη

Κάποια διδακτική μέθοδος που εμφανιζόταν τον 19^{ον} αιώνα στην Ελλάδα ήταν η **αλληλοδιδακτική.** Με τη μέθοδο αυτή ο δάσκαλος δίδασκε μόνο λίγα, μεγαλύτερα και πιο προχωρημένα παιδιά, αυτά με τη σειρά τους μετέφεραν τις γνώσεις τους στους μικρότερους συμμαθητές τους, σύμφωνα με μια αυστηρά προκαθορισμένη διαδικασία. Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται μάλλον από την απομνημόνευση των μαθημάτων και την έλλειψη δράσης του μαθητή. Τα Ερβατιανά στάδια: προπαρασκευή, προσφορά, σύγκριση, σύλληψη και εφαρμογή κάνουν την εμφάνιση τους αρχές του 20^{ου} αιώνα.. Στην ίδια περίοδο εισάγεται η συνδιδακτική μέθοδος Herbart χρησιμοποιείται δηλαδή η διαλογική μορφή διδασκαλίας, η οποία αποκαλούνταν και ευρετική ή γεννητική (Γαγάτσης , 1993).

Ένας άλλος τρόπος για να δει κανείς την πορεία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας με κριτήριο τα εκπαιδευτικά προγράμματα προτείνεται από το Γαγάτση (1993). Οι τρεις σχετικές περίοδοι είναι:

- Α΄ περίοδος: 1830-1884 όπου κυριαρχούν απλά στοιχεία μαθηματικής παιδείας.
- Β΄ περίοδος: 1885-1968 μία περίοδο στην οποία είναι έντονη η ύπαρξη αποδείξεων και σχημάτων.
- Γ΄ περίοδος: 1968-μέχρι σήμερα με τις γνωστές παραμέτρους που εισήγαγαν τα νεώτερα μαθηματικά.

Στην πρώτη διδακτέα ύλη του 1836 για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η διδασκαλία μαθηματικών χωρίς να υπάρχει διάκριση σε κλάδους, υστερεί χρονικά σε σχέση με τη διδασκαλία της αρχαίας ελληνικής γλώσσας. Η ρύθμιση του υλικού στη διδακτέα ύλη του 1857, καθώς επίσης και το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο που χρησιμοποιήθηκε σε εκείνη την εποχή, δείχνουν ότι το περιεχόμενο της γεωμετρίας δεν αντιγράφηκε αυστηρά σύμφωνα με τα στοιχεία του Ευκλείδη όπως είχε γίνει παραδείγματος χάριν στην Αγγλία. (Τουμάσης, 1990). Στην Ελλάδα μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, το σχολικό εγχειρίδιο γεωμετρίας που επικράτησε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ήταν γεωμετρία του Legendre σε διάφορες εκδόσεις .

- Ιωάννης Καρανδηνός, το 1829 στην Κέρκυρα
- Γεώργιος Ζώχιος, το 1857 στην Αθήνα
- Χρίστος Βάφας, το 1860 στην Αθήνα
- Αντώνιος Δαμασκηνός, το 1862 στην Αθήνα
- Αντώνης Φατσέας, το 1870

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ
ΜΕΤΑ
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΩΝ
ΥΠΟ
ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1878

Αργότερα καταλαμβάνοντας περισσότερο χρόνο, το μάθημα των μαθηματικών διαιρείται σε κλάδους (αριθμητική, άλγεβρα, γεωμετρία, τριγωνομετρία), ένας χωρισμός που διάρκεσε μέχρι τη μεταρρύθμιση των "σύγχρονων" μαθηματικών κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '60.

Στο υπόλοιπο διάστημα και μέχρι το 1968 υπήρχαν διάφορες γεωμετρίες τύπου Legendre π.χ αυτές του Χατζιδάκη, του Μπαρμπαστάθη και του Νικολάου. Στη συνέχεια εμφανίζονται παροδικά κάποιες γεωμετρίες, οι οποίες χρησιμοποιούν στοιχεία της αξιωματικής του Hilbert, π.χ. του Ιωαννίδη και των Παπαμιχαήλ/Σκιαδά συμβιώνουν και εναλλάσσονται με αυτές της προηγούμενης κατηγορίας, π.χ. του Παπανικολάου. Αυτές οι νέες προσπάθειες τείνουν να εξαλείψουν τις επιστημολογικές αποκλίσεις των γεωμετριών του Legendre από τα «στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι διαφορές των δύο τάσεων προσδιορίζονται από τον Καστάνη (1986) ως εξής:

- Γίνεται μια αναδόμηση του περιεχομένου.
- Η πρόσληψη των γεωμετρικών εννοιών γίνεται, αποκλειστικά, με ενορατικό τρόπο.
- Η αποδεικτική διαδικασία στηρίζεται στη λογική συμπερασματολογία,

- Το περιεχόμενο της υφίσταται μια «απονεύρωση», από τις γεωμετρικές κατασκευές, που τώρα περιορίζονται σε ένα μόνο κεφάλαιο με τη μορφή εφαρμογών και
- επιχειρείται μια λογική αυστηρότητα με την αξιοποίηση της αριθμητικής και της άλγεβρας.

Ακολουθεί η τελευταία μεταρρύθμιση του 1999 και εκδίδεται το πρώτο βιβλίο των Θωμαίδη-Ξένου-Παντελίδη- Πούλου- Στάμου το οποίο μετά από 2 χρόνια αντικαθίσταται από το σημερινό βιβλίο της «Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ και Β΄ Λυκείου» των Αργυρόπουλου, Βλάμου, Κατσούλη, Μαρκάτη, Σίδερη που έγινε με την συμβολή της ΕΜΕ και όπως αναφέρει στο πρόλογό του : « *Η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει ένα διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές*».

1.2 Αντιλήψεις, τάσεις και αντιπαραθέσεις στη σύγχρονη διεθνή πραγματικότητα

Οι υποστηρικτές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προβάλλουν σαν επιχείρημα την παιδαγωγική αξία της λογικής και διάφανης επιχειρηματολογίας των γεωμετρικών αποδείξεων, ενώ οι πολέμιοί της, επικαλούνται τη δυσκολία των περισσοτέρων μαθητών να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες καθώς και τις πολύ χαμηλές επιδόσεις τους στην αντιμετώπιση σχετικών προβλημάτων. Εκείνοι που βρίσκονται κάπου στη μέση, επισημαίνουν το περιορισμένο επιστημολογικά ρόλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την ανάγκη να ανανεωθεί η διδασκαλία των μαθηματικών, δίνοντας έμφαση σε ποιο σύγχρονους και «χρήσιμους» κλάδους π.χ Πιθανότητες και Στατιστική. Από τότε που ο Jean Dieudonne κήρυξε τον πόλεμο κατά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι αντιλήψεις αυτές έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας και αντιπαραθέσεων μεταξύ σημαντικών μαθηματικών και παιδαγωγών, ενώ οι σχετικές συζητήσεις συνεχίζονται μέχρι και σήμερα.

Σε μια ειδική μελέτη της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση , I.C.M.I (1986) έγινε προσπάθεια σύνθεσης των διαφόρων τάσεων και διατυπώθηκαν τρεις εναλλακτικές λύσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος:

1. Απόρριψη της ιδέας ότι η Γεωμετρία πρέπει ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχολείο ως ένα σύστημα γνώσεων παραγωγικά οργανωμένο ή όχι, όπου οι έν-

νοιες και τα γεγονότα πρέπει να γίνουν γνωστά, απλά και μόνο, επειδή ανήκουν στο σύστημα. Αντίθετα, η Γεωμετρία και ο χώρος θεωρούνται πηγές άντλησης εξαιρετικών θεμάτων για την οργάνωση πολλαπλών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα. Οι «χρησιμοθηρικές» όψεις της Γεωμετρίας θα εξυπηρετηθούν με την παροχή αλγεβρικών μεθόδων.

2. Συνέχιση της προσπάθειας της διδασκαλίας ενός αξιωματικού ή ψευδοαξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας, το οποίο στηρίζεται είτε σε «τροποποίηση» των «στοιχείων» του Ευκλείδη, είτε σε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.
3. Παρουσίαση «νησίδων» Γεωμετρίας, δηλαδή «τοπικών» παραγωγικών συστημάτων μέσα στο πλαίσιο του γενικού αναλυτικού προγράμματος για ορισμένες ομάδες μαθητών. Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε ενότητες για τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων σε κύκλο γωνιών ή τη στοιχειώδη Προβολική Γεωμετρία.

Στην Ελλάδα, για προφανείς ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους, συνεχίστηκε μέχρι το 1999 μια παράδοση που προσέγγιζε τη δεύτερη λύση. Ακόμη και στη δύσκολη περίοδο της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών», η διεθνής πίεση για εκσυγχρονισμό των σχολικών μαθηματικών και εγκατάλειψη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αφομοιώθηκε. στη χώρα μας μέσα από έναν ιδιότυπο συμβιβασμό: Από τη μια μεριά διατηρήθηκε όλη η παραδοσιακή σχολική ύλη, την οποία σε μεγάλο βαθμό συντηρούσαν οι εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι και Τ.Ε.Ι . Ενώ από την άλλη, δόθηκε υπερβολική έμφαση στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας με την εισαγωγή νέας ύλης πάνω στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, το λεγόμενο «Συμπλήρωμα» της Γεωμετρίας. Ιστορική είναι η απάντηση του κ. Βαρουχάκη, συμβούλου του Π.Ι., στο ερώτημα γιατί επιμένουμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, απάντησε: «δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες» (Καστάνης 1986, σελ.5) Στις αντιφατικές επιλογές εκείνης της περιόδου βρίσκονται οι ρίζες της μετέπειτα υποβάθμισης και παρακμής του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Θωμαίδης, Πούλος, 2000) .

Με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα εισήχθησαν πολλές καινοτομίες αναγκαίες για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μία σύγχρονη διδακτική και μαθησιακή πραγματικότητα, οι οποίες εντοπίζονται κυρίως στα εξής σημεία:

- Υποβαθμίζεται ο ρόλος της αξιωματικής θεμελίωσης και προβάλλεται ιδιαίτερα η έννοια της απόδειξης, με ιδιαίτερη έμφαση στην αναλυτική-συνθετική μέθοδο, η οποία αναδεικνύει την ευρετική πορεία μιας απόδειξης.

- Επαναφέρεται η διδασκαλία ενός πεδίου εφαρμογής των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως είναι τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.
- Εμπλουτίζεται η διδασκαλία με δραστηριότητες, δηλαδή η επίλυση προβλημάτων που υπερβαίνουν το επίπεδο των παραδοσιακών ασκήσεων και ενθαρρύνουν την ομαδική εργασία και την έρευνα των μαθητών μέσα στην τάξη.
- Συνίσταται η υποστήριξη της διδασκαλίας από εφαρμογές σε ηλεκτρονικό υπολογιστή μέσω δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας.

(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1997, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2004).

1.3 Θεωρίες για τη διδασκαλία της γεωμετρίας-έρευνες

Τα τελευταία χρόνια «*ένα πλήθος γνωστικών θεωριών έχουν αναπτυχθεί. Άλλες εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στις συνθήκες διδασκαλίας και άλλες στον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής κατανοεί. Ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης εμφανίζεται τα τελευταία χρόνια στο κέντρο του ενδιαφέροντος και αυτό αποτελεί μια προσπάθεια να φωτίσουμε το "μαύρο κουτί" του Skinner, που είναι ο νους του μαθητή. Αφετηρία αποτελεί ο Piaget αν και δεν είναι η μόνη αφού το θέμα απασχόλησε πολλούς κλασσικούς και νεώτερους φιλοσόφους και ερευνητές. Επίσης οι νεώτερες εξελίξεις της ψυχολογίας και των νευροεπιστημόνων της γλωσσολογίας, καθώς και μελέτες για την τεχνική νοημοσύνη πρόσφεραν πολλές νέες ιδέες για το πώς η κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί και να αξιολογηθεί*» (Σπύρου, 2005).

Η Κολέζα (2000) αναφέρεται σχετικά με την έρευνα γύρω από τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας, σε μία βασική διάκριση δύο προσεγγίσεων. Σ*ύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, η* έρευνα προσανατολίζεται κατ' αρχήν στη διατύπωση μιας θεωρίας, η οποία στη συνέχεια θα επιβεβαιωθεί ή θα απορριφθεί με βάση τα ερευνητικά δεδομένα. Σ' αυτή την προσέγγιση οι γεωμετρικές δραστηριότητες επιλέγονται έτσι ώστε να ταιριάζουν στο θεωρητικό μοντέλο και δεν αντανακλούν απαραίτητα την πραγματικότητα των παιδιών. Κύριος στόχος της δεύτερης προσέγγισης είναι η κατανόηση και ερμηνεία των δυνατοτήτων των μαθητών και των διαδικασιών που ακολουθούν. Η θεωρία σε αυτή την περίπτωση δεν αποτελεί τη βάση για τον σχεδιασμό της έρευνας, αλλά χρησιμοποιείται ως εργαλείο για να εξηγήσει καταστάσεις και αποτελέσματα που προκύπτουν από την έρευνα Η έρευνα οδηγεί στη βελτίωση των ήδη υπαρχουσών θεωριών ή στη διατύπωση νέων θεωριών.

Οι σύγχρονες έρευνες στο χώρο της διδακτικής ακολουθούν κυρίως τη δεύτερη προσέγγιση και χρησιμοποιούν ως εργαλείο ανάλυσης των παρατηρήσεων τη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του van Hiele.

Υπάρχουν βέβαια και εκείνοι που είναι επιφυλακτικοί για τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών, σχετικά τόσο με το αν θα γίνουν με το σωστό τρόπο, όσο και για την ορθή αξιοποίηση των αποτελεσμάτων.

Τον Απρίλη του 1999 ο Alan Schoenfeld καθηγητής στο παιδαγωγικό τμήμα του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνια παρουσιάζοντας το άρθρο του «Οι προκλήσεις της Εκπαιδευτικής θεωρίας και πράξης στο κατώφλι του 21^{ου} αιώνα» στην ετήσια συνάντηση του AERA (Αμερικάνικη Ένωση Εκπαιδευτικής Έρευνας) , της οποίας ήταν πρόεδρος, κάνοντας κριτική στην αξιολόγηση μέσω των τυποποιημένων τεστ είπε:

«*ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει μια ικανοποιητική θεωρία επάρκειας σύμφωνα με αυτό που πρόκειται να αξιολογηθεί. Ακόμη και με δεδομένο αυτό, υπάρχει ένα πλήθος σοβαρών ερωτήσεων σχετικά με το πόσο καλά η απόδοση ενός μαθητή σε ένα οποιοδήποτε ζήτημα ή συλλογή θεμάτων αντανακλά την κατανόηση αυτού του πεδίου. Τα είδη θεωριών επάρκειας που εισήχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν πολύ διαφορετική επιστημολογική βάση από το είδος της χαρακτηριστικής ψυχολογίας που δημιούργησε τις τρέχουσες ψυχομετρικές έννοιες της «αξιοπιστίας» και του «κύρους». Αυτές οι έννοιες όπως ορίστηκαν, έχουν λίγη ή καθόλου χρήση και πρέπει να επαναπροσδιοριστούν.*

Αυτή είναι μια σημαντική θεωρητική και ταυτόχρονα πραγματιστική πρόκληση. Είναι επίσης μια επείγουσα πρόκληση. Στις ΗΠΑ η ευρεία χρήση εξωγενών τυποποιημένων αξιολογήσεων σχεδόν σε κάθε επίπεδο για ένα ευρύ φάσμα σκοπών, έχει σοβαρά και επιζήμια αποτελέσματα. Απ' την στιγμή που «διδασκαλία για το τεστ» αυτή την εποχή τυπικά σημαίνει διδασκαλία προς ένα σύνολο ικανοτήτων που λίγο έχουν να κάνουν με την ουσιαστική επάρκεια, οι τρέχουσες εφαρμογές των περισσότερων αξιολογήσεων εξυπηρετούν αποπροσανατολιστικές μάλλον παρά παραγωγικές λειτουργίες. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι συχνά τα διαδεδομένα τεστ δεν επιτελούν τους στόχους ταξινόμησης και διαλογής για τους οποίους έχουν τυπικά επιλεγεί, αφού οι διακρατικές συγκρίσεις φανερώνουν ότι άλλα έθνη πετυχαίνουν τους ίδιους στόχους με άλλους τρόπους, έτσι θα έπρεπε να αναρωτηθούμε για τον βαθμό στον οποίο πρέπει να βασιζόμαστε συχνά σε τυποποιημένα τεστ. Απ' τη στιγμή που χρησιμοποιούμε την αξιολόγηση θα έπρεπε αυτή να είναι ουσιαστική και πληροφοριακή».

Εμείς λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω θέσεις και επιφυλάξεις στην έρευνά μας και θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των van Hiele.

Η θεωρία των επιπέδων van Hiele, που αναπτύχθηκε από δύο Ολλανδούς καθηγητές των μαθηματικών στα τέλη της δεκαετίας του 1950, αναδεικνύει και εν μέρει αιτιολογεί το γιατί πολλοί μαθητές έχουν δυσκολία με τις γνωστικές διαδικασίες ανώτερης τάξης, ειδικά με τις διαδικασίες της απόδειξης, οι οποίες απαιτούνται για την επιτυχή διδασκαλία της γεωμετρίας στο Λύκειο. Η θεωρία αυτή ισχυρίζεται ότι οι μαθητές που έχουν δυσκολία διδάσκονται σε ένα επίπεδο van Hiele ανώτερο από εκείνο στο οποίο βρίσκονται ή για το οποίο ο ίδιοι είναι έτοιμοι. Τέλος, η θεωρία παρέχει και μια «θεραπεία» για τη λύση του προβλήματος: Αυτή η θεραπεία είναι ο τρόπος που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να διέλθει από την ακολουθία των επιπέδων.

1.4 Το πρόβλημα στην Ελλάδα, έρευνα, ερωτήματα

Στην Ελλάδα, η Ευκλείδεια γεωμετρία διδάσκεται οργανωμένα σε δύο τάξεις, την Α΄ και τη Β΄ Λυκείου. Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια γεωμετρία είναι διαφορετική από την προσέγγιση που υιοθετείται σε άλλα μαθήματα των σχολικών μαθηματικών. Δηλαδή, ο μαθητής εισάγεται στις διεργασίες ενός μαθηματικού συστήματος διαμέσου εμπειριών με αξιώματα, θεωρήματα, ορισμούς, και εξάσκηση με την απόδειξη, την ίδια στιγμή που μαθαίνει το περιεχόμενο του μαθήματος. Συνεπώς, παρόλο που το μάθημα αυτό προϋποθέτει ελάχιστη προηγούμενη γνώση, διδάσκεται αρκετά αφηρημένα.

Στην Ελλάδα έχουν γίνει λίγες έρευνες και σε μικρά δείγματα οι οποίες αναφέρονται αναλυτικά στο 3^{ο} κεφάλαιο. Αυτές αφορούν στα επίπεδα van Hiele και δε γνωρίζουμε επαρκώς αν η διδασκαλία της Ευκλείδειας γεωμετρίας όπως γίνεται στις δύο τάξεις του Λυκείου βελτιώνει τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

Η Ελλάδα είναι λοιπόν από τις λίγες χώρες παγκοσμίως που διδάσκεται η Ευκλείδεια γεωμετρία οργανωμένα από χρόνια, επομένως θα περίμενε κανείς ότι σε ενδεχόμενη έρευνα τα αποτελέσματα της αξιολόγησης της γεωμετρικής σκέψης των Ελλήνων μαθητών θα ήταν καλύτερα από αυτά των μαθητών των άλλων χωρών όπου η διδασκαλία της γεωμετρίας είναι προαιρετική.

Οι λόγοι που προαναφέραμε μας οδήγησαν στην απόφαση να διεξάγουμε μια έρευνα για να διερευνήσουμε τα επίπεδα της γεωμετρική σκέψης των Ελλήνων μαθητών σύμφωνα με την θεωρία των van Hiele και να κάνουμε τις συγκρίσεις με αντίστοιχες έρευνες που έγιναν στο εξωτερικό.

Διαλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε την έρευνα του Usiskin (1982) γιατί θεωρούμε ότι ταιριάζει περισσότερο από κάθε άλλη έρευνα στην ελληνική πραγματικότητα και επιπλέον για να έχουμε ένα κοινό μέτρο σύγκρισης. Βασικά θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της επαναληψημότητας του Alan Schoenfeld (2000) για να αξιολογήσουμε τη θεωρία των van Hiele,δηλαδή αν θα προκύψουν τα ίδια συμπεράσματα με τα συμπεράσματα της έρευνας του Usiskin(1982), δεδομένου ότι η έρευνα διεξάγεται με το ίδιο ερωτηματολόγιο στην Ελλάδα.

Η έρευνά μας σχεδιάστηκε για να θέσει τα παρακάτω ερωτήματα που αφορούν στην εν λόγω θεωρία.

- Πώς κατανέμονται οι μαθητές σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hiele ;.
- Οι περισσότεροι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα κατανέμονται στα επίπεδα 1 (απεικόνιση) και 2 (ανάλυση) της θεωρίας Van Hiele όπως διαπιστώθηκε και από αντίστοιχες έρευνες στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (Usiskin, 1982; Hoffer, 1986);
- Υπάρχουν διαφορές λόγω φύλου στα επίπεδα van Hiele των μαθητών;
- Υπάρχει βελτίωση των επιπέδων van Hiele των μαθητών στις μεταβάσεις από τη μία τάξη στην άλλη, για τις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, λόγω της υπάρχουσας διδασκαλίας της γεωμετρίας η οποία δεν είναι σύμφωνη με τη θεωρία van Hiele, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα;
- Υπάρχει διαφορά μεταξύ δημοσίων και ιδιωτικών σχολείων στην κατάταξη σε επίπεδα van Hiele των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα;

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1838 μαθητές που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων από διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο χρονικό διάστημα από 27-01-2005 μέχρι 21-04-2005. Για τη διενέργεια της έρευνας στα παραπάνω σχολεία πήραμε την άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου , η οποία παρατίθεται στο παράρτημα της εργασίας.

Για τον εντοπισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών (Test Van Hiele). Το ερωτηματολόγιο αυτό ήταν του καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο των ΗΠΑ Usiskin (1982) και μεταφράστηκε στα ελληνικά από τον ερευνητή. Για τη χρήση του ερωτηματολογίου πήραμε την άδεια του Zalman Usiskin μετά από ηλεκτρονική αλληλογραφία που είχαμε μαζί του και η οποία παρατίθεται στο παράρτημα της εργασίας.

Είναι γεγονός ότι η αξιολόγηση της επίδοσης ενός μαθητή με την απονομή ενός βαθμού, όπως γίνεται σήμερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δε μας δίνει ιδιαίτερες πληροφορίες σε σχέση με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της επίδοσης του. Αν εξετάσουμε ιδιαίτερα το μάθημα των μαθηματικών, είναι συχνό το φαινόμενο πολλές σύνθετες νοητικές λειτουργίες είτε να περνούν απαρατήρητες είτε να είναι δύσκολο να αξιολογηθούν με την χρησιμοποίηση αριθμητικής κλίμακας. Επακόλουθο αυτής της αδυναμίας είναι το γεγονός, ότι η αξιολόγηση που γίνεται τις περισσότερες φορές δίνει πληροφορίες μόνο για την κατάταξη των μαθητών σε σχέση με τους άλλους συμμαθητές τους, όπως για παράδειγμα οι εξετάσεις για την εισαγωγή στα ΑΕΙ, ΤΕΙ. Αυτές οι εξετάσεις έχουν το χαρακτήρα επιφανειακής εξέτασης που σκοπό έχει την εξακρίβωση απόκτησης στείρων γνώσεων και όχι ικανοτήτων και δεξιοτήτων. Η διαδικασία αξιολόγησης θεωρείται έγκυρη, όταν μεταξύ των άλλων, η βαθμολογία των μαθητών σχετίζεται σε υψηλό βαθμό με τη διερεύνηση της μελλοντικής απόδοσης τους στο περιβάλλον στο οποίο θα βρεθούν. Σε ένα έγκυρο τεστ αξιολόγησης η υψηλή βαθμολογία θα πρέπει να αποδίδεται σε αυτούς που μελλοντικά θα εκπληρώνουν στο μέγιστο την δεξιότητα που το τεστ ήθελε να μετρήσει . Επίσης ένα τέτοιο τεστ πρέπει να είναι αξιόπιστο δηλαδή, αν ο μαθητής, αφού το επαναλάβει πολλές φορές επιτυγχάνει παρόμοιο αποτέλεσμα. Η αξιοπιστία έχει μεγάλη σημασία σε εξετάσεις εθνικού επιπέδου (Galbraith,1996, σελ. 277). Είναι γεγονός ότι οι προσδοκίες που δημιουργούνται από τους μαθητές, οι οποίοι σε ένα αξιόπιστο τεστ πήραν υψηλό βαθμό συχνά διαψεύδονται. Η αιτία αυτής της αναντιστοιχίας, μεταξύ προσδοκίας και αποτελέσματος, βρίσκεται στο γεγονός ότι είναι αντικειμενικά δύσκολο να αξιολογηθούν σε βάθος οι ικανότητες ενός μαθητή με την βοήθεια μιας μόνο δοκιμασίας.

Οι αδυναμίες που εμφανίζονται με τις προηγούμενες μορφές αξιολόγησης (Χιονίδου, 2000) μειώνονται σε μεγάλο βαθμό με την χρήση των σύγχρονων μεθόδων αξιολόγησης όπως είναι η εξελικτική αξιολόγηση και η κλινική συνέντευξη. «*Η εξελικτική αξιολόγηση είναι η διαδικασία της συστηματικής παρακολούθησης της προόδου*

εκάστου μαθητή, με στόχο τη λήψη μέτρων για την προαγωγή, τη διευκόλυνση και τη βελτιστοποίηση της μαθησιακής διαδικασίας» (Μπαρκάτσας 2003, σελ.134).

Αν υιοθετήσουμε την προαναφερθείσα αξιολόγηση, τότε η έμφαση επικεντρώνεται σε ποιοτικά στοιχεία της επίδοσης ενός μαθητή. Η προκείμενη μελέτη προτείνει την αξιολόγηση ποιοτικών χαρακτηριστικών της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών με βάση τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης van Hiele. Χρησιμοποιήσαμε για την εργασία αυτή το τροποποιημένο τεστ (μόνο για τα επίπεδα 1-4) για τρεις λόγους :

1. Δεν υπάρχουν σαφή ερευνητικά δεδομένα που να στηρίζουν την ύπαρξη του $5^{ου}$ επιπέδου ως ξεχωριστού επιπέδου (Usiskin 1982, σελ.14).
2. Στη μορφή που δόθηκε από τους van Hiele το επίπεδο 5 δεν υπάρχει ή δεν είναι ελέγξιμο. Όλα τα άλλα επίπεδα είναι ελέγξιμα (Usiskin 1982, σελ.66).
3. Είναι πολύ δύσκολο έως απίθανο να κατακτηθεί το $5^{ο}$ επίπεδο από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, επειδή το επίπεδο αυτό απαιτεί αφαιρετική ικανότητα και μάλιστα ανεπτυγμένη σε μεγάλο βαθμό.

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Παράμετροι της θεωρίας των επιπέδων Van Hiele

2.1 Η θεωρία των επιπέδων αναλυτικά

Αυτό που έχει γίνει γνωστό ως θεωρία των επιπέδων Van Hiele αναπτύχθηκε από την Dina Van Hiele – Geldof και το σύζυγό της Pierre Marie Van Hiele σε αυτόνομες διδακτορικές διατριβές στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το 1957. Η Dina πέθανε λίγο μετά την ολοκλήρωση της διατριβής της. Οπότε ο Pierre υπήρξε εκείνος που επεξήγησε τη θεωρία. Σύμφωνα με τον Usiskin (1982, σελ.2) « *κατά τα έτη 1958 – 1959, έγραψε τρεις εργασίες (δύο στα Αγγλικά και μία στα Ολλανδικά, η τελευταία μεταφράστηκε στα Γαλλικά) οι οποίες έτυχαν μικρής προσοχής στη Δύση, αλλά εφαρμόστηκαν σε μια προσπάθεια εξέλιξης του αναλυτικού προγράμματος από τον σοβιετικό ακαδημαϊκό Pyshkalo (1968). Ο Freudenthal, ο μέντορας του Van Hiele, δημοσιοποίησε τη θεωρία στο γνωστό του βιβλίο Mathematics as an Educational Task (1973). Μέσω του Freudenthal και των σοβιετικών, το έργο των Van Hiele έτυχε της προσοχής του Wirszup, ο οποίος ήταν ο πρώτος που μίλησε για τη θεωρία van Hiele στην Αμερική (1974) και αργότερα δημοσίευσε την ομιλία του (1976). Η δημοσίευση του Wirszup(1976) έδωσε το έναυσμα για μια ποικιλία μετέπειτα προσπαθειών. Ο Hoffer (1979) που είχε ασχοληθεί με την απόδειξη(είχε συγγράψει ένα σχολικό εγχειρίδιο γεωμετρίας στο οποίο αφιερώνεται πολύς χρόνος στην προετοιμασία για την απόδειξη) επισκέφθηκε τον Van Hiele στην Ολλανδία και επιστρέφοντας έγραψε σχετικά με τα επίπεδα (1981)*».

Η θεωρία, σύμφωνα με τον Usiskin (1982) έχει τρεις πτυχές: την ύπαρξη των επιπέδων, τις ιδιότητες των επιπέδων, και την κίνηση από το ένα επίπεδο στο επόμενο.

Ύπαρξη επιπέδων

Σύμφωνα με τη θεωρία, υπάρχουν πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Αυτά τα επίπεδα περιγράφονται από τους Van Hiele σε πολλά σημεία των βιβλίων τους. Περιληπτικές γενικές περιγραφές και παραδείγματα από τον Hoffer (1981) παρατίθενται παρακάτω. Τα ονόματα εντός παρενθέσεων είναι δικά του.

Επίπεδο 1: (***αναγνώριση/recognition***) Ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα ως μια ολότητα(Gestalt αναγνώριση) και όχι σε σχέση με τις ιδιότητές τους.[1] Για την περιγραφή των σχημάτων χρησιμοποιεί οπτικά πρότυπα (π.χ. αναγνωρίζει ένα ορθογώνιο γιατί μοιάζει με πόρτα).

Επίπεδο 2: (***ανάλυση/analysis***) Ο μαθητής αναγνωρίζει τα σχήματα με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους, μπορεί να ανακαλύπτει και να περιγράφει τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά δεν μπορεί να τις ορίσει τυπικά. Αν τον ρωτήσουμε γιατί αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε αυτός θα μας παραθέσει μια σειρά από ιδιότητες του ορθογωνίου (οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες κ.τ.λ).

Επίπεδο 3: (***διάταξη/order***) Ο μαθητής μπορεί να διατάξει λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και αρχίζει να αντιλαμβάνεται το ρόλο του ορισμού, αλλά δε λειτουργεί μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα (μπορεί να ακολουθηθεί απλός παραγωγικός συλλογισμός, αλλά η απόδειξη δε γίνεται κατανοητή). Μπορεί για παράδειγμα να επιλέξει από μια λίστα ιδιοτήτων του ορθογωνίου τις ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του και επίσης είναι ικανός να αναγνωρίσει τάξεις εγκλεισμού (π.χ. τα τετράγωνα είναι ορθογώνια).

Επίπεδο 4: (***παραγωγικός συλλογισμός/deduction***) Ο μαθητής κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης (οι αποδείξεις μπορούν να γραφούν με κατανόηση). Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών η ουσιαστική μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας αρχίζει από αυτό το επίπεδο.

Επίπεδο 5: (***αυστηρότητα/rigor***) Ο μαθητής κατανοεί την αναγκαιότητα για αυστηρότητα και είναι σε θέση να πραγματοποιήσει αφηρημένους παραγωγικούς συλλογισμούς. (οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες μπορεί να κατανοηθούν).

Επίπεδο 0: (*προ-αναγνώρισης*) Οι Clements & Battista (1992) επίσης προτείνουν την ύπαρξη του επιπέδου 0, που αυτοί καλούν προ-αναγνώρισης. Οι μαθητές παρατηρούν σε αυτό το επίπεδο μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών μιας μορφής, με συνέπεια μια ανικανότητα να διακρίνουν μεταξύ των σχημάτων. Παραδείγματος χάριν, μπορούν να διακρίνουν μεταξύ των τριγώνων και των τετραπλεύρων, αλλά δεν μπορούν να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ ενός ρόμβου και ενός παραλληλογράμμου.

---

[1] Οι Clements και Batista (1992) διατύπωσαν την υπόθεση ότι πριν το επίπεδο της αναγνώρισης υπάρχει ένα «προ-αναγνωριστικό» επίπεδο (prerecognitive level)

Ιδιότητες των επιπέδων

Στη θεωρία των Van Hiele αναφέρονται οι παρακάτω ιδιότητες (Usiskin ,1982).

Ιδιότητα 1: (***σταθερή αλληλουχία/fixed sequence***) Ένας μαθητής δεν μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο Van Hiele επίπεδο n δίχως να έχει διέλθει από το επίπεδο n-1.

Ιδιότητα 2: (***διαδοχικότητα/adjacency***) σε κάθε επίπεδο συλλογισμού εκείνο που ήταν σε λανθάνουσα κατάσταση στο προηγούμενο επίπεδο δηλώνεται στο επόμενο επίπεδο.

Ιδιότητα 3: (***διάκριση/distinction***) Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά.

Ιδιότητα 4: (***διαχωρισμός/separation***) Δύο άτομα που εκτελούν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να αλληλοκατανοηθούν.

Για να επεξηγήσουμε αυτές τις ιδιότητες, ας θεωρήσουμε το εξής παράδειγμα: ένας μαθητής μάς αναφέρει ότι «*μπορώ να παρακολουθήσω μια απόδειξη όταν την κάνετε εσείς στην τάξη, αλλά δεν μπορώ να την κάνω μόνος μου στο σπίτι*». Εδώ ο εν λόγω μαθητής μπορεί να βρίσκεται στο επίπεδο 3 ενώ εμείς να λειτουργούμε στο επίπεδο 4. Η ιδιότητα 4 υποδεικνύει ότι ο μαθητής δεν μπορεί να μας κατανοήσει (διαφορετικά επίπεδα), και η ιδιότητα 3 εξηγεί το γιατί δεν μπορεί να μας κατανοήσει, διότι εμείς χρησιμοποιούμε αντικείμενα (προτάσεις, στην περίπτωση της απόδειξης) και ένα δίκτυο σχέσεων (η απόδειξη καθαυτή) που ο μαθητής δεν τα κατανοεί ακόμη όταν χρησιμοποιούνται κατ' αυτό τον τρόπο. Αν ο μαθητής βρίσκεται στο επίπεδο 3, τότε το δίκτυο του μαθητή αποτελείται από μια απλή διάταξη των προτάσεων. Η ιδιότητα 2 υποδεικνύει ότι αυτές οι διατάξεις, που είναι εσωτερικές στο επίπεδο 3, καθίστανται εξωτερικές στο επίπεδο 4. Επομένως ο μαθητής στην τάξη απλώς μπορεί να μιμηθεί τον καθηγητή στον τρόπο της απόδειξης, όμως δεν έχει γίνει η κατανόησή της .

Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο.

Ο Van Hiele (1959) πιστεύει ότι η γνωστική ανάπτυξη στη γεωμετρία μπορεί να επιταχυνθεί μέσω της κατάλληλης διδασκαλίας σε αντίθεση με τον Piaget[2]. Οι Van Hieles (P. M. & Dina, 1958; P. M., 1959) έχουν δώσει λεπτομερειακές επεξηγήσεις για το πώς ο καθηγητής πρέπει να λειτουργήσει ώστε να οδηγήσει τους μαθητές από το ένα επίπεδο στο επόμενο. Ο Usiskin (1982) θεωρεί αυτό το χαρακτηριστικό ως μια πέμπτη ιδιότητα των επιπέδων.

---

[2] Θα αναφερθούμε αναλυτικά παρακάτω στις διαφορές τους

Ιδιότητα 5: (***επίτευξη/attainment***) Η μαθησιακή διαδικασία που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση στο επόμενο ανώτερο επίπεδο έχει πέντε φάσεις, κατά προσέγγιση αλλά όχι αυστηρά σε ακολουθία, με τους τίτλους:

Διερεύνηση (inquiry)

Καθοδηγούμενο προσανατολισμό (directed orientation)

Επεξήγηση (explanation)

Ελεύθερο προσανατολισμό (free orientation)

Ολοκλήρωση (integration)

Από τη μέθοδο και την οργάνωση της διδασκαλίας, καθώς επίσης και το περιεχόμενο και τα υλικά που χρησιμοποιούνται και είναι σημαντικοί τομείς παιδαγωγικής ανησυχίας, η διδασκαλία που αναπτύσσεται σύμφωνα με αυτήν την ακολουθία προωθεί την απόκτηση ενός επιπέδου (Van Hiele-Geldof, 1984).

Στη πρώτη φάση (Usiskin, 1982) , ***Διερεύνηση (έρευνα/εισαγωγή στην έννοια μέσω υλικών)***, οι μαθητές και ο καθηγητής συμμετέχουν σε μια συνομιλία για τη δραστηριότητα και τα αντικείμενα της μελέτης. Γίνονται παρατηρήσεις , τίθενται ερωτήσεις και εισάγεται το λεξιλόγιο.

Στη δεύτερη φάση, ***κατευθυνόμενος προσανατολισμός(καθοδηγούμενη ανακάλυψη)***, το θέμα της μελέτης εξερευνείται μέσω των προσεκτικά τοποθετημένων διαδοχικά υλικών και των δραστηριοτήτων. Δομές αποκαλύπτονται βαθμιαία. Οι στόχοι είναι σύντομοι και οι απαντήσεις είναι συγκεκριμένες.

Στην τρίτη φάση, ***ερμηνεία(έκφραση-επεξήγηση)***, οι μαθητές είναι σαφείς στις λέξεις για τα αποτελέσματα της εργασίας τους. Ο ρόλος του καθηγητή βρίσκεται "στην εισαγωγή των απαραίτητων τεχνικών όρων" (Van Hiele-Geldof, 1984, σελ.219). Σε αυτήν την φάση, η ακριβής και κατάλληλη γλώσσα ενθαρρύνεται.

Στην τέταρτη φάση, ***ο ελεύθερος προσανατολισμός (ελεύθερη διερεύνηση-επέκταση)***, συμπεριλαμβάνονται οι πιο σύνθετοι, ανοικτοί στόχοι με πολλά βήματα και οι εναλλακτικές λύσεις. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις δημιουργικές δυνατότητές τους. Επεκτείνονται σε αυτό που έχουν δοκιμάσει. Αποφασίζουν τα πράγματα που πρέπει να κάνουν για "να επιτύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα."

Στη πέμπτη φάση, ***την ολοκλήρωση***, γίνεται μια αναθεώρηση και μια περιληπτική παρουσίαση της πληροφορίας που έγινε γνωστή στο νέο δίκτυο των αντικειμένων και των σχέσεων.

Τα γραπτά των Van Hieles υποδεικνύουν ότι η διαδικασία μετάβασης από το ένα επίπεδο στο επόμενο χρειάζεται περισσότερο χρόνο από αυτόν που μπορεί να δοθεί σε

μία διδακτική ώρα ή σε μια σύντομη διδακτική ενότητα. Λόγου χάρη, η Dina (1957) αναφέρει ότι χρειάστηκε 20 μαθήματα για τη μετάβαση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2 (με την αρίθμηση 1-5) και 50 μαθήματα για τη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3, κατά την εργασία της με παιδιά 12 ετών. Αυτό αντιστοιχεί σε περίπου μισό έτος μαθημάτων (στην περίπτωσή της) αν η μελέτη γίνεται συνεχόμενα.

Ο ***A .Hoffer (1986)*** διατύπωσε την άποψη ότι «*η Γεωμετρία είναι κάτι παραπάνω από αποδείξεις θεωρημάτων, υπάρχουν και άλλες ικανότητες γεωμετρικής φύσης εξ΄ ίσου σημαντικές για τους μαθητές*» και πρότεινε πέντε κατηγορίες τέτοιων ικανοτήτων που θα πρέπει στα πλαίσια της διδασκαλίας της Γεωμετρίας να αναπτύξουν οι μαθητές και είναι : οπτικές , λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής.

(α) Οπτικές ικανότητες

Η Γεωμετρία εξετάζει σε πρώτο στάδιο τα αντικείμενα, με τα οποία ασχολείται, από την οπτική πλευρά. Όμως, πολύ συχνά απαιτείται η απόδειξη θεωρημάτων, που κατορθώνεται συνδυάζοντας με τη λογική απλά "οπτικά στοιχεία".

(β) Λεκτικές ικανότητες

Η Γεωμετρία έχει πάρα πολλούς ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα τα οποία καλούνται οι μαθητές να μάθουν και να χρησιμοποιούν. Επίσης, τα παιδιά τροφοδοτούνται με ασκήσεις, όπου χρειάζεται να επινοήσουν και να διατυπώσουν τη δική τους απόδειξη.

(γ) Ικανότητες Σχεδίασης

Η Γεωμετρία βοηθάει τους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους με σχήματα. Οι δεξιότητες σχεδίασης βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις Γεωμετρικές σχέσεις.

(δ) Λογικές Ικανότητες

Κατά την επίλυση ασκήσεων Γεωμετρίας, οι μαθητές προσπαθούν να αναλύσουν το πρόβλημα και να αναγνωρίσουν αν κάποια υπόθεση είναι "αληθής" ή "ψευδής". Επίσης, ανάλογα με το επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές οφείλουν, να συνειδητοποιούν, ότι υπάρχουν διαφορές και ομοιότητες ανάμεσα στα σχήματα, να κατανοούν ότι αυτά μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διάφορες κατηγορίες, να αντιλαμβάνονται τα πλεονεκτήματα ενός καλού ορισμού, να χρησιμοποιούν κανόνες της λογικής για να κατασκευάζουν αποδείξεις και τέλος να αντιλαμβάνονται τα όρια και τις δυνατότητες αξιωμάτων και θεωρημάτων.

(ε) Ικανότητες Εφαρμογής

Οι μαθητές ανάλογα με το επίπεδο που βρίσκονται, πρέπει να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής, να αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων, να μπορούν να συμπεραίνουν ιδιότητες αντικειμένων από μια πληροφορία και τέλος να έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσουν αφηρημένα σχήματα.

Συγκεκριμένα οι βασικές ικανότητες ανά επίπεδο (Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος 1999) είναι:

ΕΠΙΠΕΔΟ 1 (ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ)

- ***Οπτικές:*** Αναγνωρίζει διάφορα σχήματα από μια εικόνα. Αναγνωρίζει μια πληροφορία που δίνεται με ένα σχήμα.
- ***Λεκτικές:*** Συσχετίζει το σχήμα με τη σωστή ονομασία. Ερμηνεύει προτάσεις που περιγράφουν σχήματα. Καταλαβαίνει από την περιγραφή για πιο σχήμα πρόκειται.
- ***Σχεδίασης:*** Κατασκευάζει με άνεση σχήματα και μπορεί να ονομάζει τα διάφορα μέρη τους.
- ***Λογικές:*** Συνειδητοποιεί ότι υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα σχήματα. Κατανοεί τη διατήρηση του σχήματος σε διάφορες θέσεις.
- ***Εφαρμογής:*** Αναγνωρίζει γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2 (ΑΝΑΛΥΣΗ)

- ***Οπτικές:*** Μπορεί να διακρίνει τις ιδιότητες ενός σχήματος. Εντοπίζει ένα σχήμα σαν μέρος ενός πιο σύνθετου σχήματος.
- ***Λεκτικές:*** Περιγράφει με άνεση διάφορες ιδιότητες ενός σχήματος.
- ***Σχεδίασης:*** Μεταφράζει προφορική πληροφορία σε εικόνα. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες ενός σχήματος για να κατασκευάσει το σχήμα.
- ***Λογικές:*** Κατανοεί ότι τα σχήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διάφορες κατηγορίες. Συνειδητοποιεί ότι οι ιδιότητες χρησιμεύουν για να ξεχωρίζουν τα σχήματα.
- ***Εφαρμογής:*** Αναγνωρίζει τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων. Αναπαριστά φυσικά φαινόμενα με σχέδιο ή με τη βοήθεια μοντέλου.

ΕΠΙΠΕΔΟ 3 (ΔΙΑΤΑΞΗ-ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ)

- ***Οπτικές:*** Αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών σχημάτων. Αναγνωρίζει κοινές ιδιότητες διαφόρων ειδών σχημάτων.

- ***Λεκτικές:*** Μπορεί να δίνει τον ορισμό εννοιών άνετα και συνειδητά. Διατυπώνει προτάσεις που δείχνουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων.
- ***Σχεδίασης:*** Δεδομένων κάποιων σχημάτων, μπορεί να κατασκευάζει άλλα σχήματα που σχετίζονται με τα αρχικά.
- ***Λογικές:*** Κατανοεί τα πλεονεκτήματα ενός καλού ορισμού. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των σχημάτων, για να συμπεράνει αν μια ομάδα σχημάτων εμπεριέχεται σε μια άλλη ομάδα.
- ***Εφαρμογής:*** Κατανοεί την έννοια του μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων του πραγματικού χώρου.

ΕΠΙΠΕΔΟ 4 (ΕΠΑΓΩΓΗ)

- ***Οπτικές:*** Χρησιμοποιεί πληροφορία σχετική με ένα σχήμα για να συμπεράνει νέα στοιχεία.
- ***Λεκτικές:*** Κατανοεί τις διαφορές μεταξύ ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων. Διακρίνει τις υποθέσεις από τα συμπεράσματα στην εκφώνηση ενός προβλήματος.
- ***Σχεδίασης:*** Αναγνωρίζει πότε και πώς να χρησιμοποιήσει βοηθητικά στοιχεία σε ένα σχήμα. Από δοσμένη πληροφορία συμπεραίνει πώς να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- ***Λογικές:*** Χρησιμοποιεί κανόνες της λογικής για να κατασκευάσει αποδείξεις. Μπορεί να διατυπώνει συμπεράσματα από δοσμένη πληροφορία.
- ***Εφαρμογής:*** Είναι σε θέση να συμπεράνει ιδιότητες αντικειμένων από μια πληροφορία και να λύνει προβλήματα που παρουσιάζουν σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.

ΕΠΙΠΕΔΟ 5 (ΑΥΣΤΗΡΟΤΗΤΑ)

- ***Οπτικές:*** Αναγνωρίζει εσφαλμένες παραδοχές σε ένα πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκαν σχήματα. Συλλαμβάνει σχέσεις σχημάτων σε διάφορα επαγωγικά συστήματα.
- ***Λεκτικές: :*** Διατυπώνει προεκτάσεις γνωστών αποτελεσμάτων. Περιγράφει διάφορα επαγωγικά συστήματα.
- ***Σχεδίασης:*** Αντιλαμβάνεται τα όρια και τις δυνατότητες διαφόρων οργάνων μέτρησης. Αναπαριστά σχηματικά έννοιες διαφόρων επαγωγικών συστημάτων.

- ***Λογικές:*** Αντιλαμβάνεται τα όρια και τις δυνατότητες αξιωμάτων και προτάσεων. Γνωρίζει πότε ένα σύστημα αξιωμάτων είναι ανεξάρτητο.
- ***Εφαρμογής:*** Χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα, για να αναπαραστήσει αφηρημένα συστήματα. Αναπτύσσει μαθηματικά μοντέλα για φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα.

Χαρακτηριστικά της θεωρίας

Κατά τον Usiskin (1982) η θεωρία διαθέτει τρία ελκυστικά χαρακτηριστικά: ***κομψότητα, περιεκτικότητα και ευρεία εφαρμοσιμότητα***. Λέγοντας ***κομψότητα*** εννοεί ότι η θεωρία περιλαμβάνει μια μάλλον απλή δομή που περιγράφεται από αρκετά σύντομες προτάσεις, καθεμιά από τις οποίες έχει ευρεία επίδραση. Για παράδειγμα, για την κίνηση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2 εφαρμόζονται οι ίδιες αρχές που εφαρμόζονται για την κίνηση από το 2 στο 3 και ούτω καθεξής, παρουσιάζοντας έτσι μια κομψότητα στη μορφή. Και η απλότητα της δομής είναι καταφανής όταν κανείς παρατηρεί ότι τα σχήματα του επιπέδου 1 αποτελούν τους δομικούς λίθους για τις ιδιότητες στο επίπεδο 2, οι οποίες με τη σειρά τους διατάσσονται στο επίπεδο 3, με τη διάταξη να αποτελεί ουσιαστικό προαπαιτούμενο για την κατανόηση ενός μαθηματικού συστήματος στο επίπεδο 4, ένα από εκείνα τα αντικείμενα που συγκρίνονται στο επίπεδο 5.

Ο ίδιος (Usiskin ,1982) ισχυρίζεται « *ότι κάθε θεωρία που καλύπτει ολόκληρη τη μάθηση της γεωμετρίας, και η οποία προσβλέπει στο να επεξηγήσει όχι μόνο το γιατί οι μαθητές έχουν πρόβλημα στη μάθηση αλλά και το τι θα μπορούσε να γίνει για να απομακρυνθούν αυτά τα εμπόδια, πρέπει να ονομάζεται* ***περιεκτική****. Παρά ταύτα η θεωρία δεν έχει ακόμη εκτεθεί αρκετά λεπτομερώς σε άλλες περιοχές ώστε να καταστεί και τόσο περιεκτική. Η Mayberry μια ερευνήτρια της θεωρίας αισθάνθηκε περιορισμένη από την έλλειψη εύρους ακόμη και της ύλης του μαθήματος της γεωμετρίας στα δημοσιευμένα άρθρα του Van Hiele. Μολαταύτα, η θεωρία φιλοδοξεί να καταστεί αρκετά περιεκτική».*

Με τις προσπάθειες να εφαρμοσθεί η θεωρία σε αναλυτικά προγράμματα της γεωμετρίας σε χώρες τόσο διαφορετικές όπως η Ολλανδία, η Σοβιετική Ένωση και οι Ηνωμένες Πολιτείες, η θεωρία αντιμετωπίζεται προφανώς ως ευρέως αλλά και εύκολα εφαρμόσιμη (***ευρεία εφαρμοσιμότητα)***.

Ο Usiskin (1982) συνεχίζοντας τις αναφορές του στη θεωρία ισχυρίζεται ότι «*το σημαντικό είναι ότι οι εν λόγω ιδιότητες μιας θεωρίας (****κομψότητα, περιεκτικότητα***

και ευρεία εφαρμοσιμότητα) *δεν προσφέρονται για έλεγχο. Παρά ταύτα αποτελούν πιθανώς τους μείζονες λόγους για την ταχύτητα με την οποία η θεωρία Van Hiele έχει γίνει γνωστή σε όλο τον κόσμο. Έτσι πολλοί καθηγητές της διδακτικής των μαθηματικών αποδέχονται και χρησιμοποιούν αυτή τη θεωρία βάσει των χαρακτηριστικών της θεωρίας μάλλον παρά ενός ελέγχου των μεμονωμένων συστατικών της. Μια ανάλογη περίπτωση θα είχαμε αν κάποιος διέθετε μια θεωρία για τη θεραπεία όλων των ειδών καρκίνου, η οποία θα απαιτούσε μόνο την εισαγωγή μίας και μόνης ουσίας στη ροή του αίματος με κάποια προσεγμένη χορήγηση. Αυτή θα ήταν μια κομψή θεραπεία, και περιεκτική με την έννοια ότι θα εφαρμόζονταν σε όλες τις μορφές καρκίνου. Αν γίνονταν αποδεκτή σε πολλά μέρη, η θεωρία θα είχε κερδίσει το προσόν της ευρείας εφαρμοσιμότητας. Πραγματικά υπάρχει μια τέτοια θεωρία, και η ουσία είναι η laetrile. Παρά ταύτα η laetrile δεν έχει αντέξει σε προσεκτικότερη λεπτομερειακή έρευνα. Το γεγονός και μόνο ότι μια θεωρία είναι κομψή, περιεκτική και έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς δεν διασφαλίζει το ότι η θεωρία είναι ορθή. Στην ιατρική περίπτωση, αναζητάμε πειράματα τα οποία ελέγχουν τη δυνατότητα της θεωρίας να ικανοποιήσει τα όσα ισχυρίζεται. Η θεωρία Van Hiele περιλαμβάνει περιγραφές συμπεριφορών μαθητών σε ποικίλα επίπεδα και προβλέπει ορισμένες άλλες συμπεριφορές εκείνων των μαθητών. Η περιγραφική ακρίβεια και η προβλεπτική ισχύς είναι σημαντικές ιδιότητες των θεωριών που ισχυρίζονται ότι είναι επιστημονικές (σε αντίθεση με τις θεωρίες που είναι απλώς υποθετικές).*

2.1.1 Συγκριτικά στοιχεία

Ο Robert E. Orton (1995) στο άρθρο του “Do van Hiele and Piaget belong to the same «research program»;” λέει σχετικά με αυτές τις διαφορές των θεωριών Piaget και van Hiele:

- *Μερικές από αυτές τις διαφορές αποδίδονται στο ενδιαφέρον των van Hiele's για τα εκπαιδευτικά παρά για τα αναπτυξιακά ζητήματα. Εντούτοις, η έμφαση των van Hiele's στις οπτικές δομές είναι δύσκολο να συμφιλιωθεί με την εστίαση του Piaget στην αισθητικοκινητική δραστηριότητα. Ένα παιδί στο χαμηλότερο επίπεδο van Hiele θα αναγνωρίσει ένα ισοσκελές τρίγωνο από την εμφάνισή του. Το συμπέρασμά του είναι βασισμένο στη διαίσθηση ή σε "συμπέρασμα λόγω της άμεσης παρατήρησης" (van Hiele 1986, σελ. 75). Είναι σημαντικό ότι το παιδί συνάγει το συμπέρασμά του χωρίς την ασυνάρτητη σκέψη ή το*

βαθμιαίο συλλογισμό. Το παιδί αναγνωρίζει το σχήμα οπτικά "συνολικά" ή "λόγω της τέλειας μορφής του".

Αναγνωρίζοντας ένα ισοσκελές τρίγωνο από την ιδιότητά του " «δύο πλευρές ίσες» είναι διαφορετικό πράγμα από το να αναγνωρίσει ένα ισοσκελές τρίγωνο λόγω του μορφής του" (van Hiele 1986, σελ. 75). Αν και η αντίληψη είναι σημαντική στο αισθητικοκινητικό και προλειτουργικό παιδί του Piaget, δεν διαδραματίζει τον ίδιο ρόλο στη θεωρία του όπως κάνει ο van Hiele. Η κυρίαρχη ιδέα που χρησιμοποιεί για να περιγράψει τα χαμηλότερα επίπεδα ο Piaget είναι η δραστηριότητα, η μη οπτική αντίληψη. "(Το αισθητικοκινητικό ή ευφυές θέμα είναι ενεργό και ο ίδιος κατασκευάζει τις δομές του, από τις διαδικασίες της αντανακλαστικής αφαίρεσης που μόνο σπάνια και σε εξαιρετικές περιπτώσεις έχει οποιαδήποτε αξιοπρόσεχτη ομοιότητα με την αντιληπτική παράσταση" (Piaget 1970, σελ. 59-60).

- *Για τον van Hiele, το παιδί κινείται από το ένα επίπεδο στο άλλο με τη βοήθεια της γλώσσας. Για τον Piaget, το παιδί προχωρεί δεδομένου ότι μαθαίνει περισσότερο για τις αντιστρέψιμες διαδικασίες και τις ιδιότητες που διατηρούνται . Η γλώσσα διαδραματίζει έναν κρίσιμο ρόλο στη θεωρία van Hiele's. Δηλαδή, η γλώσσα χρησιμοποιείται για να επαναπροσδιορίσει τα αντικείμενα της σκέψης, με αυτόν τον τρόπο επιτρέποντας στο παιδί για να σκεφτεί στο επόμενο πιο υψηλό επίπεδο. Αυτός ο "επαναπροσδιορισμός" περιγράφεται λεπτομερώς από τον van Hiele's σε πέντε φάσεις εκμάθησης. Η γλώσσα χρησιμοποιείται για να δείξει ένα νέο πλαίσιο (φάση 1), για να επισημάνει ή να επισημάνουν τις σχέσεις σε αυτό το πλαίσιο (φάση 2), για να επιτρέψει στα παιδιά να βάλουν εμπρός ή να εξηγήσουν αυτές τις σχέσεις (φάση 3), για να βοηθήσει τη σκέψη των παιδιών επάνω σε ένα νέο σύστημα των αναφορών (φάση 4), και έπειτα για να βοηθήσει το παιδί να ενσωματώσει αυτές τις αναφορές στο υπάρχον σύστημά της (φάση 5) (van Hiele 1986, σελ. 96-98).*

  Ο Piaget περιγράφει το ρόλο της γλώσσας στην ανάπτυξη της σκέψης κάπως διαφορετικά. Εκτός από την ικανότητα για τη "συμβολική συμπύκνωση", η γλώσσα επιτρέπει διαδικασίες για να γίνουν "ρυθμισμένα από τη διαπροσωπική ανταλλαγή και τη συνεργασία" (Piaget 1967, σελ. 98). Με άλλα λόγια, η γλώσσα "κοινωνικοποιεί" τις λογικο-μαθηματικές δομές. Εντούτοις, η δράση, παρά η γλώσσα, είναι σημαντικότερη στην ανάπτυξη αυτών των δομών. Όπως ο Piaget υποστηρίζει: "... οι δομές που χαρακτηρίζουν τη σκέψη έχουν τις ρίζες τους στη

δράση και στους αισθητικοκινητικούς μηχανισμούς που είναι βαθύτεροι από τη γλωσσολογία "(Piaget 1967, σελ. 98).

Οι απόψεις των Van Hiele's σχετικά με το ρόλο της γλώσσας έχουν διάφορες διδακτικές επιπτώσεις, μερικές από τις οποίες εμφανίζονται να είναι σε διαφωνία με τη θεωρία του Piaget. Αυτές οι επιπτώσεις προέρχονται από τον τρόπο με τον οποίο ο Van Hiele παραπέμπει "τα επίπεδα σκέψης του" στα στάδια "ανάπτυξης" του Piaget.

Σύμφωνα με τον van Hiele:

" Όλα τα στάδια του Piaget ανήκουν σε μια περίοδο, που οδηγεί από ένα επίπεδο σκέψης στον αμέσως επόμενο. Ο Piaget, ακριβώς επειδή δεν γνώριζε την ύπαρξη περισσότερων από δύο επιπέδων σκέψης, κατέληξε μερικές φορές σε λανθασμένα συμπεράσματα" (van Hiele 1986, σελ. 100).

Κατ' αρχάς, η παραπομπή του van Hiele προτείνει ένα σχέδιο όπου η γλώσσα θα βοηθήσει μια κίνηση των παιδιών από το στάδιο των συγκεκριμένων λειτουργιών του Piaget στις επίσημες διαδικασίες. Αυτό το σχέδιο (οι πέντε φάσεις εκμάθησης) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοδηγήσει τους καθηγητές για να σχεδιάσουν τα υλικά του προγράμματος σπουδών. Δεύτερον, ο van Hiele υπονοεί ότι ένα παιδί μπορεί να κινηθεί πέρα από το επίπεδο επίσημων λειτουργιών. Οι φάσεις εκμάθησης μπορούν να επαναληφθούν στο δεύτερο, τρίτο ή στο τέταρτο επίπεδο. Κατά συνέπεια, ο van Hiele ισχυρίζεται ότι τα παιδιά μπορούν να φθάσουν σε ένα πιο υψηλό επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης από ότι ο Piaget είχε φανταστεί.

- *Για τον van Hiele, η λογική αρχίζει ως σχέση μεταξύ των υποθέσεων , για παράδειγμα, για τις γεωμετρικές ιδιότητες. Για τον Piaget, η λογική αρχίζει με την αίσθηση που συνδέεται αναγκαστικά με τη διατήρηση ορισμένων ποσοτήτων (μάζα, αποστάσεις, ευθείες γραμμές, κ.λπ.). Για τον van Hiele, ένα παιδί δεν θα δει την αξία της έννοιας της αφαίρεσης έως ότου πρώτα να θεωρήσει τα σχήματα ως ολότητες και για να αναλύσει τις ιδιότητες των σχημάτων, "αυτό είναι αδύνατον γιατί η αφαίρεση γίνεται κατανοητή από τους μαθητές προτού να ερευνήσουν μια τέτοια σειρά των ιδιοτήτων, και αυτό είναι μόνο δυνατό μετά από την επίτευξη του δεύτερου επιπέδου σκέψης" (van Hiele 1986, σελ. 64). Μετά μέχρι να φθάσει στο δεύτερο επίπεδο, η αίσθηση "της λογικής" του παιδιού αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την κατανόηση ενός "συστήματος σχέσεων". Μαθαίνει, παραδείγματος χάριν, ότι μια λέξη όπως "το τρίγωνο" μπορεί να α-*

ναφερθεί, όχι μόνο σαν ένα αντικείμενο με ορισμένες ιδιότητες, αλλά και σαν περίληψη ενός αντικειμένου ή μια σχέση με άλλα αντικείμενα.

"Τα γλωσσικά σύμβολα με τα οποία, ένα σύστημα της λογικής κατασκευάζεται έχουν αφηρημένο περιεχόμενο. Έτσι δεν είναι δυνατό να χτιστεί ένα παραγωγικό σύστημα με τα γλωσσικά σύμβολα του παιδιού χωρίς να δοθεί ένα συνολικά διαφορετικό περιεχόμενο σε εκείνα τα σύμβολα... " (van Hiele 1986, σελ. 101).

Ο Piaget επίσης υποστηρίζει ότι η λογική και η αφαίρεση δημιουργούνται σε ένα σύστημα σχέσεων, το οποίο αυτός καλεί μια "λειτουργική δομή". Ο van Hiele και ο Piaget εμφανίζονται να έχουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με τις προϋποθέσεις για την παραγωγική σκέψη. Για τον van Hiele, είναι σημαντικό για το παιδί να δει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων. Για τον Piaget, είναι σημαντικό ότι το παιδί είναι σε αναπτυξιακό επίπεδο όπου μπορεί να αντικαταστήσει τις προτάσεις για τα συγκεκριμένα αντικείμενα στα αντιστρέψιμα σχήματα. Στο σχέδιο Piaget, το αναπτυξιακό επίπεδο, και ενδεχομένως η διδασκαλία της λογικής, είναι οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να καταλάβουν την Ευκλείδεια γεωμετρία.

Οι διαφορές των απόψεων μεταξύ van Hiele's και Piaget σχετικά με τη λογική μπορούν να έχουν τις επιπτώσεις τους στη διδασκαλία των γενικών, κρίσιμων δεξιοτήτων σκέψης. Σύμφωνα με τον van Hiele, θα κατέληγε στο συμπέρασμα κάποιος ότι δεν κάνει καλό να διδάξει σε ένα παιδί τις λογικές δεξιότητες συλλογισμού και να αναμείνει ότι αυτές οι δεξιότητες θα μεταφερθούν. Η λογική και η παραγωγική σκέψη εξαρτώνται από την προγενέστερη γνώση του περιεχομένου (ειδικότερα, στα μαθηματικά). "Τα μαθηματικά δεν προχωρούν από τη λογική, η λογική προχωρά από τα μαθηματικά "(van Hiele 1986, σελ. 233). Ένα παιδί μπορεί μόνο να καταλάβει την έννοια αναγκαστικά σε έναν τομέα όπου έχει μάθει αρχικά το σύστημα των σχέσεων σχετικά με εκείνο τον τομέα.

2.2 Συμπεριφορές σε κάθε επίπεδο κατά Usiskin

Για να υποβληθεί σε έναν αυστηρό έλεγχο σύμφωνα πάντα με τον Usiskin (1982) , μια θεωρία πρέπει να περιγραφεί με λεπτομέρεια και σαφήνεια ώστε να επιτρέψει το σχεδιασμό εργαλείων ελέγχου. Για τη θεωρία Van Hiele, αυτό σημαίνει ότι τα επίπεδα πρέπει να προσδιοριστούν πολύ επακριβώς.

Σε συμφωνία με τα παραπάνω, στα τέλη του 1979 και τις αρχές του 1980, όλα τα κείμενα των Van Hiele που τέθηκαν στη διάθεση του προσωπικού του CDASSG

project(το ερευνητικό project που είχε αναλάβει να διευθύνει ο Usiskin στο πανεπιστήμιο του Illinois), (Γνωσιακή Ανάπτυξη και η Επίδοση στη Γυμνασιακή Γεωμετρία -Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry, CDASSG) εξετάστηκαν για τα χωρία που περιέγραφαν τις συμπεριφορές των μαθητών σε ένα ορισμένο επίπεδο. Συνολικά εξετάστηκαν εννέα τέτοια κείμενα, τέσσερα που εξ αρχής είχαν γραφεί στα Αγγλικά και πέντε που είχαν μεταφραστεί στα Αγγλικά από τα Ολλανδικά, τα Γερμανικά ή τα Γαλλικά. Παρακάτω παραθέτουμε μια περιγραφή των συμπεριφορών, ταξινομημένων κατά επίπεδο (Usiskin 1982).

Επίπεδο 1 (το -van Hieles-βασικό επίπεδο 0)

(P. M., 1958 – 59)

1. «Τα σχήματα κρίνονται σύμφωνα με την εμφάνισή τους».
2. «Ένα παιδί αναγνωρίζει ένα ορθογώνιο από τη μορφή του, το σχήμα του».
3. «… και το ορθογώνιο του φαίνεται διαφορετικό από ένα τετράγωνο».
4. «Όταν κάποιος έχει δείξει σε ένα εξάχρονο παιδί τι είναι ο ρόμβος, τι είναι το ορθογώνιο, τι είναι το τετράγωνο, τι είναι το παραλληλόγραμμο, τότε αυτό είναι σε θέση να σχεδιάσει τα εν λόγω σχήματα χωρίς κανένα σφάλμα πάνω σε έναν γεωπίνακα (geoboard) του Gattegno, ακόμη και σε δύσκολες περιστάσεις».
5. «Ένα παιδί δεν αναγνωρίζει ένα παραλληλόγραμμο σε ένα ρόμβο».
6. «Ο ρόμβος δεν είναι παραλληλόγραμμο. Ο ρόμβος φαίνεται … ως κάτι πολύ διαφορετικό».

(P.M., 1968)

7. «Όταν κάποιος λέει ότι ονομάζουμε ρόμβο ένα τετράπλευρο του οποίου οι τέσσερις πλευρές είναι ίσες αυτή η πρόταση δε θα είναι αρκετή για να πείσει τον αρχάριο μαθητή [άρα βρίσκεται στο επίπεδο 0] ότι τα παραλληλόγραμμα τα οποία αποκαλεί τετράγωνα αποτελούν μέρος του συνόλου των ρόμβων».

Επίπεδο 2 (το -van Hieles- επίπεδο 1)

(P. M., 1957)

1. «Είναι σε θέση να συσχετίσει την ονομασία 'ισοσκελές τρίγωνο' με ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, αν γνωρίζει ότι δύο από τις πλευρές του είναι ίσες και να καταλήξει στο συνακόλουθο συμπέρασμα ότι οι δύο αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες».

(Dina, 1957; P. M. και Dina, 1958)

2. «…ένας μαθητής που γνωρίζει τις ιδιότητες του ρόμβου και μπορεί να τις κατονομάσει, θα διαθέτει επίσης και μια βασική κατανόηση του ισοσκελούς τριγώνου = ημι-ρόμβος».

3. «Τα σχήματα είναι τα υποστηρίγματα (supports) των ιδιοτήτων τους».

4. «Το ότι ένα σχήμα είναι ένα ορθογώνιο σημαίνει ότι αυτό έχει τέσσερις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο, ακόμη και αν το σχήμα δεν έχει σχεδιαστεί πολύ προσεκτικά».

5. «Τα σχήματα προσδιορίζονται από τις ιδιότητές τους. (Λόγου χάρη) Αν μας πουν ότι το σχήμα που έχει σχεδιαστεί στον πίνακα έχει τέσσερις ορθές γωνίες, τότε αυτό είναι ένα ορθογώνιο, ακόμη κι αν το σχήμα δεν έχει σχεδιαστεί πολύ προσεκτικά».

6. «Οι ιδιότητες δεν έχουν ακόμη οργανωθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε ένα τετράγωνο να προσδιορίζεται ως ορθογώνιο».

(P. M., 1959)

7. «Το παιδί μαθαίνει να αντιμετωπίζει ένα ρόμβο ως ένα ισόπλευρο σχήμα τεσσάρων γωνιών με ίσες τις απέναντι γωνίες και κάθετες διαγωνίους που διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες».

8. (Ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ αυτού του επιπέδου και του επομένου): «Όταν το παιδί φθάσει στο στάδιο όπου γνωρίζει το ρόμβο και αναγνωρίζει το ισοσκελές τρίγωνο ως ημι-ρόμβο, θα είναι επίσης σε θέση να προσδιορίσει αυθόρμητα ένα ορισμένο πλήθος ιδιοτήτων του ισοπλεύρου τριγώνου».

9. «Μόλις αποφασιστεί ότι μια δομή αποτελεί ένα 'ισοσκελές τρίγωνο' το παιδί θα γνωρίζει επίσης ότι ένα ορισμένο πλήθος προσδιοριστικών ιδιοτήτων πρέπει να υφίστανται, δίχως να πρέπει να τις απομνημονεύσει σ' αυτή την ειδική περίπτωση».

<u>Επίπεδο 3 (το -van Hieles- επίπεδο 2)</u>

(Dina, 1957)

1. «Οι μαθητές … μπορούν να καταλάβουν τι σημαίνει 'απόδειξη' στη γεωμετρία. Έχουν φθάσει στο δεύτερο επίπεδο σκέψης».

(P. M., 1957)

2. «Μπορεί να χειριστεί την αλληλοσυσχέτιση των χαρακτηριστικών των γεωμετρικών σχημάτων».

3. «λόγου χάρη, αν βασιζόμενος στην ισχύ των γενικών θεωρημάτων ισότητας, έχει τη δυνατότητα να συναγάγει την ισότητα γωνιών ή ευθυγράμμων τμημάτων συγκεκριμένων σχημάτων».

(P. M., 1958 - 59)

4. «Οι ιδιότητες είναι διατεταγμένες. Συνάγονται η μία από την άλλη: μια ιδιότητα προηγείται ή έπεται μιας άλλης ιδιότητας».

5. «Η εσωτερική σημασία του παραγωγικού συλλογισμού δεν είναι κατανοητή από το μαθητή».

6. «Το τετράγωνο αναγνωρίζεται ως ορθογώνιο επειδή σ' αυτό το επίπεδο οι ορισμοί των σχημάτων αρχίζουν να διαδραματίζουν ρόλο».

(P. M., 1959)

7. «Το παιδί … [θα] αναγνωρίσει το ρόμβο μέσω ορισμένων ιδιοτήτων του, … επειδή, λόγου χάρη, είναι ένα σχήμα τεσσάρων γωνιών του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα».

8. «[Το παιδί] δεν είναι σε θέση να μελετήσει τη γεωμετρία με την αυστηρότερη έννοια της λέξης».

9. «Το παιδί γνωρίζει πώς πρέπει να συλλογιστεί σύμφωνα με ένα παραγωγικό λογικό σύστημα … τούτο όμως δεν είναι ίδιο με το συλλογισμό που βασίζεται στην ισχύ της τυπικής λογικής».

(P. M., 1976)

10. «Η κατανόηση της συνεπαγωγής, της ισοδυναμίας, της άρνησης μιας συνεπαγωγής ανήκει στο δεύτερο επίπεδο σκέψης».

(P. M., 1978)

11. «Μπορούν να καταλάβουν μια ανώτερη συλλογιστική δομή, όπως λόγου χάρη: 'η παραλληλία των ευθειών συνεπάγεται (σύμφωνα με το σημασιολογικό χαρακτήρα τους) την παρουσία ενός νόμου, και συνεπώς (σύμφωνα με το συμβολικό τους χαρακτήρα) την ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών'».

12. «Μπορώ [ο μαθητής] να αποστηθίσω έναν ορισμό. Κανένα επίπεδο. Μπορώ να καταλάβω ότι οι ορισμοί ίσως να είναι απαραίτητοι: δεύτερο επίπεδο.»

13. «… ξέρεις τι σημαίνει αυτό [η χρήση του 'μερικά' και του 'όλα'] δεύτερο επίπεδο».

Επίπεδο 4 (το -van Hieles- επίπεδο 3)

(P. M., 1957)

1. «Θα φτάσει το τρίτο επίπεδο σκέψης όταν αρχίσει να χειρίζεται τα εσωτερικά χαρακτηριστικά των σχέσεων. Λόγου χάρη: αν μπορεί να διακρίνει μεταξύ μιας πρότασης και της αντίστροφής της».

(Dina, 1957)

2. «Μπορούμε να αρχίσουμε μελετώντας ένα σύστημα παραγωγικού συλλογισμού από προτάσεις, δηλαδή, τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η αλληλεξάρτηση των σχέσεων. Τώρα οι ορισμοί και οι προτάσεις εισέρχονται στο νοητικό ορίζοντα των μαθητών».

3. «Η παραλληλία των ευθειών συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών και αντιστρόφως».

(P. M. και Dina, 1958)

4. «Ο μαθητής θα είναι σε θέση, λόγου χάρη, να διακρίνει μεταξύ μιας πρότασης και της αντίστροφής της».

5. «(είναι) … δυνατό να αναπτύξει ένα αξιωματικό σύστημα γεωμετρίας».

(P. M., 1958 - 59)

6. «Ο νους απασχολείται με τη σημασία της λογικής παραγωγής συμπερασμάτων, του αντιστρόφου ενός θεωρήματος, ενός αξιώματος, των αναγκαίων και ικανών συνθηκών».

(P. M., 1968)

7. «… θα μπορούσε κανείς να του πει (του μαθητή) ότι σε μια απόδειξη το ζήτημα είναι να γνωρίζει το αν αυτές οι θέσεις είναι αληθείς ή όχι, ή μάλλον τη σχέση μεταξύ της αλήθειας αυτών των θέσεων και κάποιων άλλων. Δίχως την κατανόηση τέτοιων σχέσεων δε μπορούμε να εξηγήσουμε στο μαθητή ότι πρέπει να διαθέτουμε τη δυνατότητα προσφυγής σε αξιώματα.» [εδώ ο Usiskin λέει ότι συμπέρανε το επίπεδο από το πρώτο τμήμα της πρότασης. Γιατί πουθενά δεν αναφέρεται το επίπεδο].

Επίπεδο 5 (το -van Hieles- επίπεδο 4)

(P. M. και Dina, 1958)

1. «Τελικά στο τέταρτο επίπεδο (που δεν επιτυγχάνεται ποτέ στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) η λογική σκέψη καθαυτή μπορεί να καταστεί θεματική ύλη».

2. «Τα αξιώματα καθαυτά ανήκουν στο τέταρτο επίπεδο».

(P. M., 1958 - 59)

3. «Δεν τίθενται ερωτήσεις όπως: τι είναι τα σημεία, οι γραμμές, οι επιφάνειες, κ.λπ. Τα σχήματα ορίζονται μόνο μέσω συμβόλων που συνδέονται με σχέσεις. Για να βρούμε το συγκεκριμένο νόημα των συμβόλων, πρέπει να στραφούμε στα χαμηλότερα επίπεδα όπου μπορεί να φανεί το συγκεκριμένο νόημα αυτών των συμβόλων».

2.3 Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης κατά Fays et al

Οι David Fays, Dorothy Geddes & Rosamond Tischler (2005) παρουσιάζουν τα τυπικά γνωρίσματα κάθε επιπέδου δίνοντας περιγραφές και απαντήσεις των μαθητών όπως αναφέρονται παρακάτω (οι απαντήσεις δίνονται λεπτομερώς στο παράρτημα).

Επίπεδο 1: Περιγραφές από δείγμα μαθητών

Οι μαθητές προσδιορίζουν και αναπτύσσουν δραστηριότητες στις μορφές (π.χ., τετράγωνα, τρίγωνα) και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις (π.χ. γραμμές, γωνίες, πλέγματα) σύμφωνα με την εμφάνισή τους.

1. Ο μαθητές αναγνωρίζουν τη μορφή του σχήματος από την εμφάνισή της συνολικά ως ολότητα (Gestalt):
   - Σε ένα απλό σχέδιο, διάγραμμα ή σύνολο από σχήματα
   - Στις διαφορετικές θέσεις
   - Σε ένα σχήμα ή άλλες πιο σύνθετες γεωμετρικές κατασκευές.
2. Κατασκευάζουν, σχεδιάζουν, ή αντιγράφουν ένα σχήμα
3. Ονομάζουν ή συμβολίζουν τα σχήματα και τις άλλες γεωμετρικές κατασκευές και χρησιμοποιούν τυπικά και άτυπα ονόματα κατάλληλα.
4. Συγκρίνουν και κατατάσσουν τα σχήματα με κριτήριο την εμφάνισή τους ως ολότητα.
5. Περιγράφουν λεκτικά σχήματα από την εμφάνισή τους ως ολότητα.
6. Λύνουν απλά προβλήματα ρουτίνας βασιζόμενοι στα σχήματα παρά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αυτά έχουν.
7. Αναγνωρίζουν τα μέρη ενός σχήματος αλλά:
   - Δεν αναλύουν το σχήμα στα στοιχεία που το αποτελούν.
   - Δεν σκέφτονται ότι οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν μια κλάση σχημάτων .
   - Δεν κάνουν γενικεύσεις για τα σχήματα και δεν χρησιμοποιούν σχετικές λεκτικές εκφράσεις

<u>Επίπεδο 2: Περιγραφές από δείγμα μαθητών</u>

Οι μαθητές αναλύουν τα σχήματα με όρους των μερών που τα αποτελούν και των σχέσεων μεταξύ αυτών, κατανοούν τις ιδιότητες κλάσεων σχημάτων εμπειρικά, και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες για να λύνουν προβλήματα.

Οι μαθητές

1. Αναγνωρίζουν και ελέγχουν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων (π.χ. , ισότητα των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου, ισότητα των γωνιών).

2. Ανακαλούν (από την μνήμη τους) και χρησιμοποιούν κατάλληλο λεξιλόγιο για τα συστατικά των σχημάτων και τις σχέσεις τους (π.χ. απέναντι πλευρές και απέναντι γωνίες ίσες, οι διαγώνιές διχοτομούνται).

3. Συγκρίνουν δύο σχήματα με βάση τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που τα αποτελούν.

4. Κατατάσσουν τα σχήματα σε διαφορετικές κατηγορίες σύμφωνα με ορισμένες ιδιότητες, συμπεριλαμβάνοντας παραδείγματα και αντιπαραδείγματα.

5. Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν λεκτικές περιγραφές για ένα σχήμα από την άποψη των ιδιοτήτων του και χρησιμοποιούν τις περιγραφές για να σχεδιάσουν και να κατασκευάσουν το σχήμα **.**

6. Ερμηνεύουν λεκτικές ή συμβολικές προτάσεις κανόνων και τις εφαρμόζουν.

7. Ανακαλύπτουν ιδιότητες σε κάποια σχήματα εμπειρικά και γενικεύουν τις ιδιότητες για αυτή την κλάση των σχημάτων.

8. Περιγράφουν μια κλάση σχημάτων (π.χ. παραλληλόγραμμα) με βάση τις ιδιότητές τους.

9. Αναγνωρίζουν ποιες ιδιότητες που χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν μια κλάση σχημάτων επίσης εφαρμόζονται σε μια άλλη κλάση και συγκρίνουν αυτές τις δύο κλάσεις σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

10. Ανακαλύπτουν ιδιότητες μιας άγνωστης κλάσης σχημάτων.

11. Λύνουν γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των σχημάτων ή αναγνωρίσιμες ιδιότητες.

12. Σχηματοποιούν και χρησιμοποιούν γενικεύσεις για ιδιότητες των σχημάτων (με τη βοήθεια του καθηγητή-εποπτικού υλικού αυθόρμητα μόνοι τους) και χρησιμοποιούν σχετική γλώσσα αλλά:

- Δεν εξηγούν πως κάποιες ιδιότητες σχημάτων συσχετίζονται.

- Δεν σχηματοποιούν και δεν χρησιμοποιούν τυπικούς ορισμούς.
- Δεν εξηγούν σχέσεις υποκλάσεων εκτός από το να τσεκάρουν συγκεκριμένα παραδείγματα που αναφέρονται σε μια λίστα ιδιοτήτων.
- Δεν βλέπουν την ανάγκη απόδειξης ή λογικής εξήγησης των γενικεύσεων που ανακαλύπτονται εμπειρικά και δεν χρησιμοποιούν κατάλληλη γλώσσα.(π.χ εάν -τότε , επειδή) σωστά.

<u>Επίπεδο 3: Περιγραφές από δείγμα μαθητών</u>

Οι μαθητές διατυπώνουν και χρησιμοποιούν ορισμούς, δίνουν άτυπα επιχειρήματα τα οποία έχουν αποφασίσει προηγουμένως ερευνώντας ιδιότητες και ακολούθως δίνουν παραγωγικά επιχειρήματα.

Οι μαθητές

1. Προσδιορίζουν διαφορετικά σύνολα ιδιοτήτων τα οποία χαρακτηρίζουν μια κλάση σχημάτων και ελέγχουν αν αυτά είναι ικανοποιητικά.
2. Προσδιορίζουν ελάχιστα σύνολα ιδιοτήτων τα οποία μπορούν να χαρακτηρίσουν ένα σχήμα.
3. Διατυπώνούν και χρησιμοποιούν έναν ορισμό για μια κλάση σχημάτων.
4. Δίνουν άτυπα επιχειρήματα (χρησιμοποιώντας διαγράμματα, συνθέσεις σχημάτων ή άλλα υλικά).
5. Έχοντας σχηματίσει ένα συμπέρασμα για δοσμένες πληροφορίες, δικαιολογούν το συμπέρασμα χρησιμοποιώντας λογικές σχέσεις.
6. Διατάσσουν κλάσεις σχημάτων.
7. Διατάσσουν δύο ιδιότητες.
8. Ανακαλύπτουν νέες ιδιότητες παραγωγικά.
9. Δίνουν άτυπα παραγωγικά επιχειρήματα.
   - Ακολουθούν ένα παραγωγικό επιχείρημα και μπορεί να παρέχουν τα μέρη του επιχειρήματος.
   - Δίνουν μια περίληψη ή μια παραλλαγή ενός παραγωγικού επιχειρήματος.
   - Δίνουν παραγωγικά επιχειρήματα.
10. Ανεπίσημα αναγνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ μιας πρότασης και του αντιστρόφου της.

11. Προσδιορίζουν και χρησιμοποιούν τις στρατηγικές ή τον συλλογισμό για να λύσουν τα προβλήματα.

12. Αναγνωρίζουν το ρόλο του παραγωγικού επιχειρήματος και προσεγγίζουν τα προβλήματα κατά τρόπο παραγωγικό αλλά :

- Δεν αντιλαμβάνονται την έννοια της αφαίρεσης υπό μια αξιωματική έννοια (π.χ. δεν βλέπουν την ανάγκη για ορισμούς και αξιώματα).
- Δεν διακρίνουν μεταξύ μιας πρότασης και της αντιστρόφου της.
- Δεν μπορούν ακόμα να βρουν αλληλεξαρτήσεις μεταξύ δικτύων και θεωρημάτων.

<u>Επίπεδο 4: Περιγραφές από δείγμα μαθητών</u>

Οι μαθητές καθιερώνουν, μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα, τα θεωρήματα και τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των δικτύων των θεωρημάτων.

Οι μαθητές

1. Αναγνωρίζουν την ανάγκη για όρους, ορισμούς, και βασικές υποθέσεις (αξιώματα).

2. Αναγνωρίζουν χαρακτηριστικά ενός τυπικού ορισμού (π.χ απαραίτητους και ικανοποιητικούς όρους) και ισοδυναμία των ορισμών.

3. Αποδεικνύουν σε ένα αξιωματικό σύστημα σχέσεων ότι είχε εξηγηθεί τυπικά στο επίπεδο 2.

4. Αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ ενός θεωρήματος και σχετικών δηλώσεων (π.χ. αντίστροφο, αντιθετοαντιστροφή).

5. Καθιερώνουν σχέσεις μεταξύ δικτύων των θεωρημάτων.

6. Συγκρίνουν και αντιπαραβάλλουν τις διαφορετικές αποδείξεις των θεωρημάτων.

7. Εξετάζουν τα αποτελέσματα της αλλαγής ενός αρχικού ορισμού ή ενός αξιώματος σε μια λογική ακολουθία.

8. Καθιερώνουν μια γενική αρχή ,η οποία να ενοποιεί διαφορετικά θεωρήματα.

9. Δημιουργούν τις αποδείξεις από τα αξιώματα.

10. Δίνουν τα επίσημα παραγωγικά επιχειρήματα αλλά δεν ερευνούν ή δεν συγκρίνουν τα αξιωματικά συστήματα.

<u>Επίπεδο 5: Περιγραφές από δείγμα μαθητών</u>

Οι μαθητές ορίζουν αυστηρά τα θεωρήματα στα διαφορετικά αξιωματικά συστήματα και αναλύουν ,συγκρίνουν αυτά τα συστήματα.

Οι μαθητές

1. Ορίζουν αυστηρά τα θεωρήματα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (π.χ., προσέγγιση Hilbert στα θεμέλια της γεωμετρίας).
2. Συγκρίνουν τα αξιωματικά συστήματα (π.χ. Ευκλείδειες και μη- Ευκλείδειες Γεωμετρίες): Αυθόρμητα εξερευνούν πώς οι αλλαγές στα αξιώματα έχουν επιπτώσεις στην γεωμετρία.
3. Καθιερώνουν τη συνέπεια ενός συνόλου αξιωμάτων, ανεξαρτησία ενός αξιώματος, και ισοδυναμία διαφορετικών συνόλων αξιωμάτων δημιουργώντας ένα αξιωματικό σύστημα για μια γεωμετρία.
4. Εφευρίσκουν τις γενικευμένες μεθόδους για κατηγορίες προβλημάτων.
5. Κάνουν αναζητήσεις του ευρύτερου πλαισίου στο οποίο ένα μαθηματικό θεώρημα ή αρχή θα ισχύσει.
6. Κάνουν σε βάθος μελέτη της λογικής για να αναπτύξουν νέες ιδέες και προσεγγίσεις για λογικά συμπεράσματα.

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

Εμπειρικές έρευνες για τη θεωρία Van Hieles

3.1 Έρευνες στο εξωτερικό

Οι εμπειρικές έρευνες για τη θεωρία van Hiele που έχουν γίνει, σε όλο τον κόσμο είναι αρκετές. Εμείς εδώ θα αναφέρουμε τις σπουδαιότερες.

➢ Η πρώτη έρευνα,βασική για την ερευνά μας, είναι η έρευνα του ***Usiskin (1982)*** καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο. Ο Usiskin διηύθυνε ένα ερευνητικό πρόγραμμα το CDASSG project. Το project «Γνωστική Ανάπτυξη και η Επίδοση στη Γυμνασιακή Γεωμετρία (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry, CDASSG)», σχεδιάστηκε για να θέσει ένα πλήθος ερωτημάτων που συσχετίζουν τα επίπεδα και τις ιδιότητές τους, ειδικότερα δε τις σχέσεις που τα επίπεδα μπορεί να έχουν με την επίδοση στη τυπική ύλη της γυμνασιακής γεωμετρίας. Τα ερωτήματα αυτά ήταν (Usiskin ,1982):

- *Πώς κατανέμονται οι μαθητές που ξεκινούν το μάθημα της γεωμετρίας σε σχέση με τα επίπεδα στο σχήμα van Hiele;*
- *Ποιες αλλαγές λαμβάνουν χώρα στα επίπεδα van Hiele μετά από ένα σχολικό έτος σπουδής της γεωμετρίας;*
- *Σε ποια έκταση σχετίζονται τα επίπεδα van Hiele με την τρέχουσα επίδοση στη γεωμετρία;*
- *Σε ποια έκταση προβλέπουν τα επίπεδα van Hiele την επίδοση στη γεωμετρία μετά από μαθήματα ενός έτους;*
- *Ποιες γενικεύσεις μπορούν να γίνουν αναφορικά με το επίπεδο van Hiele κατά την εισαγωγή στο μάθημα και τη γεωμετρική γνώση των μαθητών που αργότερα διαπιστώνεται ότι είναι ανεπιτυχείς στη σπουδή τους πάνω στη γεωμετρία;*
- *Σε ποια έκταση είναι η γεωμετρία που διδάσκεται στους μαθητές κατάλληλη για το δικό τους επίπεδο van Hiele;*
- *Σε ποια έκταση διαφέρουν οι τάξεις της γεωμετρίας σε διαφορετικά σχολεία και κοινωνικο-οικονομικά περιβάλλοντα ως προς την καταλληλότητα της ύλης του μαθήματος στο επίπεδο van Hiele του μαθητή;*

Στο CDASSG project δόθηκαν τρία χρόνια για να μελετήσει αυτά τα ερωτήματα, ένας χρόνος (1979 – 1980) για το σχεδιασμό της μελέτης, ένας χρόνος (1980 –

1981) για την εκτέλεση της μελέτης, και ένας χρόνος (1981 – 1982) για την ανάλυση των δεδομένων και τη συγγραφή αναφορών.

Η μελέτη περιέλαβε, συνολικά, περίπου 2700 μαθητές σε 13 επιλεγμένα γυμνάσια από ολόκληρες τις Ηνωμένες Πολιτείες για να καλύψει ένα ευρύ φάσμα των κοινωνικο-οικονομικών συνθηκών του κοινωνικού συνόλου. Στους μαθητές αυτούς δόθηκαν τεστ αξιολόγησης γεωμετρικών γνώσεων βάσει των επιπέδων van Hiele, στην έναρξη και στο πέρας του σχολικού έτους. Η επίδοση ενός μεγάλου μέρους του δείγματος στην απόδειξη αξιολογήθηκε επίσης στο τέλος του σχολικού έτους. Παράλληλα συλλέχθηκε και μια ποικιλία άλλων δεδομένων.

Για να ελεγχθεί η θεωρία χρησιμοποιήθηκαν αυτούσια χωρία από κείμενα των van Hiele. Το τεστ που χρησιμοποιήθηκε για την εξακρίβωση των επιπέδων Van Hiele αποτελείτο από 25 ερωτήματα (5 ερωτήματα Χ 5 επίπεδα).

Τα συμπεράσματα της έρευνας ήταν τα εξής:

Συμπέρασμα 1: *Στη μορφή που δόθηκε από τους van Hiele το επίπεδο 5 δεν υπάρχει ή δεν είναι ελέγξιμο. Όλα τα άλλα επίπεδα είναι ελέγξιμα.*

Συμπέρασμα 2: *Πάνω από τα δύο τρίτα των μαθητών απαντούν στα θέματα των τεστ με τρόπους που καθιστούν εύκολη την αντιστοίχιση κάποιου επιπέδου van Hiele σ΄ αυτούς.*

Συμπέρασμα 3: *Αυθαίρετες αποφάσεις που αφορούν στο πλήθος των σωστών απαντήσεων το οποίο είναι απαραίτητο για την επίτευξη ενός επιπέδου μπορούν να επηρεάσουν το επίπεδο που αντιστοιχίζεται σε πολλούς μαθητές.*

Συμπέρασμα 4: *Αν θεωρήσουμε εκείνους τους μαθητές που βρίσκονται σε ένα δοθέν επίπεδο van Hiele το φθινόπωρο, υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα του επιπέδου van Hiele από το φθινόπωρο ως την άνοιξη.*

Συμπέρασμα 5: *Το επίπεδο van Hiele είναι ένας πολύ καλός προγνώστης της τρέχουσας απόδοσης στα τεστ πολλαπλής επιλογής της τυπικής ύλης της γεωμετρίας. Το επίπεδο van Hiele είναι επίσης πολύ καλός προγνώστης της τρέχουσας απόδοσης σε ένα αποδεικτικό τεστ, αλλά ένα τεστ στην ύλη της γεωμετρίας συσχετίζεται ακόμη ισχυρότερα με την απόδειξη.*

Συμπέρασμα 6: *Στις τάξεις γεωμετρίας που έχουν μελετήσει την απόδειξη, τα επίπεδα van Hiele των περισσότερων μαθητών προς το τέλος του σχολικού έτους είναι υπερβολικά χαμηλά ώστε να επιτρέψουν κάποια πιθανότητα επιτυχίας στη γεωμετρική απόδειξη.*

Συμπέρασμα 7: *Το «φθινοπωρινό» επίπεδο van Hiele είναι ένας καλός προγνώστης της «εαρινής» επίδοσης στη γεωμετρία, αλλά όχι τόσο καλός προγνώστης όσο η γνώση κατά την έναρξη των μαθημάτων ή το εαρινό επίπεδο van Hiele.*

Συμπέρασμα 8: *Στις τάξεις της γεωμετρίας που μελετούν την απόδειξη, τα «φθινοπωρινά» επίπεδα van Hiele είναι υπερβολικά χαμηλά ώστε να επιτρέψουν ακόμη και μια 2 στις 5 πιθανότητα επιτυχίας στην απόδειξη.*

Συμπέρασμα 9: *Χρησιμοποιώντας τα επίπεδα van Hiele ως κριτήριο, σχεδόν οι μισοί μαθητές της γεωμετρίας είναι τοποθετημένοι σε ένα μάθημα στο οποίο οι πιθανότητες επιτυχίας τους στην απόδειξη είναι μόνο 50 – 50.*

Συμπέρασμα 10: *Πολλοί μαθητές δε μαθαίνουν ούτε τις απλούστερες γεωμετρικές έννοιες στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Έτσι, πολλοί μαθητές δε γνωρίζουν αυτές τις έννοιες όταν αποφοιτούν από το γυμνάσιο.*

Συμπέρασμα 11: *Πολλοί μαθητές αφήνουν το μάθημα της γεωμετρίας χωρίς να έχουν εξοικειωθεί με τη βασική ορολογία και τις ιδέες της γεωμετρίας.*

Συμπέρασμα 12: *Από όλους του μαθητές γυμνασίου των Ηνωμένων Πολιτειών, περίπου:*

60% δεν μελετούν αποδείξεις .
- *47% δεν εγγράφονται στη γεωμετρία*
- *6% εγγράφονται στη γεωμετρία αλλά εγκαταλείπουν πριν το τέλος*
- *7% είναι εγγεγραμμένοι σε ένα μάθημα γεωμετρίας χωρίς αποδείξεις*

40% μελετούν αποδείξεις.
- *11% μελετούν αποδείξεις αλλά δε μπορούν να τις εφαρμόσουν*
- *9% μπορούν να πραγματοποιούν μόνο τετριμμένες αποδείξεις*
- *7% έχουν μέτρια επιτυχία με τις αποδείξεις*
- *13% έχουν επιτυχία με τις αποδείξεις*

Συμπέρασμα 13: *Η ικανότητα της γεωμετρίας, από τα στοιχεία ως την απόδειξη, είναι ίση μεταξύ των φύλων.*

Γενικό συμπέρασμα

Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών μπορεί να αντιστοιχιστεί σε κάποιο επίπεδο van Hiele μέσω ενός απλού τεστ παρά το γεγονός ότι η θεωρία των επιπέδων van Hiele δεν έχει ακόμη επεξηγηθεί με τρόπο που να επιτρέπει τον έλεγχο του υψηλότερου επιπέδου της ή την αντιστοίχιση ενός μοναδικού επιπέδου σε κάθε μαθητή. Τα επίπεδα που αντιστοιχίζονται στους μαθητές είναι ένας καλός προγνώστης της τρέχουσας απόδοσης του μαθητή στη γεωμετρία και ένας αρκετά καλός προγνώστης της μετέπειτα απόδοσής του. Η χαμηλή απόδοση πολλών μαθητών είτε σε ένα τεστ στην ύλη της γεωμετρίας ή στη γραφή αποδείξεων σχετίζεται στενά με την κατάταξη στα χαμηλότερα επίπεδα van Hiele. Συνεπώς αυτή η μελέτη επιβεβαιώνει τη χρήση της θεωρίας των επιπέδων van Hiele για να εξηγήσει γιατί πολλοί μαθητές έχουν πρόβλημα μάθησης και απόδοσης στο μάθημα της γεωμετρίας.

Το μάθημα της γεωμετρίας δεν είναι ωφέλιμο για πολλούς μαθητές. Στο τέλος του έτους σπουδής της γεωμετρίας πολλοί μαθητές δεν κατέχουν ούτε καν τετριμμένες πληροφορίες για την ορολογία της γεωμετρίας και τη μέτρηση. Οι ερωτήσεις που αφορούν στα μαθηματικά συστήματα απαντώνται με ουσιαστικά τυχαίο τρόπο. Οι μισοί μαθητές που εγγράφονται σε ένα μάθημα προσανατολισμένο στην απόδειξη βιώνουν πολύ μικρή ή καμιά επιτυχία στην απόδειξη. Ο μείζων λόγος φαίνεται να είναι η έλλειψη γνώσης στην έναρξη του έτους. Αυτή η μελέτη επιβεβαιώνει την ανάγκη για συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας πριν το γυμνάσιο αν επιθυμούμε μεγαλύτερη γεωμετρική γνώση και επιτυχία στη γραφή αποδείξεων για τους μαθητές μας.

➢ Οι ***Burger & Shaughnessy (1986)*** εξέτασαν συγκεκριμένες ερωτήσεις που σχετίζονταν με τη θεωρία επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele .

- Η πρώτη διαπίστωνε τη *χρησιμότητα των επιπέδων Van Hiele στην περιγραφή των διαδικασιών σκέψης των μαθητών* στους στόχους της γεωμετρίας.
- Η δεύτερη ήταν να ανακαλυφθεί *εάν τα επίπεδα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν λειτουργικά από τη συμπεριφορά των μαθητών*.
- Η τρίτη ήταν για το *σχεδιασμό μιας διαδικασίας συνέντευξης που θα μπορούσε να αποκαλύψει κυρίαρχα επίπεδα συλλογισμού* στους συγκεκριμένους στόχους της γεωμετρίας.

Διαπίστωσαν ότι η θεωρία Van Hiele ήταν χρήσιμη στην περιγραφή των απαντήσεων των μαθητών σε ζητήματα της γεωμετρίας. Είπαν, "*αυτή είναι σημαντική για τους ερευνητές για την αξία της στην περιγραφή της συμπεριφοράς. Είναι επίσης σημαντική στους καθηγητές στην επιλογή και την ταξινόμηση εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων σύμ-*

φωνα με τον πρότυπο "(σελ.27). Επιπλέον, επιβεβαίωσαν ένα μεγάλο μέρος της περιγραφής των Van Hiele's για τα χαρακτηριστικά των επιπέδων. Επίσης, είπαν « *ότι η θεωρία Van Hiele θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως μια βάση για τα πειράματα διδασκαλίας δομιστών στη γεωμετρία*». Σύμφωνα με αυτούς, τα επίπεδα Van Hiele, η απεικόνιση, η ανάλυση, η διάταξη, η αφαίρεση, και η αυστηρότητα ήταν χρήσιμα στην περιγραφή των μαθητών που διαλογίζονται τις διαδικασίες στους στόχους των πολυγώνων. Επίσης, πρότειναν ότι *οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές θα μπορούσαν να δημιουργήσουν ειδικά μαθήματα βασισμένα στα επίπεδα, και αυτό θα μπορούσε να είναι κατάλληλο για να εξεταστούν οι απαντήσεις των μαθητών. Αυτά τα μαθήματα περιελάμβαναν έννοιες γεωμετρίας, όπως η ομοιότητα, η μέτρηση και η ισότητα ανάμεσα στα σχήματα. Αν και οι συμπεριφορές των μαθητών στα μαθήματα, όπως ο σχεδιασμός, ταυτοποίηση και ορισμός σχημάτων καθώς και η απόδειξη ιδιοτήτων κάποιων σχημάτων ήταν συσχετισμένες με τα επίπεδα Van Hiele , το επίπεδο 5(αυστηρότητα), που περιλαμβάνει συνδυασμό διαφορετικών θεωρημάτων και σύγκριση των διαφορετικών συστημάτων δεν επιβεβαιώθηκε* (Burger & Shaughnessy, 1986).

Τέλος, διαπίστωσαν ότι « *τα επίπεδα Van Hieles αρχικά υποτίθεται ότι ήταν στατικά και ιδιαίτερα. Εντούτοις κάποια στοιχεία έχουν βρεθεί για να υποστηρίξουν την άποψη ότι τα επίπεδα είναι πραγματικά δυναμικά και συνεχή. Αυτό υποτίθεται επειδή μερικοί μαθητές φαίνονται να ταλαντεύονται μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων σε έναν στόχο ή να αναπτύσσουν δραστηριότητες σε διαφορετικά επίπεδα και διαφορετικές περιοχές του περιεχομένου. Σε μερικές περιπτώσεις, οι μαθητές εξέθεσαν τις συμπεριφορές από δύο διαφορετικά επίπεδα στον ίδιο στόχο, δείχνοντας ότι αυτοί ήταν πραγματικά μεταξύ των δύο επιπέδων*», (Senk, 1989 ; Burger & Shaughnessy, 1986).

- Οι ***Fays, Geddes, & Tischler (1988)*** επισήμαναν *ότι «ο αρχάριος πρέπει να περάσει από τα επίπεδα σταδιακά διαφορετικά δεν θα είναι σε θέση να παρακολουθήσει τα μαθήματα. Πάνω σε αυτό, όλοι συμφωνούν σχετικά με τη σημασία της διαδοχικότητας των επιπέδων της θεωρίας στη γεωμετρία».* Επιπλέον, *«όλες οι μέθοδοι διδασκαλίας δεν επιτρέπουν ισότιμα στους μαθητές για να ενταχθούν στα πιο υψηλά επίπεδα λόγω της διαφοράς των μαθητών στον τρόπο μάθησης. Είναι επίσης δυνατό να αντιμετωπιστεί μια απόκλιση μεταξύ ενός μαθητή και ενός καθηγητή που λειτουργούν σε διαφορετικά επίπεδα σκέψης. Παραδείγματος χάριν, ένας μαθητής στο επίπεδο 1 ή στο επίπεδο 2 μερικές φορές δεν μπορεί να καταλάβει την έννοια που διδάσκεται σε επίπεδο 3 ή επίπεδο 4».*

Οι Fays et al (1988) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «*κάθε επίπεδο Van Hiele έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολά και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέει τα σύμβολα αυτά*». Πρόσθεσαν επίσης ότι «*η γλωσσική δομή είναι ένας βασικός παράγοντας στην πρόοδο μέσω των επιπέδων Van Hiele από το συγκεκριμένο (επίπεδο 1), στο αφηρημένο (επίπεδα 4-5)*». Για να τονίσουν τη σημασία της γλώσσας, απέδωσαν πολλές αποτυχίες στη διδασκαλία της γεωμετρίας στα γλωσσικά εμπόδια. Επιπλέον, υποστήριξαν ότι «*η πρόοδος από ένα επίπεδο στο επόμενο εξαρτάται περισσότερο από την διδασκαλία παρά από την ηλικία του μαθητή ή τη βιολογική ωρίμανση*».

➢ Η ***Mayberry (1983)*** πραγματοποίησε μια μελέτη σε 19 δασκάλους δημοτικών σχολείων. Οι στόχοι που υιοθέτησε στη μελέτη της σχεδιάστηκαν για τα πρώτα τέσσερα επίπεδα συμπεριλαμβανομένων των επτά γεωμετρικών εννοιών που ήταν τετράγωνα, ορθογώνια τρίγωνα, ισοσκελή τρίγωνα, κύκλοι, παράλληλες γραμμές, ομοιότητα, και ισότητα. Η μελέτη αυτή έγινε για να εξεταστούν οι ακόλουθες υποθέσεις: *"Η1 - για κάθε γεωμετρική έννοια, ένας μαθητής σε επίπεδο n θα απαντήσει σε όλες τις ερωτήσεις σε επίπεδο κάτω από το n στο κριτήριο αλλά θα δυσκολευτεί στο κριτήριο στις ερωτήσεις επάνω από το επίπεδο n". "Η2- ένας μαθητής θα ικανοποιήσει όλες τις γεωμετρικές έννοιες του κριτηρίου που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο" (*Mayberry 1983 *σελ.58).*

Υπενθυμίζουμε τις δύο ιδιότητες της θεωρίας του Van Hiele (1986): (α) Ένας μαθητής δεν μπορεί να αποδώσει επαρκώς σε δεδομένο επίπεδο χωρίς να έχει γνώση του προηγούμενου επιπέδου που του επιτρέπει για να σκεφτεί διαισθητικά για κάθε προηγούμενο επίπεδο, (σταθερή αλληλουχία-fixed sequence), (β) εάν το επίπεδο σκέψης ενός μαθητή είναι χαμηλότερο από τη γλώσσα της διδασκαλίας, τότε αυτός δεν θα κατανοεί την διδασκαλία (διαχωρισμός-separation). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης της Mayberry (1983), φαίνεται ότι το πρώτο ζήτημα υποστηρίχθηκε από την αποδοχή της υπόθεσης Η1. Επίσης, φαίνεται ότι "*η διαπίστωση ότι το 70% των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές που είχαν πάρει τη γεωμετρία γυμνασίου ήταν κάτω από το επίπεδο 4 (αφαίρεση)*". Επιπλέον, *οι απαντήσεις των θεμάτων έδειξαν ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στη μελέτη δεν ήταν στο κατάλληλο επίπεδο για να καταλάβουν την θεωρητική γεωμετρία, και ότι η διδασκαλία που είχαν δεχθεί δεν τους έφερε στο επίπεδο 4 (αφαίρεση). Οι απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι ο τυπικός μαθητής της μελέτης δεν ήταν έτοιμος για μια επίσημη παραγωγική σειρά μαθημάτων γεωμετρίας* (Mayberry, 1983). Επιπλέον πρόσθεσε, "*εάν περαιτέρω επιβεβαιώστε την ιεραρχική φύση των επιπέδων και εάν οι φάσεις της μετακίνησης από ένα επίπεδο στο*

επόμενο πιο υψηλό επίπεδο προσδιορίζονται, κατόπιν η κατάλληλη εμπειρία μπορεί να έχει ως σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να σημειώσουν πρόοδο. Για να εφαρμόσει αυτή την εμπειρία, ο καθηγητής πρέπει να αποφασίσει το επίπεδο στο οποίο ένας μαθητής λειτουργεί ", (σελ.68).

➢ Οι ***Gutierrez, Jaime, & Fortuny (1991)*** μελέτησαν 9 μαθητές της 8ης βαθμίδας και 41 δασκάλους και υποστήριξαν την πρότασή τους με ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου που αξιολογεί τη δυνατότητα των μαθητών να σκέφτονται στην τρισδιάστατη γεωμετρία. Ο σημαντικότερος στόχος της μελέτης τους ήταν να παρουσιαστεί εναλλακτικός τρόπος να αξιολογηθούν τα επίπεδα των μαθητών που είναι μεταξύ δύο επιπέδων. Χρησιμοποίησαν μια εκατονταβάθμια αριθμητική κλίμακα μεταξύ των επιπέδων. Αυτή η αριθμητική κλίμακα διαιρείται σε πέντε ποιοτικές κλίμακες: "Οι τιμές στο διάστημα" (0%, 15%) σημαίνουν "καμία απόκτηση[3]" του επιπέδου. "Οι τιμές στο διάστημα " (15%, 40%) σημαίνουν "χαμηλή απόκτηση" του επιπέδου. " Οι τιμές στο διάστημα " (40%, 60%) σημαίνουν "μεσαία απόκτηση" του επιπέδου. "Οι τιμές στο διάστημα" (60%, 85%) σημαίνουν "υψηλή απόκτηση" του επιπέδου. Τέλος, "οι τιμές στο διάστημα" (85%, 100%) σημαίνουν τη "πλήρη απόκτηση" του επιπέδου " (Gutierrez ; Jaime, & Fortuny 1991 , σελ.43). Σύμφωνα με αυτούς, αυτή η μέθοδος επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές για να αποφασίσουν για τη μέθοδο κυριάρχησης των επιπέδων Van Hiele .

Σύμφωνα με τους Burger & Shaughnessy (1986), *η πρόοδος μέσω των επιπέδων είναι συνεχής και όχι κατά τμήματα*. Επομένως, οι Gutierrez et al (1991) έκαναν την έρευνά τους βασισμένοι στα ακόλουθα δύο επιχειρήματα *"(α) για να έχουμε μια πληρέστερη άποψη της τρέχουσας γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, πρέπει να λάβουμε υπόψη την ικανότητά τους να χρησιμοποιήσουν κάθε ένα από τα επίπεδα Van Hiele, παρά την ενσωμάτωση τους σε ένα μόνο επίπεδο, (β) συνέχεια στα επίπεδα Van Hiele σημαίνει ότι η απόκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου δεν συμβαίνει στιγμιαία ή πολύ γρήγορα αλλά μάλλον μπορεί να πάρει αρκετούς μήνες ή ακόμα και έτη "* ,(Gutierrez et al 1991, σελ.238). Οι Gutierrez et al (1991) έβγαλαν το συμπέρασμα ότι «*η θεωρία Van Hiele πρέπει να προσαρμοστεί στην πολυπλοκότητα της ανθρώπινης διαδικασίας συλλογισμού επειδή οι άνθρωποι δεν έχουν μια απλή και γραμμική διαδικασία σκέψης»*. Επιπλέον, κατάλαβαν ότι *μερικοί μαθητές χρησιμοποίησαν διάφορα επίπεδα να διαλογιστούν συγχρόνως*. Σύμφωνα με τα συμπεράσματά τους, είναι ενδιαφέρον να

[3] Στην ερευνά μας **κυριάρχηση**

σημειωθεί ότι *τα χαμηλότερα επίπεδα απαιτούσαν γενικά περισσότερο χρόνο κατάκτησης από ότι τα υψηλότερα για μερικούς μαθητές του επιπέδου 3, παρά των επιπέδων 1-2. Μια βαθύτερη μελέτη είναι επομένως απαραίτητη για να διαμορφώσει το λόγο που συμβαίνει αυτό: λάθη στα τεστ, μέθοδοι αξιολόγησης, ή μέθοδοι διδασκαλίας;* (Gutierrez et al, 1991).

Οι Gutierrez et al (1998) ανέφεραν ότι «*οι περισσότεροι μαθητές ανάμεσα στην 6η και 10η βαθμίδα δεν ολοκλήρωναν την κατάκτηση του επιπέδου 1, αλλά αυτοί προχωρούσαν προς την κυριάρχηση του επιπέδου 2.Οι μαθητές του τρίτου και τέταρτου έτους στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρουσίαζαν την ίδια συμπεριφορά μεταξύ των επιπέδων 2 και 3*». Υποστήριξαν ότι αυτό το συμπέρασμα για την ιεραρχική δομή των επιπέδων Van Hiele είναι σε αντίθεση με την αξίωση του Van Hiele (1986) ο οποίος είπε, ότι "*οι τρόποι σκέψης για το βασικό επίπεδο, το δεύτερο επίπεδο, και το τρίτο επίπεδο έχουν μια ιεραρχική σειρά . Η σκέψη στο δεύτερο επίπεδο δεν είναι δυνατή χωρίς αυτήν του βασικού επιπέδου, η σκέψη στο τρίτο επίπεδο δεν είναι δυνατή χωρίς αυτήν του δεύτερου επιπέδου "* (Gutierrez et al 1991 σελ.51).

Τελικά, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η δοκιμή τους δεν προορίζεται να αξιολογήσει ένα σταθερό επίπεδο Van Hiele, "*αλλά είχαν ως στόχο τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης των επιπέδων"* (Gutierrez et al 1991 σελ..45). Η δοκιμή με 309 μαθητές από την 6η μέχρι την 12η βαθμίδα καταδεικνύει μικρές διαφορές στα επίπεδα συλλογισμού διαφορετικών μαθητών. Υποστήριξαν ότι αυτές οι διαφορές δεν θα είχαν ανακαλυφθεί με τις κλασσικές μεθόδους. Επομένως, "*αυτή η τεχνική αξιολόγησης είναι σαφώς μια πρόοδος στη χρήση των επιπέδων Van Hiele* " (Gutierrez et al, 1998, σελ.45).

Οι ***Geddes & Fortunato (1993)*** συνέστησαν ότι «*για το μέσο όρο των μαθητών, οι καθηγητές της γεωμετρίας πρέπει να εστιάσουν στα: επίπεδο 1 (Οπτικό), επίπεδο 2 (ανάλυση) και επίπεδο 3 (άτυπη αφαίρεση) της θεωρίας Van Hiele*». Είπαν επίσης ότι «*τα περισσότερα από τα εγχειρίδια για τους μέσους μαθητές περιέχουν ένα ή δύο κεφάλαια σχετικά με την άτυπη γεωμετρία. Εντούτοις, οι καθηγητές δεν δίνουν αρκετή προσοχή σε αυτά τα κεφάλαια, και οι περισσότεροι καθηγητές καθυστερούν συχνά στη διδασκαλία της γεωμετρίας*». Διαπίστωσαν επίσης ότι *εάν οι μαθητές έχουν πρόβλημα στη εκμάθηση της γεωμετρίας, κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι σύμφωνα με το πρότυπο επειδή έχουν διδαχθεί σε πιο υψηλό επίπεδο έτσι και λειτουργούν*. Επιπλέον, *δύο άτομα (δάσκαλος και μαθητής, ή μαθητής και συντάκτης εγχειριδίων) που διαλογίζονται με διαφορετικά γλωσσικά σύμβολα και χρησιμοποιούν διαφορετικές σχέσεις, δύ-*

σκολα επικοινωνούν. Είναι μια μεγάλη πρόκληση να διδάσκεις μαθητές σε διαφορετικά επίπεδα μέσα στην ίδια τάξη.

Σύμφωνα με τη μελέτη των Geddes & Fortunato (1993), τα τελευταία χρόνια, διάφορες έρευνες εξέτασαν και έλεγξαν τις απόψεις του προτύπου Van Hiele σε σχέση με τη μέση βαθμίδα. Αυτά τα προγράμματα έχουν αναπτύξει δραστηριότητες και εμπειρίες βασισμένες στη θεωρία Van Hiele προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές στην απόκτηση της βαθύτερης επίγνωσης και των υψηλότερων δεξιοτήτων σε ζητήματα σκέψης.

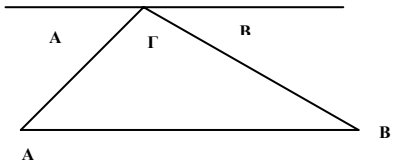
Με αυτήν την προοπτική, οι ***Clements & Battista (1990)*** πρότειναν ότι το περιβάλλον της γλώσσας Logo ίσως βοηθήσει τα παιδιά να βελτιώσουν τη γεωμετρική τους αντίληψη και ικανότητα σκέψης. Επιβεβαίωσαν την χρήση της Logo στα μαθήματα γεωμετρίας στα σχολεία επειδή έχει τη δυνατότητα να βελτιώσει την μάθηση των παιδιών.

- Ο ***Choi (1999)*** υποστηρίζει ότι «*η ανικανότητα ενός μαθητή να σκεφτεί λογικά δεν οφείλεται σε βιολογική ανωριμότητα, συνεπή με τα επίπεδα του Piaget, αλλά μάλλον προέρχεται από μια έλλειψη κατανόησης των κανόνων της λογικής. Η θεωρία των Van Hiele επιπέδων υποστηρίζει ότι ικανότητα κάποιου να σκεφτεί λογικά μπορεί να υποκινηθεί με τη διαδικασία εκμάθησης. Εάν αυτό συμβεί, κατόπιν το πρόγραμμα σπουδών και οι καθηγητές διαδραματίζουν έναν πάρα πολύ σημαντικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών της γεωμετρίας. Εάν οι μαθητές προκαλούνται σε παρόν επίπεδό τους με τρόπους που τους ενθαρρύνουν για να σκεφτούν στο επόμενο πιο υψηλό επίπεδο, είναι πιθανό ότι η κατανόηση τους σε θέματα γεωμετρίας θα αυξηθεί. Εντούτοις, σύμφωνα με αυτό το πρότυπο, φαίνεται πιθανό ότι ο μαθητής, ο καθηγητής, και το εγχειρίδιο μπορούν κάθε ένα να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικό επίπεδοVan Hiele .*

- Ο ***De Villiers (1999)*** σημειώνει ότι «*ο παραγωγικός συλλογισμός είναι δυνατός μόνο σε επίπεδο 3 ή υψηλότερο, και ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν αρχικά το ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων, και των αποδείξεων σε επίπεδο 4. Με άλλα λόγια, για να ανταποκριθούν οι μαθητές στα πρότυπα γεωμετρίας που περιγράφονται στα πρότυπα των αρχών του NCTM, πρέπει να δραστηριοποιούνται σε επίπεδο Van Hiele 4».* Σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hiele επιπέδων, οι μαθητές των επιπέδων 1 και 2 χρειάζονται άτυπες δραστηριότητες που θα τους βοηθήσουν στην μετάβαση σε παραγωγικά επιχειρήματα του επιπέδου 3. Ο De Villiers (1999) υποστηρίζει ότι *αυτές οι άτυπες δραστηριότητες πρέπει να περιέχουν τις κατάλληλες "εννοιολογικές υποδομές" που θα*

διευκολύνουν τη μετάβαση στο επίπεδο 3 και πάνω. Παραδείγματος χάριν, οι καθηγητές λένε συχνά στους μαθητές ότι το άθροισμα των μέτρων των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Μερικοί καθηγητές ίσως δίνουν στους μαθητές το στόχο κατασκευάζοντας τα τρίγωνα, μετρώντας τις γωνίες και υπολογίζοντας το άθροισμα των μέτρων των γωνιών». Σύμφωνα με τον De Villiers, «*αυτό δεν θα ήταν μια κατάλληλη Van Hiele δραστηριότητα επειδή δεν έχει καμία "εννοιολογική υποδομή" που να εξηγεί γιατί συμβαίνει αυτό. Αυτός επισημαίνει ότι ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, όπως το Geometer Sketchpad, μπορεί να παρέχει μια σημαντικότερη δραστηριότητα για τους μαθητές.*

Παραδείγματος χάριν, ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί, να ονομαστεί, να αντιγραφεί, να μεταφραστεί και να περιστραφεί έτσι ώστε μια πλευρά των δύο τριγώνων να συμπίπτει διαμορφώνοντας ένα παραλληλόγραμμο που κόβεται από μια διαγώνιο. Χρησιμοποιώντας τις συμπίπτουσες πλευρές ως εγκάρσια κοπή και τα δύο ζευγάρια των παράλληλων πλευρών, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν έναν αριθμό με διάφορα ζευγάρια εναλλασσομένων εσωτερικών γωνιών. Φανταστείτε τη δυσκολία να ολοκληρώσουν μια τέτοια κατασκευή με το χέρι χρησιμοποιώντας το ψαλίδι και ένα μοιρογνωμόνιο. Ένας τολμηρός μαθητής ίσως να παρατηρήσει ότι όταν τραβάμε μια ευθεία παράλληλη σε μια πλευρά του τριγώνου από την κορυφή που βρίσκεται απέναντι από εκείνη την πλευρά,



ΣΧΗΜΑ 1

όπως φαίνεται στο σχήμα 1, μια ευθεία γωνία διαμορφώνεται από τις τρεις γωνίες. Τα μέτρα αυτών των γωνιών είναι ίσα με τα μέτρα των τριών γωνιών του τριγώνου.

Υπάρχει ένας λόγος για τον οποίο το άθροισμα είναι 180°. Αν οι μαθητές κάνουν ή όχι τέτοιες συνδέσεις, αυτή η δραστηριότητα παρέχει ένα πλαίσιο με το οποίο η απόδειξη μπορεί αργότερα να κατασκευαστεί. Με άλλα λόγια, το λογισμικό της δυναμικής Γεωμετρίας Geometer Sketchpad μπορεί να είναι μια ισχυρή αφετηρία για την κατανόηση των παραγωγικών επιχειρημάτων. Υπάρχει ένας καλός λόγος για τον οποίο το άθροισμα των μέτρων των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° εντούτοις, οι μαθητές να μην καταλάβουν ποτέ εκείνο το λόγο μόνο με τη μέτρηση των γωνιών με ένα μοιρο-

γνωμόνιο και αθροίζοντας.

Ο De Villiers (1999) είναι αρκετά επικριτικός με την παραδοσιακή παραγωγική μέθοδο στη γεωμετρία, επειδή οι καθηγητές παρέχουν στους μαθητές όλους τους ορισμούς, τα αξιώματα, τα θεωρήματα και τις αποδείξεις. Σε αυτό το πλαίσιο, η γεωμετρία είναι απλά κάτι που απομνημονεύεται. Με άλλα λόγια, με την παροχή όλων αυτών των πληροφοριών στους μαθητές τους, οι καθηγητές τους στερούν την ευκαιρία να οργανώσουν (ή να κατασκευάσουν) αυτές τις πληροφορίες. Ο De Villiers παρομοιάζει αυτό με ένα μαγείρεμα στο οποίο ο καθηγητής παρουσιάζει μόνο εικόνες με κέικ. Είτε μιλάμε για το ψήσιμο είτε για την παρουσίαση αποδείξεων, το σημαντικό είναι ότι οι μαθητές ετοιμάζονται "*να μαγειρέψουν*".

Με το λογισμικό της δυναμικής Γεωμετρίας Geometer Sketchpad οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν σχήματα και μετά να τα μεταβάλλουν με το σύρσιμο μιας κορυφής ή μιας άκρης. Αυτό το είδος της κατασκευής βοηθά στη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3 του μοντέλου των Van Hiele επιπέδων (De Villiers, 1999) . Και συνεχίζει «*με δεδομένο χρόνο για πρακτική με το λογισμικό και την έγκαιρη εισαγωγή από το καθηγητή, οι μαθητές είναι σε θέση να δουν τη διαφορά μεταξύ των σχέσεων που έβαλαν στο σχήμα και τις σχέσεις που ήταν απλά μια φυσική συνέπεια των μεταβολών. Οι μαθητές έχουν έπειτα μια καλύτερη κατανόηση της διαφοράς μεταξύ της προϋπόθεσης και του συμπεράσματος μιας επίπτωσης, τα οποία είναι ζωτικής σημασίας για το επίπεδο 3 και τις υψηλότερες αφαιρέσεις*».

➢ Η ***Mason (1997)*** διεύθυνε ένα ερευνητικό πρόγραμμα για τη γεωμετρική κατανόηση και λογική σε 120 ταλαντούχους μαθητές στα μαθηματικά μεταξύ της 6ης και 8ης βαθμίδας . Η μελέτη της περιέγραφε και ανέλυε τις απαντήσεις εκείνων των μαθητών που συμμετείχαν στο τεστ Van Hiele της γεωμετρίας και 64 από εκείνους συμμετείχαν σε 30-45 λεπτες ατομικές συνεντεύξεις.

Η Mason (1997) υποστήριξε ότι «*αν και αυτοί οι ταλαντούχοι μαθητές βρίσκονται μεταξύ της 6ης και 8ης βαθμίδας η απόδοση τους στα γεωμετρικά τεστ Van Hiele είναι υψηλότερη από εκείνους που παρακολουθούν μαθήματα γεωμετρίας στο γυμνάσιο*». Έδωσε επίσης ένα παράδειγμα που παρέχει λεπτομερείς πληροφορίες για τα επίπεδα Van Hiele εκείνων των ταλαντούχων μαθητών σε σύγκριση με τους άλλους μαθητές που συμμετείχαν στη μελέτη Senk .

➢ Η ***Senk (1983)*** διαπίστωσε ότι *η πρόοδος των μαθητών στο γράψιμο των γεωμετρικών αποδείξεων συσχετίστηκε θετικά με το επίπεδο Van Hiele των μαθητών και επίσης με την πρόοδο στο χαρακτηριστικό πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας μη-*

απόδειξης. Στη μελέτη της, η Senk διαπίστωσε ότι *οι μαθητές που αρχίζουν μια τάξη γεωμετρίας στο επίπεδο Van Hiele 2 ή υψηλότερο απέκτησαν την ικανότητα να γράψουν αποδείξεις με μεγαλύτερη άνεση από τους μαθητές που άρχισαν στο επίπεδο Van Hiele 1. Ομοίως, εκείνοι οι μαθητές με τα πιο υψηλά επίπεδα Van Hiele έτειναν για να είναι καλύτεροι συγγραφείς απόδειξης από εκείνους με τα χαμηλότερα επίπεδα Van Hiele.*

Η Senk (1989), χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του CDASSGP σε μαθητές που αρχίζουν μαθήματα γεωμετρίας στο γυμνάσιο, διαπίστωσε ότι *241 μαθητές σε 11 σχολεία σε 5 κράτη που "ταίριαζε το πρότυπο" σύμφωνα με τα αποτελέσματα της δοκιμής, 27% δεν είχε κυριαρχήσει στο επίπεδο 1, 51% κατείχε το επίπεδο 1, 15% κατείχε το επίπεδο, 2, 7% κατείχε το επίπεδο 3, μόνο ένας μαθητής κατείχε το επίπεδο 4 (4%), και κανένας μαθητής δεν είχε κυριαρχήσει στο επίπεδο 5. Από το 77% των ταλαντούχων μαθητών που "ταίριαζαν στο πρότυπο" αυτής της έρευνας, μόνο το 5% δεν είχε κυριαρχήσει στο επίπεδο 1 και το 17% ήταν ταξινομημένα στα επίπεδα 4 ή 5 Van Hiele*. Στη μελέτη Senk, *μόνο το 22% ήταν επάνω από το επίπεδο 2 το 49% των ταλαντούχων μαθητών σε αυτή την μελέτη ήταν επάνω από το επίπεδο 2*.(Mason, 1997, σελ.45). Επιπλέον, στη μελέτη της διαπίστωσε ότι *τα επίπεδα Van Hiele είναι ιεραρχικά στους ταλαντούχους μαθητές στα μαθηματικά.*

Η Senk (1989) εξέτασε *τη σχέση ανάμεσα στην επίτευξη γραφής γεωμετρικών αποδείξεων και στο επίτευγμα τυπικής γεωμετρικής ευφυΐας πάνω στα επίπεδα Van Hiele*. Για τούτο τον σκοπό επανεξέτασε μερικά μέρη του προγράμματος CDASSG (γνωστική ανάπτυξη και επίτευγμα στη γεωμετρία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) που διηύθυνε ο Usiskin (1982). Από τους 2699 μαθητές που συμμετέχουν στο αρχικό πρόγραμμα, πήρε μόνο 241 από 11 σχολεία σε πέντε πολιτείες.

Η μελέτη της Senk (1989) έδειξε ότι *ένας μαθητής που αρχίζει μια σειρά μαθημάτων γεωμετρίας γυμνασίου δεν παρουσιάζει γνώση γεωμετρίας επιπέδου 1 ή δεν είναι δεν είναι σε θέση να οραματιστεί σχήματα συνηθισμένων γεωμετρικών μορφών (επίπεδο 0) και έχει ελάχιστες ευκαιρίες να μάθει να γράφει γεωμετρικές αποδείξεις προς το τέλος της χρονιάς. Ένας πάλι που είναι στην αρχή του έτους σε θέση να απεικονίσει τις μορφές των γεωμετρικών σχημάτων αλλά δεν είναι ικανός να περιγράψει τις ιδιότητές τους (επίπεδο 1) μπορεί επιτυχώς να κάνει μερικές απλές τυποποιημένες αποδείξεις γεωμετρίας μέχρι το τέλος του έτους, αλλά ένας τέτοιος μαθητής έχει μια μικρή πιθανότητα στο γράψιμο απόδειξης. Εντούτοις, ένας μαθητής που κατέχει γεωμετρικές γνώσεις στο επίπεδο 2 ή είναι σε θέση να απεικονίσει τις μορφές των γεωμετρικών σχημάτων και να*

περιγράφει τις ιδιότητές τους έχει μια πιθανότητα πενήντα τοις εκατό να γράφει αποδείξεις μέχρι το τέλος του έτους. Επιπλέον, ένας μαθητής που κατέχει γεωμετρικές γνώσεις επιπέδου 3 ή είναι σε θέση να σκέφτεται ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων και να βλέπει τις σχέσεις ανάμεσα σε αυτές, έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να γράφει αποδείξεις μέχρι το τέλος του έτους.

Σύμφωνα με τον Van Hiele (1986), το επίπεδο 3 είναι το ενδιάμεσο βήμα μεταξύ της άτυπης και τυπικής γεωμετρίας. Η γνώση της γεωμετρίας σε αυτό το επίπεδο κατασκευάζεται από σύντομα βήματα συλλογισμού σχετικά με τις ιδιότητες ενός σχήματος και το περιεχόμενο του μαθήματος. Ένας μαθητής που λειτουργεί σε αυτό το επίπεδο είναι σε θέση να ακολουθήσει μια σύντομη απόδειξη βασισμένη στις ιδιότητες που κέρδισε από συγκεκριμένες εμπειρίες, αλλά είναι ανίκανος να κατασκευάσει ο ίδιος μια απόδειξη. Εάν οι μαθητές κατέχουν το επίπεδο 4 ή 5 γεωμετρικής σκέψης τότε θα είναι σε θέση να φτιάχνουν και να γράφουν τις τυπικές αποδείξεις. Η μελέτη της Senk έδειξε ότι *αν και δεν υπάρχει κανένα μεμονωμένο επίπεδο Van Hiele το οποίο να εξασφαλίζει μελλοντική επιτυχία στο γράψιμο αποδείξεων, το επίπεδο 2 φαίνεται να είναι το κρίσιμο επίπεδο εισόδου στο γράψιμο απόδειξης*. Η Senk συμπέρανε ότι "*η προφητική ισχύς του προτύπου Van Hiele υποστηρίχθηκε. Εντούτοις, η υπόθεση ότι μόνο οι μαθητές σε επίπεδο 4 ή 5 μπορούν να γράψουν τις αποδείξεις δεν υποστηρίχθηκε* " (Senk 1989 σελ.309).

➢ Επιπλέον, οι Clements & Battista (1990) καθόρισαν και περιέγραψαν το επίπεδο 0 (προαναγνώρισης) ως βασικό επίπεδο.

3.2 Έρευνες στον Ελληνικό χώρο

Ο Ζάχος (2000) στην έρευνά του έθεσε δύο ερευνητικά ερωτήματα που είχαν θεωρητικό, αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον, ήταν δε τα ακόλουθα:

a. Βρίσκονται τα τέσσερα επίπεδα Van Hiele σε διάταξη κλίμακας μεταξύ τους ; Δηλαδή ,το πρώτο επίπεδο κατακτάται πριν από το δεύτερο, το δεύτερο πριν από το τρίτο, κ.λ.π ;
b. Ποια είναι η κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα; Με βάση τη θεωρία Van Hiele, είναι σε θέση οι μαθητές να παρακολουθήσουν μαθήματα θεωρητικής Γεωμετρίας;

Το δείγμα του αποτέλεσαν 458 μαθητές της δευτέρας Λυκείου τεσσάρων Γενικών Λυκείων της Αθήνας. Το πειραματικό του υλικό ήταν ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών βασισμένο στο ερωτηματολόγιο του καθηγητή του πανεπιστημίου του

Σικάγο της Αμερικής Zalman Usiskin. Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 20 ερωτήσεις (5 ερωτήσεις ανά επίπεδο). Χρησιμοποίησε το κριτήριο 3 από τα 5 (δηλαδή ένας μαθητής κατακτούσε ένα επίπεδο αν απαντούσε σωστά σε 3 από τις 5 ερωτήσεις του επιπέδου) για να αναθέσει σε ένα μαθητή ένα επίπεδο Van Hiele γεωμετρικής σκέψης. Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποίησε την μέθοδο Guttman (μέθοδος εκτίμησης της ύπαρξης κλίμακας) και το μέτρο εκτίμησης της ύπαρξης κλίμακας τον «συντελεστή αναπαραγωγικότητας» (rep) . Για το συντελεστή αναπαραγωγικότητας βρήκε την τιμή rep=0,91 πράγμα που για την μέθοδο Guttman σημαίνει ότι η τιμή αυτή προτείνει ότι τα τέσσερα επίπεδα, όπως αυτά εξετάστηκαν με την βοήθεια του συγκεκριμένου ερωτηματολογίου, βρίσκονται μεταξύ τους σε διάταξη κλίμακας. Το αποτέλεσμα αυτό όπως αναφέρει ο Ζάχος (2000) αναφορικά με την ιεραρχική διάταξη των επιπέδων, παρέχει υποστήριξη στην άποψη που έχει διατυπωθεί και από άλλους ερευνητές (Van Hiele 1957/1984 ; Mayberry 1983). Η Mayberry είχε διαπιστώσει ότι τα τέσσερα πρώτα επίπεδα Van Hiele είναι ιεραρχικά διατεταγμένα μεταξύ τους , χρησιμοποιώντας την μέθοδο της συνέντευξης. Το νέο στοιχείο που εισάγει η έρευνα του Ζάχου είναι ότι ελέγχει την ύπαρξη κλίμακας μεταξύ των επιπέδων, με την βοήθεια ενός ερωτηματολογίου πολλαπλών επιλογών.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα βρήκε ότι το 75% των μαθητών του δείγματος ήταν κάτω από το επίπεδο 4 πράγμα που σύμφωνα με την θεωρία Van Hiele για να είναι ένας μαθητής σε θέση να παρακολουθήσει μαθήματα θεωρητικής γεωμετρίας(γεωμετρικές αποδείξεις θεμελιωμένες σε ένα αξιωματικό σύστημα) απαιτείται να έχει φθάσει στο επίπεδο 4, άρα δεν μπορούσαν αυτοί οι μαθητές να παρακολουθήσουν με ευκολία τη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

Οι Ντζιαχρήστος Β. και Ζαράνης Ν. (2001) στο άρθρο τους με τίτλο «Η αξιοποίηση της θεωρίας Van Hiele στην Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με τη Βοήθεια Εκπαιδευτικού Λογισμικού» στη Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 56, 2001 βάζουν τις παρακάτω ερευνητικές υποθέσεις:

Ερευνητική υπόθεση 1 (ΕΥ1) *:* Η διδασκαλία Γεωμετρίας με το μοντέλο van Hiele και η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες μέσω του εκπαιδευτικού λογισμικού που κατασκευάσαμε *(πειραματική ομάδα – Π.Ο.)*, αυξάνει τη *βελτίωση* της επίδοσής τους, σε σχέση με την επίδοση των μαθητών που διδάσκονται Γεωμετρία με την παραδοσιακή μέθοδο *(ομάδα ελέγχου – Ο.Ε.)*.

Ερευνητική υπόθεση 2 (ΕΥ2) *:* Το επίπεδο van Hiele των μαθητών στην αρχική δοκιμασία των δύο ομάδων της *ερευνητικής υπόθεσης 1* είναι όμοιο.

Ερευνητική υπόθεση 3 (ΕΥ3) *:* Η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών των δύο τμημάτων *της πειραματικής ομάδας της ερευνητικής υπόθεσης 1*, ήταν όμοια και στα δυο τμήματα, αν και είχαν διαφορετικούς διδάσκοντες.

Το δείγμα της έρευνας τους αποτέλεσαν μαθητές στης Α΄ τάξης του 5^{ου} Γυμνασίου Αμαρουσίου. Η κλήρωση που έγινε μεταξύ των τεσσάρων τμημάτων της Α΄ Γυμνασίου, δημιούργησε τις εξής ομάδες:

α) Α1 και Α2 την *πειραματική ομάδα (Π.Ο.)*,

β) Α3 και Α4 την *ομάδα ελέγχου (Ο.Ε.)*.

Στην πρώτη ομάδα εφάρμοσαν την προτεινόμενη μέθοδο και στη δεύτερη ομάδα την παραδοσιακή μέθοδο.

Το επόμενο βήμα μετά το ορισμό του δείγματος ήταν να μετρηθούν οι γνώσεις των μαθητών. Για το σκοπό αυτό κατασκεύασαν ερωτηματολόγια (δοκιμασίες) που προσδιόριζαν το επίπεδο van Hiele των μαθητών στη Γεωμετρία.

Τα ερωτηματολόγια χωρίστηκαν σε αρχικές δοκιμασίες (pre-test) και τελικές δοκιμασίες (post-test), που διαιρέθηκαν στα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele.

Στο κάθε επίπεδο αντιστοιχούσε ένα ερωτηματολόγιο. Θεώρησαν αναγκαίο για να μπορεί να γίνει η σύγκριση της απόδοσης των μαθητών "πριν" και "μετά" την πειραματική διδασκαλία, να κατασκευαστούν όλα τα ερωτηματολόγια με τον ίδιο αριθμό ερωτήσεων και να διαφέρουν κυρίως στο βαθμό δυσκολίας.

Για τη σύνταξη των ερωτηματολογίων χρησιμοποίησαν το τροποποιημένο μοντέλο van Hiele από τον Alan Hoffer.

Από τη στατιστική τους ανάλυση διαπίστωσαν ότι αληθεύει η *Ερευνητική υπόθεση 1* σε επίπεδο σημαντικότητας a=0,05, δηλαδή ότι *η επίδοση των μαθητών της Π.Ο. είναι καλύτερη από εκείνη της Ο.Ε.*.

Το αποτέλεσμα της *Ερευνητικής υπόθεσης 1* συμφωνεί με την έρευνα των Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M.,[24] , (1987) που διαπίστωσαν ότι στο μάθημα της Γεωμετρίας το λογισμικό *"Geometric Supposer"*, βοηθάει τους μαθητές Γυμνασίων και Λυκείων στον σχηματισμό λογικών αποδείξεων.

Η δεύτερη ερευνητική υπόθεση χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί αν η αυξημένη βελτίωση της πειραματικής ομάδας οφείλεται στη καλύτερη αρχική γνώση των μαθητών αυτών ως προς τη Γεωμετρία ή όχι .

Τα δεδομένα αυτής της υπόθεσης τα καθόρισαν αναλυτικά από τον πίνακα 2, που αναφέρεται *στο επίπεδο van Hiele* των μαθητών στην αρχική δοκιμασία.

ΟΜΑΔΑ	*ΕΠΙΠΕΔΟ VAN HIELE ΑΡΧΙΚΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ*				
	ΜΗΔΕΝΙΚΟ	*ΠΡΩΤΟ*	*ΔΕΥΤΕΡΟ*	*ΤΡΙΤΟ*	ΣΥΝΟΛΟ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ	**34**	**8**	**1**	**0**	**43**
ΕΛΕΓΧΟΥ	**39**	**5**	**1**	**0**	**45**

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 *Το επίπεδο van Hiele των μαθητών στην αρχική δοκιμασία*

Από τα παραπάνω συμπέραναν ότι αληθεύει η *Ερευνητική υπόθεση 2* σε επίπεδο σημαντικότητας a=0,05, δηλαδή ότι το επίπεδο van Hiele των μαθητών στην αρχική δοκιμασία της Π.Ο. και της Ο.Ε. είναι όμοιο. Επομένως, η αυξημένη βελτίωση της πειραματικής ομάδας δεν οφείλεται στη καλύτερη αρχική γνώση των μαθητών αυτών ως προς τη Γεωμετρία.

Η τρίτη *ερευνητική υπόθεση* χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί αν η αυξημένη βελτίωση της πειραματικής ομάδας οφείλεται στη μέθοδο διδασκαλίας και όχι στο διδάσκοντα

Τα δεδομένα της παρούσας υπόθεσης καθορίστηκαν αναλυτικά από τον πίνακα 3, που αναφέρεται *στο επίπεδο van Hiele* των μαθητών στην αρχική δοκιμασία

ΤΜΗΜΑ	*ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*						
	ΑΡΝΗΤΙΚΗ- κάτω από 0	*ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΤΙΚΗ* 1 έως 30	*ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΗ* 31 έως 60	*ΚΑΛΗ* 61 έως 90	*ΑΡΚΕΤΑ ΚΑΛΗ* 91 έως 120	*ΠΟΛΥ ΚΑΛΗ* 121 έως 150	*ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ΚΑΛΗ* 151 έως 180
Α1	**0**	**0**	**4**	**15**	**3**	**0**	**0**
Α2	**0**	**0**	**6**	**10**	**5**	**0**	**0**

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 *Η βελτίωση των μαθητών στη Γεωμετρία.*

Από τα παραπάνω συμπέραναν ότι αληθεύει η *Ερευνητική υπόθεση 3* σε επίπεδο σημαντικότητας a=0,05, δηλαδή ότι η βελτίωση των μαθητών *της πειραματικής ομάδας* ήταν όμοια και στα δύο τμήματα αν και είχαν διαφορετικούς διδάσκοντες.

3.3 Η τεχνολογία αρωγός στη γεωμετρική σκέψη

➢ Ο ***Choi (1999)*** επισημαίνει ότι ενώ οι πολυάριθμοι ερευνητές έχουν επικυρώσει τα επίπεδα Van Hiele, "*λίγοι ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας των υπολογιστών για να ερευνήσουν την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας".*

Ο Choi (1999) ανακάλυψε ότι η χρήση του δυναμικού λογισμικού υπολογιστών Geometer Sketchpad βοήθησε τη βελτίωση των μαθητών στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης όταν χρησιμοποιήθηκε από κοινού με την οδηγίες που βασίστηκαν

στα επίπεδα Van Hiele.Εγκωμιάζει ιδιαίτερα τη χρήση του λογισμικού Geometer Sketchpad, λέγοντας "*θα μπορούσε να καταστήσει τις οδηγίες για την διδασκαλία της γεωμετρίας αποτελεσματικές, να διευκολύνει τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος των μαθητών, να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να βοηθήσει τους μαθητές στις μαθησιακές δυσκολίες τους και στην εξοικονόμηση χρόνου για τη μάθηση*" (Choi, 1999). Επιπλέον, οι "*διερευνητικές δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται στο λογισμικό που αναπτύχθηκε για τις γεωμετρικές έρευνες θα μπορούσαν να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθητών της υπόθεσης στη διαδικασία θεωρήματος-απόδειξης*"

Ο ***Yousef (1997)*** υποστηρίζει ότι, *η απεριόριστη χρήση της τεχνολογίας βελτιώνει τα κίνητρα των μαθητών* .Δέχεται επίσης την χρήση του λογισμικού υπολογιστών σε μικρότερες ηλικίες για το μάθημα της Γεωμετρίας. Ο ***Wertheimer*** (1990) αναφερόμενος στον Yousef, (1997) απαριθμεί έξι θετικά βήματα που έχουν σχέση με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη:

1. *Η τεχνολογία παρακινεί τους μαθητές να ενδιαφερθούν στην έρευνα, την υπόθεση, τη δημιουργία, και την ανακάλυψη αρχών καθώς και την παραγωγή γενικεύσεων.*
2. *Η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.*
3. *Η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και τους δίνει την ευκαιρία να λύνουν προβλήματα στην πραγματικότητα της ίδιας της ζωής, και όχι προβλήματα ρουτίνας.*
4. *Η τεχνολογία ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών της γεωμετρίας.*
5. *Η τεχνολογία ενθαρρύνει τους καθηγητές για να περιλάβουν τους μαθητές σε διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που διευκολύνουν τη διαδικασία εκμάθησης.*
6. *Η τεχνολογία επιτρέπει στους καθηγητές να δίνουν προσοχή στους μαθητές που έχουν ανάγκη πρόσθετης βοήθειας.*

- Ο ***Metazarek (1996)*** χρησιμοποίησε το λογισμικό Geometer Sketchpad για να ερευνήσει *τη σχέση μεταξύ της τεχνολογίας υπολογιστών και της ετοιμότητας ενός μαθητή για την αυτόνομη μάθηση*. Διαπίστωσε ότι *υπήρξε ένας θετικός συσχετισμός ανάμεσα σε αυτές τις μεταβλητές που οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στη (θετική) στάση των μαθητών απέναντι στο λογισμικό υπολογιστών*.
- Η ***Lester (1996)*** χρησιμοποίησε επίσης το λογισμικό Geometer Sketchpad στις

διδακτορικές μελέτες της για να δει *εάν χρησιμοποιώντας μια επαγωγική παιδαγωγική μαζί με τον υπολογιστή θα βελτίωνε τα γεωμετρικά επιτεύγματα.* Τα αποτελέσματα της μελέτης της δείχνουν ότι "*οι δεξιότητες στα επίπεδα γεωμετρικής δυσκολίας σε μαθητές με μεγάλη απόδοση και κατανόηση σε γεωμετρικές έννοιες σε υψηλότερα επίπεδα είναι αποτέλεσμα της δημιουργίας και του χειρισμού της δυναμικής απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων στην οθόνη του υπολογιστή*" (Lester, 1996).

➢ Ο ***Dixon (1997)*** επισημαίνει *πόσο γρήγορα και εύκολα οι μαθητές μπορούν να χειριστούν σχήματα χρησιμοποιώντας το* Geometer Sketchpad *και πόσο αργά και επίπονα και ίσως και ανέφικτα αυτοί οι ίδιοι στόχοι να επιτυνχάνονται όταν γίνονται με το μολύβι και το χαρτί (1997). Αυτό ελευθερώνει τους μαθητές από πρακτικές των στερεότυπων υπολογισμών και τους επιτρέπει να εστιάζουν στις έννοιες και τα προβλήματα που τους ενδιαφέρουν περισσότερο . Κατά συνέπεια, η τεχνολογία μπορεί να προωθήσει μια υψηλότερου επιπέδου σκέψη επειδή οι μαθητές ξοδεύουν περισσότερο χρόνο για απεικόνιση και ανάλυση* (**Nicaise & Barnes, 1996**).

➢ Είναι γεγονός ότι :τα εργαλεία, οι ορισμοί, οι τεχνικές διερεύνησης και οι οπτικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, συνεισφέρουν στην οικοδόμηση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που διαφοροποιείται πλήρως από την παραδοσιακή διδασκαλία της γεωμετρίας με το χάρακα και το διαβήτη. Τα είδη των μέσων διαμεσολάβησης είναι στενά συνυφασμένα με τη γνώση που οικοδομούν οι μαθητές.

➢ Με βάση την παραδοχή αυτή, *η μάθηση σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ορίζεται ως η «διαλεκτική αλληλεπίδραση» μεταξύ μαθητών, μέσων μάθησης και μαθηματικού προβλήματος. Στη διαδικασία αυτή της αλληλεπίδρασης η γνώση των μαθητών αναθεωρείται, τροποποιείται, ολοκληρώνεται ή απορρίπτεται , καθ΄όλη τη διάρκεια της λύσης νέων προβλημάτων. Η χρήση των μέσων διαμεσολάβησης κατά την επίλυση προβλημάτων είναι ουσιαστική, γιατί επιτρέπει στους μαθητές να μαθηματικοποιήσουν τη δραστηριότητα τους και να αναπτύξουν τις ικανότητές τους για χρήση των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων* ***(Brousseau,1997).***

➢ **Συνοψίζοντας** : Υπάρχουν ισχυροί λόγοι για την χρησιμοποίηση των υπολογιστών στην διδασκαλία της γεωμετρίας. Τα προγράμματα όπως το Geometer Sketchpad παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο για πολλά παραδείγματα στην γεωμετρία. Υποτίθεται ότι η πρόωρη επέμβαση με την τεχνολογία μπορεί να παρέχει στους μαθητές τα επαγωγικά εργαλεία που χρειάζονται για να ανεβάσουν το επίπεδο Van Hiele πριν αντιμετωπίζουν τις παραγωγικές αποδείξεις, Οι μαθητές στα σχολεία με-

γαλώνουν σήμερα με τους υπολογιστές και τους βλέπουν γενικά σαν διασκέδαση . Ενώ Γεωμετρία και απόδειξη μπορεί να φαίνονται απόμακρες από τη σκέψη τους αυτοί είναι δεμένοι με τους υπολογιστές στο σπίτι. Αυτοί οι μαθητές ίσως να βρουν τη χρησιμοποίηση ενός προγράμματος υπολογιστών στην διδασκαλία της γεωμετρίας σαν μια «ανάσα».

➢ Ενώ οι θετικές συνεισφορές τεκμηριώνονται καλά, η χρήση της τεχνολογίας δεν είναι πανάκεια. Υπάρχουν όμως και άλλοι που έχουν αντίθετη άποψη. Για παράδειγμα, έχει επισημανθεί ότι το λογισμικό Geometer Sketchpad *δεν φαίνεται να βελτιώνει τις δυνατότητες των μαθητών στο να απεικονίζουν σε τρεις διαστάσεις* **(Dixon, 1997).** *Οι πρόοδοι στην τεχνολογία δημιουργούν βεβαίως ερωτήματα για την παιδαγωγική, το πρόγραμμα σπουδών, και ακόμη και την αξιολόγηση* **(Leitzel, 1991).** Προκειμένου να εξεταστούν αυτές οι ερωτήσεις, απαιτείται περισσότερη έρευνα για τα αποτελέσματα της τεχνολογίας ειδικότερα, απαιτείται περισσότερη έρευνα στις επεμβάσεις που θα βοηθήσουν στην σχολική επιτυχία τους μαθητές.

ΜΕΡΟΣ Β – Η ΕΡΕΥΝΑ

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Σχεδιασμός της έρευνας – μεθοδολογία

Ο πληθυσμός αυτής της έρευνας αποτελείται από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Συγκεκριμένα, για τη Γ΄ Γυμνασίου, 95378+5781=101159 (δημόσια και ιδιωτικά) μαθητές , για την Α΄ Λυκείου, 75576+5752=81328 μαθητές και για τη Β΄ Λυκείου, 72434+5597=78031 μαθητές (*πηγή: ΥΠΕΠΘ, ΔΙΠΕ τμήμα Ε.Ε και στατιστικής 2005*) **.** Στις τάξεις, Α΄ και Β΄ του Ενιαίου Λυκείου, διδάσκεται το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» (θεωρητική Γεωμετρία). Στις τάξεις Α΄ και Β΄ του τεχνικού και επαγγελματικού Λυκείου δεν διδάσκεται η Γεωμετρία

4.1 Χαρακτηριστικά του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1838 μαθητές από τους συνολικά 260.518 δηλαδή αναλογία 1:130, που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων από πολλές περιοχές της Ελλάδας όπως φαίνεται στον πίνακα του παραρτήματος ΣΤ. Συγκεκριμένα το τυχαίο δείγμα των σχολείων που επιλέχθηκαν, αποτελείτο από 16 Γυμνάσια, 25 Ενιαία Λύκεια, 2 Τ.Ε.Ε, 1 Αθλητικό Λύκειο, 1 Διαπολιτισμικό Λύκειο. Οι περισσότεροι από τους καθηγητές των μαθηματικών που δίδασκαν στα σχολεία αυτά είχαν διδακτική εμπειρία τουλάχιστον 15 χρόνων.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο χρονικό διάστημα από 27-01-2005 μέχρι 21-04-2005. Στο 80% των σχολείων παρευρέθηκε, έδωσε οδηγίες και επιτήρησε τους μαθητές ο ίδιος ο ερευνητής. Πρέπει να αναφέρουμε ότι μοναδικό πρόβλημα υπήρξε το γεγονός ότι λίγοι μαθητές προσπάθησαν, αλλά δεν το πέτυχαν σε μεγάλο βαθμό, να αντιγράψουν από συμμαθητές τους

4.2 Οριοθέτηση κριτηρίων

4.2.1 Συλλογή δεδομένων

Για τον εντοπισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών, το οποίο μεταφράστηκε για την Ελλάδα από τον ερευνητή, με βάση το τεστ Van Hiele του καθηγητή του Πανεπιστημίου του Σικάγο, Zalman Usiskin. Για τη μετάφραση και τη χρήση του ερωτηματολογίου πήραμε την άδεια του καθηγητή Zalman Usiskin μετά από ηλεκτρονική αλληλογραφία

που είχαμε μαζί του και η οποία παρατίθεται στο παράρτημα της εργασίας. Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Usiskin(1982):

«*Το τεστ van Hiele σχεδιάστηκε για να προσδιοριστεί, αν ένας τέτοιος προσδιορισμός θα ήταν εφικτός, το επίπεδο van Hiele του κάθε μαθητή. Από χωρία των ίδιων των van Hiele που αφορούν τις συμπεριφορές των μαθητών που πρέπει να αναμένονται σε κάθε επίπεδο, γράφηκαν για κάθε επίπεδο ερωτήσεις οι οποίες θα έλεγχαν το αν ένας μαθητής βρίσκονταν στο συγκεκριμένο επίπεδο. Η κατασκευή του τεστ και η προκαταρκτική έρευνα δίνονται με λεπτομέρεια από τον/την Porter (1980).*

Σε μια πρώτη προκαταρκτική έρευνα, τα ερωτήματα δόθηκαν μεμονωμένα σε μαθητές σε προφορικές συνεντεύξεις από τρεις ομάδες του project σε τρεις διαφορετικές πολιτείες. Με την αξιοποίηση των αποκρίσεων των μαθητών, κατασκευάστηκε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής με 25 ερωτήσεις, 5 για κάθε επίπεδο. Αυτό το τεστ δοκιμάστηκε προκαταρκτικά με ολόκληρες τάξεις σε τέσσερα σχολεία για να διασφαλιστεί ότι δε θα ήταν υπερβολικά μεγάλο για ένα χρονικό περιθώριο 35 λεπτών.

Οι ερωτήσεις απορρίπτονταν ή τροποποιούνταν μόνο αν οι αποκρίσεις των μαθητών δεν έδειχναν να αντικατοπτρίζουν το κατάλληλο επίπεδο van Hiele. Η ευκολία ή δυσκολία ενός ερωτήματος δεν αποτέλεσε ποτέ κριτήριο, αν και ο σκοπός ήταν να έχουμε εύκολα ερωτήματα σε κάθε επίπεδο van Hiele. Οι ερωτήσεις του τεστ για το επίπεδο van Hiele είναι εν γένει περισσότερο εννοιολογικές σε σχέση με εκείνες που συναντώνται σε τυπικά διαγωνίσματα και ακόμη και οι ερωτήσεις χαμηλού επιπέδου απαιτούν κάποιο είδος ανάλυσης. Στο επίπεδο 1, αναρωτιέται κάποιος αν ένα σχήμα ταιριάζει με την αντίληψή του για ένα μέλος μιας κλάσης σχημάτων. Στο επίπεδο 2, αναρωτιέται αν μια ιδιότητα είναι πάντοτε αληθής, και όχι απλώς για ένα μοναδικό σχήμα. Στο επίπεδο 3, διατάσσει τις ιδιότητες, καθώς χρειάζεται να γνωρίζει αν μια πρόταση έπεται πάντοτε από μια άλλη».

Το τεστ Van Hiele του Usiskin είναι βασισμένο σε ερωτήματα πολλαπλής επιλογής και υπάρχουν αμφιβολίες για τη δυνατότητα αξιολόγησης με τη βοήθεια αυτού του είδους τεστ. Εντούτοις, αυτό το τεστ έχει σαν το κύριο πλεονέκτημά του ότι μπορεί να χορηγηθεί σε πολλά άτομα και με εύκολο και γρήγορο τρόπο να κατατάξει τα άτομα αυτά σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης.

Χρησιμοποιήσαμε το τροποποιημένο τεστ (μόνο για τα επίπεδα 1-4), το οποίο περιελάμβανε είκοσι ερωτήσεις (5 ερωτήσεις/επίπεδο Χ 4 επίπεδα) .Οι 5 πρώτες ερωτήσεις (1-5) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 1^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις (6-10) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 2^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις (11-

15) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 3^{ου} επιπέδου, οι επόμενες 5 ερωτήσεις (16-20) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 4^{ου} επιπέδου.

Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν το 3-5, δηλαδή 3 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές και το 4-5, δηλαδή 4 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές . Ο Usiskin(1982) αποκαλεί το δεύτερο ως το αυστηρότερο και σχολιάζει τα κριτήρια αυτά ως εξής:

«*Η επιλογή του κριτηρίου, δοθείσης της φύσης αυτού του τεστ, βασίζεται στο αν κάποιος επιθυμεί να μειώσει το σφάλμα Τύπου Ι ή το σφάλμα Τύπου ΙΙ. Θυμηθείτε σφάλμα Τύπου Ι είναι όταν ένας μαθητής δεν έχει κυριαρχήσει ακόμα το επίπεδο n αλλά το τεστ δείχνει ότι ο μαθητής έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n και το σφάλμα τύπου ΙΙ είναι όταν ένας μαθητής έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n, αλλά το τεστ δείχνει ότι δεν έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n.*

P(3 σωστά στα 5 με τυχαία επιλογή) = .05792

P(4 σωστά στα 5 με τυχαία επιλογή) = .00672

Οι Usiskin (1982), Senk (1989) χρησιμοποίησαν το κριτήριο 4 από τις 5 εξηγώντας ότι: « *προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο τύπος Ι λαθών, το κριτήριο για την κυριότητα ενός δεδομένου επιπέδου εξετάστηκε για να είναι τέσσερις ή περισσότερες σωστές απαντήσεις από πιθανές πέντε. Η παρούσα απόφαση οδηγεί σε μια υψηλότερη πιθανότητα του τύπου ΙΙ λαθών, αλλά για αυτήν την μελέτη, ο τύπος Ι λάθους θεωρήθηκε ο σοβαρότερος των δύο*».

Για τον προσδιορισμό του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης ενός μαθητή σύμφωνα με τη θεωρία Van Hieles απαιτείται να εισάγουμε δύο λειτουργικούς ορισμούς. Ο ένας είναι αυτός της ***κυριάρχησης*** ενός επιπέδου και ο άλλος είναι αυτός της ***κατάταξης*** σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης (Johnson C, 2002). Ο μαθητής θα λέμε ότι κυριαρχεί στο επίπεδο n εφόσον απαντά σωστά τουλάχιστον στο πλήθος των ερωτήσεων που απαιτούνται από το είδος του κριτηρίου.

Το επίπεδο κατάταξης Van Hiele του μαθητή, για αυτήν την έρευνα, ήταν το πιο υψηλό επίπεδο κυριάρχησης του μαθητή με την προϋπόθεση ότι όλα τα προηγούμενα επίπεδα κυριαρχήθηκαν και υπό τον όρο ότι κανένα πιο υψηλό επίπεδο δεν κυριαρχήθηκε. Κατ' αυτό τον τρόπο, σε έναν μαθητή που κυριάρχησε στα επίπεδα 1 και 2 ορίστηκε ένα επίπεδο Van Hiele 2, αλλά ένας μαθητής που κυριάρχησε στα επίπεδα 1, 2 και 4 δεν κατατάσσεται σύμφωνα με το πρότυπο Van Hiele σε κανένα επίπεδο και αποκλείστηκε από την ανάλυση. Ο πίνακας 1 επεξηγεί κατωτέρω αυτήν την συμφωνία:

Πίνακας 1

Van Hiele Επίπεδο κατάταξης	Επίπεδα που κυριάρχησε
0	Κανένα
1	1 μόνο
2	1 και 2
3	1, 2 και 3
4	1, 2, 3 και 4
κανένα επίπεδο	2 μόνο
κανένα επίπεδο	3 μόνο
κανένα επίπεδο	4 μόνο
κανένα επίπεδο	1 και 3
κανένα επίπεδο	1 και 4
κανένα επίπεδο	2 και 3
κανένα επίπεδο	2 και 4
κανένα επίπεδο	3 και 4
κανένα επίπεδο	1,2 και 4
κανένα επίπεδο	1,3 και 4
κανένα επίπεδο	2,3 και 4

4.2.2 Βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας

Η βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας έγινε από τον ερευνητή σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια (το 3-5 και το 4-5) και σύμφωνα με τη συμφωνία που απεικονίζεται στον πίνακα 2. Η διπλή ή τριπλή κ.λπ. απάντηση σε μια ερώτηση λογίστηκε σαν λανθασμένη και συμπεριλήφθηκε στο ποσοστό των μαθητών που δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Για την αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών αντιστοιχίσαμε σε κάθε μαθητή με βάση τις απαντήσεις του στο τεστ van Hiele ένα σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας με τον ακόλουθο τρόπο:

1 βαθμός για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 1 – 5 (Επίπεδο 1)

2 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 6 – 10 (Επίπεδο 2)

4 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 11 – 15 (Επίπεδο 3)

8 βαθμοί για την ικανοποίηση του κριτηρίου στα θέματα 16 – 20 (Επίπεδο 4)

Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν είτε το ελαστικό είτε το αυστηρό και οι βαθμοί αθροίστηκαν για να δώσουν το σταθμισμένο άθροισμα.

4.3 Στατιστικές τεχνικές

Όλες οι απαντήσεις των μαθητών καταχωρήθηκαν σε ένα λογιστικό φύλλο EXCEL και επεξεργάστηκαν με το Στατιστικό Πακέτο για τις Κοινωνικές Επιστήμες (SPSS). Η ακρίβεια των μετεγγραφών επιβεβαιώθηκε ανεξάρτητα.

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

Αποτελέσματα για τα επίπεδα

5.1 Γενικά

Στα πλαίσια της έρευνας επιδιώχθηκε να ερευνηθούν :

- Πώς κατανέμονται οι μαθητές των τάξεων Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και, Β΄ Λυκείου σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με την θεωρία των Van Hiele.
- Αν οι περισσότεροι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα κατανέμονται στα επίπεδα 1και 2 της θεωρίας Van Hiele.
- Αν υπάρχουν διαφορές λόγω φύλου στα επίπεδα van Hiele των μαθητών.
- Αν υπάρχει βελτίωση των επιπέδων van Hiele των μαθητών στις μεταβάσεις από τάξη σε τάξη.
- Αν υπάρχει διαφορά μεταξύ δημοσίων και ιδιωτικών σχολείων στην κατάταξη σε επίπεδα van Hiele των μαθητών.

Για την ανάλυση και παρουσίαση των δεδομένων που προέρχονται από προσωπική έρευνα του ερευνητή, έγινε χρήση πινάκων από την περιγραφική στατιστική, στατιστικού κριτηρίου χ^2, ανάλυση διασποράς ANOVA με το κριτήριο F, και ανάλυση πολλαπλών συγκρίσεων BONFERONI , SCHEFFE. Σε όλα τα παρακάτω αποτελέσματα γίνεται σαφής ο διαχωρισμός των δύο κριτηρίων (α) ελαστικό, σωστές απαντήσεις 3 από τις 5 και (β) αυστηρό, σωστές απαντήσεις 4 από τις 5. Σε όλες τις περιπτώσεις γίνεται συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τα δύο αυτά κριτήρια. Σκοπός της σύγκρισης είναι να γίνει αντιληπτό ότι η κατάταξη ενός μαθητή δεν γίνεται με μοναδικό και απόλυτο τρόπο. Οι πίνακες παρουσιάζονται με τη σειρά που ακολουθήθηκε κατά την ανάλυση των δεδομένων.

5.2 Αποτελέσματα, κριτική αποτελεσμάτων

Οι πίνακες 3_1, 3_2 παρουσιάζουν τις συχνότητες και τα ποσοστά των μαθητών και των μαθητριών των τάξεων Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hiele με τη χρήση των δύο κριτηρίων (αυστηρού-ελαστικού).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3_1 ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (3 ΑΠΟ ΤΑ 5)

		ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟ-ΣΤΟ %	ΕΓΚΥΡΑ %	ΣΧ.ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟ-ΤΗΤΑ %
Valid	ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	288	15,7	15,7	15,7
	0 ΕΠΙΠΕΔΟ	76	4,1	4,1	19,8
	1^{ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	480	26,1	26,1	45,9
	2^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	413	22,5	22,5	68,4
	3^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	411	22,4	22,4	90,8
	4^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	170	9,2	9,2	100,0
	ΣΥΝΟΛΟ	1838	100,0	100,0	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3_2 ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (4 ΑΠΟ ΤΑ 5)

		ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟ-ΣΤΟ %	ΕΓΚΥΡΑ %	ΣΧ.ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟ-ΤΗΤΑ %
Valid	ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	217	11,8	11,8	11,8
	0 ΕΠΙΠΕΔΟ	273	14,9	14,9	26,7
	1^{ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	794	43,2	43,2	69,9
	2^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	320	17,4	17,4	87,3
	3^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	204	11,1	11,1	98,4
	4^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	30	1,6	1,6	100,0
	ΣΥΝΟΛΟ	1838	100,0	100,0	

Δύο σημεία αυτών των πινάκων αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής.

Πρώτον, το 84,3% των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο στο ελαστικό κριτήριο και 88,2 % στο αυστηρό κριτήριο. Δεδομένου ότι κάποιος πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο σε όλα τα επίπεδα από το 1 ως το n και σε κανένα άλλο επίπεδο για να καταταχθεί στο επίπεδο n, και δεδομένου ότι το ελαστικό κριτήριο μπορεί να ικανοποιείται σε οποιοδήποτε επίπεδο από το 6% των μαθητών από καθαρή τυχαιότητα, οι διαφορές στα ποσοστά μπορούν να αποδοθούν σχεδόν εξ ολοκλήρου σε σφάλμα Τύπου Ι.

Δεύτερον, η επιλογή του κριτηρίου επηρεάζει καταφανώς το επίπεδο van Hiele που αντιστοιχίζεται σε έναν μαθητή. Όταν η κατανομή των μαθητών γίνεται με το ελαστικό κριτήριο, τότε το 4,1% από εκείνους που μπορούν να ταξινομηθούν βρίσκονται στο επίπεδο 0. Αντίστοιχα στην κατανομή με το αυστηρό κριτήριο το οποίο είναι δυσκολότερο να ικανοποιηθεί, το 14,9% εκείνων που μπορούν να ταξινομηθούν βρίσκονται στο επίπεδο 0. Η ίδια τάση εμφανίζεται και στα ποσοστά του επιπέδου 1 όπου 26,1% των μαθητών κατατάσσονται με το ελαστικό και 43,2 % με το αυστηρό κριτήριο. Για το 2^{ο} επίπεδο τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 22,5% και 17,4%. Στα επόμενα δύο επίπεδα 3^{ο} και 4^{ο} τα ποσοστά των μαθητών που κατατάσσονται με βάση το

αυστηρό κριτήριο είναι μικρά. Έτσι, εκείνοι που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το ελαστικό κριτήριο, ποσοστό 22,4% είναι διπλάσιοι από εκείνους που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το αυστηρό κριτήριο, ποσοστό 11,1%. Τέλος εκείνοι που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο επίπεδο 4 είναι στο κριτήριο 3 από τα 5 τετραπλάσιοι (9,2%)από εκείνους στο κριτήριο 4 από τα 5(1,9%).

Η καίρια σημασία της επιλογής του κριτηρίου για την κατάταξη του μαθητή φαίνεται καθαρά στον Πίνακα 4, ένα πίνακα διπλής εισόδου όπου γίνεται ανάλυση του κάθε επιπέδου από το ένα κριτήριο, στα επίπεδα του άλλου κριτηρίου. Φαίνεται λοιπόν η αντιστοιχία των επιπέδων των δύο κριτηρίων σε πλήθος και ποσοστά για τους μαθητές του δείγματος. Συγκεκριμένα κάθε οριζόντια γραμμή αναλύει τα ποσοστά του ελαστικού κριτηρίου στα επιμέρους ποσοστά των επιπέδων του αυστηρού κριτηρίου, και κάθε στήλη το αντίστροφο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

		ΑΥΣΤΗΡΟ													
		Κανένα επίπεδο		0 Επίπεδο		1ο Επίπεδο		2ο Επίπεδο		3ο Επίπεδο		4ο Επίπεδο		ΣΥΝΟΛΟ	
		ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%
ΕΛΑΣΤΙΚΟ	ΚΑΝΕΝΑ	**77**	**4,2**	55	3,0	127	6,9	29	1,6	0	0,0	0	0,0	288	15,7
	0 Επίπεδο	3	0,2	**73**	**4,0**	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	76	4,1
	1ο Επίπεδο	9	0,5	107	5,8	**364**	**19,8**	0	0,0	0	0,0	0	0,0	480	26,1
	2ο Επίπεδο	25	1,4	26	1,4	206	11,2	**156**	**8,5**	0	0,0	0	0,0	413	22,5
	3ο Επίπεδο	70	3,8	12	0,7	81	4,4	110	6,0	**138**	**7,5**	0	0,0	411	22,4
	4ο Επίπεδο	33	1,8	0	0,0	16	0,9	25	1,4	66	3,6	**30**	**1,6**	170	9,2
	ΣΥΝΟΛΟ	217	11,8	273	14,9	794	43,2	320	17,4	204	11,1	30	1,6	1838	100,0

N=1838

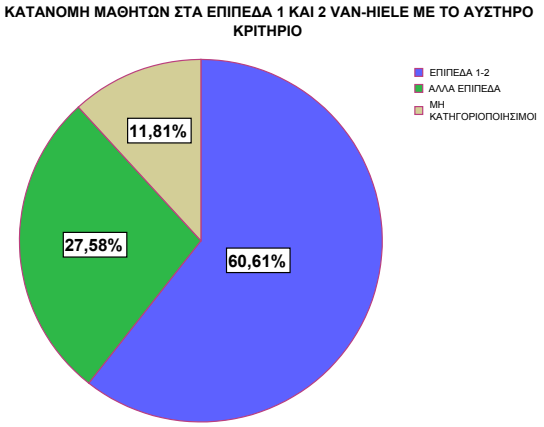
Η κύρια διαγώνιος του πίνακα μετρά εκείνους τους μαθητές των οποίων τα επίπεδα van Hiele είναι τα ίδια σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια. Από τους 1838 μαθητές στους οποίους αντιστοιχίζονται τροποποιημένα επίπεδα van Hiele και με τα δύο κριτήρια, μόνο 838 (45,6%) έχουν το ίδιο επίπεδο σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια. Συνεπώς το επίπεδο van Hiele δεν είναι κάτι τόσο σταθερό όσο υποδηλώνεται από τη θεωρία.. Η σταθερότητά του εξαρτάται από το πλήθος των σωστών απαντήσεων και ίσως από τη μορφή των ερωτήσεων.

Στα 1838 δοκίμια βρέθηκαν 31 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο δεν κατέτασσε τους αντίστοιχους μαθητές σε κανένα επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 4^{ο} επίπεδο. Επίσης υπήρξαν 15 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους μαθητές στο πρώτο επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους

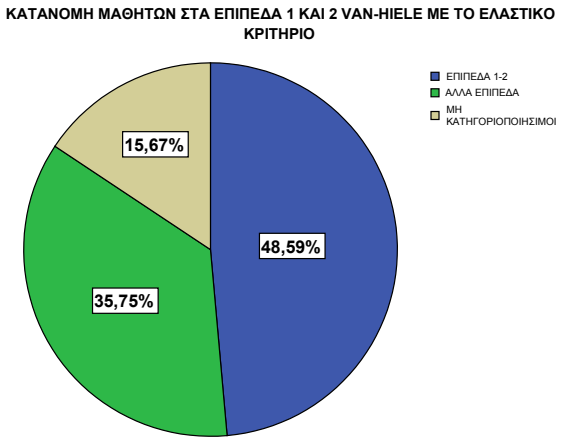
κατέτασσε στο 4^{ο} επίπεδο. Ανάλογα υπήρξαν 56 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο δεν κατέτασσε τους αντίστοιχους μαθητές σε κανένα επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3^{ο} επίπεδο. Επίσης, υπήρξαν 7 δοκίμια στα 1835 όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους μαθητές στο μηδενικό επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3^{ο} επίπεδο. Ανάλογα υπήρξαν 52 δοκίμια στα 1865 όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους μαθητές στο πρώτο επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3^{ο} επίπεδο. Κάποια από τα δοκίμια που δείχνουν όσα προαναφέραμε παρατίθενται στο παράρτημα της εργασίας. Τα κυκλικά διαγράμματα 5-6 δείχνουν την κατανομή όλων των μαθητών που συμμετείχαν στο τεστ VH στα επίπεδα 1 και 2 σύμφωνα με τα δύο κριτήρια.

ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ 5-6

Με το αυστηρό κριτήριο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα το 60,6% των μαθητών δηλαδή 1114 μαθητές βρίσκονται σε αυτά τα δύο επίπεδα, ενώ μόνο τα 27,58% των μαθητών κατατάσσεται στα υπόλοιπα επίπεδα.



Αντίστοιχα κάνοντας την κατανομή με το ελαστικό κριτήριο, το ποσοστό των μαθητών για τα δύο αυτά επίπεδα κατεβαίνει στο 48,6% δηλαδή 893 μαθητές. Σε κάθε περίπτωση όμως το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού κατανέμεται στα δύο αυτά επίπεδα, όπως φαίνεται από τους πίνακες 3_1 και 3_2. Συγκεκριμένα αν αφαιρέσουμε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι δεν κατηγοριοποιούνται, τότε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι κατατάσσονται στα υπόλοιπα επίπεδα είναι 27,58% και 35,75% με το αυστηρό και το ελαστικό κριτήριο αντίστοιχα.



Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται συχνότητες και ποσοστά των μαθητών ανά τάξη που κατατάσσονται στα δύο επίπεδα, 1-απεικόνιση και 2-ανάλυση. Είναι φανερό ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών βρίσκεται στα επίπεδα αυτά ανεξάρτητα από την χρήση ελαστικού ή αυστηρού κριτηρίου. Το ποσοστό αυτό για την Γ΄ Γυμνασίου είναι υψηλό τόσο με τη χρήση ελαστικού κριτηρίου 61,8% όσο και με τη χρήση αυστηρού κριτηρίου 67,8%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7

Συχνότητες και ποσοστά μαθητών συνολικά για τα επίπεδα 1 και 2 με το ελαστικό και με το αυστηρό κριτήριο για κάθε τάξη ξεχωριστά.

		1ο & 2ο επίπεδο		άλλα επίπεδα		μη κατηγοριοποιήσιμοι		Σύνολο	
	ΤΑΞΗ	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%
Ελαστικό κριτήριο	Γ΄Γυμν.	259	61,8	90	21,5	70	16,7	419	100,0
	Α΄Λυκ	365	47,8	285	37,3	114	14,9	764	100,0
	Β΄Λυκ	269	41,1	282	43,1	104	15,8	655	100,0
Αυστηρό κριτήριο	Γ΄Γυμν.	284	67,8	93	22,2	42	10,0	419	100,0
	Α΄Λυκ	480	62,8	202	26,4	82	10,7	764	100,0
	Β΄Λυκ	350	53,4	212	32,4	93	14,2	655	100,0

N=1838

Για τις άλλες δύο τάξεις έχουμε μία διαφοροποίηση ανάλογα με το κριτήριο. Έτσι, για την Α΄ Λυκείου, ενώ με το ελαστικό κριτήριο κατατάσσονται το 47,8% στα επίπεδα 1 και 2, με το αυστηρό κριτήριο το ποσοστό αυτό γίνεται 62,8%. Για τη Β΄ Λυκείου τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 41,1% και 53,4%. Αυτό συνδέεται με την έλλειψη εποπτείας σχήματος στη διδασκαλία της γεωμετρίας του Λυκείου και ως εκ τούτου φαίνεται να υπάρχει ασυνέχεια στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, ιδιαίτερα στις μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων 2-3-4.

Με βάση τα δεδομένα, δεν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στην κατανομή των μαθητών στα επίπεδα Van Hiele και του φύλου των μαθητών. Και με τα δύο κριτήρια ελαστικό, αυστηρό οι μεταβλητές αυτές είναι ανεξάρτητες όπως προκύπτει από χ2 έλεγχο. Συγκεκριμένα για τον έλεγχο των διαφορών στην κατάταξη στα επίπεδα Van Hiele, λόγω φύλου κάναμε έλεγχο υποθέσεων για τον βαθμό εξάρτησης του φύλου των μαθητών σε σχέση με την κατάταξή τους σε επίπεδα με το αυστηρό και κατόπιν με το ελαστικό κριτήριο.

Οι υποθέσεις μας ήταν H_0: Οι μεταβλητές φύλο και επίπεδο μέσω του αυστηρού-ελαστικού κριτηρίου είναι ανεξάρτητες και H_1: Οι μεταβλητές φύλο και επίπεδο μέ-

σω του αυστηρού-ελαστικού κριτηρίου είναι εξαρτημένες. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 8 στην πρώτη περίπτωση του ελέγχου η ελεγχοσυνάρτηση παίρνει την τιμή 8,186 και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 0,146>0,05 ενώ στη δεύτερη περίπτωση του ελέγχου η ελεγχοσυνάρτηση παίρνει την τιμή 4,009 και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 0,548>0,05.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8

	Pearson τιμή χ2	df	Πιθανότητα
Ελαστικό	4,009	5	0,548
Αυστηρό	8,186	5	0,146

N=1838

Σε κάθε περίπτωση δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 , δηλαδή την ανεξαρτησία των μεταβλητών φύλο και επίπεδο μέσω του ελαστικού και του αυστηρού κριτηρίου σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Άρα και από τις δύο περιπτώσεις προκύπτει ότι οι μεταβλητές φύλο και επίπεδο κάθε μαθητή είναι ανεξάρτητες, δηλαδή δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει διαφορά στην κατανομή μαθητών /τριών σε κάποιο επίπεδο η οποία να οφείλεται στο φύλο.

Για να ελέγξουμε αν υπάρχει βελτίωση των επιπέδων Van Hiele των μαθητών κατά τη μετάβαση από τη μία τάξη στην άλλη, λόγω της υπάρχουσας διδασκαλίας της γεωμετρίας χρησιμοποιούμε το σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας που αναφέρθηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας.

Ο παρακάτω πίνακας 9 περιλαμβάνει περιγραφικά στατιστικά μέτρα για το σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας των μαθητών του δείγματος ανά τάξη και κριτήριο.

Είναι φανερό ότι ο μέσος όρος του σταθμισμένου αθροίσματος βαθμολογίας για τους μαθητές όλων των τάξεων, είναι υψηλότερος με το ελαστικό κριτήριο σε σχέση με το αυστηρό κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο. Το ίδιο συμβαίνει και για το μέτρο της τυπικής απόκλισης για όλες τις τάξεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9

		ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΜΕΤΡΑ							
						Διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστή 95%			
		N	Μέσος	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα	Κάτω άκρο	Πάνω άκρο	Ελάχιστο	Μέγιστο
Ελαστικό	Γ΄ Γυμν.	419	3,59	3,581	0,175	3,24	3,93	0	15
	Α΄ Λυκ.	764	4,91	4,087	0,148	4,62	5,2	0	15
	Β΄ Λυκ.	655	6,08	4,696	0,183	5,72	6,44	0	15
Αυστηρό	Γ΄ Γυμν.	419	1,45	1,836	0,09	1,27	1,63	0	15
	Α΄ Λυκ.	764	2,39	2,488	0,09	2,21	2,56	0	15
	Β΄ Λυκ.	655	3,44	3,563	0,139	3,16	3,71	0	15

Χρησιμοποιώντας ανάλυση διασποράς – διαδικασία ANOVA εξετάζουμε την ύπαρξη σχέσης μεταξύ σταθμισμένου αθροίσματος βαθμολογίας κάθε μαθητή και της τάξης που φοιτά. Για τον έλεγχο αυτό κάναμε στατιστικό έλεγχο F με αρχική υπόθεση H_0 : Οι μεταβλητές σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας και τάξη είναι ανεξάρτητες και H_1: Οι μεταβλητές σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας και τάξη είναι εξαρτημένες. Τα αποτελέσματα του ελέγχου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 10

ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
sum_elas	Between Groups	1610,278	2	805,139	45,426	,000
	Within Groups	32524,251	1835	17,724		
	Total	34134,529	1837			
sum_ayst	Between Groups	1041,518	2	520,759	66,204	,000
	Within Groups	14433,959	1835	7,866		
	Total	15475,476	1837			

Όπως φαίνεται στον πίνακα 10, η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας p=000 είναι μικρότερη από το 0,05 και με τα δύο κριτήρια, πράγμα που μας οδηγεί στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Άρα, υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών σταθμισμένο άθροισμα βαθμολογίας κάθε μαθητή και της τάξης που φοιτά. Τίθεται τώρα το ερώτημα τι είδους εξάρτηση υπάρχει.

Για τον έλεγχο του είδους της εξάρτησης των παραπάνω μεταβλητών, κάνουμε διαδικασία πολλαπλών συγκρίσεων με έλεγχο BONFERRONI και SCHEFFE .Ο έλεγχος αυτός εξετάζει το είδος της εξάρτησης που ύπαρξη της αποδείχθηκε με τον προηγούμενο έλεγχο.

Τα αποτελέσματα του ελέγχου αυτού βρίσκονται στον πίνακα 11 που ακολουθεί.

ΠΙΝΑΚΑΣ 11

ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕ ΕΛΕΓΧΟ BONFERRONI ΚΑΙ SCHEFFE

		(I) ΤΑΞΗ	(J) ΤΑΞΗ	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	Scheffe	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,327*	,256	,000	-1,95	-,70
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-2,497*	,263	,000	-3,14	-1,85
		Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1,327*	,256	,000	,70	1,95
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,170*	,224	,000	-1,72	-,62
		Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2,497*	,263	,000	1,85	3,14
			Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	1,170*	,224	,000	,62	1,72
	Bonferroni	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,327*	,256	,000	-1,94	-,71
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-2,497*	,263	,000	-3,13	-1,87
		Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1,327*	,256	,000	,71	1,94
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,170*	,224	,000	-1,71	-,63
		Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2,497*	,263	,000	1,87	3,13
			Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	1,170*	,224	,000	,63	1,71
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	Scheffe	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	-,939*	,170	,000	-1,36	-,52
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,986*	,175	,000	-2,42	-1,56
		Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	,939*	,170	,000	,52	1,36
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,048*	,149	,000	-1,41	-,68
		Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1,986*	,175	,000	1,56	2,42
			Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	1,048*	,149	,000	,68	1,41
	Bonferroni	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	-,939*	,170	,000	-1,35	-,53
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,986*	,175	,000	-2,41	-1,57
		Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	,939*	,170	,000	,53	1,35
			Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	-1,048*	,149	,000	-1,41	-,69
		Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1,986*	,175	,000	1,57	2,41
			Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	1,048*	,149	,000	,69	1,41

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Παρατηρούμε ότι όλες οι διαφορές των μέσων όρων του σταθμισμένου αθροίσματος βαθμολογίας για κάθε τάξη και με τα δύο κριτήρια είναι στατιστικά σημαντικές ($p=000<0.05$) και ως εκ τούτου υπάρχει μεγάλη εξάρτηση των πιο πάνω μεταβλητών. Επιπλέον, η διαφορά μέσου όρου σταθμισμένου αθροίσματος βαθμολογίας μίας τάξης με μεγαλύτερή της είναι πάντοτε αρνητική και αντίστοιχα με μικρότερή της θετική. Αυτό συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις πολλαπλών συγκρίσεων και με τους δύο ελέγχους και άρα με την μετάβαση των μαθητών σε μεγαλύτερες τάξεις υπάρχει μια μεταβολή των επιπέδων van Hiele των μαθητών προς τα πάνω.

Οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα 11 δίνουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης συντελεστή 95% για τις διαφορές των μέσων όρων του σταθμισμένου αθροίσματος βαθμολογίας για κάθε τάξη και με τα δύο κριτήρια

Οι πίνακες που ακολουθούν δείχνουν την συχνότητα και τα ποσοστά των μαθητών ιδιωτικών και δημόσιων σχολείων όπως αυτοί κατανέμονται στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των Van Hieles, κάνοντας χρήση του ελαστικού και του αυστηρού κριτηρίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12

Crosstab

			ΕΛΑΣΤΙΚΟ						ΣΥΝΟΛΟ
			ΚΑΝΕΝΑ	0	1	2	3	4	
ΤΕΣΤ12	ΙΔΙΩΤΙΚΑ	ΠΛΗΘΟΣ	42	2	34	54	65	22	219
		% within ΤΕΣΤ12	19,2%	,9%	15,5%	24,7%	29,7%	10,0%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	14,6%	2,6%	7,1%	13,1%	15,8%	12,9%	11,9%
	ΔΗΜΟΣΙΑ	ΠΛΗΘΟΣ	246	74	446	359	346	148	1619
		% within ΤΕΣΤ12	15,2%	4,6%	27,5%	22,2%	21,4%	9,1%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	85,4%	97,4%	92,9%	86,9%	84,2%	87,1%	88,1%
Total		ΠΛΗΘΟΣ	288	76	480	413	411	170	1838
		% within ΤΕΣΤ12	15,7%	4,1%	26,1%	22,5%	22,4%	9,2%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

ΠΙΝΑΚΑΣ 13

Crosstab

			ΑΥΣΤΗΡΟ						ΣΥΝΟΛΟ
			ΚΑΝΕΝΑ	0	1	2	3	4	
ΤΕΣΤ12	ΙΔΙΩΤΙΚΑ	ΠΛΗΘΟΣ	25	25	76	56	30	7	219
		% within ΤΕΣΤ12	11,4%	11,4%	34,7%	25,6%	13,7%	3,2%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	11,5%	9,2%	9,6%	17,5%	14,7%	23,3%	11,9%
	ΔΗΜΟΣΙΑ	ΠΛΗΘΟΣ	192	248	718	264	174	23	1619
		% within ΤΕΣΤ12	11,9%	15,3%	44,3%	16,3%	10,7%	1,4%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	88,5%	90,8%	90,4%	82,5%	85,3%	76,7%	88,1%
ΣΥΝΟΛΟ		ΠΛΗΘΟΣ	217	273	794	320	204	30	1838
		% within ΤΕΣΤ12	11,8%	14,9%	43,2%	17,4%	11,1%	1,6%	100,0%
		% ΜΕ ΤΟ ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Οι διαφορές που παρατηρούνται ελέγχονται με χ^2 έλεγχο ως προς τη στατιστική σημαντικότητά τους. Έχοντας ως αρχική υπόθεση ότι οι μεταβλητές σχολείο δημόσιο ή ιδιωτικό και επίπεδο κατάταξης των μαθητών είναι ανεξάρτητες, παίρνουμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στους πίνακες 14_1 και 14_2 οι οποίοι ακολουθούν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14_1

ΕΛΕΓΧΟΣ Χ2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	25,528(a)	5	,000
Likelihood Ratio	29,054	5	,000
Linear-by-Linear Association	2,607	1	,106
N of Valid Cases	1838		

a 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 9,06.

ΠΙΝΑΚΑΣ 14_2

ΕΛΕΓΧΟΣ Χ2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΥΣΤΗΡΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	20,915(a)	5	,001
Likelihood Ratio	19,489	5	,002
Linear-by-Linear Association	8,918	1	,003
N of Valid Cases	1838		

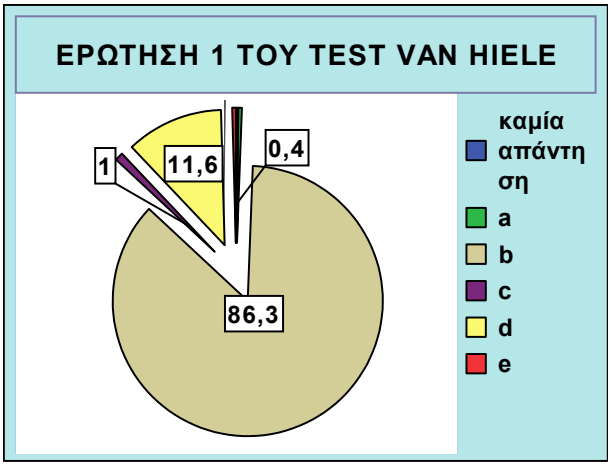
a 1 cells (8,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3,57.

Η ελεγχοσυνάρτηση χ2.στην περίπτωση του ελαστικού κριτηρίου έχει τιμή 25,528 και πιθανότητα 0<0,05.και στην περίπτωση του αυστηρού κριτηρίου είναι 20,915 και 0,001<0,05. Άρα σε κάθε περίπτωση η αρχική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και επομένως υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών σχολείο δημόσιο ή ιδιωτικό και επίπεδο κατάταξης των μαθητών με οποιοδήποτε κριτήριο ελαστικό ή αυστηρό.

5.3 Αποτελέσματα για τις ερωτήσεις των επιπέδων

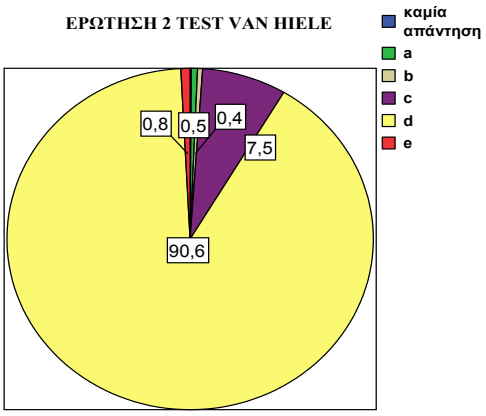
Ένα άλλο θέμα που επιδιώχθηκε στα πλαίσια της έρευνας ήταν η απόδοση στα θέματα του τεστ VH. Εδώ θα αναλύσουμε την απόδοση σε όλα θέματα του τεστ.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 15



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 15 ένα συντριπτικό ποσοστό των μαθητών (86,3%) απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση του τεστ VH (το b). Υπάρχει όμως ένα ποσοστό 11,6% των μαθητών που θεωρεί ότι ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Το ποσοστό αυτό των μαθητών μάλλον ανήκει στο επίπεδο 0.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 16

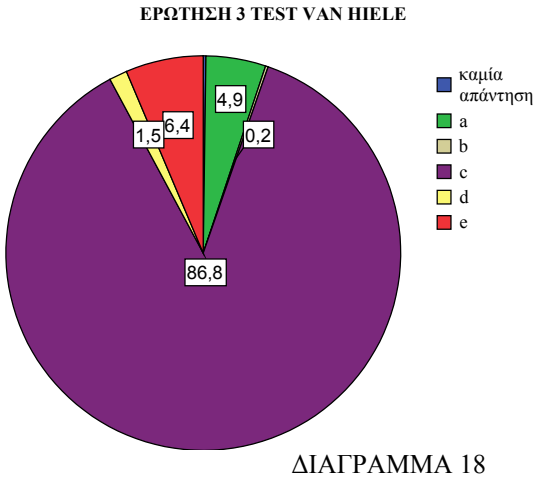


Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 16 η ερώτηση 2 του τεστ με ποσοστό σωστών απαντήσεων 90,6% αναδεικνύεται η ευκολότερη ερώτηση. Υπάρχει και εδώ ένα ποσοστό 7,5% των μαθητών ,οι οποίοι θεωρούν ότι

ένα μακρύ και λεπτό τρίγωνο δεν είναι τρίγωνο.

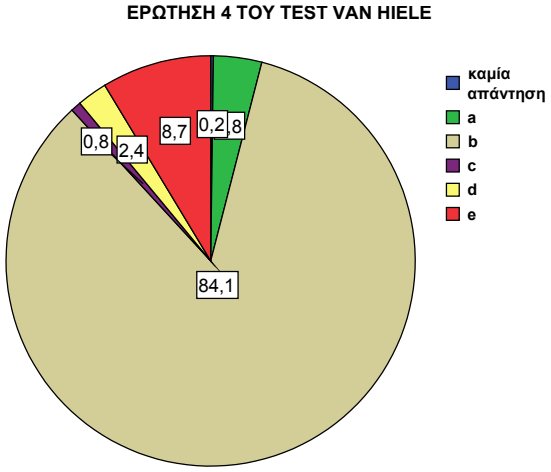
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 17

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 17 η ερώτηση 3 του τεστ είχε ποσοστό σωστών απαντήσεων 86,8% πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τα ορθογώνια.

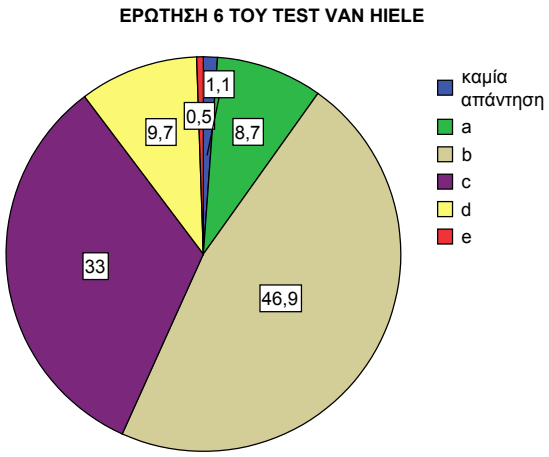


Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 18 έχουμε μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων(84,1%) και στην τέταρτη ερώτηση του τεστ. Υπάρχει και εδώ ένα ποσοστό των μαθητών 8,7% που θεωρεί ότι και άλλα τετράπλευρα είναι τετράγωνα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 18



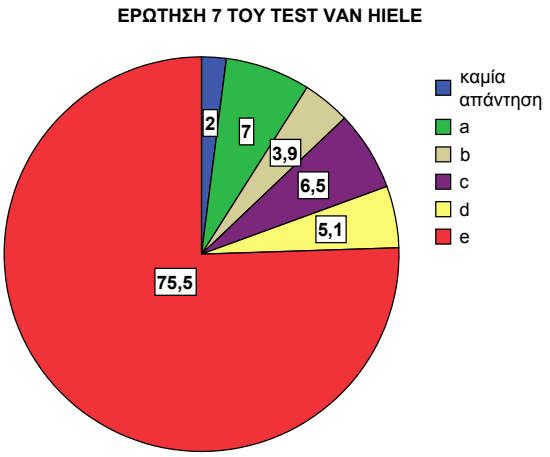
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 19



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 19 στην 6η ερώτηση έχουμε πτώση των μεγάλων ποσοστών των σωστών απαντήσεων(46,9%) . Στην 6η ερώτηση επίσης ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι το 33% των μαθητών θεωρούν ότι δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου είναι κάθετες.

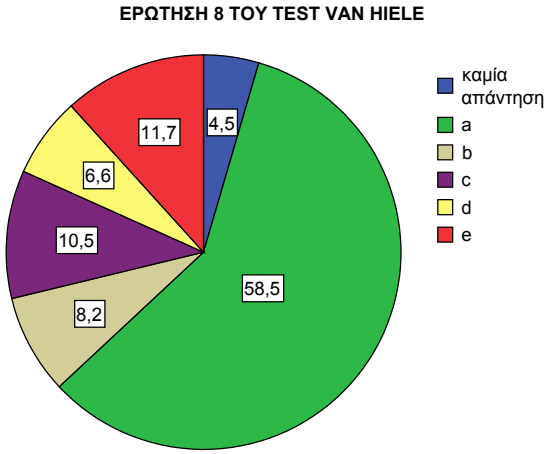
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 20

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 20 η 7η ερώτηση είναι η εύκολη ερώτηση του επιπέδου 2 και για αυτό το λόγο έχουμε ποσοστό 75,5% σωστών απαντήσεων των μαθητών.



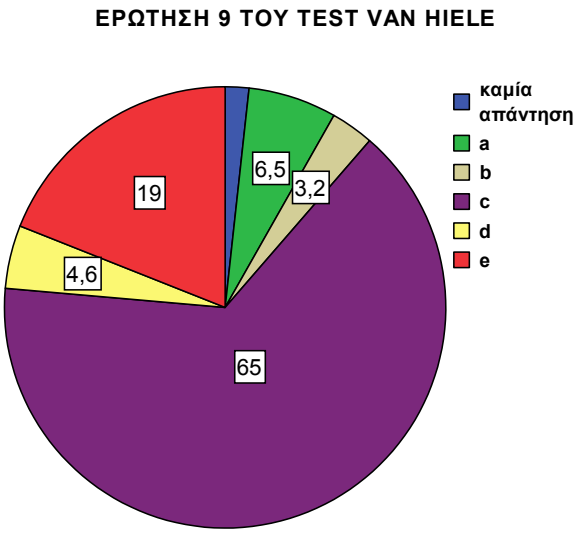
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 21

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 21 στην 8η ερώτηση το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών επανέρχεται σε χαμηλά επίπεδα(58,5%). Εδώ φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές (ισοκατανομή των ποσοστών των λανθασμένων απαντήσεων) ίσως δεν διάβασαν προσεκτικά την ερώτηση(ποια από τα (a) έως (b) <u>δεν</u> είναι αληθή).

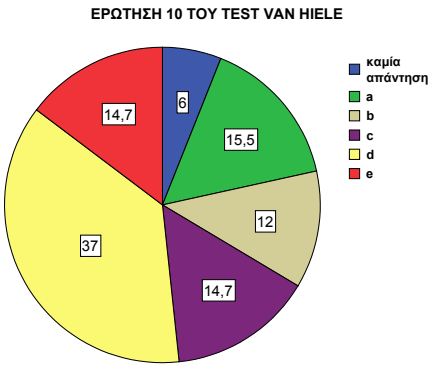


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 22

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 22 στην 9η ερώτηση το 65% των μαθητών απαντά σωστά. Εδώ όμως το ένα τρίτο των μαθητών δεν γνωρίζει ότι τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες.

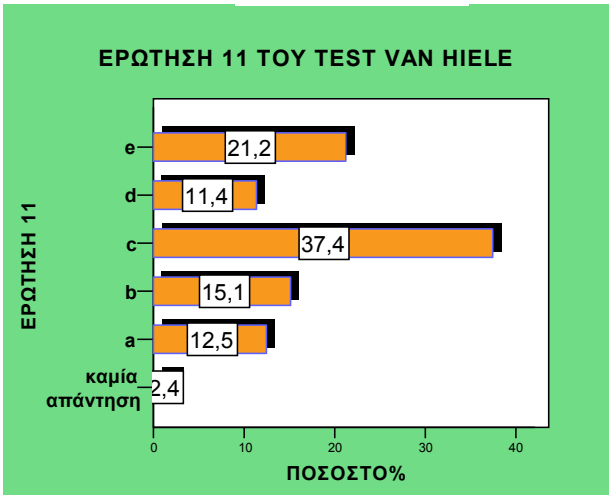


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 23



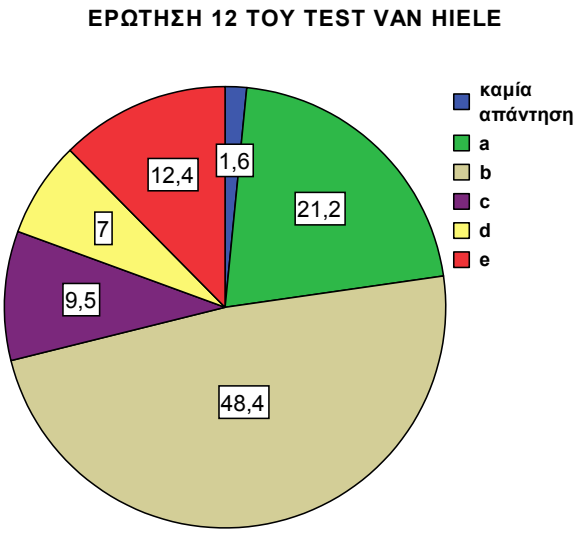
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 23. Η 10η ερώτηση είναι η δύσκολη ερώτηση του επιπέδου 2 και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 37%. Εδώ η ισοκατανομή των λανθασμένων απαντήσεων δείχνει τυχαιότητα, η οποία μπορεί να προήλθε από την απροσεξία των μαθητών στην ανάγνωση της εκφώνησης της ερώτησης (δεν είναι πάντα αληθή) ή από την μη σωστή παρατήρηση του σχήματος(πρόβλημα στο επίπεδο 1)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 24



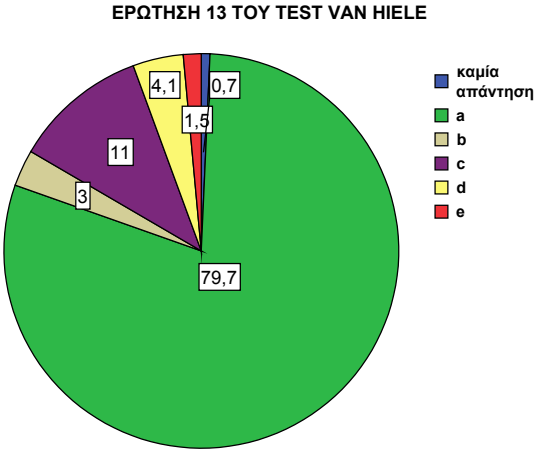
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 24 η 11η ερώτηση είναι η πρώτη ερώτηση που αφορά συλλογισμό που οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το ποσοστό των μαθητών που απαντά σωστά να πέφτει στο 37,4% όπως θα δούμε ότι συμβαίνει σε όλες τις ερωτήσεις αυτού του είδους(λογικής) του τεστ που είναι οι 11-12, 14-18,20.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 25



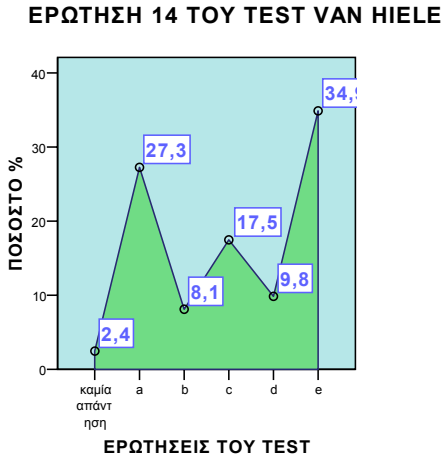
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 25 στην 12η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε προηγουμένως στην 11η ερώτηση. Εδώ παρατηρούμε επιπλέον ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών 21,2% θεωρεί ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο ίσες γωνίες ,δηλαδή να είναι ισοσκελές γεγονός που δείχνει πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 26



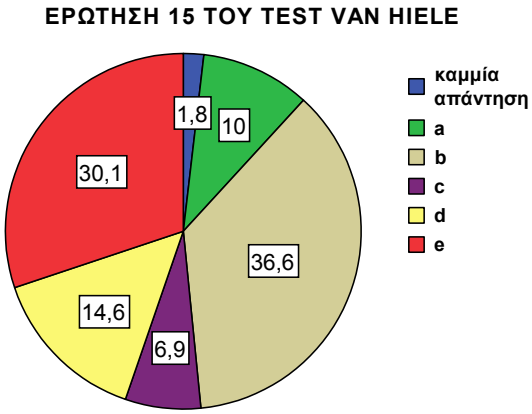
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 26 η 13η ερώτηση είναι η εύκολη ερώτηση του επιπέδου 3 και απαντήθηκε σωστά από το 79,7% των μαθητών. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κατά την διάρκεια των επιτηρήσεων της έρευνας τέθηκε από αρκετούς μαθητές το ερώτημα γιατί δεν υπάρχει η απάντηση «Το Κ και το Μ μόνο». Επομένως ένα ποσοστό των μαθητών θεωρούν ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο (συμπερίληψη κλάσης).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 27



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 27 για τη 14η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Εδώ επίσης το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (27,3%) είναι μικρότερο από το μεγαλύτερο ποσοστό της ερώτησης αυτής που είναι το 34,9% και είναι οι μαθητές που θεωρούν ότι καμία από τις προτάσεις (a) έως (d) δεν είναι σωστή(πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης).

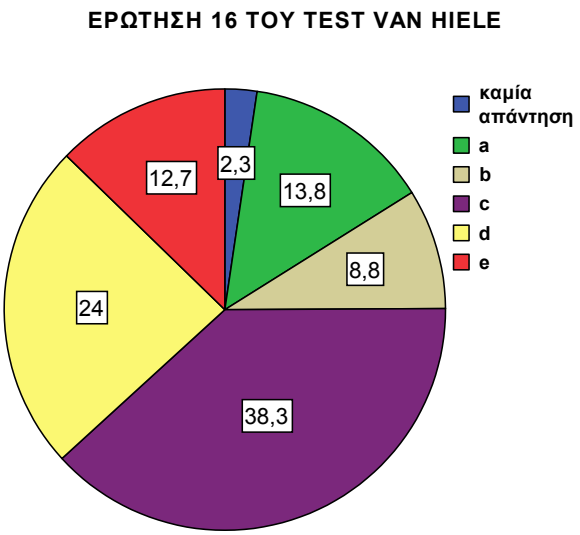
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 28



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 28 για τη 15η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό υποτίθεται ότι ξέρουν τι σημαίνει «μερικό» και «όλο» (επίπεδο 2) Usiskin (σελ..11). Η

χρήση του «όλα» και «μερικά» στα ορθογώνια και παραλληλόγραμμα είναι διαφορετική από τη χρήση του «όλα» στις ιδιότητες των ορθογωνίων στην ερώτηση 14.

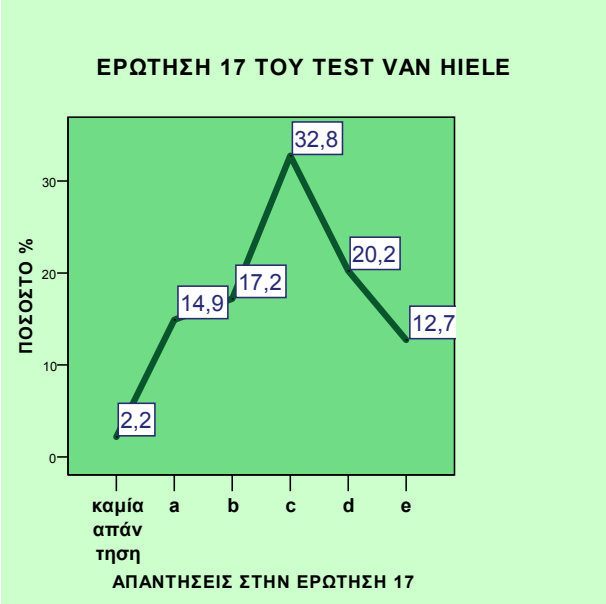
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 29



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 29 για τη 16η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Αυτό αποδεικνύεται και από το γεγονός ότι η ερώτηση 16 είναι ιδιαίτερης δυσκολίας όπως μπορεί να διαπιστώσει κάποιος με την βοήθεια του λογισμικού G.S.P ,εντούτοις απαντιέται σωστά από το 38,3% των μαθητών. Η δυσκολία βρίσκεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν χαρτί για να σχεδιάσουν το σχήμα σε όλες τις περιπτώσεις.

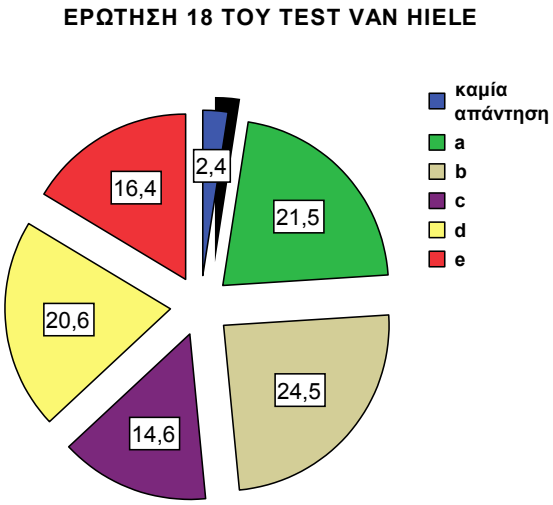
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 30

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 30 στην 17η ερώτηση μόνο το 32,8% των μαθητών μπορούν να διατάξουν απλές προτάσεις.



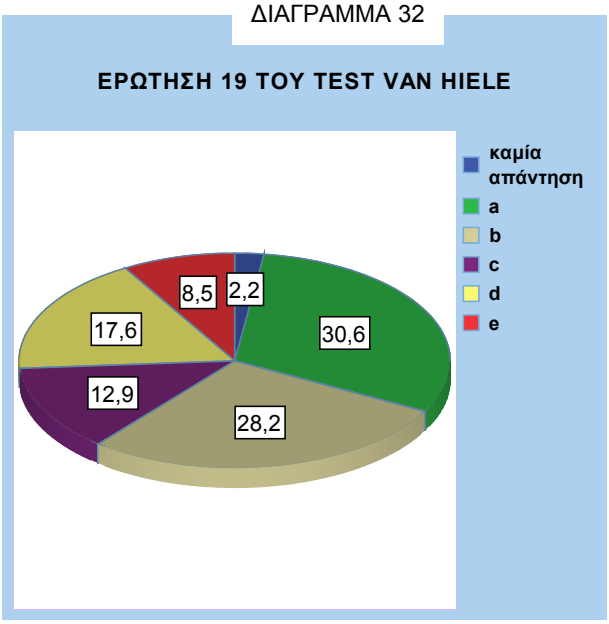
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 31

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 31 στη 18η ερώτηση μόνο το 20,6% των μαθητών απαντά σωστά, δηλαδή για να αποδείξεις ότι ένα σχήμα δεν είναι ορθογώνιο αρκεί να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται. Επίσης ένα ποσοστό των μαθητών 21,5%+24,5%=46% θεωρεί ότι μια πρόταση συνεπάγεται την αντιστροφή της .



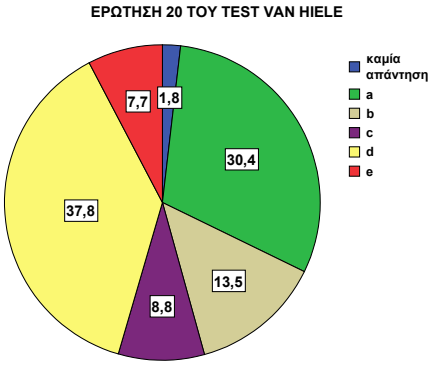
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 32

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 32 στη δυσκολότερη ερώτηση του τεστ (η 19η) απαντήθηκε σωστά από το 17,6% των μαθητών, δηλαδή οι ερωτήσεις για μη οριζόμενους όρους και δεκτές ως αληθείς χωρίς απόδειξη προτάσεις (αξιώματα) απαντώνται σχεδόν τυχαία όπως φαίνεται από τα υπόλοιπα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 33

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 33 στην 20η ερώτηση το 30,4% των μαθητών απάντησε σωστά. Αξιοπρόσεκτο το ποσοστό 37,8% των μαθητών που απάντησε λανθασμένα την d δείχνει και εδώ ότι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές αποτυνχάνουν σε θέματα λογικής(Usiskin1982 , σελ..59).



ΜΕΡΟΣ Γ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

Προτάσεις Δραστηριότητες βασισμένες στο πρότυπο των επιπέδων van Hiele χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τον υπολογιστή

6.1 Εισαγωγή

Η αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών στα μαθηματικά αυτά καθ' αυτά, όσο και στη μαθηματική εκπαίδευση με τη δημιουργία κατάλληλου λογισμικού, έχει επηρεάσει την τελευταία εικοσαετία σημαντικά τη διδασκαλία των μαθηματικών και ιδιαίτερα της σχολικής γεωμετρίας. Δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυριστούμε ότι το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό που έχει αναπτυχθεί πρόσφατα, αποτελεί την πιο σημαντική εξέλιξη στη γεωμετρία από την εποχή του Ευκλείδη. Εκτός του ότι αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον για κάποια βασική έρευνα στη στοιχειώδη Ευκλείδεια γεωμετρία, έχει επίσης αναζωογονήσει τη διδασκαλία της γεωμετρίας σε πολλές χώρες, όπου η Ευκλείδεια γεωμετρία βρισκόταν σε κίνδυνο να ριχτεί στο χρονοντούλαπο της ιστορίας (Davis, 1995; Old know, 1995).

Στο παρελθόν, οι περισσότεροι δάσκαλοι απέφευγαν την εμπειρική εξερεύνηση των γεωμετρικών συσχετίσεων επειδή οι κατασκευές με το μολύβι στο χαρτί, όσο και οι μετρήσεις με τα γεωμετρικά όργανα και τη χρήση άλλων μέσων, όπως, για παράδειγμα, διαφανούς χαρτιού, ήταν κουραστικές, χρονοβόρες και δεν παρείχαν μεγάλη ακρίβεια. Ένα άλλο πρόβλημα ήταν ότι τα σχήματα που κατασκευάζονταν με αυτό τον τρόπο ήταν στατικά και έπρεπε, προκειμένου να πειραματιστεί κανείς, είτε να ξανακατασκευάσει το σχήμα, είτε να φανταστεί νοερά πώς θα μπορούσε να αλλάξει μορφή όταν κάποια στοιχεία άλλαζαν θέση.

Όλα αυτά βεβαίως ανήκουν στο παρελθόν από τότε που δημιουργήθηκαν τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά πακέτα. Δύο από τα πιο διαδεδομένα αυτά πακέτα είναι το Gabri (Γαλλικό) και το Geometer's Sketchpad (Αμερικάνικο). Αυτά τα λογισμικά σχεδιάστηκαν με την προοπτική να προσφέρουν ένα περιβάλλον μικρόκοσμου για την εξερεύνηση της στοιχειώδους επιπεδομετρίας. Τα γεωμετρικά σχήματα είναι δυνατόν να κατασκευαστούν με τη βοήθεια μενού τα οποία χρησιμοποιούν γλώσσα οικεία στο χρήστη από το περιβάλλον του «χαρτιού και μολυβιού». Μόλις κατασκευαστούν τα σχήματα αυτά είναι δυνατό να τροποποιηθούν και να αλλάξουν, «σύροντας» με το «ποντίκι» τα βασικά τους

στοιχεία κατ' ευθείαν από την οθόνη και μετακινώντας τα, ενώ διατηρούνται οι βασικές γεωμετρικές τους ιδιότητες.

Κατ' αυτόν τον τρόπο κάποιος, για παράδειγμα, μπορεί να αλλάζει συνέχεια ένα τρίγωνο και ταυτόχρονα να παρατηρεί ότι τα ύψη του διέρχονται πάντα από το ίδιο σημείο. Το λογισμικό, επομένως, επιτρέπει σε κάποιον να εκτελεί εύκολα πειράματα, μεταβάλλοντας το σχήμα και να ελέγχει ποιες γεωμετρικές ιδιότητες παραμένουν αμετάβλητες (Τουμάσης 2003).

Ίσως, το πιο σπουδαίο, από παιδαγωγικής απόψεως, πλεονέκτημα του δυναμικού λογισμικού της είναι οι δυνατότητες του να ενθαρρύνει τον πειραματισμό και την ερευνητική προσέγγιση στη μελέτη της γεωμετρίας. Σε μια τέτοιου τύπου προσέγγιση, οι μαθητές εξοικειώνονται νωρίς στην τέχνη της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης, αφού προσφέρονται άφθονες ευκαιρίες για εξερεύνηση, διατύπωση εικασιών, ανασκευής και επαναδιατύπωσης αυτών και τελικού ελέγχου με την κατασκευή αποδείξεων.

Ο πιο προκλητικός στόχος που αντιμετωπίζουν οι Έλληνες καθηγητές σήμερα στην διδασκαλία της γεωμετρίας είναι η ανάπτυξη της δυνατότητας των μαθητών να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες και τις ιδιότητές τους.

Ο Λάππας Δ (1998) στο 15^{ο} συνέδριο της Ε.Μ.Ε στην Χίο στην εισήγησή του με θέμα «Αναλυτικά προγράμματα και γεωμετρία στο Λύκειο» πρότεινε την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως ένα ιδεώδες πεδίο για μια διδασκαλία βασισμένη σε δραστηριότητες. Διευκρινίζοντας είπε « Αυτή η προσπάθεια κύρια υποστηρίζεται από τον εκπληκτικά μικρό αριθμό προαπαιτούμενων εννοιών. Πράγματι, αρκεί να επικεντρωθούμε και να επιλέξουμε ύλη από την συμφωνία-ισότητα ,την ομοιότητα ,τα εμβαδά και τους όγκους μέσω των ενοποιητικών διαδικασιών των γεωμετρικών τόπων και κατασκευών. Αυτή η προσέγγιση φυσικά απαιτεί μια επαναοριοθέτιση του Προγράμματος, όπου πλέον έμφαση θα δοθεί στον εσωτερο-συμφυή χαρακτήρα των πάνω πρωταρχικών εννοιών μέσω προσεκτικά επιλεγμένων θεμάτων συζήτησης και με χρήση υλικού που συνδέεται άμεσα με τις νέες τεχνολογίες».

Τα παραδείγματα των δραστηριοτήτων που φτιάχνονται στο Geometer Sketchpad για τους μαθητές, έχουν ως σκοπό να επεξηγήσουν τους τρόπους με τους οποίους το πρότυπο Van Hiele's μπορεί να εφαρμοστεί στην διδασκαλία της γεωμετρίας. Παραδοσιακά, η γεωμετρία στα βιβλία μας έχει στραφεί στην ενθάρρυνση των παραγωγικών δυνατοτήτων συλλογισμού των μαθητών. Το κεντρικό θέμα των περισσότερων διδασκαλιών της γεωμετρίας είναι η γεωμετρική απόδειξη που από πολλές απόψεις φαίνεται να είναι πέρα από τον έλεγχο πολλών μαθητών. Η εικοσιπεντάχρονη εμπειρία μας

στις τάξεις των μαθηματικών μας υποδεικνύει ότι οι μαθητές αντιγράφουν με την απομνημόνευση τα θεωρήματα και τις αποδείξεις, με αποτέλεσμα να μην έχουν την εμπειρία , την κατανόηση και την εκτίμηση, είτε της γεωμετρίας, είτε του παραγωγικού συλλογισμού και της απόδειξης. Ο Hoffer (1981) υποστήριξε ότι τα μαθήματα της γεωμετρίας με τον τρόπο που γίνονται δεν αναπτύσσουν την κατανόηση, αλλά μάλλον ενθαρρύνουν την αποστήθιση.

Υπάρχει μια ισχυρή ιεραρχία που υπονοείται στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Μια σημαντική πτυχή των επιπέδων Van Hiele είναι ότι οι μαθητές σε χαμηλότερο επίπεδο σκέψης δεν αναμένεται να μπορούν να καταλάβουν τη διδασκαλία που παρουσιάζεται σε πιο υψηλό επίπεδο σκέψης. Σύμφωνα με τον Van Hiele (1986), "αυτό είναι η σημαντικότερη αιτία των κακών αποτελεσμάτων στην διδασκαλία της γεωμετρίας" (σελ. 66). Εάν δεχθούμε τις υποθέσεις των επιπέδων Van Hiele, τότε, όταν καλούνται οι μαθητές να λειτουργήσουν σε πιο υψηλό επίπεδο διανοητικής ανάπτυξης από αυτό που είναι ικανοί, μπορούν να προσαρμοστούν με διαφόρους τρόπους. Μερικοί μπορούν να ακολουθήσουν τις επιθυμίες του καθηγητή και να δεχτούν ακριβώς ότι λέει χωρίς οποιαδήποτε κατανόηση, δίνοντας περισσότερο σημασία στην αποστήθιση. Άλλοι μπορούν να απορρίψουν το θέμα ως κάτι που δεν μπορούν να καταλάβουν. Ο ιδιαίτερος τρόπος, οι φτωχές τοποθετήσεις και η έλλειψη κατανόησης είναι οι αναπόφευκτες εκβάσεις. Το επίτευγμα στην τελευταία περίπτωση είναι συνήθως φτωχό και στην προηγούμενη θα εξαρτιόταν από το εάν ο καθηγητής ανταμείβει την προσπάθεια εκμάθησης ή όχι. Εάν αυτό συνέβη, το επίτευγμα έχει πραγματικά μικρή αξία. Υπάρχει σαφώς μια ανάγκη για τους καθηγητές που διδάσκουν γεωμετρία να παρέχουν στους μαθητές τους τύπους μιας εμπειρίας απαραίτητης να επιτρέψει στους μαθητές να κάνουν τη μετάβαση στην παραγωγική γεωμετρία με έναν φυσικό και σημαντικό τρόπο. Επομένως, φαίνεται πολύ σημαντικό για τους καθηγητές να ξέρουν τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και να αναπτύξουν τις κατάλληλες δραστηριότητες, βασισμένες στο πρότυπο των επιπέδων Van Hiele.

Οι πρόσφατες μελέτες έχουν αρχίσει να εξετάζουν τη χρήση του λογισμικού υπολογιστών, ως εργαλείο, με στόχο να ερευνήσουν τις έννοιες και τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων (Choi-Koh, 1999; Jiang, 1993;). Η πρωτοποριακή μελέτη από τους Yerushalmy και Houde (1986) έδειξε ότι το λογισμικό υπολογιστών διευκόλυνε τη χρήση του επαγωγικού συλλογισμού ερευνώντας τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και τις σχέσεις τους. Σήμερα, ο επαγωγικός συλλογισμός είναι εξαιρετικά σημαντικός στην καθημερινή ζωή καθώς επίσης και στα μαθηματικά και στην

επιστήμη επειδή είναι ο τρόπος που παίρνουμε συνήθως τις ιδέες με το να δοκιμάζουμε και να ελέγχουμε. Η διαθεσιμότητα των υπολογιστών στα μαθηματικά παρέχει μια μοναδική ευκαιρία στην ανάπτυξη χρήσιμων μεθόδων για τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη γεωμετρία. Ερευνώντας την υπόθεση των γεωμετρικών ιδεών, οι μαθητές θα γίνουν περισσότερο σχετικοί με το περιεχόμενο και θα γίνουν πιο ειδικευμένοι στον επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό. Με την χρήση ενός εργαλείου όπως το Geometer Sketchpad στη γεωμετρία μια τέτοια προσέγγιση είναι εφικτή. Πρόσφατα, κάποια έρευνα (□□□□□"□, 1999) στην Κορέα άρχισε να τονίζει τη χρησιμότητα του λογισμικού, Geometer Sketchpad στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Λίγες μελέτες εντούτοις, έχουν περιγράψει τα εκπαιδευτικά υλικά, όπως τις δραστηριότητες σε σχέση με το πρότυπο Van Hiele και τη χρησιμοποίηση του υπολογιστή. Στο άρθρο του *A student's learning of geometry using the computer* στο περιοδικό *Journal of Educational Research*, 92(5), 301-311 ο Choi-Koh, S. (1999) παρουσιάζει δραστηριότητες που βασίζονται στο πρότυπο Van Hiele με την χρήση λογισμικού υπολογιστών της δυναμικής Γεωμετρίας ως εργαλείου προορισμένων να παρέχουν στους μαθητές περισσότερη εμπειρία σε χαμηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης.

6.2 Πρότυπο van Hiele

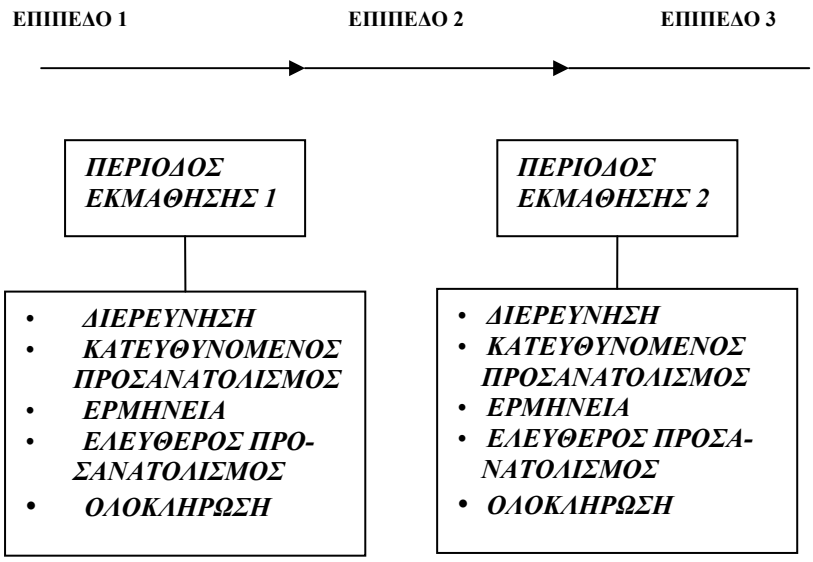
Ο P.M. Van Hiele έχει διευκρινίσει ότι ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για τα πρώτα τρία επίπεδα γεωμετρικής σκέψης (Hoffer, 1985), και κατόπιν ο Van Hiele (1986) έχει περιγράψει ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν μόνο τρία επίπεδα για τα σχολικά μαθηματικά. Η ονομασία αυτών των τριών επιπέδων είναι: οπτικό, περιγραφικό, και θεωρητικό. Φαίνεται μάλιστα ότι το τρίτο επίπεδο γίνεται πιο εκτεταμένο για να περιλάβει τα επόμενα δύο τελευταία επίπεδα.

Όπως προαναφέραμε μια άλλη σημαντική πτυχή του προτύπου Van Hiele, είναι οι πέντε φάσεις της διαδικασίας εκμάθησης. Η μέθοδος και η οργάνωση της διδασκαλίας, καθώς επίσης και το περιεχόμενο και τα υλικά που χρησιμοποιούνται είναι σημαντικοί τομείς παιδαγωγικής ανησυχίας. Η διδασκαλία που αναπτύσσεται σύμφωνα με αυτήν την ακολουθία προωθεί την απόκτηση ενός επιπέδου (Van Hiele-Geldof, 1984).

6.3 Επίτευξη

Ο Choi-Koh, S. (1999) αναφέρει ότι: *Τα οπτικά, περιγραφικά, και θεωρητικά επίπεδα περιόδων σκέψης και εκμάθησης που οδηγούν σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα συνοψίζονται στο σχήμα 1. Στο παρόν πρότυπο, αυτά τα επίπεδα επιτυγχάνονται με τη διά-*

βαση μέσω των διαφορετικών περιόδων εκμάθησης. Κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου, οι μαθητές ερευνούν τους κατάλληλους στόχους και συμμετέχουν στις διαλογικές δραστηριότητες εκμάθησης ,οι οποίες τους επιτρέπουν να προχωρήσουν στο επόμενο πιο υψηλό επίπεδο σκέψης.



Σχήμα 1: Van Hiele's πρότυπο της διδασκαλίας (επίτευξη)

Επίπεδο 1 οπτικό: Οι μαθητές αναγνωρίζουν τις μορφές συνολικά. Είναι δυνατό να αναγνωριστούν τα ισοσκελή τρίγωνα, αλλά είναι άσκοπο να ερωτηθούν γιατί είναι ισοσκελή.

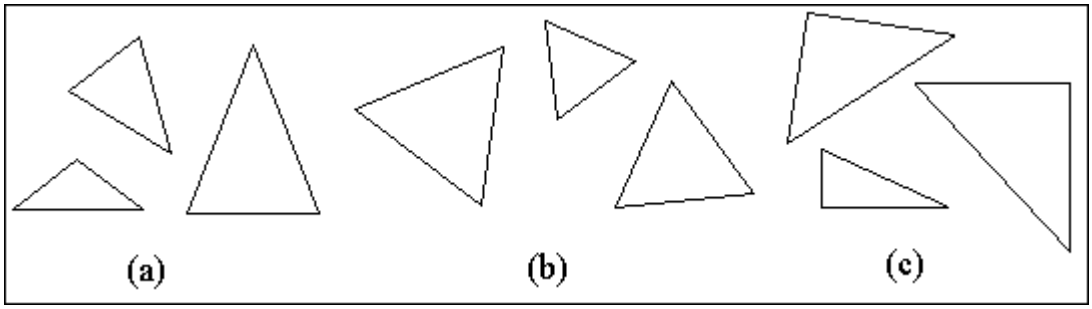
Περίοδος 1η Οι μαθητές μετακινούνται από το επίπεδο 1 προς το επίπεδο 2 της γεωμετρικής σκέψης. Οι στόχοι της διδασκαλίας κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου αποτελούνται από τις ιδιότητες των μεμονωμένων σχημάτων. Παραδείγματος χάριν, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιέχει τρεις ίσες πλευρές και έχει τρία ύψη που είναι άξονες συμμετρίας για κάθε πλευρά.

Πρώτη φάση: Διερεύνηση

Δραστηριότητα : σχήμα 2

Τα υλικά σχετικά με το επίπεδο 1 της μελέτης παρουσιάζονται στους μαθητές, δεδομένου ότι η προαπαιτούμενη γνώση στην περίοδο 1 είναι ότι οι μαθητές που λειτουργούν σε αυτό το επίπεδο μπορούν να μάθουν το γεωμετρικό λεξιλόγιο, μπορούν να προσδιορίσουν τις διευκρινισμένες μορφές, και λαμβάνοντας υπόψη έναν σχήμα, μπορούν να το αναπαραγάγουν. Παραδείγματος χάριν, λαμβάνοντας υπόψη τις εικό-

νες στο σχήμα 2, ένας μαθητής θα ήταν σε θέση να κατανοήσει ότι υπάρχουν ισοσκελή τρίγωνα στο (a), ισόπλευρα τρίγωνα στο (b), και ορθογώνια τρίγωνα στο (c)



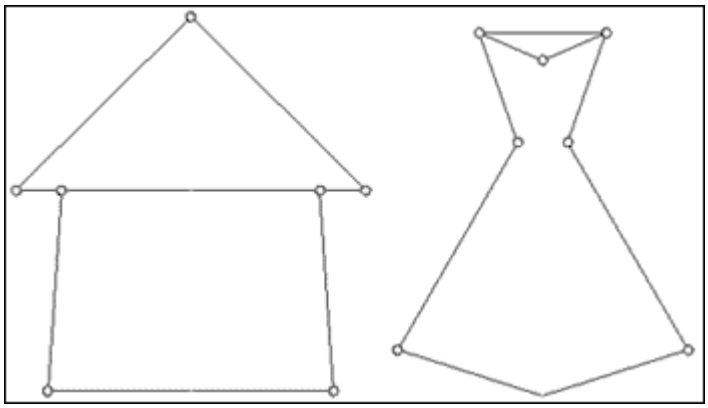
Σχήμα 2: Δώστε σε κάθε ομάδα ένα όνομα

Δεύτερη φάση: Κατευθυνόμενος προσανατολισμός

Δραστηριότητες : σχήματα 3 & 4

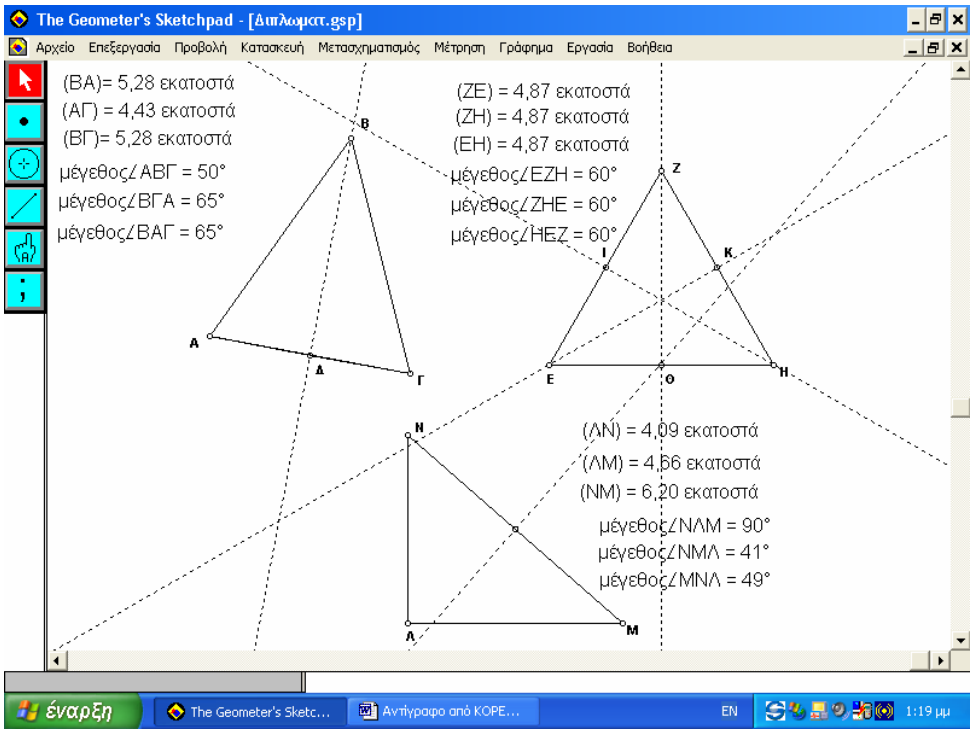
1. Οι μαθητές αρχίζουν να ερευνούν μέσω των προσεκτικά κατασκευασμένων σχημάτων. Η ερώτηση που τους τίθεται στο σχήμα 3 είναι :

Βρείτε τη γραμμή συμμετρίας σε κάθε σχήμα.



Σχήμα 3: Συμμετρικά σχήματα

Οι μαθητές προσπαθούν να συνδέσουν έναν άξονα συμμετρίας με τις διάφορες μορφές των τριγώνων. Καταδεικνύουν την αντανάκλαση μιας μορφής για τη γραμμή συμμετρίας, χρησιμοποιώντας το Geometer Sketchpad και αποδεικνύουν πώς αυτή η αντανάκλαση έχει επιπτώσεις, λαμβάνοντας υπόψη ένα αντικείμενο με ένα άλλο αντίστοιχο. Επίσης συζητούν τις ιδιότητες μορφών που αποκαλύπτονται από την αντανάκλαση.



Σχήμα 4: Ισοσκελή, ισόπλευρα, ορθογώνια τρίγωνα

2. Με προσεκτικά κατασκευασμένα τρία είδη τριγώνων, στο σχήμα 4 τίθεται η ερώτηση: Βρείτε τις ιδιότητες κάθε τριγώνου. Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να έχει άξονα συμμετρίας αυτόν που φαίνεται στο σχήμα; Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει το τρίγωνο ΕΖΗ ώστε να έχει άξονες συμμετρίας αυτούς που φαίνονται στο σχήμα; Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει το τρίγωνο, ΛΜΝ ώστε να έχει άξονα συμμετρίας αυτόν που φαίνεται στο σχήμα;

Τρίτη φάση: Ερμηνεία

Οι μαθητές και ο καθηγητής συμμετέχουν στη συζήτηση για τις ιδιότητες των τριών τριγώνων. Καλούν το τρίγωνο ΑΒΓ, ισοσκελές τρίγωνο, το τρίγωνο ΕΖΗ, ισόπλευρο τρίγωνο, και το ΛΜΝ , ορθογώνιο τρίγωνο.

Τέταρτη φάση: Ελεύθερος προσανατολισμός

Δραστηριότητα : σχήμα 5

Στους μαθητές δίνονται δύο κορυφές ενός τριγώνου ως περισσότερο ανοικτή δραστηριότητα που μπορεί να προσεγγιστεί από διάφορους διαφορετικούς τύπους λύσεων. Βρείτε την τρίτη κορυφή για να έχετε ένα α) ισοσκελές τρίγωνο β) ισόπλευρο τρίγωνο και γ) ορθογώνιο τρίγωνο.

Σχήμα 5: Λαμβάνοντας υπόψη δύο κορυφές ενός τριγώνου, βρείτε την τρίτη.

Πέμπτη φάση: Ολοκλήρωση

Ο καθηγητής βοηθά το μαθητή να κάνει μια ανασκόπηση της μελέτης και να ενσωματώσει το περιεχόμενο που ερευνάται. Οι μαθητές συνοψίζουν όλες τις ιδιότητες που είναι σε θέση να διακρίνουν σε ένα τρίγωνο.

Επίπεδο 2 - περιγραφικό: Οι μαθητές διακρίνουν τις μορφές βάσει των ιδιοτήτων τους.

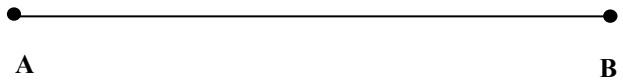
Περίοδος 2η

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου οι μαθητές κινούνται από το επίπεδο 2 προς το επίπεδο 3 της γεωμετρικής σκέψης. Οι στόχοι της διδασκαλίας είναι τα δίκτυα των σχέσεων και η διάταξη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Χρησιμοποιώντας τον άτυπο παραγωγικό συλλογισμό, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν τις σχέσεις.

Πρώτη φάση: **Διερεύνηση**

Δραστηριότητα : σχήμα 6

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τον άξονα συμμετρίας ενός ισοσκελούς (ή ισόπλευρου) τριγώνου για να κατασκευάσουν έναν τέτοιο σχήμα, όταν δίνεται η βάση ενός τριγώνου.



Σχήμα 6: Ολοκλήρωση ενός τριγώνου

Δεύτερη φάση: Κατευθυνόμενος προσανατολισμός

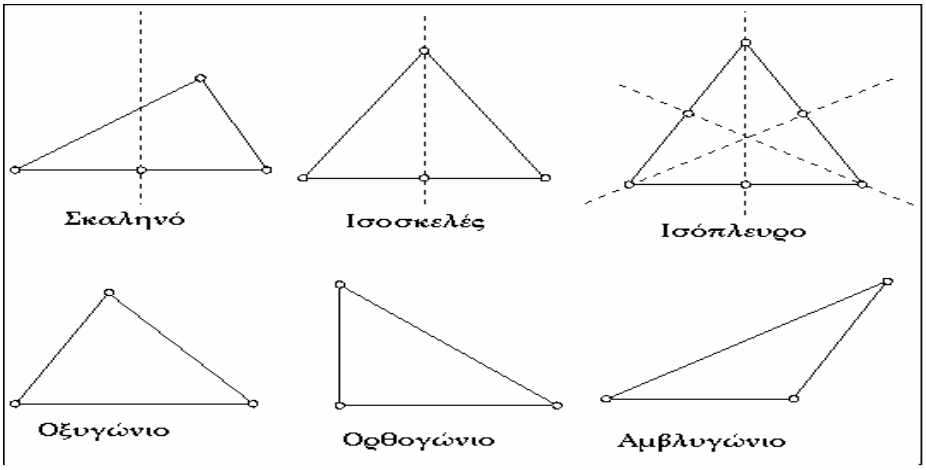
Δραστηριότητες : σχήμα 7 & 8

1. εύρημα

α) η τάξη εγκλεισμού μεταξύ των τριγώνων.

Μπορούν τα ισοσκελή τρίγωνα να ονομαστούν ισόπλευρα τρίγωνα; Ή μπορούν τα ισόπλευρα τρίγωνα να ονομαστούν ισοσκελή τρίγωνα; Τι γίνεται με τα ορθογώνια τρίγωνα σε σχέση με τα άλλα τρίγωνα;

β) Δώστε ορισμούς για όλα τα τρίγωνα συμπεριλαμβανομένων των ισοσκελών, ισόπλευρων, και σκαληνών τριγώνων.



Σχήμα 7: Όλα τα τρίγωνα

2. Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι το μισό ενός τετρά-πλευρου.

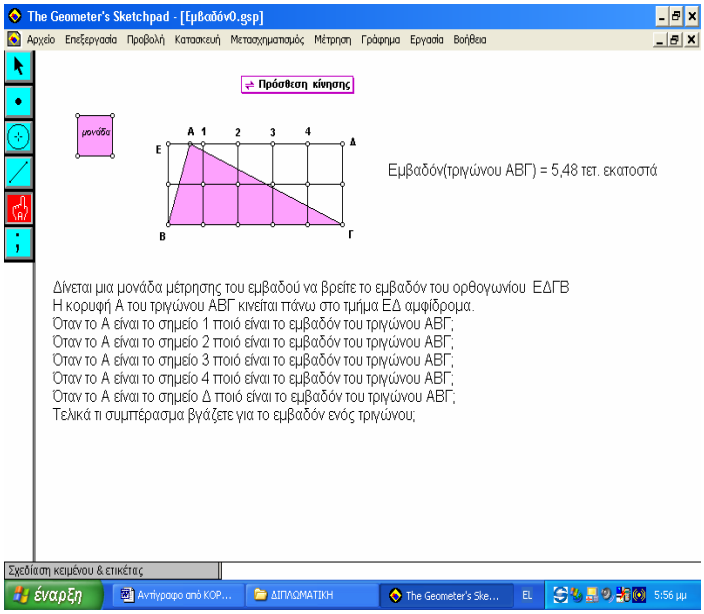
(σχήμα 8: εμβαδόν ενός τριγώνου)

Τρίτη φάση: Ερμηνεία

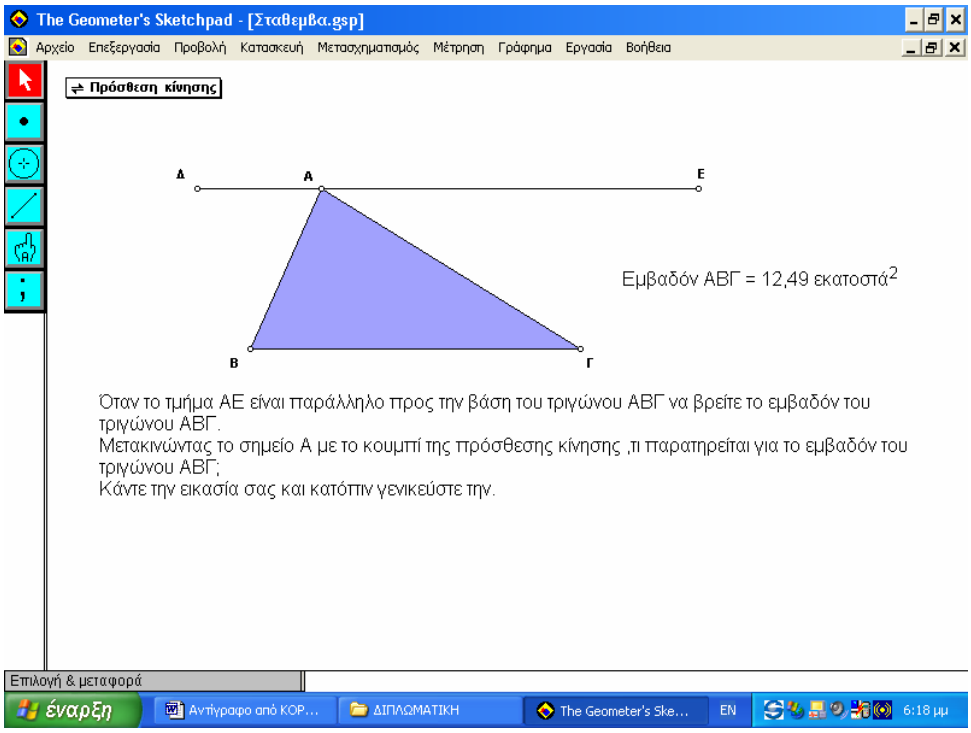
Οι μαθητές και ο καθηγητής συμμετέχουν στη συζήτηση για τις σχέσεις μεταξύ των τριών τριγώνων. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα μπορούν να είναι ισοσκελή τρίγωνα, αλλά τα ισοσκελή τρίγωνα δεν μπορούν να είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι ισοσκελές σε περίπτωση που δύο πλευρές είναι ίσες. Επίσης, οι μαθητές εξηγούν ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι πάντα 1/2*βάση*ύψος.

Τέταρτη φάση: Ελεύθερος προσανατολισμός

Σχήμα 8: εμβαδού



Δραστηριότητα : Σχήμα 9



Σχήμα 9: Σταθερό εμβαδόν των τριγώνων

Στους μαθητές δίνεται περισσότερο ως ανοικτή δραστηριότητα που μπορεί να προσεγγιστεί από διαφόρους διαφορετικούς τύπους λύσεων λόγω της διαθεσιμότητας πολλαπλών αντιπροσωπεύσεων. Δηλαδή, κάνοντας μια οποιαδήποτε κίνηση μιας κορυφής οι μαθητές, αντιμετωπίζουν μια νέα κατάσταση στην οποία ένα διαφορετικό τρίγωνο, ΑΒΓ παρουσιάζεται, αλλά πάντα το σταθερό εμβαδόν βρίσκεται με το κουμπί του εμβαδού που ενεργοποιείται. Οι μαθητές ανακαλύπτουν την άτυπη αφαίρεση που απαιτείται για να καθορίσουν ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι σταθερό ακόμα κι αν η μορφή του τριγώνου έχει αλλάξει μετακινώντας την κορυφή Α κατά μήκος μιας ευθείας παράλληλης προς την βάση ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

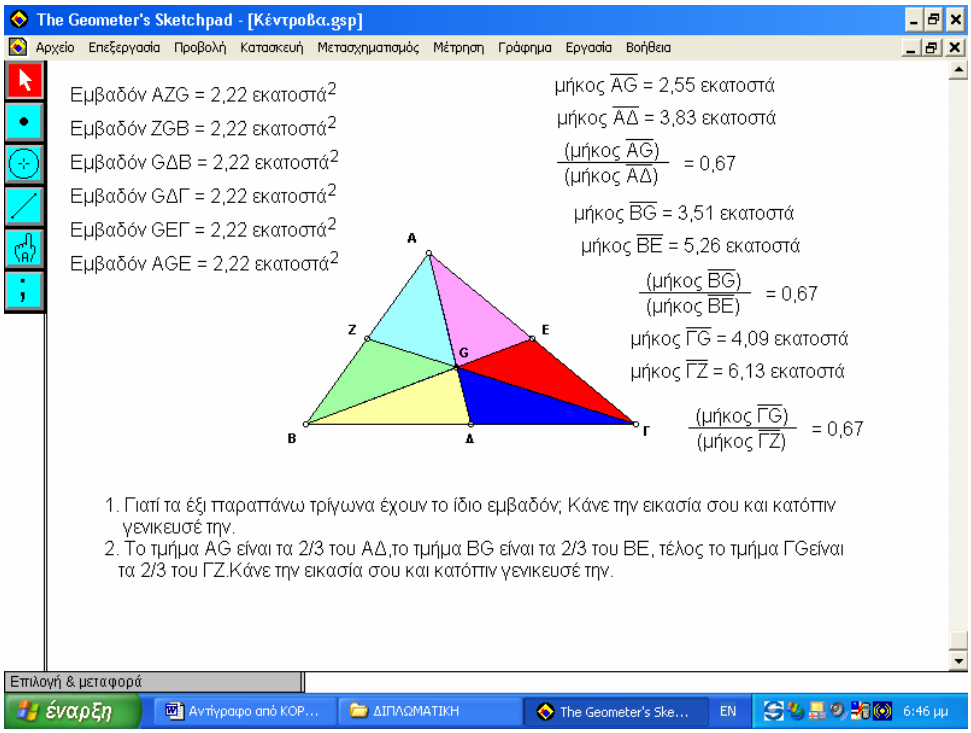
Πέμπτη φάση: Ολοκλήρωση

Σαν ολοκλήρωση της διδασκαλίας για την περίοδο 2, ο καθηγητής βοηθά τους μαθητές να κάνουν μια ανασκόπηση της μελέτης και να ενσωματώσουν το περιεχόμενο που ερευνάται. Οι μαθητές συνοψίζουν όλες τις σχέσεις που λειτουργούν: είναι σε θέση να διακρίνουν τα τρίγωνα από τους ορισμούς, τις επιπτώσεις αυτών, τους εγκλεισμούς κατηγορίας, να διατυπώσουν το εμβαδόν ενός τριγώνου και το λόγο για τον οποίο τα εμβαδά των τριγώνων που έχουν το ίδιο ύψος και την ίδια βάση είναι ίσα.

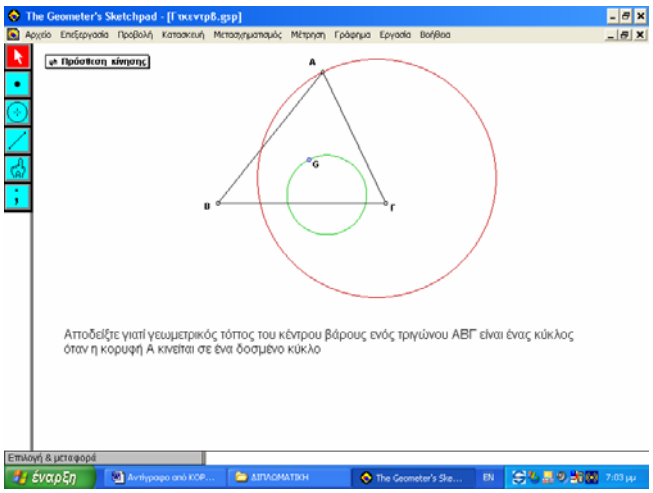
Επίπεδο 3 - θεωρητικό

Οι μαθητές είναι σε θέση να επινοήσουν την επίσημη γεωμετρική απόδειξη και να καταλάβουν τη διαδικασία που υιοθετείται Για αυτό το επίπεδο, οι ακόλουθες δραστηριότητες μπορούν να εισαχθούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας για την ανάπτυξη του επίσημου παραγωγικού συλλογισμού και για την εφαρμογή σχετικά με το τι καταλαβαίνουν για το κέντρο βάρους ενός τριγώνου σε περισσότερα ανοικτά προβλήματα.

Δραστηριότητες: Σχήμα 10 & 11



Σχήμα 10: Έξι τρίγωνα από το κέντρο βάρους



Σχήμα 11: Ίχνος κέντρου βάρους

Συμπέρασμα

Δύο περίοδοι εκμάθησης

Σύμφωνα πάντα με τον Choi-Koh, S. (1999) : *πρόθεση της περιόδου 1 ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη με συνέπεια κατά τη μετάβαση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. Οι μαθητές θα προχωρήσουν προς το επίπεδο 2 και θα είναι σε θέση να αναλύσουν τα σχήματα από την άποψη των ιδιοτήτων τους και τις σχέσεις μεταξύ των συστατικών τους και να ανακαλύψουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις της κατηγορίας μορφών, εμπειρικά, με τη μέτρηση και την παρατήρηση μετασχηματίζοντας δυναμικά τα σχήματα.*

Η περίοδος αρχίζει με τη συμμετρία ως διαισθητική οδηγία. Σε ένα μεγάλο μέρος του πρώτου μέρους της περιόδου 1, οι δυναμικές, πολλαπλές αντιπροσωπεύσεις του GSP βοηθούν τους μαθητές ώστε να αναπτύξουν την κατανόηση των ιδιοτήτων κάθε τριγώνου. Διευκολύνουν τους μαθητές να εκφράζουν με λόγια τις ιδιότητες, βασισμένες στους άξονες συμμετρίας, έτσι ώστε να διορθώσουν εύκολα τα λάθη με την παροχή των παραδειγμάτων εξαιρέσεων στον κανόνα. Η κατάκτηση της συμμετρίας ως βασικής έννοιας για τη μελέτη, επινοήθηκε για να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν τις ιδιότητες κάθε τριγώνου καθώς επίσης και τις ιδιότητες της συμφωνίας με τα απεικονισμένα σχήματα στο GSP.

Μέσω της ενεργού συζήτησης με τον καθηγητή, οι μαθητές θα οδηγηθούν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Οι δυναμικές, πολλαπλές αντιπροσωπεύσεις στο GSP θα παράσχουν στους μαθητές την ευκαιρία να συζητηθεί ο προσανατολισμός τους και να βρεθεί ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται. Καθώς η περίοδος συνεχίζεται, η κατασκευή κάθε τριγώνου, βασισμένη στις ιδιότητες που ανακαλύπτουν προηγουμένως, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων τους. Εάν οι μαθητές προσπάθησαν να μάθουν ποιες ιδιότητες ανήκουν στα δεδομένα σχήματα και πώς θα ενεργήσουν σε μια δεδομένη κατάσταση, τότε θα έχουν ένα δίκτυο των σχέσεων στη διάθεσή τους που συνδέεται αρκετά με τον αρχικό τομέα της σκέψης. Τέτοιοι μαθητές, που αρχίζουν από τη δεδομένη συγκεκριμένη κατάσταση, δεν θα έχουν οποιαδήποτε δυσκολία επιστρέφοντας στην αντίστοιχη σημασία.

Η κατασκευή σχημάτων στο επίπεδο 1 πρέπει να είναι αποτελεσματική και επιθυμητή για τους μαθητές για την ανάπτυξη του επιπέδου 2 των Van Hiele επιπέδων γεωμετρικής σκέψης. Σε αυτήν την περίοδο, εντούτοις, η δυνατότητα της λογικής σκέψης δεν πρέπει να υπερεκτιμηθεί.

Είναι αδύνατο σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές να μπορούν να ερευνήσουν το σύνολο του συλλογισμού επειδή οι σχέσεις μεταξύ των σχημάτων δεν έχουν κατανοηθεί. Το λογισμικό βοηθά τους μαθητές για να αναπτύξουν την κατανόηση από την παρανόησή τους κατά τη διάρκεια της κατασκευής των σχημάτων με την ενεργό συζήτηση των ιδιοτήτων ενός σχήματος.

Η πρόθεση του επιπέδου 2 ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη που γίνεται με τη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3. Ειδικότερα, η κατασκευή του κέντρου βάρους σε ένα τρίγωνο και η ανακάλυψη των ιδιοτήτων του κέντρου βάρους μπορούν πολύ παραγωγικά να γίνουν στο GSP. Χωρίς το λογισμικό ως εργαλείο, δεν θα είναι εύκολο για τους μαθητές να ερευνήσουν τις ιδιότητες του κέντρου βάρους, λόγω των ορίων της κατασκευής από το χαρτί και το μολύβι. Παραδείγματος χάριν, οι μαθητές, που χρησιμοποιούν το GSP, σύρουν μια διάμεσο σε ένα τρίγωνο από τη κορυφή της γωνίας στην αντίθετη πλευρά του και υποθέτουν ότι η διάμεσος διχοτομεί την περιοχή ενός τριγώνου, βασισμένη στη δραστηριότητα της σταθερής περιοχής των τριγώνων στο επίπεδο 2. Κατόπιν, ο μαθητής μπορεί να μετρήσει τις εν λόγω περιοχές και να εξετάσει την υπόθεση περαιτέρω με το έλεγχο των άλλων διαμέσων στις άλλες πλευρές του τριγώνου. Τα αποκτηθέντα στοιχεία κατ' αυτό τον τρόπο αποτελούν τη βάση για μια υπόθεση που ο μαθητής θεωρεί ότι είναι αληθινή. Μέσω αυτής της επαγωγικής διαδικασίας συλλογισμού, μπορούν να καταδείξουν την ανάπτυξη ενός λογικού, παραγωγικού συστήματος της γεωμετρικής σκέψης δηλαδή: έξι τρίγωνα που δημιουργούνται από τις τρεις διάμεσους έχουν το ίδιο εμβαδόν και επιτέλους, το κέντρο βάρους διαιρεί τις διάμεσους σε αναλογία 2:1 από κάθε κορυφή.

Επίσης, τα ανοικτά προβλήματα προγραμματίζονται να ενισχύσουν τη δυνατότητα των μαθητών να εφαρμόσουν και να γενικεύσουν τις υποθέσεις τους στις διάφορες καταστάσεις καθώς και να παρατηρήσουν τη διαδικασία συλλογισμού τους στη φάση ελεύθερου προσανατολισμού. Οι μαθητές μπορούν να απολαύσουν το συλλογισμό για την επίσημη αφαίρεση βασισμένη στις προηγουμένως-ανακαλυμμένες ιδιότητες του κέντρου. Με άλλα λόγια, όταν αναπτύσσουν τα ιεραρχικά επίπεδα Van Hiele γεωμετρικής σκέψης, μπορούν να φθάσουν στα επίσημα παραγωγικά συστήματα σε όλα τα τρίγωνα που μαθαίνουν.

6.4 Ο ρόλος του επαγωγικού συλλογισμού

Στους μαθητές θα δοθεί μια ευκαιρία να ερευνήσουν και να υποθέσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες ενώ λειτουργούν στις δραστηριότητες. Έτσι θα αναπτύξουν την κατανόησή

τους καθ' όλη τη διάρκεια των δύο περιόδων εκμάθησης. Οι μαθητές που συμπεριφέρονται ως ενεργοί αρχάριοι είναι σημαντικοί επειδή η εργασία στις δραστηριότητες προσφέρει έναν πλούτο οπτικών και γεωμετρικών στοιχείων και οι υποθέσεις για τις ιδιότητες καθώς και οι σχέσεις των σχημάτων μπορούν να εξεταστούν γρήγορα μέσα στα στοιχεία.

Η κατασκευή των σχημάτων είναι η κρισιμότερη και αποτελεσματικότερη φάση στο επίπεδο 1, δεδομένου ότι βοηθά τους μαθητές να εστιάσουν εντατικά στα συγκεκριμένα συστατικά και στις λεπτομέρειες των σύνθετων προβλημάτων. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να αναπτύξουν την κατανόηση όχι μόνο με την παρατήρηση, συζήτηση ή την ερμηνεία των οπτικών και γεωμετρικών στοιχείων, αλλά και με την υπόθεση των σχημάτων. Εκείνες οι επαγωγικές διαδικασίες συλλογισμού διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στο διαλογισμό των μαθητών σχετικά με την κατανόηση των ιδιοτήτων κάθε τριγώνου σε ένα επόμενο πιο υψηλό επίπεδο σκέψης. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να βλέπουν τις δυνατότητες της λογικής σκέψης που στηρίζεται στον παραγωγικό συλλογισμό των σχέσεων στα σχήματα. Στα πλαίσια της σταθερής περιοχής, εάν οι ασυμβίβαστες αλλαγές των τιμών εμφανίζονται, τότε οι μαθητές θα έχουν μια ευκαιρία να συγκρίνουν την τιμή που μετριέται ως αποτέλεσμα του τύπου τους με την τιμή που δίνεται αρχικά από τη λειτουργία στο GSP και να συνεχίσουν το συλλογισμό έως ότου τα ταιριάζουν .

6.5 Επιπτώσεις στη διδασκαλία

Οι δύο περίοδοι εκμάθησης που αναφέραμε παραπάνω, βασισμένες στις Van Hiele's φάσεις εκμάθησης οι οποίες οδηγούν ένα μαθητή από το ένα επίπεδο σκέψης στο επόμενο , δίνουν τα παραδείγματα των βημάτων στον κύκλο εκμάθησης. Είναι σαφές ότι η δυνατότητα να σκεφτεί κάποιος σε πιο υψηλά επίπεδα δεν αποκτιέται μόνο από τα γραπτά υλικά. Οι φάσεις εκμάθησης προτείνουν αντ' αυτού μια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή παρόμοια με εκείνη στην οποία ένας γιατρός παρέχει στον ασθενή του την κατάλληλη συνταγή.

Η τεχνολογία στις τάξεις μαθηματικών πρέπει να είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για να ενισχύσει αυτήν την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και των καθηγητών με σκοπό να ερευνηθούν οι υποθέσεις τους. Οι καθηγητές μπορούν να παρακινήσουν και να εμπλουτίσουν την εκμάθηση των μαθητών με την εύκαμπτη χρήση πέντε φάσεων εκμάθησης στους κανονικούς στόχους και στα ανοικτά προβλήματα. Προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος τους, προφανώς οι καθηγητές πρέπει να έχουν εμπειρία στα επίπεδα

εκμάθησης των μαθητών τους και στις περιοχές που διδάσκουν έτσι ώστε μπορούν αποτελεσματικά να χρησιμοποιήσουν αυτήν την ευελιξία.

Σαν μέθοδο αυτής της διδασκαλίας, οι φάσεις Van Hiele επιπέδων εκμάθησης φαίνονται να παρέχουν ένα πλήρες σχέδιο διδασκαλίας και εκμάθησης όταν χρησιμοποιείται ένα δυναμικό λογισμικό εργαλείων. Παραδείγματος χάριν, η υπόθεση του περιβάλλοντος με τις οπτικές αντιπροσωπεύσεις που τοποθετούνται διαδοχικά, προσεκτικά μπορεί να επιτρέψει στους μαθητές να ανακαλύψουν τις ιδιότητες ενός σχήματος: η φάση 2, κατευθυνόμενος προσανατολισμός. Οι μαθητές εξετάζουν δυναμικά τις υποθέσεις τους και ενθαρρύνονται για να εκφράσουν τα συμπεράσματά τους, ενώ ο καθηγητής εισάγει τη νέα ορολογία: η φάση 3, ερμηνεία. Οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος είναι προεξέχουσες όπου οι καθηγητές αναμένουν τους μαθητές για να βρουν τους τρόπους τους μέσω της λειτουργίας της άμεσης μόνο-ανατροφοδότησης στο λογισμικό: η φάση 4, ελεύθερος προσανατολισμός. Η αναθεώρηση και η σύνθεση για ότι έχουν μάθει πραγματοποιούνται άνετα: η φάση 5, ολοκλήρωση. Οι φάσεις δεν ολοκληρώνονται συνήθως σε μια γραμμική σχέση, ο κύκλος των μαθητών συχνά πέρνα από διάφορες φάσεις περισσότερο από μία φορά πριν να επιτύχει μια νέα περιοχή της σκέψης και φθάνει τελικά στο επόμενο επίπεδο.

Δεδομένου ότι ο στόχος των προτάσεών μας είναι η παροχή ικανοποιητικών ευκαιριών στις δύο περιόδους που δίνονται μεταξύ των πρώτων τριών επιπέδων γεωμετρικής σκέψης, οι δραστηριότητες που επινοούνται πρέπει να είναι χρήσιμα εκπαιδευτικά υλικά στις τάξεις των μαθηματικών. Όπως ξέρουμε, τα περισσότερα βιβλία αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στην επίσημη αφαίρεση. Προτού να λειτουργήσουν στον επίσημο παραγωγικό συλλογισμό, οι μαθητές πρέπει να εκτίθενται σε αυτά τα είδη δραστηριοτήτων συχνότερα.

7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7°

Συμπεράσματα, συζήτηση, μελλοντικές κατευθύνσεις

7.1 Περίληψη

Η θεωρία των επιπέδων van Hiele, που αναπτύχθηκε από τον Pierre Marie van Hiele και την σύζυγό του Dina van Hiele – Geldof τη δεκαετία του 1950, είναι μια κομψή θεωρία που αφορά στην απόκτηση μιας κατανόησης της γεωμετρίας ως μαθηματικού συστήματος. Η θεωρία επιχειρεί να εξηγήσει το γιατί πολλοί μαθητές έχουν δυσκολία με τη γεωμετρία και το τι θα μπορούσε να γίνει ώστε να ελαττωθεί η εν λόγω δυσκολία. Έχει εφαρμοστεί σε αναλυτικά προγράμματα στην Ολλανδία και τη Σοβιετική Ένωση και έχει πολλούς οπαδούς στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Υπάρχουν τρεις πτυχές στη θεωρία: η ύπαρξη επιπέδων κατανόησης στη γεωμετρία, οι ιδιότητες αυτών των επιπέδων, και οι αρχές που αποτελούν τη βάση της κίνησης από ένα επίπεδο στο επόμενο. Αυτές οι πτυχές έχουν περιγραφεί από τους van Hiele τόσο σε γενικούς όρους όσο και σε συμπεριφορικούς. Για να ελεγχθεί η θεωρία παραθέσαμε κείμενα των van Hiele αυτούσια όπως σταχυολογήθηκαν από τον Usiskin (1982) για να προτείνει τα 20 θέματα του τεστ των επιπέδων van Hiele (παλιά έρευνα) και επίσης κείμενα των David Fays; Dorothy Geddes; Rosamond Tischler (2005) από άρθρο τους με τίτλο "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents" που αφορούν στα τυπικά γνωρίσματα κάθε επιπέδου (νέα έρευνα).

Υπάρχουν πέντε επίπεδα, τα οποία είναι διαδοχικά και ιεραρχικά. Είναι:

Επίπεδο 1 (αναγνώριση/recognition): Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα από την εμφάνιση μόνο, συχνά με τη σύγκριση τους με μια γνωστή μορφή. Οι ιδιότητες ενός σχήματος δεν γίνονται αντιληπτές. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές παίρνουν τις αποφάσεις βασισμένοι στην αντίληψη, και όχι στον διαλογισμό.

Επίπεδο 2 (ανάλυση/analysis): Οι μαθητές θεωρούν τα σχήματα ως συλλογές των ιδιοτήτων. Μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά δεν βλέπουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων. Κατά την περιγραφή ενός αντικειμένου, ο μαθητής που λειτουργεί σε αυτό το επίπεδο μπορεί να απαριθμήσει όλες τις ιδιότητες που ξέρει, αλλά δεν μπορεί διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι απαραίτητες και ποιες είναι επαρκείς για να περιγράψει το αντικείμενο.

Επίπεδο 3 (διάταξη/order): Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτή-

των και μεταξύ των σχημάτων. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν τους σημαντικούς ορισμούς και να δώσουν τα άτυπα επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν το συλλογισμό τους. Οι λογικές επιπτώσεις και η συμπερίληψη κλάσης, όπως τα τετράγωνα που είναι ένας τύπος ορθογωνίου, γίνονται κατανοητές. Ο ρόλος και η σημασία της επίσημης αφαίρεσης, εντούτοις, δεν γίνονται κατανοητές.

Επίπεδο 4 (παραγωγικός συλλογισμός/deduction): Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν τις αποδείξεις, να καταλάβουν το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών, και να ξέρουν την έννοια των απαραίτητων και ικανοποιητικών όρων. Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να κατασκευάσουν τις αποδείξεις.

Επίπεδο 5 (αυστηρότητα): Οι μαθητές καταλαβαίνουν σε αυτό το επίπεδο τις επίσημες πτυχές της αφαίρεσης, όπως η καθιέρωση και η σύγκριση των μαθηματικών συστημάτων. Οι μαθητές μπορούν σε αυτό το επίπεδο να καταλάβουν τη χρήση της έμμεσης απόδειξης και της απόδειξης από αντιθετοαντιστροφή, και μπορούν να καταλάβουν τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Οι Clements και Battista (1992) επίσης προτείνουν την ύπαρξη του επιπέδου 0, που αυτοί καλούν ***προ-αναγνώρισης***. Οι μαθητές παρατηρούν σε αυτό το επίπεδο μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών μιας μορφής, με συνέπεια μια ανικανότητα να διακρίνουν μεταξύ των σχημάτων. Παραδείγματος χάριν, μπορούν να διακρίνουν μεταξύ των τριγώνων και των τετραπλεύρων, αλλά δεν μπορούν να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ ενός ρόμβου και ενός παραλληλογράμμου.

Οι ιδιότητες των επιπέδων (P. M. van Hiele) με τις ονομασίες του Usiskin (1982) είναι:

1. ***Σταθερή αλληλουχία***: Ένας μαθητής δε μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο van Hiele επίπεδο n δίχως να έχει διέλθει από το επίπεδο n-1.
2. ***Διαδοχικότητα:*** σε κάθε επίπεδο συλλογισμού εκείνο που ήταν σε λανθάνουσα κατάσταση στο προηγούμενο επίπεδο δηλώνεται στο επόμενο επίπεδο.
3. ***Διάκριση***: Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά.
4. ***Διαχωρισμός:*** Δύο άτομα που εκτελούν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα δε μπορούν να αλληλοκατανοηθούν.
5. ***Επίτευξη:*** Η μαθησιακή διαδικασία που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση στο επόμενο ανώτερο επίπεδο έχει πέντε φάσεις: διερεύνηση, καθοδηγούμενο προσανατολισμό, επεξήγηση, ελεύθερο προσανατολισμό, ενσωμάτωση.

Η πρόοδος από ένα επίπεδο στο επόμενο επίπεδο εξαρτάται από την εκπαιδευτική εμπει-

ρία απ' ό,τι από την ηλικία ή την ωρίμανση. Μερική εμπειρία μπορεί να διευκολύνει (ή να εμποδίσει) την πρόοδο μέσα σε ένα επίπεδο ή σε ένα πιο υψηλό επίπεδο.

Σύμφωνα με το πρότυπο των van Hieles, ένας μαθητής προχωρεί μέσω κάθε επιπέδου σκέψης ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας που οργανώνεται σε πέντε φάσεις εκμάθησης. Οι φάσεις περιγράφονται κατωτέρω.

Πληροφορίες: Μέσω της συζήτησης, ο καθηγητής προσδιορίζει τι οι μαθητές ξέρουν ήδη για ένα θέμα και οι μαθητές προσανατολίζονται στο νέο θέμα.

Κατευθυνόμενος προσανατολισμός: Οι μαθητές ερευνούν τα αντικείμενα της διδασκαλίας στους προσεκτικά δομημένους στόχους όπως το δίπλωμα, η μέτρηση, ή η κατασκευή. Ο καθηγητής εξασφαλίζει ότι οι μαθητές ερευνούν τις συγκεκριμένες έννοιες.

Επεξήγηση: Οι μαθητές περιγράφουν τι έχουν μάθει για το θέμα με λέξεις. Ο καθηγητής εισάγει τους σχετικούς μαθηματικούς όρους.

Ελεύθερος προσανατολισμός: Οι μαθητές εφαρμόζουν τις σχέσεις που μαθαίνουν να λύνουν τα προβλήματα και να ερευνούν περισσότερους ανοικτούς στόχους.

Ολοκλήρωση: Οι μαθητές συνοψίζουν και ενσωματώνουν τι έχουν μάθει, αναπτύσσοντας ένα νέο δίκτυο των αντικειμένων και των σχέσεων.

Ένας μαθητής μπορεί να χρειαστεί στον κύκλο μέσω μερικών από τις πέντε φάσεις περισσότερο από μία φορά με ένα ιδιαίτερο θέμα.

Επίσης ο A .Hoffer (1986) πρότεινε πέντε κατηγορίες ικανοτήτων που θα πρέπει στα πλαίσια της διδασκαλίας της Γεωμετρίας να αναπτύξουν οι μαθητές και είναι: οπτικές , λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής.

Για τις φάσεις της κίνησης από ένα επίπεδο στο επόμενο έγιναν προτάσεις σύμφωνες με την θεωρία van Hiele με την βοήθεια του λογισμικού Geometer Sketchpad. Η αποτελεσματικότητα αυτής της διδασκαλίας θα πρέπει να ελεγχθεί στην Ελλάδα με νέα έρευνα.

7.2 Συμπεράσματα

Στην ερευνά μας χρησιμοποιήσαμε το τεστ van Hiele, Usiskin (1982) για να ερευνήσουμε την κατάταξη μαθητών/τριων σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1838 μαθητές που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και, Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων της Ελλάδας. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, εξετάστηκαν σε ένα τεστ van Hiele σχεδιασμένο για να προσδιορίσει το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele κάθε μαθητή, κατά το χρονικό διάστημα από 27-01-2005 μέχρι 21-04-2005 του σχολικού έτους.. Ένας μαθητής θεωρήθηκε

ότι βρίσκεται σε ένα van Hiele επίπεδο n αν ο μαθητής είχε απαντήσει σωστά σε ένα σταθερό ποσοστό ερωτήσεων στο επίπεδο n και σε όλα τα κατώτερα επίπεδα.

Ένα πρώτο συμπέρασμα της ερευνάς μας ήταν ότι το 84,3% των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το ελαστικό κριτήριο και το 88,2 % με το αυστηρότερο κριτήριο. Δηλαδή πάνω από τα δύο τρίτα των μαθητών απάντησαν στις ερωτήσεις των τεστ με τρόπους που καθιστούν εύκολη την αντιστοίχιση κάποιου επιπέδου van Hiele σ΄ αυτούς.

Ο Usiskin (1982, σελ..67,κριτήρια M_3-M_4) ύστερα από έρευνα του σε σχολεία της Αμερικής ισχυρίζεται ότι: *Παρά το γεγονός ότι το τεστ van Hiele είναι μάλλον "χονδροειδές" μέσο για την ταξινόμηση των μαθητών, το 85% των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το ελαστικό κριτήριο και το 92 % με το αυστηρότερο κριτήριο. Δηλαδή πάνω από τα δύο τρίτα των μαθητών μπόρεσαν να καταταχθούν σε κάποιο επιπέδου van Hiele.*

Συνεπώς υπάρχει επιβεβαίωση του αντιστοίχου συμπεράσματος της έρευνας του Usiskin(1982) και στην Ελλάδα. Τα παραπάνω ποσοστά θα μπορούσαν να ήταν μεγαλύτερα, δηλαδή να είχαμε μεγαλύτερο αριθμό μαθητών ταξινομημένων σε κάποιο επίπεδο van Hiele, αν το ερωτηματολόγιο του Usiskin μπορούσε να βελτιωθεί περαιτέρω. Μια τέτοια προσπάθεια έχει καταβληθεί το τελευταίο καιρό από τους Fays D., Geddes D.; Tischler R. (2005) οι οποίοι σε άρθρο τους κάνουν συγκεκριμένες προτάσεις σχετικά (κεφάλαιο 3, σελ.98). Επίσης, προτάσεις έχει κάνει για το σκοπό αυτό και ο Mark Wilson (2000)-ένας εκ των επικριτών του- σε θέματα διαδοχής των ερωτήσεων στο τεστ. Η δική μας πρόταση είναι ότι μια έρευνα με συνεντεύξεις με την χρησιμοποίηση του τεστ του Usiskin(1982) θα μπορούσε να έχει καλύτερα αποτελέσματα, δηλαδή να κατατάξει περισσότερους μαθητές και χωρίς λάθη σε κάποιο επίπεδο van Hiele.

Ένα άλλο συμπέρασμα της έρευνας μας είναι ότι από τους 1838 μαθητές στους οποίους αντιστοιχίζονται τροποποιημένα επίπεδα van Hiele και με τα δύο κριτήρια, μόνο 838 μαθητές δηλαδή το 45,6%, έχουν το ίδιο επίπεδο σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια.

Ο Usiskin(1982, σελ..29) ισχυρίζεται ότι: *Το 52% των μαθητών (685 από τους 1268) αντιστοιχίζεται στο ίδιο τροποποιημένο επίπεδο van Hiele σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια.*

Και σε αυτό το συμπέρασμα της έρευνας του Usiskin(1982) στην Αμερική φαίνεται να υπάρχει επιβεβαίωση από την έρευνά μας στην Ελλάδα. Η επιλογή του κρι-

τηρίου επηρεάζει καταφανώς το επίπεδο van Hiele που αντιστοιχεί σε ένα μαθητή κάτι που φαίνεται από τα διαφορετικά ποσοστά στην κατάταξη των μαθητών με το ελαστικό και το αυστηρό κριτήριο. Συνεπώς το επίπεδο van Hiele δεν είναι τόσο σταθερό , όσο υποδηλώνεται στη θεωρία. Το ότι είναι εύκολο να καταταχθεί ένας μαθητής σε κάποιο επίπεδο είναι ένα θετικό στοιχείο για τη θεωρία van Hiele. Όμως το γεγονός ότι ο μαθητής μπορεί να έχει διαφορετικά επίπεδα που εξαρτώνται από την επιλογή του κριτηρίου που πρέπει να ικανοποιείται, είναι αρνητικό. Το πρώτο υποδηλώνει ότι ένα τεστ φτιαγμένο με πιο συνεπή τρόπο προς την θεωρία θα μπορούσε να ταξινομήσει ακόμη περισσότερους μαθητές, ενώ το δεύτερο υποδηλώνει ότι τα επίπεδα είναι απλώς στάνταρ δεξιότητας που χαρακτηρίζονται από αυξανόμενη δυσκολία. Αν δεχθούμε την υπόθεση, ότι ένας μαθητής θα πρέπει να βρίσκεται σε ένα και μόνο επίπεδο, χρειάζεται προσπάθεια και έρευνα για την εύρεση κάποιων πιθανών τρόπων ώστε να ικανοποιείται. Για παράδειγμα η αύξηση του πλήθους των θεμάτων σε κάθε επίπεδο θα μείωνε την πιθανότητα της τυχαίας απάντησης και της απάντησης σε ένα μόνο θέμα.

Από την έρευνά μας προέκυψε ότι: το 60,6% των μαθητών δηλαδή 1114 από τους 1838 μαθητές, βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με το αυστηρό κριτήριο και το 48,6% δηλαδή 893 μαθητές με το ελαστικό κριτήριο. Οι Usiskin (1982), Wirszup (1976) και Hoffer (1986) είχαν ισχυριστεί κάτι αντίστοιχο. Συγκεκριμένα: *Η πλειονότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο van Hiele.* Usiskin(1982, p.32).

Επιβεβαιώνονται όπως φαίνεται και για την Ελλάδα τα συμπεράσματα των Usiskin (1982) ,Wirszup(1976) και Hoffer (1986) από τις έρευνες που έκαναν στις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής, δηλαδή οι περισσότεροι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στα επίπεδα 1και 2 της θεωρίας Van Hiele. Επομένως το συμπέρασμα αυτό εξηγεί, σύμφωνα πάντα βέβαια με την θεωρία των van Hieles, γιατί υπάρχουν προβλήματα σήμερα στην διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Για να γίνει κατανοητή η Ευκλείδεια Γεωμετρία το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών έπρεπε να ήταν το $4^{ο}$ επίπεδο της θεωρίας των van Hieles. Το γεγονός ότι στην Ελλάδα η γεωμετρία διδάσκεται οργανωμένα επί πολλά χρόνια, ουδόλως επηρέασε όπως φαίνεται τα αποτελέσματα, τα οποία εμφανίζονται να είναι τα ίδια στις χώρες στις οποίες έχουν γίνει αντίστοιχες έρευνες και η διδασκαλία της γεωμετρίας ήταν προαιρετική. Σε αυτή την περίπτωση προτείνουμε ποιοτική έρευνα με συνεντεύξεις και με ερευνητικό ερώτημα «Γιατί πολλοί μαθητές δε μαθαίνουν ούτε

τις απλούστερες γεωμετρικές έννοιες στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουν τις έννοιες αυτές όταν αποφοιτούν από το γυμνάσιο;»

Από την έρευνα δε διαπιστώθηκαν διαφορές λόγω φύλου στα επίπεδα van Hiele των μαθητών μέσω των δύο κριτηρίων, αυστηρού-ελαστικού.

Ο Usiskin (1982, Συμπέρασμα 13, σελ..76) διαπίστωσε ότι: *Το φθινόπωρο(δηλαδή στο πρώτο τεστ για τα επίπεδα van Hiele) δεν υπάρχουν διαφορές λόγω φύλου.*

Φαίνεται ότι ανεξάρτητα αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των δύο φύλων στην ικανότητα αντίληψης του χώρου- *Ιστορικά, σε τεστ που δε σχετίζονται με τη σχολική μάθηση, τα αγόρια ξεπερνούν τα κορίτσια στο συλλογισμό στο χώρο* (Usiskin, σελ..76, 1982) - αυτές οι διαφορές δεν έχουν καμία επίπτωση στην ικανότητα μάθησης της γεωμετρίας . Στην προκειμένη περίπτωση προτείνουμε ποσοτική έρευνα με διδακτική παρέμβαση και ερευνητικό ερώτημα «Υπάρχουν διαφορές μεταξύ των δύο φύλων μετά από διδακτική παρέμβαση σύμφωνη με την θεωρία των van Hiele's;».

Διαπιστώσαμε επίσης, ότι υπάρχει βελτίωση των επιπέδων van Hiele των μαθητών στις μεταβάσεις από τη μία τάξη στην άλλη λόγω της υπάρχουσας διδασκαλίας της γεωμετρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα παρότι αυτή δεν είναι σύμφωνη με την θεωρία van Hiele's. Η βελτίωση αυτή δεν φαίνεται να είναι όμως η αναμενόμενη, δηλαδή οι μαθητές δε φτάνουν στο κατάλληλο επίπεδο, το $4^{ο}$ της θεωρίας, για να κατανοήσουν τη διδασκόμενη στο Λύκειο Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Σχετικά με την επίδραση του είδους του σχολείου στη διαμόρφωση της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή, προέκυψε από την έρευνα ότι στην Ελλάδα υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ δημοσίων και ιδιωτικών σχολείων στην κατάταξη των μαθητών σε επίπεδα van Hiele στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι μαθητές των ιδιωτικών σχολείων βρίσκονται σε υψηλότερα επίπεδα σε σχέση με τους μαθητές των δημόσιων σχολείων. Μία πιθανή εξήγηση είναι το γεγονός ότι πολλά από τα ιδιωτικά σχολεία έχουν πιο οργανωμένο σύστημα διδασκαλίας και παρακολούθησης της προόδου των μαθητών χωρίς ελλείψεις διδακτικού προσωπικού. Ένα επιπλέον στοιχείο που πιθανόν να συμβάλλει στη διαφορά αυτή είναι το γεγονός ότι οι μαθητές των σχολείων αυτών προέρχονται από οικονομικά εύρωστες οικογένειες με υψηλό μορφωτικό επίπεδο και σαφή εκπαιδευτικό προσανατολισμό.

Όσον αφορά τις ερωτήσεις του τεστ για τα επίπεδα van Hiele που χρησιμοποιήσαμε διαπιστώσαμε τα εξής:

- Υπάρχει ένα ποσοστό των μαθητών (11,6%) που θεωρεί, ότι ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Στην έρευνα του Usiskin (1982) το ποσοστό αυτό των

μαθητών δηλαδή αυτών που θεωρούν ότι ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο είναι 10% (Usiskin (1982 σελ..58).

- Το ένα τρίτο των μαθητών δεν γνωρίζει ότι τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες. Ο Usiskin (1982) στην ερευνά του ισχυρίζεται και αυτός το ίδιο (σελ.58).
- Στις ερωτήσεις που αφορούν συλλογισμούς που οδηγούν σε κάποιο συμπέρασμα (λογικής) το ποσοστό των μαθητών που δεν απάντηση σωστά είναι πάνω από 50%, δηλαδή περισσότεροι από τους μισούς. Ο Usiskin (1982) αναφέρει και αυτός ότι στην ερευνά του περισσότεροι από τους μισούς μαθητές δεν απάντησαν σωστά σε αυτές τις ερωτήσεις (λογικής), (σελ.58).
- Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών (21,2%) θεωρεί ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ισοσκελές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης .
- Μόνο το 32,8% των μαθητών μπορούν να διατάξουν απλές προτάσεις. Στην έρευνά του ο Usiskin διαπιστώνει και αυτός ότι μόνο το 28% των μαθητών μπορούν να διατάξουν απλές προτάσεις (σελ.59).

7.3 Συζήτηση

Τα αποτελέσματα της έρευνας μας δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές λειτουργούν στο πρώτο ή δεύτερο επίπεδο van Hiele. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι παρόλο που εμείς και οι μαθητές μας μπορεί να χρησιμοποιούμε την ίδια λέξη, την ερμηνεύουμε όμως αρκετά διαφορετικά. Παραδείγματος χάριν, εάν ένας μαθητής είναι στο πρώτο επίπεδο, η λέξη "τετράγωνο" τον κάνει να ασχοληθεί με μια μορφή που μοιάζει με ένα τετράγωνο, και τίποτα παραπέρα. Στο δεύτερο επίπεδο, ο μαθητής σκέφτεται για τις ιδιότητες ενός τετραγώνου, αλλά δεν μπορεί να ξέρει που είναι απαραίτητες ή επαρκείς για να καθορίσουν ένα τετράγωνο. Ο μαθητής μπορεί να θεωρήσει ότι προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένα σχήμα είναι ένα τετράγωνο, τότε πρέπει να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες. Ο καθηγητής, που σκέφτεται σε πιο υψηλό επίπεδο, ξέρει όχι μόνο τις ιδιότητες ενός τετραγώνου, αλλά και που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν ότι ένα σχήμα είναι ένα τετράγωνο. Στην πραγματικότητα, ο καθηγητής μπορεί να σκεφτεί διαφορετικούς τρόπους για να δείξει ότι ένα σχήμα είναι ένα τετράγωνο, δεδομένου ότι ξέρει τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων ιδιοτήτων και μπορεί να καθορίσει ποιες ιδιότητες υπονοούνται από τις άλλες. Επομένως, ο καθηγητής επιβάλλεται να γνωρίζει σε πιο επίπεδο van Hiele βρίσκεται ο μαθητής /τρια για να αξιολογήσει τον τρόπο που ο μαθητής ερμηνεύει ένα

θέμα προκειμένου να επικοινωνήσει μαζί του αποτελεσματικά.

Όσον αφορά στην αξιολόγηση του επιπέδου ενός μαθητή θα προτείναμε ένα ερευνητικό ερώτημα το οποίο θα ερευνούσε τη σχέση του επιπέδου ενός μαθητή και των απαντήσεων που δίνει σε μια συνέντευξη ή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας . Παραδείγματος χάριν, ένας καθηγητής μπορεί να παρατηρήσει το πώς ένας μαθητής χρησιμοποιεί τη γεωμετρική γλώσσα και το πώς αυτή καθορίζει το επίπεδο σκέψης του μαθητή (π.χ. για τα τρίγωνα) , βασιζόμενος στην ανάλυση των απαντήσεών του.

Σχετικά τώρα με τις επιπτώσεις της θεωρίας van Hiele στις εκπαιδευτικές μας πρακτικές παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη θεωρία δείχνει ότι η αποτελεσματική εκμάθηση πραγματοποιείται όταν δοκιμάζουν ενεργά οι μαθητές τα αντικείμενα της μελέτης στα κατάλληλα πλαίσια και όταν συμμετέχουν στη συζήτηση και την αντανάκλαση. Σύμφωνα με τη θεωρία, η χρησιμοποίηση της διάλεξης και της αποστήθισης ως κύριες μέθοδοι διδασκαλίας δε θα οδηγήσει στην αποτελεσματική εκμάθηση. Οι καθηγητές πρέπει να παρέχουν στους μαθητές τους την κατάλληλη εμπειρία και τις κατάλληλες δραστηριότητες και ανάλογα σε πιο επίπεδο βρίσκονται, να προσπαθήσουν να τους κατευθύνουν , προσπαθώντας, όσο το δυνατόν κάθε φορά, να μιλούν στη γλώσσα τους.

7.4 Προτάσεις

Για την επίτευξη αυτού του στόχου προτείναμε δύο περιόδους εκμάθησης με τη βοήθεια του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας Geometer Sketchpad όπως αναλυτικά παραθέσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υπάρχουν ισχυροί λόγοι για τη χρησιμοποίηση των υπολογιστών στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Τα προγράμματα της δυναμικής γεωμετρίας όπως το Geometer Sketchpad παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο για πολλά παραδείγματα στην γεωμετρία. Υποτίθεται ότι η πρόωρη επέμβαση με την χρήση της τεχνολογίας μπορεί να παρέχει στους μαθητές τα επαγωγικά εργαλεία που χρειάζονται για να ανεβάσουν το επίπεδο Van Hiele πριν αντιμετωπίζουν τις παραγωγικές αποδείξεις, Οι μαθητές στα σχολεία μεγαλώνουν σήμερα με τους υπολογιστές και τους βλέπουν γενικά σαν διασκέδαση . Ενώ η Γεωμετρία και η απόδειξη μπορεί να φαίνονται απόμακρες από τη σκέψη τους αυτοί είναι δεμένοι με τους υπολογιστές στο σπίτι. Αυτοί οι μαθητές ίσως να βρουν τη χρησιμοποίηση ενός προγράμματος υπολογιστών στην διδασκαλία της γεωμετρίας σαν μια «ανάσα».

Πρόθεση λοιπόν της πρώτης περιόδου εκμάθησης που προαναφέραμε είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη με στόχο τη μετάβαση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. Οι μαθητές προχωρούν έτσι προς το επίπεδο 2 και είναι

σε θέση να αναλύσουν τα σχήματα από την άποψη των ιδιοτήτων τους και τις σχέσεις μεταξύ των συστατικών τους και να ανακαλύψουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις της κατηγορίας των μορφών, εμπειρικά, με τη μέτρηση και την παρατήρηση, μετασχηματίζοντας δυναμικά τα σχήματα. Η κατασκευή σχημάτων στο επίπεδο 1 πρέπει να είναι αποτελεσματική και επιθυμητή για τους μαθητές για την ανάπτυξη του επιπέδου 2 των Van Hiele επιπέδων γεωμετρικής σκέψης. Σε αυτήν την περίοδο, εντούτοις, η δυνατότητα της λογικής σκέψης δεν πρέπει να υπερεκτιμηθεί. Οι δυναμικές, πολλαπλές αντιπροσωπεύσεις στο Geometer Sketchpad παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να συζητηθεί ο προσανατολισμός τους και να ανακαλυφθεί ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται

Η πρόθεση της δεύτερης περιόδου είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη, που γίνεται με τη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3, το οποίο ο van Hiele ονομάζει «ουσία της γεωμετρίας (the essence of Geometry)». Στην περίοδο αυτή, στόχος της διδασκαλίας πρέπει να είναι η αφομοίωση από τους μαθητές των σχέσεων που συνδέουν τις ιδιότητες των σχημάτων. Επίσης σε αυτή την περίοδο οι μαθητές πρέπει να αρχίσουν να διατάσσουν λογικά αυτές τις ιδιότητες, με το σκεπτικό ότι κάθε ιδιότητα πρέπει να στηρίζεται σε κάποια άλλη. Τα ανοικτά προβλήματα προγραμματίζονται για να ενισχύσουν τη δυνατότητα των μαθητών να εφαρμόσουν και να γενικεύσουν τις υποθέσεις τους στις διάφορες καταστάσεις καθώς και να παρατηρήσουν τη διαδικασία των συλλογισμών τους στη φάση ελεύθερου προσανατολισμού.

Στην τρίτη περίοδο, δηλαδή στην κατάκτηση του 4^{ου} επιπέδου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης το οποίο κατά τον van Hiele αποτελεί την ουσία των μαθηματικών /the essence of Mathematics, στόχος της διδασκαλίας πρέπει να είναι η κατανόηση από τους μαθητές τι σημαίνει «λογική διάταξη», δηλαδή τι σημαίνει ότι κάποιες ιδιότητες προηγούνται κάποιων άλλων. Με υλικό τα θεωρήματα οι μαθητές στην προσπάθειά τους για μια λογική τους διάταξη ανακαλύπτουν τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα θεωρήματα και τα αντίστροφά τους και κατανοούν γιατί μερικά αξιώματα και ορισμοί είναι απαραίτητα και τέλος θα ερευνήσουν γιατί μερικές συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες.

8 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8°

Βιβλιογραφία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Βισκαδουράκης . Β Από την επίκληση της θεωρίας Van Hiele σε μια πρόταση για υλοποίησή της. *Περιοδικό «το φ»* Αθήνα 2004.σελ.63-67.
2. Γαγάτσης Α, Δημητριάδης Κ, Καρύδας Χ, Συρίμη Χ- (1993) Μερικά στοιχεία γεωμετρίας στην Ελλάδα και την Κύπρο του 19ου αιώνα. *Πανεπιστήμιο Κύπρου*.
3. Θωμαίδης Γ- Πούλος Α. *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη 2000. Εκδόσεις Ζήτη.,σελ.11-13.
4. Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα, Εκδόσεις Leader Books.σελ.266-270.
5. Καστάνης Ν. «Να φύγει ο Ευκλείδης»,«Δεν θα γίνουμε εθνικοί Μειοδότες» Μια ιστορικο-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία *Μαθηματική Επιθεώρηση*, *τεύχος* 31(1986), σελ 3 -8.
6. Λάππας Δ «Αναλυτικά Προγράμματα και Γεωμετρία στο Λύκειο» Εισήγηση στο 15° *Πανελλήνιο Συνέδριο της Ε.Μ.Ε Χίος* 13-14-15 Νοέμβρη 1998.Πρακτικά σελ.55-62.
7. Μπαρκάτσας, Α. (2003). *Σύγχρονες Διδακτικές και Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά του 21^{ου} αιώνα*. Χαλκίδα : Εκδόσεις Κωστόγιαννος.σελ.134.
8. Ντζιαχρήστος Β.& Ζαράνης Ν. (2001). Η αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με την βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού, *Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 56(2001) σελ.55.*
9. Ντζιαχρήστος Β.& Ζαράνης Ν. (2002). Δραστηριότητες για την βελτίωση δεξιοτήτων στο μάθημα της Γεωμετρίας με εκπαιδευτικό λογισμικό και φύλλα εργασίας βασισμένες στο μοντέλο van Hiele,*Εφαρμοσμένη Παιδαγωγική* 1 ,2002.σελ 76-90
10. Ντζιαχρήστος Β.& Κοντογιάννης Δ *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας* 4^{η} έκδοση Αθήνα 2003 σελ. 476-479.

11. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1997,2004) Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.

12. Σπύρου Π. *Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις των παραδόσεων* ,Αθήνα 2005.σελ.256.

13. Τουμάσης Χ (2002) *Σύγχρονη Διδακτική των μαθηματικών* Gutenberg ,Αθήνα ,2002.σελ.356-357.

14. Τουμάσης Χ (2003) Το γεωμετρικό πρόβλημα:κίνητρα για απόδειξη σε ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον . *20^{ο} συνέδριο Ε.Μ.Ε Βέροια.*

15. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (2000). Πανελλήνιες Εξετάσεις στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου: «Παγίδες» ή Ανοιχτά Προβλήματα; *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, *3*, σελ.163-172.

16. Ζάχος, Ι. (2000). Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β΄ τάξης του Λυκείου. *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV, σελ.*161-*179, Εκδ. Gutenberg*

ΞΕΝΗ

1. Burger, W., & Shaughnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiete levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,17*(1), σελ.31 -48.

2. Brousseau, G. (1997) Theory of didactical situations in mathematics .Didactique des Mathematiques 1970-1990. *Dordrecht:Kluwer Academic Publishers*.

3. Choi Koh S. (1999). A student's learning of geometry using the computer. *Journal of Educational Research*, 92(5), σελ.301-311.

4. Clements, D., & Battista, M. (1990). The effects of logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(5), σελ.356-371.

5. Clements, D. & Battista, M (1992)"Geometry and Spatial Reasoning." In D. Grouws, ed. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* New York: Macmillan Publishing Co.

6. Davis, P.(1995) : "The rise, fall, and possible transfiguration of triangle Geometry" *American Mathematical Monthly* , 102(3), σελ.204-214.

7. De Villiers, M. D. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

8. Dixon, J. K. (1997). Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. *School Science and Mathematics, 97(7), σελ.*352-358

9. Fays D; Geddes, D;, & Tischter. R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3.*

10. Fays D; Geddes D; &Tischler R (2005) "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents"

11. Galbraith, P. (1996). Assessment in Mathematics *: Purpose and traditions.σελ.277.*

12. Gutierrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 20(2,3), σελ.27-45.

13. Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). Analternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22, σελ.*237-251.

14. Geddes, D., & Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and Classroom Activities. In D.T.Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle grades mathematics* (σελ..199-225). New York: Macmillan Publishing Company.

15. Goldenberg, P., (1999). Principles, art, and Craft in curriculum design: the case of connected geometry, *International Journal of Computers for Mathematical learning,* 4, σελ.191-224.

16. Hoffer, A. (1986). *Geometry and visual thinking.* In T. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: *Research based methods* (σελ..233-261). Newton, MA: Allyn and Bacon.

17. Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74, σελ.*11 - 18.

18. International Commission on Mathematical Instruction (I.C.M.I) School Mathematics in 1990s. Cambridge: Cambridge University Press(1986)

19. Jiang, Z. (1993). Students' learning of introductory probability in a mathematical micro world. (Doctoral dissertation, The University of Georgia, 1993). Dissertation Abstracts International, 54-09A: 3360.

20. Johnson D (2002) The effects of the Geometer's sketchpad on the van Hiele levels and academic achievements of high school students (Doctoral dissertation, The University of Detroit ,Michigan2002 Dissertation Abstracts International, UMI Number:3071795).

21. Kang. S. & Sang. S. Choi-Koh (1999). Development of Instructional Materials Using Computer software, Geometer's Sketchpad for Enhancing Spatial Ability in Regular Polyhedrons. Journal of Korean Society *Mathematics Education, Series A: The mathematics Education* 38(2), σελ.179-187.

22. Lester, M. (1996). The effects of the Geometer's Sketchpad software on achievement of geometric knowledge of high school geometry students, (on-line). Abstract from: UMI Pro Quest File: Dissertation Abstracts Item: 9633545

23. Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14, σελ.*58 -69.

24. Mason, M. M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 21(1), σελ.*39-53.

25. Metazarek, R. (1996). *The* effects *of problem-solving activities using geometry computer software on readiness for self-directed learning,* (on-line). Abstract from: UMI ProQuest FHe: Dissertation Abstracts Item: 9800159

26. Nicaise, M. & Barnes, 0. (1996). the union of technology, constructivism, and teacher education. *Journal of Teacher Education,* 47(3), σελ.205 - 212.

27. N.C.T.M. (2004). The learning Principle, retrieved 15/11/2004 from World Wide Web: *http://standardstrial.nctm.org/document/chapter2/learn.htm*

28. Orton Robert (1995) Do van Hiele and Piaget belong to the same «research program» Informationen, ZDM 95/4.σελ.135-137.

29. Oldknow A. (1995) : " Computer aided research into triangle Geometry" .*The mathematical Gazette*, 79(485), σελ.263-274.

30. Pintrich, P., (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research, 31, σελ.459-470*

31. Senk, S. (1989). van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. -*Journal for Research in Mathematics Education,20*(3), σελ.309-321.

32. Senk, S. (1983). Proof-writing achievement and van Hiele levels among secondary school geometry students (Doctoral dissertation, University of Chicago, 1983,Thesis No.128618).

33. Schoenfeld A (2000) Purposes and Methods of Research in Mathematics Education, Notices of the AMS, June 2000.σελ.641-649.

34. Toumasis.C "The epos of Euclidean geometry in Greek secondary education (1836-1985): pressure for change and resistance" E*ducation Studies in Mathematics,* 1990, vol 21.σελ.491-508.

35. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago: University of Chicago, Department of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288)

36. Usiskin, Z., & Senk, S. (1990). Evaluating a Test of van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), σελ.242-245.

37. Van Hiele-Geldof, D. (1984). "Last article written by Dina van Hiele-Geldof entitled: Didactics of geometry as learning process for adults." In D. Fays, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele (σελ.. 215-233). Brooklyn: Brooklyn College.

38. Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. New York: Academic Press.

39. Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In Martin, J.L. & Bradbard, D. A. (Eds.), Space *and geometry: Papers from a research workshop* (σελ. 75 - 97). Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

40. Wertheimer, R. (1990). The geometry proof tutors an intelligent computer-based tutor in the classroom. *Mathematics Teacher,* vo/. April, 308 - 317.

41. Yerushalmy, M., & Houde, R. (1986). The geometric supposer: Promoting thinking and learning. Mathematics Teacher. 79, σελ.418-422.

42. Yousef, A. (1997). *The* effect *of the Geometer's Sketchpad on the attitude toward geometry of high school students,* (on-line). Abstract from: UMI ProQuestFile: Dissertation Abstracts Item: 9732652

ΜΕΡΟΣ Δ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

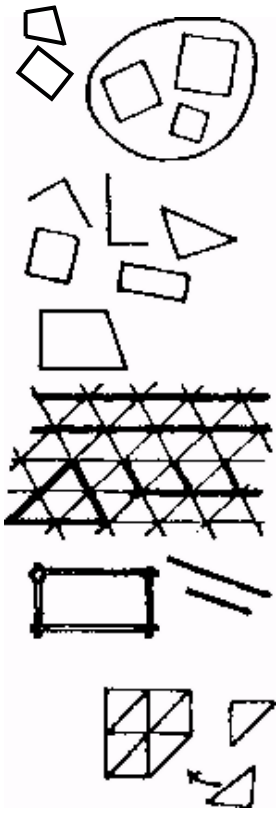
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΠΕΔΟ VAN HIELE ΚΑΤΑ FAYS-GEDDES-TISCHLER . ΤΥΠΙΚΑ ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ VAN HIELE

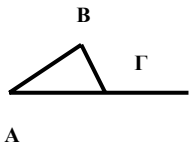
Επίσης οι David Fays; Dorothy Geddes; Rosamond Tischler (2005) σε άρθρο τους με τίτλο “The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents” παρουσίασαν τα τυπικά γνωρίσματα κάθε επιπέδου δίνοντας περιγραφές και απαντήσεις των μαθητών όπως αναφέρονται παρακάτω στην επόμενη σελίδα

Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 1

Επίπεδο 1: Ο μαθητής προσδιορίζει και αναπτύσσει δραστηριότητες στις μορφές (π.χ., τετράγωνα, τρίγωνα) και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις (π.χ., γραμμές, γωνίες, πλέγματα) σύμφωνα με την εμφάνισή τους.

Επίπεδο 1 Περιγραφές	***Επίπεδο 1 Απαντήσεις από δείγμα μαθητών***
Ο μαθητής **1.** Αναγνωρίζει την μορφή του σχήματος από την εμφάνισή της συνολικά ως ολότητα (Gestalt): **a.** Σε ένα απλό σχέδιο, διάγραμμα ή σύνολο κομματιών από σχήματα **b.** Στις διαφορετικές θέσεις. **c.** Σε ένα σχήμα ή άλλες πιο σύνθετες γεωμετρικές κατασκευές.	**1.a** Ο μαθητής αναγνωρίζει τα τετράγωνα σε ένα σύνολο μορφών ή σχεδίων. **1.b** Ο μαθητής υποδεικνύει τις γωνίες, τα ορθογώνια, και τα τρίγωνα στις διαφορετικές θέσεις σε μια φωτογραφία ή σε μια σελίδα με διαγράμματα. **1.c** Ο μαθητής σημειώνει τις ορθές γωνίες σε ένα ορθογώνιο τραπέζιο. Ο μαθητής αναγνωρίζει και σχεδιάζει σχήματα που υπάρχουν σε ένα πλέγμα (π.χ γωνίες, παράλληλες γραμμές)
2. Κατασκευάζει, σχεδιάζει, ή αντιγράφει ένα σχήμα.	**2.** Ο μαθητής φτιάχνει τα σχήματα με σπιρτόξυλα: ορθογώνιο, παράλληλες γραμμές. Ο μαθητής φτιάχνει ένα σχέδιο που επαναλαμβάνεται με τα κομμένα τρίγωνα και αντιγράφει το σχέδιο (κομμάτι-κομμάτι) σε χαρτί.
3. Ονομάζει ή συμβολίζει τα σχήματα και τις άλλες γεωμετρικές κατασκευές και χρησιμοποιεί τυπικά και άτυπα ονόματα κατάλληλα.	**3.** Ο μαθητής σημειώνει τις γωνίες ενός τριγώνου καλώντας αυτές "κορυφές." Ο μαθητής αναφέρεται στις γωνίες από το χρώμα (π.χ., η "κόκκινη γωνία") ή με σύμβολα της αλφαβήτου (π.χ., "οι γωνίες Α και Β αν προστεθούν μας κάνουν την Γ").





4. Συγκρίνει και κατατάσσει τα σχήματα με κριτήριο την εμφάνισής τους ως ολότητα.

5. Περιγράφει λεκτικά σχήματα από την εμφάνισή τους ως ολότητα

6. Λύνει απλά προβλήματα ρουτίνας βασιζόμενος στα σχήμα παρά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αυτά έχουν.

7. Αναγνωρίζει τα μέρη ενός σχήματος αλλά:

a. Δεν αναλύει το σχήμα στα στοιχεία που το αποτελούν.

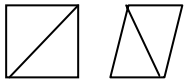
b. Δεν σκέφτεται ότι οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν μια κλάση σχημάτων .

c. Δεν κάνει γενικεύσεις για τα σχήματα και δεν χρησιμοποιεί σχετικές λεκτικές εκφράσεις..

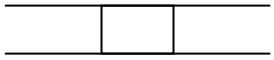
4. Ο μαθητής λέει «*αυτό είναι ένα τετράγωνο , το άλλο είναι ορθογώνιο*» ή «αυτό είναι πιο πλατύ» όταν ρωτηθεί για να πει ποια είναι η διαφορά μεταξύ ενός κομμένου τετραγώνου και ενός ορθογωνίου. Ο μαθητής κατατάσσει τα τετράπλευρα σε «τετράγωνα, ορθογώνια, και άλλα» επειδή «*αυτά φαίνονται παρόμοια*».

5. Ο μαθητής περιγράφει ένα ορθογώνιο λέγοντας «Μοιάζει με τετράγωνο» ή ένα παραλληλόγραμμο ως «ένα ορθογώνιο που γέρνει» ή μια γωνία ως «τους δείκτες ενός ρολογιού».

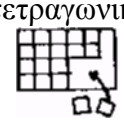
6. Ο μαθητής χρησιμοποιεί την μέθοδο δοκιμής και λάθους για να φτιάξει από μικρά τριγωνικά κομμάτια τετράγωνα και παραλληλόγραμμα.



- Ο μαθητής επιβεβαιώνει ότι οι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι παράλληλες τοποθετώντας σπιρτόξυλα στις έδρες.



- Ο μαθητής χρησιμοποιεί διαφανές χαρτί για να βρει το μέτρο της τρίτης γωνίας ενός τριγώνου.
- Ο μαθητής τοποθετεί τετραγωνικά εκατοστά σε ένα ορθογώνιο και το μετρά για να υπολογίσει το εμβαδόν του ορθογωνίου.



7.a Ο μαθητής αναγνωρίζει τα τετράγωνα από την εμφάνισή τους σαν ολότητα αλλά δεν αναγνωρίζει αυθόρμητα «ίσες πλευρές και ορθές γωνίες» .

7.b Ο μαθητής δείχνει τις πλευρές ενός τετραγώνου και τις μετράει να ελέγξει αν είναι ίσες αλλά δεν γενικεύει ότι όλα τα τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές.

7.c Ο μαθητής δεν χρησιμοποιεί αυθόρμητα χαρακτηρισμούς «όλα, μερικά, για κάθε, κανένα» προσπαθώντας να πει αν όλα, μερικά ή κάποια σχήματα έχουν κάποια ιδιότητα.

Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 2

Επίπεδο 2: Ο μαθητής αναλύει τα σχήματα με όρους των μερών που τα αποτελούν και των σχέσεων μεταξύ αυτών, κατανοεί τις ιδιότητες κλάσεων σχημάτων εμπειρικά, και χρησιμοποιεί τις ιδιότητες για να λύνει προβλήματα.

Επίπεδο 2 Περιγραφές

Ο μαθητής

1. Αναγνωρίζει και ελέγχει σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων (π.χ., ισότητα των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου, ισότητα των γωνιών).

2. Ανακαλεί και χρησιμοποιεί κατάλληλο λεξιλόγιο για τα συστατικά και τις σχέσεις τους (π.χ, απέναντι πλευρές και απέναντι γωνίες ίσες, οι διαγώνιες διχοτομούνται).

3.a Συγκρίνει δύο σχήματα με βάση τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που τα αποτελούν.

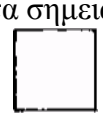
3.b Κατατάσσει τα σχήματα σε διαφορετικές κατηγορίες σύμφωνα με ορισμένες ιδιότητες, συμπεριλαμβάνοντας παραδείγματα και αντιπαραδείγματα.

4.a Ερμηνεύει και χρησιμοποιεί λεκτικές περιγραφές για ένα σχήμα από την άποψη των ιδιοτήτων του και χρησιμοποιεί τις περιγραφές για να σχεδιάσει και να κατασκευάσει το σχήμα **.**

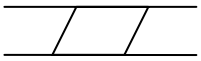
4.b Ερμηνεύει λεκτικές ή συμβολικές προτάσεις κανόνων και τις εφαρμόζει.

Επίπεδο 2 Απαντήσεις από δείγμα μαθητών

1. Ο μαθητής δείχνει πλευρές και γωνίες ενός σχήματος και αυθόρμητα σημειώνει ότι έχει 4 ορθές γωνίες και όλες τις πλευρές ίσες.



2. Ο μαθητής παρατηρεί ότι για να ένα παραλληλόγραμμο «Αυτές οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και το ίδιο και εκείνες». Χρησιμοποιώντας σπιρτόξυλα βρίσκει ότι αυτές οι πλευρές δεν συναντιούνται όταν προεκταθούν απεριόριστα.

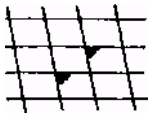


3.a Ο μαθητής λέει πως ένα κομμένο τετράγωνο και ένα ορθογώνιο μοιάζουν και διαφέρουν στις γωνίες τους και στις πλευρές τους.

3. b Ο μαθητής φτιάχνει ένα κανόνα κατάταξης των τετραπλεύρων για παράδειγμα με βάση τον αριθμό των ορθών γωνιών, ή τον αριθμό των ζευγών των παραλλήλων πλευρών.

4. a Ο μαθητής διαβάζει κάρτες ιδιοτήτων «4 πλευρές» και «όλες οι πλευρές ίσες» και προσπαθεί να σχεδιάσει ένα σχήμα με αυτές τις δύο ιδιότητες το οποίο να μην είναι τετράγωνο.

4. b Όταν του επιδεικνύεται μια κατάλληλη κάρτα για να «δει» , Ο μαθητής περιγράφει αυτό που του δείχνουν και το χρησιμοποιεί για να προσδιορίζει ίσες γωνίες σε ένα πλέγμα.



Ο μαθητής μπορεί να επεξηγήσει τον κανόνα του εμβαδού

Εμβαδόν =Μήκος Χ Πλάτος για ένα ορθογώνιο και αναγνωρίζει πότε αυτό εφαρμόζεται και πότε όχι.

Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 2(Συνέχεια)

5. Ανακαλύπτει ιδιότητες σε κάποια σχήματα εμπειρικά και γενικεύει τις ιδιότητες για αυτή την κλάση των σχημάτων.

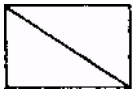
6. a. Περιγράφει μια κλάση σχημάτων (π.χ παραλληλόγραμμα) με όρους των ιδιοτήτων τους.
b. Λέει τι μορφή είναι ένα σχήμα, όταν έχουν δοθεί κάποιες ιδιότητες.

7. Αναγνωρίζει ποιες ιδιότητες που χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν μια κλάση σχημάτων επίσης εφαρμόζονται σε μια άλλη κλάση και συγκρίνει αυτές τις δύο κλάσεις σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

8. Ανακαλύπτει ιδιότητες μιας άγνωστης κλάσης σχημάτων.

5. Αφού χρωματίζει τις ίσες γωνίες σε τριγωνικό πλέγμα, ο μαθητής σημειώνει ότι «οι τρεις γωνίες των τριγώνων είναι ίδιες καθώς οι τρεις γωνίες φτιάχνουν μια ευθεία γραμμή και έτσι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°. Ο μαθητής σκέφτεται ότι αυτό ισχύει και σε άλλα τρίγωνα και προσπαθεί να το επιβεβαιώνει χρησιμοποιώντας πλέγματα βασισμένα σε άλλα τρίγωνα.

Μετά από μερικά παραδείγματα θέτοντας δύο ίσα και ορθογώνια τρίγωνα μαζί για να σχηματίσει ορθογώνιο, ο μαθητής λέει ότι μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παίρνοντας το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.



Από κάποια αριθμητικά παραδείγματα, ο μαθητής ανακαλύπτει ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών και πείθεται ότι αυτός είναι ένας κανόνας για κάθε τρίγωνο.

6. a. Ο μαθητής περιγράφει ένα τετράγωνο μέσω τηλεφώνου σε ένα φίλο του λέγοντας «έχει 4 πλευρές, 4 ορθές γωνίες, όλες οι πλευρές είναι ίσες, και οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες»

6. b. Με δεδομένες κάποιες ιδιότητες που ταιριάζουν με το σχήμα ,ο μαθητής λέει ότι το σχήμα πρέπει να γίνει με βάση τις ιδιότητες.

7. Έχοντας σημειώσει ότι τα παραλληλόγραμμα έχουν «τις απέναντι πλευρές παράλληλες», ο μαθητής την ίδια στιγμή προσθέτει «Ω! αυτό το έχουν και τα τετράγωνα και τα ορθογώνια»

8. Αφού συμπληρώσει μια κατάταξη των τετραπλεύρων σε τετράπλευρα που μοιάζουν με χαρταετούς και δεν μοιάζουν με χαρταετούς ,ο μαθητής ανακαλύπτει και εκφράζει ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.

Τυπικά γνωρίσματα της γεωμετρικής σκέψης μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 2(Συνέχεια)

9. Λύνει γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των σχημάτων ή αναγνωρίσιμες ιδιότητες.

10. Σχηματοποιεί και χρησιμοποιεί γενικεύσεις για ιδιότητες των σχημάτων(με την βοήθεια του καθηγητή-εποπτικού υλικού αυθόρμητα μόνος του) και χρησιμοποιεί σχετική γλώσσα αλλά:

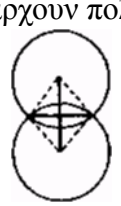
a. Δεν εξηγεί πως κάποιες ιδιότητες σχημάτων συσχετίζονται.

b. Δεν σχηματοποιεί και δεν χρησιμοποιεί τυπικούς ορισμούς.

c. Δεν εξηγεί σχέσεις υποκλάσεων εκτός από το να τσεκάρει συγκεκριμένα παραδείγματα που αναφέρονται σε μια λίστα ιδιοτήτων.

d. Δεν βλέπει την ανάγκη απόδειξης ή λογικής εξήγησης των γενικεύσεων που ανακαλύπτονται εμπειρικά και δεν χρησιμοποιεί κατάλληλη γλώσσα.(π.χ εάν -τότε , επειδή) σωστά.

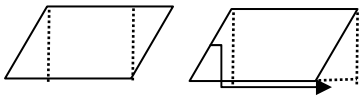
9. Όταν ρωτηθούν να βρουν κάποιες γωνίες μέσα σε μια φωτογραφία, ο μαθητής λέει ότι «υπάρχουν πολλές γωνίες επειδή υπάρχουν πολλά τρίγωνα και κάθε ένα έχει 3 γωνίες»



Ο μαθητής λύνει ένα πρόβλημα για την ευθεία που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων με ίσες ακτίνες και την ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία τομής των κύκλων. Ο μαθητής παρατηρεί ένα ρόμβο στο σχήμα και διακρίνει ότι οι ευθείες είναι κάθετες επειδή είναι διαγώνιες ρόμβου

Ο μαθητής συμπεραίνει ότι το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360° επειδή καλύπτουν τις 4 γωνίες γύρω από ένα σημείο(π.χ 360°) ή επειδή το τετράπλευρο μπορεί να «σπάσει» σε δύο τρίγωνα ($180^o + 180^o = 360^o$)

Ο μαθητής συμπεραίνει ότι μπορεί να βρει το εμβαδόν ενός νέου σχήματος κόβοντας ή μετασχηματίζοντας το σε σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορεί να προσδιοριστούν(π.χ ένα παραλληλόγραμμο σε δύο τρίγωνα και ένα ορθογώνιο.



10. a. Όταν του επιδειχθεί ένα παραλληλόγραμμο πλέγμα ,ο μαθητής δεν μπορεί να εξηγήσει πως η ιδέα «απέναντι γωνίες είναι ίσες» ακολουθείται από την «απέναντι πλευρές είναι παράλληλες»

10. b. Όταν ρωτηθεί να ορίσει ένα παραλληλόγραμμο ο μαθητής αναφέρει λίστα ιδιοτήτων αλλά δεν ορίζει ένα σύνολο αναγκαίων από ένα σύνολο ικανών ιδιοτήτων.

10. c. Αφού έχει φτιάξει μια λίστα ιδιοτήτων για όλα τα μέλη των τετραπλεύρων, ο μαθητής δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί «όλα τα ορθογώνια είναι παραλληλόγραμμα» ή γιατί «όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι.

10. d. Αφού έχει ανακαλύψει την αρχή ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° χρωματίζοντας γωνίες σε ένα τριγωνικό πλέγμα ή μετρώντας ο μαθητής δεν βλέπει καμία ανάγκη για παραγωγικό συλλογισμό για να δείξει γιατί η αρχή αυτή είναι έγκυρη.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3

Επίπεδο 3: Ο μαθητής διατυπώνει και χρησιμοποιεί ορισμούς, δίνει άτυπα επιχειρήματα τα οποία έχει αποφασίσει προηγουμένως ερευνώντας ιδιότητες και ακολούθως δίνει παραγωγικά επιχειρήματα.

<u>Επίπεδο 3 Περιγραφές</u>

Ο μαθητής

1. a. Προσδιορίζει διαφορετικά σύνολα ιδιοτήτων τα οποία χαρακτηρίζουν μια κλάση σχημάτων και ελέγχει αν αυτά είναι ικανοποιητικά.

b. Προσδιορίζει ελάχιστα σύνολα ιδιοτήτων τα οποία μπορούν να χαρακτηρίσουν ένα σχήμα.

c. Διατυπώνει και χρησιμοποιεί έναν ορισμό για μια κλάση σχημάτων.

2. Δίνει άτυπα επιχειρήματα (χρησιμοποιώντας διαγράμματα, συνθέσεις σχημάτων ή άλλα υλικά).
a. Έχοντας σχηματίσει ένα συμπέρασμα για δοσμένες πληροφορίες, δικαιολογεί το συμπέρασμα χρησιμοποιώντας λογικές σχέσεις.

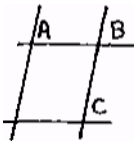
<u>Επίπεδο 3 Παράδειγμα μαθητή</u>

1. a. Ο μαθητής διαλέγει ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια κλάση σχημάτων (π.χ τετράγωνα, παραλληλόγραμμα) και ελέγχει σχεδιάζοντας ή κατασκευάζοντας εκείνα για τα οποία αυτές είναι ικανοποιητικές.
Ο μαθητής εξηγεί ότι δύο διαφορετικά σύνολα ιδιοτήτων μπορούν να επιλεγούν για να χαρακτηρίσουν μια κλάση παραλληλογράμμων είτε «4 πλευρές» και «απέναντι πλευρές παράλληλες» είτε «4 πλευρές» και «απέναντι πλευρές ίσες».

1. b. Περιγράφοντας ένα τετράγωνο σε ένα φίλο του, ο μαθητής διαλέγει από την λίστα των ιδιοτήτων <u>σημαντικές</u> ιδιότητες έτσι ώστε ο φίλος του να είναι σίγουρος ότι το σχήμα πρέπει να είναι ένα «τετράγωνο».

1. c. Ο μαθητής διατυπώνει έναν ορισμό ενός Kites και τον χρησιμοποιεί για να εξηγήσει γιατί τα σχήματα είναι ή δεν είναι Kites.

2. a. Ο μαθητής συμπεραίνει ότι :«αν η γωνία A είναι ίση με την γωνία B και η γωνία A είναι ίση με την γωνία C επειδή αυτές οι δύο είναι ίσες με την γωνία B»



Όταν ερωτάται να εξηγήσει γιατί η γωνία A είναι ίση με την γωνία B μέσα σε ένα πλέγμα, ο μαθητής λέει ότι «οι ευθείες είναι παράλληλες, και αυτό φαίνεται (δείχνοντάς το) ,έτσι η γωνία A είναι ίση με την γωνία B με μια ματιά.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3(Συνέχεια)

b. διατάσσει κλάσεις σχημάτων.

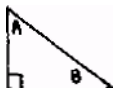
2. b. Ο μαθητής απαντά στην ερώτηση είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; εξηγώντας «ναι, επειδή αυτά έχουν όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου, και επίσης την ειδική ιδιότητα των ορθών γωνιών.
Ο μαθητής χρησιμοποιεί τις ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν τα κυρτά τετράπλευρα και τα τετράγωνα για να εξηγήσει γιατί όλα τα τετράγωνα είναι κυρτά τετράπλευρα αλλά όχι όλα τα κυρτά τετράπλευρα δεν είναι τετράγωνα.

2. c. Δίνοντας μια λίστα με ιδιότητες ενός τετραγώνου, ο μαθητής λέει «οι απέναντι πλευρές είναι ίσες δεν απαιτείται επειδή λέει ήδη και οι τέσσερις πλευρές είναι ίσες».

c. διατάσσει δύο ιδιότητες.

Έχοντας αποφασίσει έναν κανόνα για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου από τον κανόνα του ορθογωνίου, ο μαθητής συνοψίζει κάνοντας ένα οικογενειακό δένδρο και εξηγώντας «χρειάζεσαι αυτή τη σκέψη (κανόνας του ορθογωνίου) πριν από αυτή (κανόνας του τριγώνου.

2. d. Ο μαθητής εξηγεί ότι οι δύο οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου



έχουν άθροισμα 90° επειδή «180° μείον την ορθή γωνία μένουν 90° ,και αυτό εξηγεί γιατί οι δύο γωνίες που μένουν είναι οξείες.
Ο μαθητής συνάγει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου πρέπει να είναι 360° «Επειδή το τετράπλευρο μπορεί να χωριστεί σε δύο τρίγωνα, έτσι 180° και 180° κάνουν 360°». Όταν ερωτάται αν αυτό είναι πιθανόν να δίνει $4.180^o = 720^o$ για το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου όταν διαιρεθεί σε 4 τρίγωνα(όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) , ο μαθητής εξηγεί ότι «Όχι ,οι εσωτερικές γωνίες δεν είναι μέρος των γωνιών του τετραπλεύρου. Έτσι ,εάν έχουμε 4.180^o έχουμε πάρει επιπλέον τις 4 γωνίες των τεμνομένων διαγωνίων που δίνουν 720° -360° ή 360° ακριβώς όπως πριν.

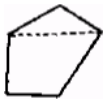
d. Ανακαλύπτει νέες ιδιότητες παραγωγικά.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3(Συνέχεια)

Ο μαθητής ανακαλύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου είναι 540° «σπάζοντας» το πεντάγωνο σε ένα τετράπλευρο(360°) και ένα τρίγωνο(180°) και λέγοντας ότι αυτή η εργασία μπορεί να γίνει σε κάθε πεντάγωνο.

e. Συσχετίζει διάφορες ιδιότητες σε ένα οικογενειακό δέντρο.

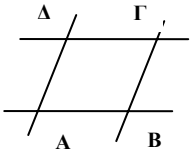
2. e. Ο μαθητής τακτοποιεί τις κάρτες των ιδιοτήτων σε φόρμες ενός γενεαλογικού δένδρου να δείξει τις «προγονικές» σχέσεις ,αυτές είναι, ο μαθητής εξηγεί πως «φαίνεται» και «η ευθεία γωνία είναι 180°» είναι πρόγονος του «το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°» και πως αυτό οδηγεί στο «το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360°» Ο μαθητής λέει πως ο κανόνας του εμβαδού για ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να προέλθει από τον κανόνα του εμβαδού για ένα ορθογώνιο και τοποθετεί αυτό σε ένα οικογενειακό δένδρο.



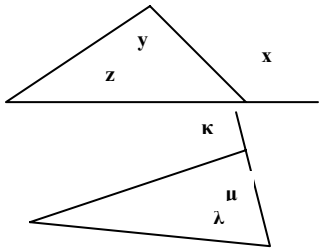
3. Δίνει άτυπα παραγωγικά επιχειρήματα.
a. Ακολουθεί ένα παραγωγικό επιχείρημα και μπορεί να παρέχει τα μέρη του επιχειρήματος.
b. Δίνει μια περίληψη ή μια παραλλαγή ενός παραγωγικού επιχειρήματος.

3. a. Ο μαθητής δίνει τους λόγους για τα βήματα σε μια απόδειξη ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° δεδομένου ότι ο ερευνητής καθοδηγεί τον μαθητή μέσω της απόδειξης.

3. b. Στον μαθητή δίνεται ένα πλέγμα παραλληλογράμμων και καλείται να δώσει μια λογική εξήγηση γιατί "οι απέναντι γωνίες είναι ίσες." Ο μαθητής δεν είναι ικανός για να δώσει την εξήγηση από μόνος του αλλά ακολουθεί αυτήν που δίνεται από τον καθηγητή για τη γωνία Α = γωνία Γ. Κατόπιν ο σπουδαστής συνοψίζει την εξήγηση με δικές του λέξεις και εξηγεί επίσης γιατί η γωνία Β= γωνία Δ.



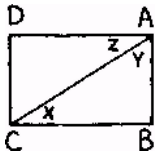
Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3(Συνέχεια)



Ο καθηγητής βοηθά τον μαθητή μέσω μιας παραγωγικής εξήγησης γιατί η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου (γωνία x) είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών y+z. Ο μαθητής συνοψίζει αυτό το επιχείρημα και δίνει ένα πλήρες επιχείρημα δικό του για μια παραλλαγή αυτού.(π.χ γωνία κ= γωνία λ+ γωνία μ).

3. c. Δίνει παραγωγικά επιχειρήματα

3. c. Ο μαθητής δίνει δική του εξήγηση για «οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες»
Ο μαθητής δικαιολογεί γιατί το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 1/2 βάση X ύψος, με την εξήγηση ότι δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα κάνουν ένα ορθογώνιο. "Εάν βάλεις τα δύο τρίγωνα μαζί όπως αυτό, παίρνεις τις απέναντι πλευρές ίσες (δεδομένου ότι τα τρίγωνα είναι το ίδιο μέγεθος).Οι γωνίες B και D είναι οι ορθές γωνίες στα ορθογώνια τρίγωνα. Επίσης, οι γωνίες A και C είναι ορθές γωνίες επειδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο μικρότερες γωνίες κάνουν μαζί 90°. Η γωνία z είναι ίδια με τη γωνία x



έτσι οι γωνίες y και z αν προστεθούν δίνουν 90°, έτσι το σχήμα πρέπει να είναι ορθογώνιο, και το ορθογώνιο τρίγωνο πρέπει να είναι το μισό εμβαδόν του εμβαδού του ορθογωνίου»

4. Δίνει περισσότερες από μια εξηγήσεις για να αποδείξει κάτι και δικαιολογεί αυτές τις εξηγήσεις με τη χρησιμοποίηση των οικογενειακών δέντρων.

4. Ο μαθητής δίνει δύο διαφορετικές εξηγήσεις γιατί το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Οι δύο τρόποι παρουσιάζονται έπειτα από δύο διαφορετικά οικογενειακά δένδρα.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3(Συνέχεια)

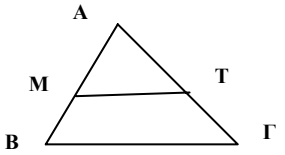
Ο μαθητής εξηγεί ότι το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου είναι ίσο με 540° διαιρώντας αυτό σε τρία τρίγωνα(3.180^o) ή διαιρώντας αυτό σε ένα τετράπλευρο και ένα τρίγωνο (360° $+180^o$) και δείχνοντας κάθε μέθοδο από το οικογενειακό δένδρο.

5. Ανεπίσημα αναγνωρίζει τη διαφορά μεταξύ μιας δήλωσης και του αντιστρόφου της.

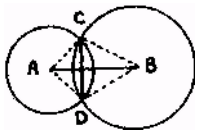
5. Σε μια συζήτηση ,ο μαθητής ανακαλύπτει ότι «Ω! ,εάν οι γωνίες είναι φτιαγμένες ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες» και «Ω! ,τώρα αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε οι γωνίες είναι ίσες.». Όταν ρωτηθεί αν αυτές οι δηλώσεις είναι ίδιες , ο μαθητής λέει « όχι ,στην πρώτη περίπτωση αρχίζετε με τις παράλληλες ευθείες και φτιάχνετε τις γωνίες ίσες ενώ στην άλλη περίπτωση κάνετε το αντίθετο»

6. Προσδιορίζει και χρησιμοποιεί τις στρατηγικές ή τον οξυδερκή συλλογισμό για να λύσει τα προβλήματα.

6. Δίνεται το πρόβλημα ότι το Μ είναι το μέσο του ΑΒ στο τρίγωνο ΑΒΓ ,και ΜΤ είναι παράλληλο στην ΒΓ, βρείτε το λόγο του ΜΤ προς το ΒΓ, ο μαθητής χρησιμοποιεί την στρατηγική της σκάλας για να δείξει τις ίσες γωνίες και κατόπιν τα όμοια τρίγωνα. Έτσι από το ΑΜ:ΑΒ=1/2, κατόπιν δείχνει ΜΤ:ΒΓ=1/2.



Λαμβάνοντας υπόψη δύο τεμνόμενους κύκλους Α και Β ,με διαφορετικές ακτίνες ,και κοινή χορδή CD,δείχνει ότι το ΑΒ είναι μεσοκάθετος του CD . Ο μαθητής αποδεικνύει αυτό με την προϋπόθεση ότι το ADBC πρέπει να είναι ένα κυρτό τετράπλευρο και μετά η καθετότητα των διαγωνίων του δίνει ότι ΑΒ μεσοκάθετος της CD.



Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 3(Συνέχεια)

7. Αναγνωρίζει το ρόλο του παραγωγικού επιχειρήματος και προσεγγίζει τα προβλήματα κατά τρόπο παραγωγικό αλλά :

a. Δεν «πιάνει» την έννοια της αφαίρεσης υπό μια αξιωματική έννοια (π.χ., δεν βλέπει την ανάγκη για ορισμούς και αξιώματα).

b. Δεν διακρίνει τυπικά μεταξύ μιας δήλωσης και της αντιστρόφου της (π.χ Δεν μπορεί να ξεχωρίσει «Σιαμέζος δίδυμα» την δήλωση και την αντιστροφή της.

c. Δεν μπορεί ακόμα να βρει Αλληλεξαρτήσεις μεταξύ δικτύων και θεωρημάτων.

7. Ο μαθητής αναγνωρίζει το ρόλο των λογικών εξηγήσεων ή των παραγωγικών επιχειρημάτων στη διαπίστωση των στοιχείων (εναντίον μιας επαγωγικής, εμπειρικής προσέγγισης) και λέει ότι (μετά από μια λογική εξήγηση)"ξέρω ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε Πεντάγωνου είναι 540° και δεν είναι απαραίτητο να μετρήσω." Εντούτοις, ο μαθητής πρέπει να δοκιμάσει ακόμα "την απόδειξη υπό μια αξιωματική έννοια (δηλ., χρησιμοποιώντας τα αξιώματα, ορισμούς) και είναι έτσι αβέβαιος όταν ρωτιέται για τους πιθανούς" προγόνους "στις αρχές πριονιών και σκαλών.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 4

Επίπεδο 4: Ο μαθητής καθιερώνει, μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα, τα θεωρήματα και τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των δικτύων των θεωρημάτων.

Επίπεδο 4 Περιγραφές

Ο μαθητής

1. Αναγνωρίζει την ανάγκη για απροσδιόριστους όρους, ορισμούς, και βασικές υποθέσεις(αξιώματα).
2. Αναγνωρίζει χαρακτηριστικά ενός τυπικού ορισμού (π.χ απαραίτητους και ικανοποιητικούς όρους) και ισοδυναμία των ορισμών.
3. Αποδεικνύει σε ένα αξιωματικό σύστημα σχέσεων ότι είχε εξηγήσει τυπικά στο επίπεδο 2.
4. Αποδεικνύει σχέσεις μεταξύ ενός θεωρήματος και σχετικών δηλώσεων (π.χ αντίστροφο, αντίστροφος, αντιθετοαντιστροφή).
5. Καθιερώνει σχέσεις μεταξύ δικτύων των θεωρημάτων.
6. Συγκρίνει και αντιπαραβάλλει τις διαφορετικές αποδείξεις των θεωρημάτων.

Επίπεδο 4 Παράδειγμα μαθητή

1. Ο μαθητής δίνει παραδείγματα αξιωμάτων και θεωρημάτων στην επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία και περιγράφει πως συσχετίζονται.

2. Ο μαθητής προσδιορίζει ικανοποιητικές ιδιότητες για τον καθορισμό ενός σχήματος (π.χ παραλληλόγραμμο) και αντλεί άλλες ιδιότητες από αυτές. Ο μαθητής αποδεικνύει ότι δύο σύνολα ιδιοτήτων είναι ισοδύναμα για τον καθορισμό ενός σχήματος (π.χ παραλληλόγραμμο).

3. Ο μαθητής αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° με αυστηρό τρόπο(π.χ χρησιμοποιώντας το αξίωμα των παραλλήλων, και θεωρήματα γύρω από την πρόσθεση γωνιών).

4. Ο μαθητής αποδεικνύει ότι εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες, και αντιστρόφως. Χρησιμοποιώντας την απόδειξη της αντιθετοαντιστροφής , ο μαθητής αποδεικνύει ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου δεν διχοτομούν η μία την άλλη.

5. Ο μαθητής αναγνωρίζει το ρόλο των πριονιών και των σκαλών στα διάφορα θεωρήματα στην συνεπαγωγή των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων και των κανόνων εμβαδού.

6. Ο μαθητής δίνει τις αποδείξεις μέσω της Ευκλείδειας γεωμετρίας και μέσω της αναλυτικής γεωμετρίας (ή της διανυσματικής γεωμετρίας) ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται και συγκρίνει τις δύο μεθόδους απόδειξης. Ο μαθητής συγκρίνει τις εναλλακτικές αποδείξεις του πυθαγορείου θεωρήματος.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 4 (Συνέχεια)

7. Εξετάζει τα αποτελέσματα της αλλαγής ενός αρχικού ορισμού ή ενός αξιώματος σε μια λογική ακολουθία.

8. Καθιερώνει μια γενική αρχή ,η οποία να ενοποιεί διαφορετικά θεωρήματα.

9. Δημιουργεί τις αποδείξεις από τα απλά σύνολα αξιώματα που χρησιμοποιούν συχνά ένα πρότυπο επιχειρήματα υποστήριξης.

10. Δίνει τα επίσημα παραγωγικά επιχειρήματα αλλά δεν ερευνά ή δεν συγκρίνει τα αξιωματικά συστήματα.

7. Αρχίζοντας από " δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες," ο μαθητής ερευνά πώς να αποδείξει άλλα θεωρήματα παραλλήλων ευθειών.

8. Ο μαθητής αποδεικνύει την ακόλουθη σχέση για το εμβαδόν ενός σχήματος του οποίου οι κορυφές είναι σε δύο παράλληλες ευθείες: Εμβαδόν= βάσηΧύψος.

9. Ο μαθητής δίνει αποδείξεις θεωρημάτων στην πεπερασμένη_Γεωμετρία.

10. Ο μαθητής δεν εξετάζει την ανεξαρτησία, τη συνέπεια ή την πληρότητα ενός συνόλου αξιωμάτων.

Περιγραφές και παραδείγματα απαντήσεων μαθητών στο επίπεδο Van Hiele 5

Επίπεδο 5: Ο μαθητής ορίζει αυστηρά τα θεωρήματα στα διαφορετικά αξιωματικά συστήματα και αναλύει ,συγκρίνει αυτά τα συστήματα.

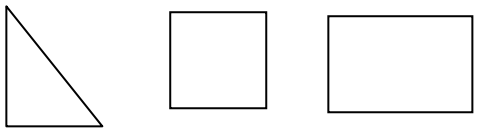
Ο μαθητής

1. Ορίζει αυστηρά τα θεωρήματα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (π.χ., προσέγγιση Hilbert στα θεμέλια της γεωμετρίας).
2. Συγκρίνει τα αξιωματικά συστήματα (π.χ., Ευκλείδειες και μη- Ευκλείδειες Γεωμετρίες): Αυθόρμητα εξερευνά πώς αλλαγές στα αξιώματα έχουν επιπτώσεις στην προκύπτουσα γεωμετρία.
3. Καθιερώνει τη συνέπεια ενός συνόλου αξιωμάτων, ανεξαρτησία ενός αξιώματος, και ισοδυναμία διαφορετικών συνόλων αξιωμάτων δημιουργεί ένα αξιωματικό σύστημα για μια γεωμετρία.
4. Εφευρίσκει τις γενικευμένες μεθόδους για κατηγορίες προβλημάτων.
5. Κάνει αναζητήσεις του ευρύτερου πλαισίου στο οποίο ένα μαθηματικό θεώρημα ή αρχή θα ισχύσει.
6. Κάνει σε βάθος μελέτη της υπαγόμενης λογικής για να αναπτύξει νέες ιδέες και προσεγγίσεις για λογικά συμπεράσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β -Van Hiele Test

1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

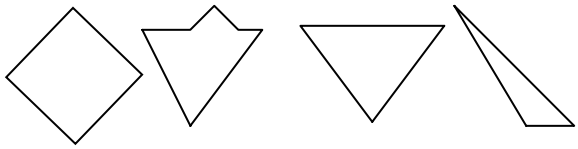
a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Λ και το Μ
e. Όλα είναι τετράγωνα.



Κ Λ Μ

2. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνα;

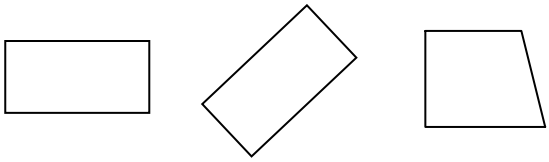
a. Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Μ και το Ν
e. Το Λ και το Μ



Κ Λ Μ Ν

3. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια;

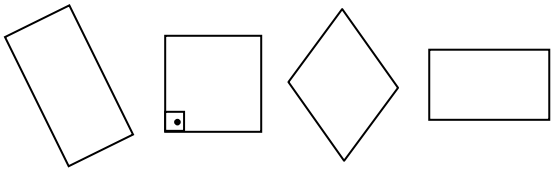
a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και το Λ
d. Το Κ και το Μ
e. Όλα είναι ορθογώνια.



Κ Λ Μ

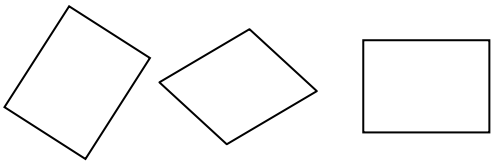
4. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

a. Κανένα από αυτά δεν είναι τετράγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Το Λ και το Ν
e. Όλα είναι τετράγωνα.



Κ Λ Μ Ν

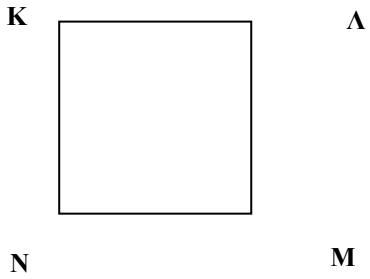
5. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι παραλληλόγραμμα;
a. Το Κ μόνο
b. Το Μ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Κανένα από αυτά δεν είναι παραλληλόγραμμο.
e. Όλα είναι παραλληλόγραμμα.



Κ Λ Μ

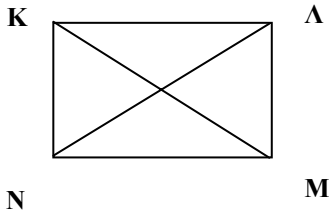
© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

6. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής για όλα τα τετράγωνα.



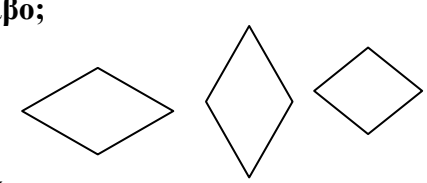
a. Το ΚΜ και το ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος.
b. Το ΚΜ και το ΛΝ είναι κάθετα.
c. Το ΚΝ και το ΛΜ είναι κάθετα.
d. Το ΚΝ και το ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος.
e. Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ.

7. Στο ορθογώνιο ΚΛΜΝ οι ΚΜ και ΛΝ είναι <u>διαγώνιες</u>.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο;



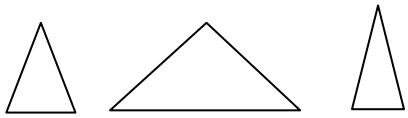
a. Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες.
b. Υπάρχουν 4 πλευρές.
c. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
d. Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο.

8. Ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ρόμβο;



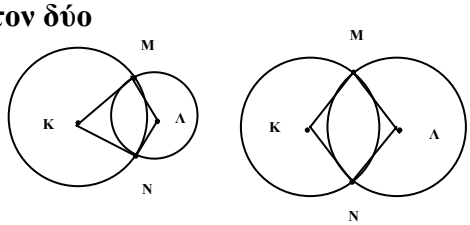
a. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
b. Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δύο από τις γωνίες του ρόμβου.
c. Οι δύο διαγώνιες είναι κάθετες.
d. Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.

9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο με δύο ίσες πλευρές. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;



a. Οι τρεις πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.
b. Μια πλευρά να είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.
c. Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο.
d. Οι τρεις γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Κανένα από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθές για κάθε ισοσκελές τρίγωνο.

10. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Μ και Ν σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΚΜΛΝ. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο παραδείγματα. Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι πάντα αληθή;



a. Το ΚΜΛΝ θα έχει δύο ζευγάρια πλευρών ίσου μήκους.
b. Το ΚΜΛΝ θα έχει τουλάχιστον δύο γωνίες ίσου μέτρου.
c. Οι ευθείες ΚΛ και ΜΝ θα είναι κάθετες.
d. Οι γωνίες Κ και Λ θα έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.

© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

11. Υπάρχουν δύο υποθέσεις.
Υπόθεση 1: Το σχήμα Φ είναι ένα ορθογώνιο.
Υπόθεση 2: Το σχήμα Φ είναι ένα τρίγωνο.
Ποιο είναι σωστό;

a. **Αν η 1 είναι αληθής, τότε και η 2 είναι αληθής.**
b. **Αν η 1 είναι λάθος ,τότε η 2 είναι αληθής.**
c. **Οι 1 και 2 δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.**
d. **Οι 1 και 2 δεν μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

12. Υπάρχουν δύο υποθέσεις.

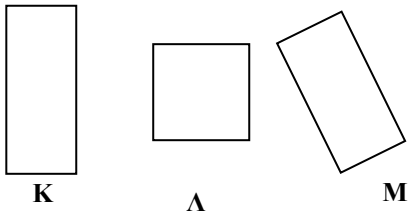
Υπόθεση Α: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις πλευρές με το ίδιο μήκος.
Υπόθεση Β: Στο τρίγωνο ΑΒΓ ,οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο.

Ποιο είναι σωστό;

a. **Οι υποθέσεις Α και Β δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.**
b. **Αν η Α είναι αληθής ,τότε και η Β είναι αληθής.**
c. **Αν η Β είναι αληθής ,τότε και η Α είναι αληθής.**
d. **Αν η Α είναι ψευδής ,τότε και η Β είναι ψευδής.**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

13. Ποια από τα παρακάτω σχήματα μπορούμε να τα ονομάσουμε ορθογώνια;

a. **Όλα μπορούν.**
b. **Μόνο το Λ.**
c. **Μόνο το Μ.**
d. **Τα Κ και Λ μόνο.**
e. **Τα Λ και Μ μόνο.**



14. Ποια είναι αληθή;

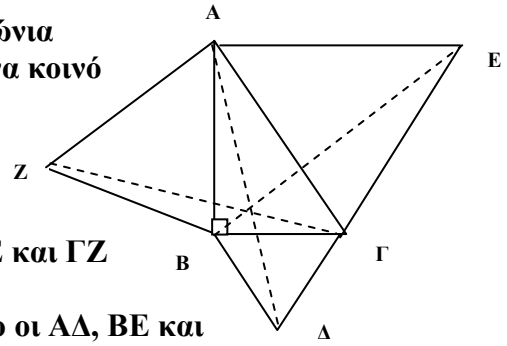
a. **Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.**
b. **Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογωνίων.**
c. **Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων**
d. **Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

15. Τι όλα τα ορθογώνια έχουν που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν;

a. **Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.**
b. **Οι διαγώνιες είναι ίσες.**
c. **Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.**
d. **Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.**
e. **Κανένα από τα (a) έως (d).**

© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

16. Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΒΖ και ΒΓΔ σχηματίζονται στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ. Από αυτή την πληροφορία κάποιος μπορεί να αποδείξει ότι: οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο. Τι σας λέει αυτή η απόδειξη;



a. **Μόνο σε αυτό το τρίγωνο είναι σίγουρο ότι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
b. **Σε μερικά και όχι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
c. **Σε οποιαδήποτε ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
d. **Σε οποιαδήποτε τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**
e. **Σε οποιαδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.**

17. Παρακάτω υπάρχουν τρεις ιδιότητες ενός σχήματος.
Ιδιότητα Α: Το σχήμα έχει διαγώνιες με ίσα μήκη.
Ιδιότητα Β: Το σχήμα είναι ένα τετράγωνο.
Ιδιότητα Γ: Το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.
Ποια είναι αληθή;

a. **Η Α συνεπάγεται την Β η οποία συνεπάγεται την Γ.**
b. **Η Α συνεπάγεται την Γ η οποία συνεπάγεται την Β.**
c. **Η Β συνεπάγεται την Γ η οποία συνεπάγεται την Α.**
d. **Η Γ συνεπάγεται την Α η οποία συνεπάγεται την Β.**
e. **Η Γ συνεπάγεται την Β η οποία συνεπάγεται την Α.**

18. Παρακάτω υπάρχουν δύο υποθέσεις.

I. **Εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο ,τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.**
II. **Εάν οι διαγώνιοι ενός σχήματος διχοτομούνται ,τότε αυτό είναι ορθογώνιο.**

Ποιο είναι σωστό;

a. **Για να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή.**
b. **Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή.**
c. **Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.**
d. **Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι λάθος, είναι αρκετό να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.**
e. **Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.**

© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

19. Στη Γεωμετρία:

a. **Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί.**
b. **Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι ορισμένες εικασίες είναι αληθείς.**
c. **Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί αληθής.**
d. **Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά είναι αναγκαίο να έχουμε μερικές εικασίες οι οποίες υποτίθεται αληθείς.**
e. **Τίποτε από τα (a) έως (d) δεν είναι σωστό.**

20. Εξετάστε αυτές τις τρεις υποθέσεις.

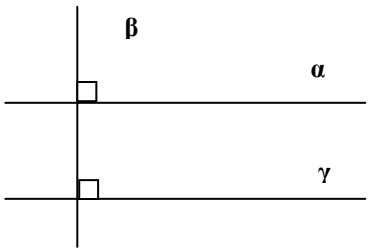
I. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.

II. Μια ευθεία που είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες είναι κάθετη και στην άλλη.

III. Εάν δύο ευθείες ισαπέχουν ,τότε είναι παράλληλες

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ότι οι ευθείες α και β είναι κάθετες και οι ευθείες β και γ είναι κάθετες. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις μπορεί να είναι ο λόγος που η ευθεία α είναι παράλληλη στην ευθεία γ ;

a. **Η I μόνο.**
b. **Η II μόνο.**
c. **Η III μόνο.**
d. **Είτε η I είτε η II.**
e. **Είτε η II είτε η III.**



© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:**…….**
ΤΑΞΗ:**…….. *ΣΧΟΛΕΙΟ:*****……**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:**……..*ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ* ……..**

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση

1.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
2.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
3.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
4.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
5.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
6.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
7.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
8.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
9.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
10.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
11.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
12.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
13.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
14.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
15.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
16.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
17.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
18.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
19.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
20.	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ VAN HIELE TEST(ΚΛΕΙΔΑ)

1.b

2. d

3.c

4. b0

5.e

6. b

7.e

8. a

9.c

10. d

11.c

12. b

13. a

14. a

15. b

16. c

17. c

18. d

19. d

20. a

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ -ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΑΛΛΗΛΟΓΡΑΦΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΤΟΥ ΣΙΚΑΓΟ SALMAN USISKIN

1η ΕΠΑΦΗ

Dear professor, mr Usiskin, my respects. I am a mathematics teacher in a High school in Greece and this year I am doing a master in the University of Athens. I have recently studied your investigation,1982, and I honestly found it excellent. At this moment I am thinking of a corresponding investigation as yours, using a sample of selected students in different schools of my country. The reason I am writing this letter is to ask your permission for using your test -which believe me is a precious help for my study -without any expenses. I would also like to explain that this investigation is being executed for first time in Greece and it is certain that your name and your test will be known all over Greece(I shall do my best about it). It would be very kind of you to reply as soon as possible. Thank you for your time. With respect Nick Tzifas

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1η

Original Message -----

From: Zalman Usiskin

To: NIKOS TZIFAS

Cc: z-usiskin@uchicago.edu

Sent: Tuesday, May 24, 2005 11:52 PM

Subject: Re: van Hiele test

Dear Mr. Tzifas:

The van Hiele test is an appendix to the 231-page report "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry". This report has not been available from us for well over a decade but you should try to obtain a copy. It was available in the United States as ERIC reproduction service document no. ED 220 288. The report includes quite a bit of information that is critical to understanding the test, including the various ways in which van Hiele levels can be derived from scores on the test. (Merely having the test would not be enough.) We are happy to give permission to copy the van Hiele test for use in research without cost, but we need (1) a description of the study, including an approximate number of copies you will make. (2) assurance that you will write for copyright purposes on each copy: "© 1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago." (3) assurance that we will receive a copy of any write-up of the results you find in your study. It is because of requirement (3) that I am in possession of the doctoral dissertation of Ioannis Zachos (Ph.D., University of Leeds School of Education, June 1994), entitled "Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools". In this study Dr. Zachos translated and adapted the

van Hiele test for use in Greek schools. My last correspondence with Dr. Zachos was in July 1995.At that time his address was Klisthenous 6, Athens 163 44, Greece.

Zalman Usiskin

Professor of Education

Director, University of Chicago School Mathematics Project

The University of Chicago 5835 S. Kimbark Avenue Chicago,

IL 60637 +1 773 702-3314 (fax)

2η ΕΠΑΦΗ

Original message ----

Date: Thu, 26 May 2005 16:54:50 +0300

From: "????S ???F?S" <niktzifas@sch.gr>

Subject: Re: van Hiele test

To: "Zalman Usiskin" <z-usiskin@uchicago.edu>

Dear sirs, at first I'd like to thank you for your Kind and soon reply to me. I accept, of course, your conditions and I'd like to give you the following information: + The investigation is a part of my master(M. Sc) It is concerned about students aged 14-17 years old in Greek secondary schools in 3 classes. + The sample will be among 1850 students in 45 schools. I also assure that my work will not be published for commercial and financial profits, but it will be submitted as a preprint in 5 copies in Mathematics University of Athens. When I'll be finishing my investigation, I am thinking of sending you a copy of summary in English and the questionnaire in Greek Thank you really Waiting for your replay my warmest regards

Nick Tzifas

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Dear Nick: Could you supply more information about the purpose of your study, about the question(s) your study is about?

Zalman Usiskin

3η ΕΠΑΦΗ

Dear sirs thank you for you reply The Euclidean Geometry is being taught in Greece methodically for many years now, but Geometry teachers have objected that there are too many problems during the teaching, as students find this subject difficult. So, the investigation has the purpose to assess the geometrical thought of the students and to prove that students are not in the proper van Hiele level (3-4) that is necessary for the understanding of the Euclidean Geometry. The basic questions of this study will be the following:

1.. Are the most students of secondary school in Greece classified in levels 1(recognition) and 2(analysis) ?

2.. Are there sex differences among the students in the assessment in van Hiele levels?

3.. How are entering geometry students distributed with respect to the levels in the van Hiele scheme?

4.. Is there an improvement of the students in the van Hiele levels from class to class because of the existing teaching in Greek secondary schools?

5.. Are there differences between public and private schools in the van Hiele levels assessment?

Best regards

Nick Tzifas

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Dear Nick: Thank you for the information. We are happy to give permission for you to use the van Hiele test in your study. We would like to have a copy of the translation that you make into Greek.

Zalman Usiskin

4η ΕΠΑΦΗ

Dear professor

I am sending you the test I am going to use in Greek. As you can see I shall use 20 questions because I assess the first four levels

Best regards

Nick Tzifas

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Dear Nick: I do not have the font to read everything on the document you sent. Can you send it as a pdf file?

Zalman Usiskin

5η ΕΠΑΦΗ

Dear professor I am sending you the test.

>Nick tzifas

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Dear Nick: Thank you. The text came through perfectly.

Zalman Usiskin

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ- ΔΟΚΙΜΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Χριστίνα Ζουρνά
ΤΑΞΗ: Α΄1 Λυκείου **ΣΧΟΛΕΙΟ:** Ιωνίδιος
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21/04/05 **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ** κ. Βιγκαδουράκης

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4.5) (3-5)

4°

1.	(a)	b	c	d	e	—	1°
2.	a	b	c	(d)	e	✓	
3.	a	b	(c)	d	e	✓	
4.	a	(b)	c	d	e	✓	
5.	a	b	c	d	(e)	✓	
6.	a	b	(c)	d	e	—	2°
7.	a	b	c	d	(e)	✓	
8.	(a)	b	c	d	e	✓	
9.	a	b	(c)	d	e	✓	
10.	a	b	c	d	(e)	—	3°
11.	a	b	c	d	(e)	—	
12.	a	(b)	c	d	e	✓	
13.	(a)	b	c	d	e	✓	
14.	(a)	b	c	d	e	✓	
15.	a	(b)	c	d	e	✓	
16.	a	b	(c)	d	e	✓	4°
17.	a	b	(c)	d	e	✓	
18.	a	b	c	(d)	e	✓	
19.	a	(b)	c	d	e	—	
20.	(a)	b	c	d	e	✓	

Καλά

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Ζαραούκίδου Μαρία
ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου ... *ΣΧΟΛΕΙΟ:* Εκπαιδευτήρια Καίσαρη
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 7-04-05 ... *ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ* Κος Κουρούβαλος

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4,5) (3-5)

1.	a	(b)	c	d	e	✓	1ο	1ο
2.	a	b	c	(d)	e	✓		
3.	a	b	(c)	d	e	✓		
4.	a	(b)	c	d	e	✓		
5.	a	b	c	d	(e)	✓		
6.	a	(b)	c	d	e	✓	2ο	2ο
7.	a	b	c	d	(e)	✓		
8.	(a)	b	c	d	e	✓		
9.	a	b	(c)	d	e	✓		
10.	a	b	c	(d)	e			
11.	a	~~(b)~~	c	d	(e)	—		3ο
12.	a	(b)	c	d	e	✓		
13.	(a)	b	c	d	e	✓		
14.	(a)	b	c	d	e	✓		
15.	a	b	c	d	(e)	—		4ο
16.	a	b	(c)	d	e	✓		
17.	a	b	(c)	d	e	✓		
18.	a	b	c	(d)	e	✓		
19.	a	b	c	d	(e)	—		
20.	a	b	c	(d)	e	—		

2ο 4ο

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Ζάγκος Νικόλαος
ΤΑΞΗ: Α'2 ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** 5ο Ενιαίο Λύκειο Πατρών
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24-3-05 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** Μανδαλάκης Εμμανουήλ

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5)

1.	a	(b)	c	d	e	✓	1ο
2.	a	b	c	(d)	e	✓	
3.	a	b	(c)	d	e	✓	
4.	a	(b)	c	d	e	✓	
5.	a	b	c	d	(e)	✓	
6.	a	(b)	c	d	e	✓	2ο
7.	a	b	c	d	(e)	✓	
8.	a	b	c	d	(e)	—	
9.	a	b	(c)	d	e	✓	
10.	(a)	b	c	d	e	—	
11.	a	b	c	(d)	e	—	3ο
12.	a	(b)	c	d	e	✓	
13.	(a)	b	c	d	e	✓	
14.	(a)	b	c	d	e	✓	
15.	a	b	c	d	(e)	—	
16.	a	b	(c)	d	e	✓	4ο
17.	a	(b)	c	d	e	—	
18.	a	b	c	(d)	e	✓	
19.	a	(b)	c	d	e	—	
20.	(a)	b	c	d	e	✓	

1ο (4ο)

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Πβάνοβα Ντενιάνα
ΤΑΞΗ: Γ1 *ΣΧΟΛΕΙΟ:* 2ο Γυμνάσιο Σελεσιάς
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30-03-2005 *ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ* Ζιγκάκη Μαρία

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5) 4ο

1.	a	(b)	c	d	e	√	1ο (1ο)	1ο
2.	a	b	c	(d)	e	√		
3.	a	b	(c)	d	e	√		
4.	a	(b)	c	d	e	√		
5.	a	b	c	d	(e)			
6.	a	b	(c)	d	e	—		2ο
7.	a	b	c	d	(e)	√		
8.	(a)	b	c	d	e	√		
9.	a	b	(c)	d	e	√		
10.	a	b	c	d	(e)	—		3ο
11.	a	b	(c)	d	e	√		
12.	(a)	b	c	d	e	—		
13.	(a)	b	c	d	e	√		
14.	a	b	(c)	d	e	—		
15.	a	(b)	c	d	e	√		4ο
16.	a	b	(c)	d	e	√		
17.	a	b	(c)	d	e	√		
18.	(a)	b	c	d	e	—		
19.	a	b	c	d	(e)	—		
20.	(a)	b	c	d	e	√		

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Ξωξιία Σπύρου
ΤΑΞΗ: Β ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** Ενιαίο Λύκειο Σαλαω
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 9-3-2005 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** Κίκας Κίκας

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5)

1.	a	b	c	d	e	√	
2.	a	b	c	d	e	√	
3.	a	b	c	d	e	—	
4.	a	b	c	d	e	√	
5.	a	b	c	d	e	—	
6.	a	b	c	d	e	—	
7.	a	b	c	d	e	√	
8.	a	b	c	d	e	√	
9.	a	b	c	d	e	√	
10.	a	b	c	d	e	—	
11.	a	b	c	d	e	—	
12.	a	b	c	d	e	√	
13.	a	b	c	d	e	√	
14.	a	b	c	d	e	—	
15.	a	b	c	d	e	√	
16.	a	b	c	d	e	√	
17.	a	b	c	d	e	—	
18.	a	b	c	d	e	—	
19.	a	b	c	d	e	—	
20.	a	b	c	d	e	√	

0 1° 2° 3° 3°

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Μουμτζάλη Αννα
ΤΑΞΗ: Β6 ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** 3ο Ενιαίο Λύκειο Πάτρας
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/3/05 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** Παπαιωάννου Ιωάννης

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5)

1.	a	b	c	d	e	√	1ο	1ο
2.	a	b	c	d	e	√		
3.	a	b	c	d	e	—		
4.	a	b	c	d	e	√		
5.	a	b	c	d	e	√		
6.	a	b	c	d	e	√ —		2ο
7.	a	b	c	d	e	√ —		
8.	a	b	c	d	e	√ —		
9.	a	b	c	d	e	—		
10.	a	b	c	d	e	—		3ο
11.	a	b	c	d	e	√	3ο	
12.	a	b	c	d	e	√		
13.	a	b	c	d	e	√		
14.	a	b	c	d	e	√		
15.	a	b	c	d	e	√		
16.	a	b	c	d	e	√		
17.	a	b	c	d	e	√		
18.	a	b	c	d	e	—		
19.	a	b	c	d	e	—		
20.	a	b	c	d	e	—		

Καλά 3ο

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Λιναίδη Φωτεινή

ΤΑΞΗ: Α. ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** 3ο Γυμνάσιο Λύκεια Αθηναίων

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 2/3/2005 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** κος Κωνσταντίνος Μπαρούνης

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση

(4-5) 1ο

(3-5) 3ο

1.	a	b	c	d	e	√	1ο
2.	a	b	c	d	e	√	
3.	a	b	c	d	e	√	
4.	a	b	c	d	e	√	
5.	a	b	c	d	e	√	
6.	a	b	c	d	e	—	2ο
7.	a	b	c	d	e	√ —	
8.	a	b	c	d	e	—	
9.	a	b	c	d	e	√ —	
10.	a	b	c	d	e	√ —	
11.	a	b	c	d	e	√ —	3ο
12.	a	b	c	d	e	—	
13.	a	b	c	d	e	√ —	
14.	a	b	c	d	e	—	
15.	a	b	c	d	e	√ —	
16.	a	b	c	d	e	√	
17.	a	b	c	d	e	—	
18.	a	b	c	d	e	—	
19.	a	b	c	d	e	—	
20.	a	b	c	d	e	—	

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Γιώργος Αυδελιόπουλος
ΤΑΞΗ: Α2 ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** 6ο Δημοτικό Σχολείο Πλατύκαμπου
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/3/05 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** Νικολ. Παυλίδης

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-8) (3-0)

1.	a	**b**	c	d	e	✓	1°	1°
2.	a	b	c	**d**	e	✓		
3.	a	b	**c**	d	e	✓		
4.	a	**b**	c	d	e	✓		
5.	a	b	c	d	**e**	✓		
6.	a	**b**	c	d	e	✓	2°	2°
7.	a	b	c	d	**e**	✓		
8.	**a**	b	c	d	e	✓		
9.	a	b	**c**	d	e	✓		
10.	a	b	c	**d**	e	✓		
11.	a	b	**c**	d	e	✓		3°
12.	a	b	c	d	**e**	—		
13.	**a**	b	c	d	e	✓		
14.	**a**	b	c	d	e	✓		
15.	a	b	**c**	d	e	—		
16.	a	b	c	d	**e**	—		4°
17.	a	b	**c**	d	e	✓		
18.	a	b	c	**d**	e	✓		
19.	**a**	b	c	d	e	—		
20.	**a**	b	c	d	e	✓		

(2°) (4°)

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ 6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Μαρκοδιμιτράκης Νικόλαος
ΤΑΞΗ: Β΄ ***ΣΧΟΛΕΙΟ:*** Αθήνα Αζαρίας
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/2/04 ***ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*** Λιάκουρας Λάμπρος

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5)

1.	a	b	c	d	e	√	1°	2°	1° καλά
2.	a	b	c	d	e	√			
3.	a	b	c	d	e	√			
4.	a	b	c	d	e	√			
5.	a	b	c	d	e	√			
6.	a	b	c	d	e	√			2°
7.	a	b	c	d	e	√	2°		
8.	a	b	c	d	e	√			
9.	a	b	c	d	e	√			
10.	a	b	c	d	e	√			
11.	a	b	c	d	e	—			
12.	a	b	c	d	e	—			
13.	a	b	c	d	e	√			
14.	a	b	c	d	e	—			
15.	a	b	c	d	e	—			3°
16.	a	b	c	d	e	√ —			
17.	a	b	c	d	e	√ —			
18.	a	b	c	d	e	—			
19.	a	b	c	d	~~e~~	—			
20.	a	b	c	d	e	√ —			

ΤΖΙΦΑΣ ΝΙΚΟΣ

6

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Παναγιώτης Δεσποπουλος
ΤΑΞΗ: Β3 **ΣΧΟΛΕΙΟ:** 1ο Γενικό Λύκειο Ιλίου
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 11/4/05 **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ** Κ. Αποστόλου Ιωάννης

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση (4-5) (3-5)

1.	a	(b)	c	d	e	✓	1ο	1ο
2.	a	b	c	(d)	e	✓		
3.	a	b	(c)	d	e	✓		
4.	a	(b)	c	d	e	✓		
5.	a	b	c	d	(e)	✓		
6.	(a)	b	c	d	e	—		2ο
7.	a	b	c	d	(e)	✓		
8.	(a)	b	c	d	e	✓		
9.	a	b	(c)	d	e	✓		
10.	a	b	c	d	(e)	—		
11.	a	b	(c)	d	e	✓	3ο	3ο
12.	a	(b)	c	d	e	✓		
13.	(a)	b	c	d	e	✓		
14.	(a)	b	c	d	e	✓		
15.	a	b	c	d	(e)	—		
16.	(a)	b	c	d	e	—		
17.	a	b	c	(d)	e	—		
18.	a	b	c	(d)	e	✓		
19.	a	(b)	c	d	e	—		
20.	(a)	b	c	d	e	✓		

3ο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε –ΑΔΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ.

Να διατηρηθεί μέχρι .....

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝ.ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΝΙΑΙΟΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΩΝ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α'

Βαθμός Ασφαλείας .....

Αθήνα 7 -9-05
Αριθ. Πρωτ 88854 /Γ2
Βαθ. Προτερ.

Ερμού 15 101 85 Αθήνα
Τηλέφωνο : 210-3235722
FAX : 210-3224249
Πληροφορίες : Αν. Πασχαλίδου

ΠΡΟΣ :
1. Κ. Νικόλαο Τζίφα
Αιολίδος 1
Κ. Πετράλωνα
2. Διευθύνσεις Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ Αθήνας, Αν. Αττικής, Αχαΐας, Δωδεκανήσου, Ηλείας, Κεφαλληνίας, Κοζάνης, Λασιθίου, Σάμου και Τρικάλων .

ΘΕΜΑ : Έγκριση διεξαγωγής έρευνας.

Απαντώντας σε σχετική αίτησή σας και μετά τη γνωμοδότηση του Τμήματος Ερευνών Τεκμηρίωσης και Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (**πράξη 6/2005**), σας γνωρίζουμε ότι **ε π ι τ ρ έ π ο υ μ ε** τη διεξαγωγή έρευνας από τον κ. Νικόλαο Τζίφα κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2005-2006 με την εξής προϋπόθεση: Τα Τέστ για τους μαθητές να είναι ανώνυμα και οι μαθητές να τα συμπληρώσουν , εφόσον το επιθυμούν .

Επισημαίνεται ότι η συμμετοχή στην έρευνα δεν είναι υποχρεωτική.

Η έρευνα έχει θέμα: ***«Αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σύμφωνα με την θεωρία του Van Hiele »***

και απευθύνεται στους μαθητές των σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης του συνημμένου πίνακα.

Για την πραγματοποίηση της έρευνας θα πρέπει :

1. Οι επισκέψεις στα σχολεία να γίνουν μετά από συνεννόηση με τον Διευθυντή τους και σε συνεργασία με το σύλλογο καθηγητών, ώστε να μην παρεμποδίζεται η ομαλή διεξαγωγή των μαθημάτων.

2. Τα αποτελέσματα της έρευνας, μετά την ολοκλήρωσή της, να κοινοποιηθούν στην Υπηρεσία μας και στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
3. Οι Διευθυντές των Διευθύνσεων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ Αθήνας, Αν. Αττικής, Αχαΐας, Δωδεκανήσου, Ηλείας, Κεφαλληνίας, Κοζάνης, Λασιθίου, Σάμου και Τρικάλων να ενημερώσουν σχετικά τους Διευθυντές των σχολείων ευθύνης τους, ώστε να διευκολύνουν τον ενδιαφερόμενο στην πραγματοποίηση της έρευνας αυτής.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΠΑΥΛΟΣ ΓΡ. ΝΤΑΒΑΡΙΝΟΣ

Συνημμένα Σελ. 1

Εσωτ. Διανομή

1. Δ/νση Σπουδών Δ. Ε.
   Τμήμα Α'

Πιστό Αντίγραφο
ο προϊστάμενος Τμήματος
Διεκπ/σης & Πρωτοκόλλου

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΜΥΛΩΝΑΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ -ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΣΧΟΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ		
1	62ο ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
2	3ο ΓΛΥΦΑΔΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
3	1ο ΑΥΛΩΝΑ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
4	2ο ΤΑΥΡΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
5	3ο ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
6	3ο ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ (ΑΘΛΗΤΙΚΟ)
7	3ο ΑΓΙΟΥ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
8	1ο ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
9	1ο ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
10	2ο ΑΜΑΛΙΑΔΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
11	1ο ΠΑΠΑΓΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
12	1ο Τ.Ε.Ε ΑΓΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ	ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΛΥΚΕΙΟ
13	3ο ΤΡΙΚΑΛΩΝ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
14	ΣΑΜΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
15	2ο ΚΟΖΑΝΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
16	9ο ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
17	ΕΡΑΣΜΕΙΟΣ ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
18	ΠΕΝΤΑΛΟΦΟΥ ΚΟΖΑΝΗΣ	ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
19	4ο ΤΡΙΚΑΛΩΝ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
20	3ο ΓΛΥΦΑΔΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
21	2ο ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
22	1ο ΑΥΛΩΝΑ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
23	2ο ΤΑΥΡΟΥ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
24	6ο ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
25	34ο ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
26	ΕΡΑΣΜΕΙΟΣ ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
27	ΣΗΤΕΙΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
28	ΣΗΤΕΙΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
29	33ο ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
30	1ο ΤΑΥΡΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
31	2ο ΑΙΓΑΛΕΩ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
32	9ο ΑΘΗΝΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
33	ΚΑΙΣΑΡΗ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
34	ΚΑΙΣΑΡΗ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
35	22ο ΠΑΤΡΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
36	12ο ΠΑΤΡΑΣ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
37	3ο ΠΑΤΡΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
38	5ο ΠΑΤΡΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
39	7ο ΤΕΕ ΠΑΤΡΑΣ	ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΛΥΚΕΙΟ
40	ΚΟΡΩΠΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
41	12ο ΑΘΗΝΑΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
42	1ο ΙΛΙΟΥ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ
43	1ο ΙΛΙΟΥ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
44	ΛΕΟΝΤΕΙΟΣ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ
45	ΙΩΝΙΔΕΙΟΣ ΠΕΙΡΑΙΑ	ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Z-ΚΛΙΜΑΚΑ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΤΕΣΤ VAN HIELE

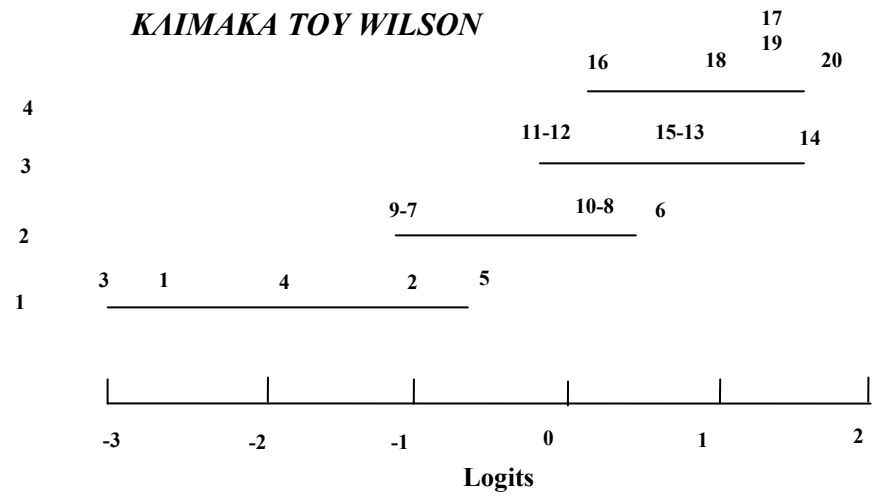
Ο Mark Wilson (ένας από τους επικριτές του τεστ) σε άρθρο του στο περιοδικό JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION με τίτλο Measuring a van Hiele Geometry Sequence έχει κάνει μια κλίμακα δυσκολίας των ερωτήσεων του τεστ van Hiele . Την κλίμακα αυτή την παραθέτουμε και κάνουμε την σύγκριση με την δική μας κλίμακα όπως αυτή προέκυψε από την έρευνά μας.

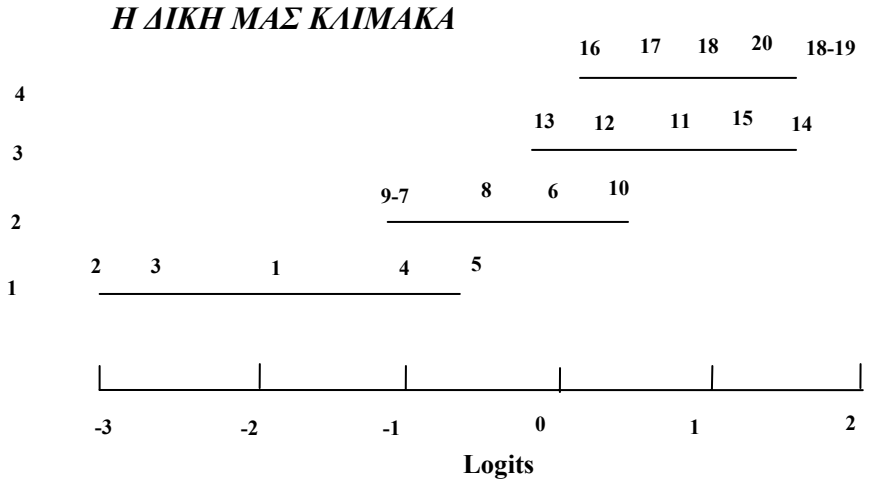
Ισχυρίζεται ο Mark Wilson ότι: *συγκρίνοντας τις ερωτήσεις 7 και 9 με τις υπόλοιπες ερωτήσεις του επιπέδου 2 (ερωτήσεις 6,8 και 10), θα βρούμε ότι για αυτές τις δύο ερωτήσεις όλες οι γραμμές και τα σύνολα γραμμών που αναφέρονται στις πιθανές απαντήσεις παρέχονται για τα συνοδευτικά σχήματα χωρίς λεπτομέρειες που θα αποσπούσαν την προσοχή των μαθητών. Οι υπόλοιπες ερωτήσεις του επίπέδου 2 κάνουν αναφορά σε τουλάχιστον μία γραμμή ή σύνολο γραμμών η οποία είτε δεν παρουσιάζεται στο σχήμα ή περιβάλλεται από αλλά στοιχεία του σχήματος που πρέπει να διαγραφούν προκειμένου να δούμε καθαρά την κατάσταση. Έτσι προκειμένου να δούμε την κατάσταση που παρουσιάζεται σε κάθε μια από τις πιθανές απαντήσεις των ερωτήσεων 6,8,10 ο μαθητής πρέπει είτε να φανταστεί το σχήμα και να το προσαρμόσει στην κατάλληλη πιθανή απάντηση ή να αντιγράψει το σχήμα σε ένα πρόχειρο χαρτί και να το προσαρμόσει εκεί. (Οι μαθητές δεν επιτρέπεται να γράψουν πάνω στα φύλλα του τεστ). Αυτή η επιπλέον προσπάθεια που χρειάζεται για την απάντηση τω ερωτήσεων 6,8,10 μπορεί να είναι το αίτιο εξ αιτίας του οποίου οι ερωτήσεις 7 και 9 εμφανίζονται ως ευκολότερες στην κλίμακα. Αντιγράφοντας το σχήμα σε άλλο φύλλο παρέχει δυνατότητες εμφανίσεως λάθους. Το να φανταστούν το σχήμα και να το προσαρμόσουν ώστε να ταιριάζει με κάποια από τις πιθανές απαντήσεις απαιτεί δεξιότητες που είναι πιθανόν δύσκολο να έχουν κατακτήσει και δεν είναι ακριβώς μέρος της θεωρίας V.H.*

Όπως φαίνεται και στην δική μας κλίμακα η διαπίστωση του Mark Wilson μας βρίσκει σύμφωνους.

Επίσης ο Mark Wilson ισχυρίζεται ότι:*Η μελέτη της ερώτησης 14 οδηγεί σε μια διαφορετική διάγνωση για την ασυνήθιστη δυσκολία της. Όπως και η ερώτηση 15 η συμπερίληψη της στο επίπεδο 3 αιτιολογείται στην αναφορά CDASSG γιατί οι μαθητές του επιπέδου 3 γνωρίζουν την χρήση των όρων* ***μερικά*** *και* ***όλα****. Η χρήση αυτών όρων σε ορθογώνια και παραλληλόγραμμα είναι διαφορετική από την χρήση του «όλα» με τις ιδιότητες του ορθογωνίου στην ερώτηση 14. Το σύνολο «όλα τα ορθογώνια» δεν μπορεί να τοποθετηθεί στην ίδια κατηγορία με το σύνολο « όλες οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων»*

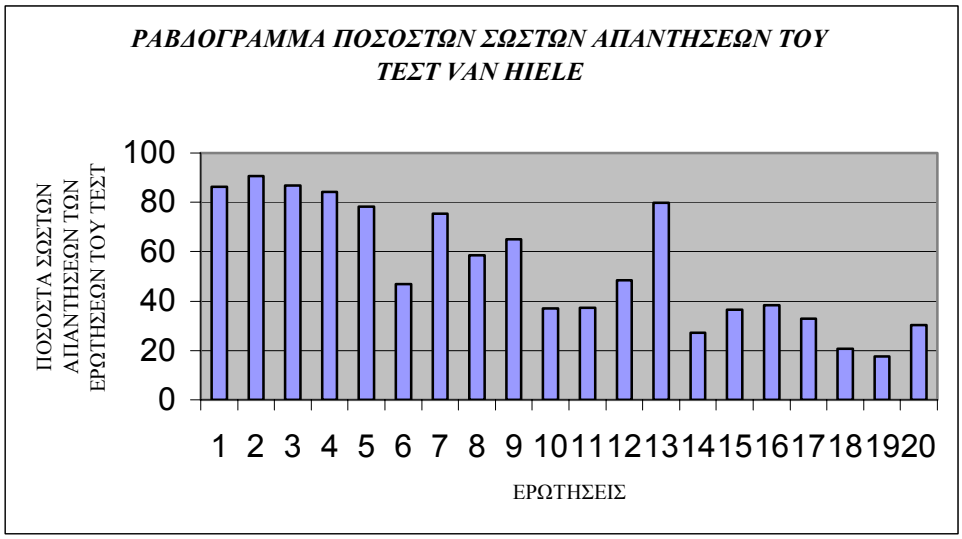
Και εδώ όπως φαίνεται και στην δική μας κλίμακα η διαπίστωση του Mark Wilson μας βρίσκει σύμφωνους.





Συνεχίζοντας ο Mark Wilson ισχυρίζεται ότι:*Αυτά τα δύο παραδείγματα παρουσιάζουν πιθανούς τρόπους για το ότι οι ερωτήσεις μπορεί να αποκρύψουν την σημασία της ιεραρχίας V.H. μέσω αλληλεπιδράσεων με δεξιότητες που βρίσκονται εκτός της ιεραρχίας και μέσω μη επαρκούς κατάταξης. Η γιατρειά αυτών των δύο προβλημάτων δεν θα οδηγούσε στην διαμέριση της κλίμακας και παρόλα αυτά θα παρέμενε η αλληλοεπικάλυψη για τα επίπεδα 2 και 3 και σχεδόν και για τα επίπεδα 3 και 4 όπως φαίνεται στο σχήμα.*

Και καταλήγει συμπεραίνοντας ότι*: Αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μερικούς τρόπους που οι εμπειρικές έρευνες στην θεωρίες της διαδοχικής μάθησης και η ανάλυση των αποτελεσμάτων με ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο μπορεί να βελτιώσουν την κατανόηση μας για τον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν α) την δομή της πληροφορίας που τους παρουσιάζεται και β) τις διαδοχικές εργασίες που οι δάσκαλοι αναθέτουν. Πρώτα η έρευνα για ερωτήσεις με ομοιογενές επίπεδο δυσκολίας μπορεί να επαναπροσδιορίσει τον ορισμό εργασιών και να επικεντρώσει την προσοχή μας σε πιθανές λανθασμένες προδιαγραφές στην διαδικασία πραγματοποίησης εργασιών και ερωτήσεων. Δεύτερον η διαφοροποίηση μεταξύ της σχεδιαζόμενης σει-*

ράς εργασιών και της εμπειρικής σειράς μπορεί να παρέχει κατανόηση σε προβλήματα με τις θεωρίες μάθησης. Τρίτον ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο μπορεί να μας παρέχει ένα πλαίσιο για να συζητήσουμε το νόημα (από την σκοπιά της συμπεριφοράς) των διαφοροποιημένων επιπέδων επίτευξης δεξιοτήτων και γνώσεων στην μαθησιακή ακολουθία και να συζητήσουμε την καταλληλότητα των μετρήσεων που χρησιμοποιούνται.

ΕΡΩΤΗΣΗ	Συχνότητα σωστών απαντήσεων	Ποσοστό%
2	1666	90,6
3	1596	86,8
1	1587	86,3
4	1546	84,1
13	1465	79,7
5	1439	78,3
7	1388	75,5
9	1195	65,0
8	1076	58,5
12	889	48,4
6	862	46,9
16	704	38,3
11	688	37,4
10	680	37,0
15	673	36,6
17	602	32,8
20	558	30,4
14	501	27,3
18	378	20,6
19	324	17,6