ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ,ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

(ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗΣ ΣΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ)

Δήμητρα Βαγενά

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Βασιλική Φαρμάκη

ΑΘΗΝΑ 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ 4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΦΟΙΤΗΤ ΜΕ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ 9
2.1 Δυσκολίες με τους ορισμούς εννοιών. 9
2.2 Δυσκολίες σχετικές με την απόδειξη. 17
2.3 Ταξινόμηση δυσκολιών στον Απειροστικό Λογισμό σύμφωνα με τη Mich Artigue(πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις, όριο, ρήγμα με την αλγεβρική σκέψη). 20
2.4 Λάθη και ταξινόμηση λαθών. 28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΛΑΘΩΝ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΣΤΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Ι ΤΟΝ 29
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟ ΤΟΥ 2003
3.1 Θέμα Ι. 31
3.2 Θέμα ΙΙ. 38
3.3 Θέμα ΙΙΙ. 67
3.4 Θέμα IV. 82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΑΘΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΜΜΕΤΕΙΧΑΝ ΣΤΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΝ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟ ΤΟΥ 2003 97
4.1 Οργάνωση των συνεντεύξεων 97
4.2 Συνεντεύξεις 103
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 129
5.1 Συμπεράσματα από τη μελέτη των γραπτών 129
5.2 Συμπεράσματα από τις συνεντεύξεις 130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 :ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 132

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή αποτελεί τον επίλογο των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών, με τίτλο Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, τους κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια και κ. Αριστείδη Κατάβολο, και κυρίως την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κ. Βασιλική Φαρμάκη, για τη βοήθειά τους στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη, ως υπεύθυνο καθηγητή μου σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα, για τη βοήθειά του τα δυο αυτά χρόνια σπουδών, και τον κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη και κ. Νικόλαο Κλαουδάτο, οι οποίοι αν και δεν ανήκουν στην τριμελή επιτροπή μου, δεν αρνήθηκαν ποτέ τη βοήθειά τους σε ότι τους ζήτησα.

Η εγασία αυτή είναι αφιερωμένη στους γονείς μου, οι οποίοι στηρίζουν πάντα κάθε προσπάθειά μου.

Οκτώβριος, 2004

Δήμητρα Βαγενά

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασικό μάθημα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, αποτελεί ο Απειροστικός Λογισμός. Οι βασικές έννοιες που μελετώνται είναι οι έννοιες των πραγματικών αριθμών, συναρτήσεων,ακολουθιών, ορίων ακολουθιών και συναρτήσεων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων συναρτήσεων.

Έρευνες ([3], [12], [13], [18]) που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία είκοσι χρόνια στη διδακτική του Απειροστικού Λογισμού, αναδεικνύουν δυσκολίες και εμπόδια που συναντούν οι φοιτητές στην κατανόηση του μαθήματος αυτού.Συγκεκριμένα, έχει επισημανθεί ότι :

1. Η πλειοψηφία των φοιτητών αποφεύγει να διατυπώνει τους ορισμούς εννοιών και κυρίως δυσκολεύεται στους ε-δ ορισμούς.([7],[17])
2. Μεγάλο ποσοστό φοιτητών δεν αντιμετωπίζει με αυστηρότητα τα ζητήματα που τίθενται προς λύση, με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται αποδείξεις μη ολοκληρωμένες ή και εντελώς λανθασμένες. ([12], [13], [18])
3. Πολλοί από τους φοιτητές δυσκολεύονται περισσότερο με τις έννοιες των ορίων και συνέχειας, κυρίως, λόγω των συγκρούσεων που δημιουργούνται από τους ορισμούς των εννοιών και τις αυθόρμητες αντιλήψεις(spontaneous conceptions, Cornu, 1981-1982, βλέπε [7]). ([3], [7])

Τις δυσκολίες αυτές, καθώς επίσης και τις αιτίες που τις προκαλούν, θα τις παρουσιάσουμε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας.

Παρόλο που οι φοιτητές είναι εξοικειωμένοι με τις έννοιες που διδάσκονται στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού, αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόησή τους και στον χειρισμό τους. Απόδειξη των δυσκολιών αυτών είναι τα αποτελέσματα των εξετάσεών τους στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού, που συνήθως δεν είναι και πολύ αισιόδοξα για το επίπεδο γνώσης των φοιτητών.

Θεωρώντας ότι η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης στηρίζεται στην προϋπάρχουσα γνώση, είναι πολύ δύσκολο για κάποιο φοιτητή να συνεχίσει τις σπουδές του αν δεν κατανοήσει και εμπεδώσει τις έννοιες που μελετά ο Απειροστικός Λογισμός. Έτσι, θέλωντας να μάθουμε ποια ακριβώς είναι τα προβλήματα των φοιτητών, αλλά και που οφείλονται αυτά, πραγματοποιήσαμε την ακόλουθη έρευνα, στηριζόμενη τόσο στα αποτελέσματα της εξέτασης των φοιτητών, στο μάθημα του Απειροστικού Ι, τον Σεπτέμβριο του 2003, όσο και σε προσωπικές συνεντεύξεις με επιλεγμένους φοιτητές που συμμετείχαν στη γραπτή εξέταση.

Κατά τη διάρκεια αυτής της έρευνας παρατηρήσαμε δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στο μάθημα του Απειροστικού Ι. Μερικές από αυτές έχουν επισημανθεί από διάφορους ερευνητές(Artigue [3], Cornu [7], Vinner[17] κ.α.) και επιπλέον διαπιστώσαμε ότι :

1. Οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση ανισώσεων.
2. Δεν κατανοούν τις εκφωνήσεις θεμάτων, προτάσεων, θεωρημάτων, δεν αναγνωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα, τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα.
3. Συγχέουν την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της ακολουθίας.

Τις δυσκολίες αυτές δε τις συναντήσαμε στη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήσαμε, αλλά προέκυψαν από τη μελέτη γραπτών, φοιτητών που συμμετείχαν στη γραπτή εξέταση. Όλες τις δυσκολίες, τόσο αυτές που έχουν επισημανθεί από τους ερευνητές, όσο και αυτές που παρατηρήσαμε εμείς από τη μελέτη των γραπτών (και δε τις βρήκαμε στη βιβλιογραφία μας), τις παρουσιάζουμε αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο της εργασία. Επιπλέον, τις

επιβεβαιώνουμε αναλύοντας προσωπικές συνεντευξείς που πήραμε από τους φοιτητές, που συμμετείχαν στην εξέταση, Αυτές παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο και συμπεράσματα αναλύονται στο πέμπτο κεφάλαιο, όπου εμφανίζονται συμπερασματικά και όλες οι δυσκολίες κατανόησης και έκφρασης που παρατηρήσαμε από την έρευνα και τη μελέτη των γραπτών.

Το Σεπτέμβριο του 2003 συμμετείχαν στις γραπτές εξετάσεις του μαθήματος Απειροστικός Ι, 379 φοιτητές, όχι μόνο πρωτοετείς, του Μαθηματικού Τμήματος. Οι φοιτητές έπρεπε να απαντήσουν το πολύ σε δέκα θέματα από τα έντεκα που προτείνονταν. Στην εργασία αυτή μελετήσαμε τις απαντήσεις που δόθηκαν σε τρία θέματα, με αριθμούς 1, 7 και 9, στο φυλλάδιο της εξέτασης. Τα θέματα αυτά επιλέγησαν από την επιβλέπουσα της εργασίας αυτής και διδάσκουσα του μαθήματος , κ. Φαρμάκη, και τους διδάσκοντες του μαθήματος κ. Γιαννακούλια και κ. Κατάβολο, ως πιο πρόσφορα για την συγκεκριμένη έρευνα. Το θέμα με αριθμό1 είχε δυο ερωτήματα, τα οποία μελετήθηκαν ξεχωριστά και επομένως στο τρίτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στη μελέτη τεσσάρων θεμάτων.

Ενώ τα γραπτά ήταν διορθωμένα από τους διδάσκοντες του μαθήματος, άρχισε η μελέτη τους. Αρχικά, διαχωρίσαμε τα γραπτά σε δυο κατηγορίες : σε αυτά που ο βαθμός τους ήταν μεγολύτερος ή ίσος του πέντε και σε αυτά που ο βαθμός ήταν μικρότερος του πέντε. Με αυτό τον τρόπο διαπιστώσαμε πόσοι από τους φοιτητές κατάφεραν να «περάσουν» το μάθημα και πόσοι θα χρειάζονταν να το ξαναδώσουν. Έτσι, είχαμε μια πρώτη εικόνα κατά πόσο δυσκολεύονται οι φοιτητές στο συγκεκριμένο μάθημα.

Το επόμενο βήμα ήταν η μελέτη του καθενός από τα τρία θέματα χωριστά. Ειδικά για κάθε θέμα διαχωρίσαμε τα γραπτά και πάλι σε δυο κατηγορίες : σε αυτά που οι φοιτητές είχαν ασχοληθεί με το θέμα και σε αυτά που δεν είχαν μπει στη διαδικασία απάντησής του και προφανώς δε μας ενδιέφεραν. Από τα γραπτά στα οποία υπήρχε κάποια απάντηση στο θέμα που μελετούσαμε, ξεχωρίσαμε όσα ήταν απαντημένα σωστά (ήταν ήδη βαθμολογημένα από τους διδάσκοντες) από αυτά που δεν είχαν πλήρη απάντηση ή είχαν λανθασμένο συλλογισμό. Τελικά, μας ενδιέφεραν τα γραπτά με τις ελλιπεις ή λανθασμένες απαντήσεις.

Κάθε ένα τέτοιο γραπτό το επεξεργαστήκαμε χωριστά. Εντοπίσαμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι φοιτητές επεξεργάστηκαν το θέμα, καθώς και τα λάθη ή τις παραλήψεις που εμφανίστηκαν. Διαπιστώσαμε ότι τόσο κάποιοι τρόποι αντιμετώπισης των θεμάτων, όσο και συγκεκριμένα λάθη, επαναλαμβάνονταν.’Ετσι, μπορέσαμε να ομαδοποιήσουμε και τις μεθόδους επίλυσης των θεμάτων καθώς και τα διάφορα λάθη. Επιπλέον, τα λάθη αυτά τα κατηγοριοποιήσαμε σύμφωνα με την ταξινόμηση του Orton (1980)(βλέπε [2]).

Κατόπιν, ακολούθησε στατιστική επεξεργασία όλων των δεδομένων που είχαμε εντοπίσει από τη μελέτη των γραπτών. Με αυτό τον τρόπο προέκυψαν τα ποσοστά επιτυχίας του μαθήματος, τα ποσοστά επιτυχίας στο κάθε θέμα καθώς και τα ποσοστά που μας δείχνουν πόσοι από τους φοιτητές πράττουν το ίδιο λάθος.

Σκοπός αυτής της έρευνας δεν ήταν μόνο ο εντοπισμός των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά την επίλυση ενός ζητήματος του Απειροστικού Λογισμού και των λαθών που διαπράττουν, αλλά μας ενδιέφερε και η γνώμη των ίδιων των φοιτητών για τις δυσκολίες που έχουν στην αντιμετώπιση των θεμάτων, αλλά και για τα λάθη τους. Έτσι, επιλέξαμε τρεις φοιτητές (δύο φοιτητές και μια φοιτήτρια) που συμμετείχαν στις εξετάσεις του Σεπτεμβρίου του 2003 και συζητήσαμε μαζί τους αφ’ ενός τους τρόπους που αντιμετώπισαν τα συγκεκριμένα θέματα, αλλά και γενικότερες αντιλήψεις σχετικά με το μάθημα.

Και με τις συνεντεύξεις των φοιτητών επιβεβαιώσαμε τα συμπεράσματά μας από την ανάλυση των γραπτών για τις δυσκολίες που συναντούν οι φοιτητές στον κατανόηση Απειροστικό Λογισμό. Παρατηρήσαμε δυσκολίες που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία μας, όπως ο χειρισμός των εννοιών του ορίου και της συνέχειας, λόγω της μη κατανόησης των ορισμών τους, η μη αυστηρή και πλήρη διατύπωση των ισχυρισμών τους, η δυσκολία τεκμηρίωσης και απόδειξης και άλλα.Επίσης, παρατηρήσαμε ότι δεν κατανοούν πλήρως τις εκφωνήσεις θεμάτων, όσο αφορά τη διάκριση δεδομένων και ζητούμενων Παράλληλα, προέκυψαν και γενικότερα συμπεράσματα, σχετικά με την εικόνα και τις αντιλήψεις που έχουν για το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού. Για παράδειγμα, επισημαίνουν το «χάσμα» που υπάρχει ανάμεσα στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, διακρίνουν μια σχετική ευκολία στην κατανόηση των εννοιών που εμφανίζονται στην εισαγωγή του μαθήματος, αλλά ταυτόχρονα επισημαίνουν και το μη τακτικό τους διάβασμα και την μη καθημερινή τους ενασχόληση με το μάθημα. Όλα τα παραπάνω εμφανίζονται στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας, όπου υπάρχουν αντίστοιχα, οι συνεντεύξεις των φοιτητών καθώς και γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτές. Σε αυτά τα κεφάλαια παρουσιάζονται με λεπτομέρειες όλα όσα συζητήσαμε με τους φοιτητές, καθώς επίσης και όσα προέκυψαν από την έρευνα και μελέτη των γραπτών.

Συνοπτικά, η εργασία αυτή αποτελείται από πέντε κεφάλαια, όπου στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια ιστορική αναδρομή της πορείας και εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού, στηριζόμενοι στα συγγράμματα του καθηγητής κ. Σ. Νεγρεπόντη, για τα μεταπτυχιακά μαθήματα Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών και Πλάτωνας και Μαθηματικά και στο σύγγραμμα του αναπληρωτή καθηγητής κ. Ε. Γιαννακούλια, Σύντομη Ιστορική περίληψη της εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού, για το μεταπτυχιακό μάθημα Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού, καθώς και στα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου Απειροστικός Λογισμός Ι.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζουμε δυσκολίες που συναντούν οι φοιτητές στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού, οι οποίες αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε την έρευνά μας αναφερόμενοι στα γραπτά φοιτητών που συμμετείχαν στη γραπτή εξέταση τον Σεπτέμβριο του 2003 και αναφέρουμε τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής σχετικά με τα λάθη και τις δυσκολίες των φοιτητών στην αντιμετώπιση των θεμάτων αυτών.

Το τέταρτο κεφάλαιο και πέμπτο κεφάλαιο, όπως αναφέραμε, περιέχουν την οργάνωση των συνεντεύξεων που πήραμε από φοιτητές και τα γενικά συμπεράσματα, που προέκυψαν από τη μελέτη των γραπτών, αλλά και τις συνεντεύξεις των φοιτητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Είναι ευρέως γνωστό ότι οι θεμελιώδεις έννοιες του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού εμφανίστηκαν στη μαθηματική σκηνή πολύ νωρίς, αλλά η ανάπτυξή τους ήταν πολύ αργή. Η χρονική περίοδος από τον $6^{ο}$ π.Χ. αιώνα ως τον $3^{ο}$ π.Χ. αιώνα, αποτελεί το διάστημα όπου ο Απειροστικός Λογισμός βρίσκεται σε «λανθάνουσα» μορφή και ανιχνεύεται από τα επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων και μαθηματικών, τα οποία αποτελούν την αφετηρία για την ανάπτυξή του.

Ο $6^{ος}$ αιώνας υπήρξε μια καμπή για την ανθρωπότητα. Εως τότε ο άνθρωπος προσπαθούσε να εντοπίσει μια κανονικότητα στον κόσμο που τον περιέβαλλε με σκοπό να κατανοήσει την προέλευσή του. Έτσι, έδινε διάφορες μυθολογικές εξηγήσεις, που όμως με το χρόνο συγκρούονταν με τη λογική, οπότε άρχισε να εμφανίζεται η επιστημονική σκέψη.

Ο Πυθαγόρας, ίσως ακριβέστερα η Πυθαγόρεια Σχολή, αρχικά πίστευε ότι τα πάντα περιγράφονται από τους φυσικούς αριθμούς. Θεωρούσαν ότι όλα τα αντικείμενα είναι φτιαγμένα από σημεία ή μονάδες ύπαρξης. Για αυτούς μια γραμμή αποτελείται από μικρές σφαίρες (μονάδες), δηλαδή από ορισμένο αριθμό σημείων. Με αυτή την έννοια θεωρούσαν ότι δυο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή έχουν κοινή μονάδα μέτρησης.

Προσπαθώντας, όμως, να λύσουν το πρόβλημα της κατασκευής ενός τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδό από δοθέν άλλο τετράγωνο πλευράς α, βρήκαν με την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος ότι η πλευρά α και η διαγώνιος δ είναι μεγέθη ασύμμετρα (δηλαδή ότι δεν έχουν κοινό μέτρο).

Η ανακάλυψη των αρρήτων και των ασύμμετρων αριθμών οδήγησε αρχικά σε κρίση στις τάξεις των Πυθαγορείων, ωστόσο ήταν οι πρώτοι που αργότερα προσέγγισαν την έννοια της ασυμμετρίας μέσω της μουσικής. Τα αρχαία όργανα είχαν χορδές καθ' όλα όμοιες, αλλά διαφορετικού μήκους. Για να προκληθεί μουσικής ήχος, χτυπούσαν δυο άνισες χορδές, έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι αρεστό(δίχορδο). Διάφορα ακουστικά πειράματα είτε από τον ίδιο τον Πυθαγόρα, είτε από άλλους, όπως τον Ίππασο, το Λάσο τον Ερμιονευς ή το Γλαύκο, φανερώνουν προσπάθεια για αναζήτηση της έννοιας της αναλογίας, όχι με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, αλλά με εμπειρικό, δηλαδή με τις αισθήσεις.

Έτσι, αναζητώντας ένα κοινό μέτρο για τη μουσική κλίμακα, οδηγήθηκαν στην άπειρη πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της αρμονίας. Ο Φιλόλαος, ήταν ο αρχαιότερος Πυθαγόρειος, μια γενιά νεότερος του Πλάτωνα, αναφέρει στο απόσπασμα 6, γραμμές 16-24 :

«ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ
δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι. ἔστι γὰρ
ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ
νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ
δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσωι μέσσας
καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ
δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἁρ-
μονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσιες, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία
ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις.»

Από το παραπάνω απόσπασμα προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3} \prec \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}, \ \frac{9}{8} \prec \frac{4}{3}$$
$$\frac{4}{3} = (\frac{9}{8})^2 \cdot \frac{256}{243}, \ \frac{256}{243} \prec \frac{9}{8}$$
$$\frac{9}{8} = (\frac{256}{243})^2 \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}}, \ \frac{3^{12}}{2^{19}} \prec \frac{256}{243}$$

Τα υπόλοιπα της ανθυφαίρεσης($\frac{4}{3}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$, $\frac{3^{12}}{2^{19}}$)είναι της μορφής $\frac{2^n}{3^m}$ ή $\frac{3^m}{2^n}$, δηλαδή είναι λόγοι της μορφής άρτιος - περιττός ή περιττός - άρτιος. Επομένως ποτέ δεν μπορούν να δώσουν λόγο $\frac{1}{1}$ και άρα η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Έτσι, λοιπόν, οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπήρχε κοινό μέτρο για την αρμονία. [14]

Ακολούθησαν και άλλες αποκαλύψεις που αποτέλεσαν αντικείμενο βαθύτερου φιλοσοφικού και μαθηματικού στοχασμού. Ο Πλάτωνας, στο διάλογο Θεαίτητο, αναφέρει ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος είχε αποδείξει το άρρητο των ριζών των φυσικών αριθμών (που δεν είναι τέλεια τετράγωνα) μέχρι το 17 (Θεαίτητος, 145c7-148e5), ενώ στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, που αποδίδεται στο Θεαίτητο, παρουσιάζεται πλήρης χαρακτηρισμός της ασυμμετρίας μεγεθών μέσω της διαδικασίας της ανθυφαίρεσης(προτάσεις Χ1-8).

Επιπλέον, στο διάλογο του Πλάτωνα, Μένων, 80d5-86c2 , παρουσιάζεται η ανάμνηση της διαμέτρου ενός τετραγώνου από έναν αγεωμέτρητο δούλο.Όλα τα βήματα που περιγράφει ο Μένων είναι οι ανισοτικές σχέσεις την ανθυφαίρεση του $\sqrt{2}$ και κατόπιν το κριτήριο λόγου. Στο παραπάνω χωρίο, προσπαθώντας ο Σωκράτης να πείσει το Μένων ότι η μάθηση δεν είναι κάτι καινούριο, αλλά αυτό που ονομάζουμε μάθηση είναι η ανάμνηση όσων ξέρουμε
(«οὐδὲν κωλύει □ν μόνον ἀναμνησθέντα–ὃ δὴ μάθησιν καλοῦσιν
ἄνθρωποι–τἆλλα πάντα αὐτὸν ἀνευρεῖν, ἐάν τις ἀνδρεῖος ᾖ
καὶ μὴ ἀποκάμνῃ ζητῶν· τὸ γὰρ ζητεῖν ἄρα καὶ τὸ μανθάνειν
ἀνάμνησις ὅλον ἐστίν. οὔκουν δεῖ πείθεσθαι τούτῳ τῷ
ἐριστικῷ λόγῳ· οὗτος μὲν γὰρ ἂν ἡμᾶς ἀργοὺς ποιήσειεν
καὶ ἔστιν τοῖς μαλακοῖς τῶν ἀνθρώπων ἡδὺς ἀκοῦσαι, ὅδε
δὲ ἐργατικούς τε καὶ ζητητικοὺς ποιεῖ· ᾧ ἐγὼ πιστεύων
ἀληθεῖ εἶναι ἐθέλω μετὰ σοῦ ζητεῖν ἀρετὴ ὅτι ἐστίν.», Μένων, 81d2-81e2) φωνάζει έναν δούλο για να του αποδείξει πως αν και ο δούλος δεν είχε διδαχθεί ποτέ γεωμετρία, με σωστές και επαναλαμβανόμενες ερωτήσεις, μπορεί να τον οδηγήσει στι σωστό αποτέλεσμα. Έτσι, το ερώτημα που τίθεται είναι πόση θα είναι η πλευρά τετραγώνου εμβαδού διπλάσιου από αρχικό με πλευρά α. Ο διάλογος καταλήγει στην κατασκευή πλευράς δ, τέτοιας ώστε $\delta^2 = 2\alpha^2$ και η οποία τελικά είναι ισοδύναμη της $\alpha/\delta_1 = \delta_1/\alpha_1$. [4]

Τελικά, γύρω στα 370 π.Χ., ο Εύδοξος (408-355 π.Χ. ;), μαθητής του Πλάτωνα και του Πυθαγόρειου Αρχύτα, έδωσε τη μεγαλειώδη λύση διατυπώνοντας τον ορισμό της αναλογίας, ανεξάρτητα από το αν τα μεγέθη που λαμβάνουν μέρος είναι σύμμετρα ή ασύμμετρα. Ο ορισμός αυτός έγινε δεκτός από την αρχαία Ελληνική μαθηματική κοινότητα και εκτίθεται στο Πέμπτο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη(είναι ο πέμπτος ορισμός). Αποτελεί κατ' ουσίαν τον ορισμό των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind, όπως τις γνωρίζουμε σήμερα.

Στον Εύδοξο οφείλεται και η επινόηση της μεθόδου της εξάντλησης, που είναι συνδεδεμένη περισσότερο ίσως με το όνομα του Αρχιμήδη (287-212 π. Χ). Με αυτή την παραγωγική μέθοδο, υπολογίζονταν γεωμετρικές ποσότητες (όγκοι, εμβαδά), οι οποίες όμως ήταν γνωστές εκ των προτέρων. Έτσι, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί (και ιδιαίτερα ο Αρχιμήδης) έφθαναν στη γνώση της ζητούμενης τιμής διαισθητικά, ώστε μετά να είναι σε θέση να εφαρμόσουν τη μέθοδο της εξάντλησης για να αποδείξουν το αποτέλεσμα που είχαν εικάσει.

Ο Εύδοξος, με τη μέθοδο της εξάντλησης, εκτός από τους υπολογισμούς του όγκου της τριγωνικής πυραμίδας και του όγκου του κυκλικού κώνου, επίσης απέδειξε ότι ο λόγος των όγκων δυο σφαιρών με ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα, είναι ίσος με $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3$ και ο λόγος των εμβαδών δυο κύκλων με ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα, είναι ίσος με το λόγο $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2$.

Εμείς, το μαθηματικό έργο του Ευδόξου το μαθαίνουμε από το Πέμπτο και Δωδέκατο Βιβλίο του Ευκλείδη, μιας και αυτούσιο το έργο του δεν έχει διασωθεί. Το Πέμπτο Βιβλίο, όπως προαναφέραμε, αφορά τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, ενώ το Δωδέκατο αναφέρεται στους υπολογισμούς εμβαδών και όγκων με τη βοήθεια της εξάντλησης.

Χρειάστηκε να περάσει περίπου ένας αιώνας από την εποχή που έζησε ο Ευδοξος, για να εμφανισθεί ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιους, ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας, και χωρίς αμφιβολία όλων των εποχών. Όλα τα έργα του διαπνέονται από μια εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψης, που συνδυάζεται με αυστηρότητα στις αποδείξεις και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών.

Οι πιο σημαντικές συνεισφορές του Αρχιμήδη στα μαθηματικά ανήκουν στον τομέα που σήμερα αποκαλούμε «ολοκληρωτικό λογισμό», ο οποίος ασχολείται με θεωρήματα για τα εμβαδά επιπέδων σχημάτων και όγκους στερεών σωμάτων. Στο βιβλίο του «Κύκλου μέτρησις», παρέχονται προσεγγίσεις για το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Επιπλέον, σε ένα άλλο βιβλίο του, «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», υπολογίζει το εμβαδό της επιφάνειας της σφαίρας και τον όγκο της σφαίρας.

Ένα από τα πιο ωραία και χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης είναι ο υπολογισμός του εμβαδού του παραβολικού χωρίου στην εργασία του «Τετραγωνισμός Παραβολής», όπου σε μια σύγχρονη διατύπωση υπολογίζει το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$, τον άξονα των x και π.χ. την ευθεία $x = 1$, δηλαδή υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$. Ο Αρχιμήδης έδωσε δυο αποδείξεις, στη μια εγγράφοντας τρίγωνα και στην άλλη εγγράφοντας ορθογώνια(μέθοδο που και σήμερα γενικά ακολουθούμε στην ολοκλήρωση με τα αθροίσματα Riemann). (Αργότερα, στην «Προς Ερατοσθένην έφοδος», έδωσε και τρίτη διαισθητική απόδειξη).

Με την χρησιμοποίηση της μεθόδου της εξάντλησης και με έξυπνα τεχνάσματα, ο Αρχιμήδης, απέφευγε την χρήση του ορίου και του απειροστού. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούσε διάφορες «μεθόδους μηχανικής», για να καταλήξει στην πιθανή λύση του προβλήματος και στη συνέχεια το έλυνε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης.

Μετά την παρακμή του αρχαίου πολιτισμού, το επίκεντρο της μαθηματικής έρευνας μετατοπίστηκε στις Αραβικές χώρες. Από τον 8^{ο} αιώνα μ.Χ., η ελληνική γνώση περνάει στα χέρια των Αράβων. Οι Άραβες του 9^{ου} και 10^{ου} μ.Χ. αιώνα ήταν μεγάλοι μαθηματικοί και ικανοί μεταφραστές. Έτσι, μεταφράζουν κείμενα των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλωνίου, Διόφαντου. Τα μαθηματικά ανθίζουν τον12^{ο} και 13^{ο} αιώνα.

Τον 16^{ο} αιώνα τα σύμβολα «+» και «-» εισάγονται για πρώτη φορά και άρχίζουν πλέον να αναγνωρίζονται τα πλεονεκτήματα του δεκαδικού συστήματος.Στη δεκαετία του 1630, Καρτέσιος και Fermat ανακαλύπτουν την αναλυτική γεωμετρία. Αναλυτική γεωμετρία σήμαινε ότι οι καμπύλες μπορούσαν να παρασταθούν με εξισώσεις, σήμαινε όμως και το αντίστροφο, ότι κάθε εξίσωση προσδιόριζε μια καμπύλη. Το πρόβλημα της εφαπτομένης μιας καμπύλης, τα προβλήματα μέγιστων και ελάχιστων τιμών, παίρνουν εξέχουσα θέση στη μαθηματική σκηνή. Για παράδειγμα όταν ένα βλήμα βάλλεται από ένα κανόνι, η απόσταση που θα διανύσει οριζοντίως εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζει το κανόνι με το έδαφος. Άρα, προέκυπτε το πρόβλημα της εύρεσης γωνίας που θα έδινε το μέγιστο βεληνεκές.

Αυτή η διαδικασία άνοιξε το δρόμο για μια ανεξάρτητη ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού από τους Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), που καταλήγει στις διαδικασίες της ολοκλήρωσης και της διαφόρισης. Το 1671 ο Newton γράφει μια μονογραφία με τίτλο «Methodus fluxicnum et serierum imfinitarum», που δημοσιεύτηκε το 1736. Σε αυτή θεωρεί ότι οι μεταβλητές ποσότητες γεννιόνται από συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων και όχι από αθροίσματα άπειρου πλήθους απειροστών σημείων. Έτσι, η γραμμή γεννιέται από μια ρευστή ποσότητα χ, την οποία ονόμασε «ρέον» (fluent). Την ταχύτητα με την οποία η γραμμή αυτή γεννιέται την ονόμασε «ροή του ρέοντος» και την συμβόλισε με $\dot{x}$. Το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται ένα ρέον σε απείρως μικρό χρόνο, το ονόμασε στιγμή του ρέοντος και το συμβόλισε $\dot{x}0$. Με τον τρόπο αυτό δημιούργησε μια μέθοδος λύσης προβλημάτων ανάλυσης που είναι πολύ κοντά σε αυτήν που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Ήταν όχι πριν από την αρχή του δέκατου ένατου αιώνα, όταν ο Cauchy ανέπτυξε ένα εργαλείο θεωρητικής βάσης για το λογισμό χρησιμοποιώντας την έννοια του ορίου, και η ολοκλήρωση αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας τις συνεχείς συναρτήσεις. Στο υπόλοιπο του δέκατου ένατου αιώνα, η αριθμητικοποίηση της ανάλυσης πραγματοποιήθηκε μέσω των επίσημων ορισμών των τομών Dedekind της πραγματικής ευθείας ή τις ακολουθίες Cauchy, και των επίσημων ορισμών των ορίων και της συνέχειας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ε-δ σε μια καθαρά αριθμητική μορφή από τον Weierstrass. Αυτό, οδήγησε τον Boyer (1939) για να τονίσει : «ο σαφής συμβολισμός του Weierstrass πρέπει να εκτιμηθεί ως αποτελεσματικός τρόπος ανεξαρτοποίησης από το λογισμό με τα απειροστά»

Εν τω μεταξύ, γύρω στο 1893 ο Stolz εισήγαγε την έννοια της παραγώγου για τις συναρτήσεις διάφορων πραγματικών μεταβλητών και μόνο το 1911 η ανάπτυξη της συναρτησιακής ανάλυσης οδήγησε τον Frechet να εισάγει την έννοια της διαφορησιμότητας, όπως την χρησιμοποιούμε σήμερα, συνδεδεμένη με την έννοια της εφαπτομένης.

Από τη γέννησή του, λοιπόν, ο απειροστικός λογισμός έχει διεγείρει αντιπαραθέσεις και συγκρούσεις. Από τη μια υπάρχει ο ενθουσιασμός αυτών, που όπως ο Marquis de l' Hospital, κατέπληξε συνδέοντας την αλγεβροποίηση του

λογισμού, και από την άλλη είναι αυτοί που κρίνουν ότι τα απειροστά είναι όντα χωρίς ρόλους, μεταφέρουν παράδοξα και οι χειρισμοί τους είναι βασισμένοι σε αμφίβολες πρακτικές.

Δομώντας τον διαφορικό λογισμό γύρω από την έννοια του ορίου, οδηγηθήκαμε στην προοδευτική πτώση των απειροστών και τα ίχνη τους αντικαταστάθηκαν από τις μερικές παραγώγους, που καθορίζονται από την άποψη της έννοιας του ορίου.

Ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός εισήχθη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην αρχή του αιώνα σε πολλές χώρες και το 1913 η επιτροπή ICMI (International Commission for Mathematical Instruction) οργάνωσε μια μελέτη του αντικειμένου που δημοσιεύτηκε από το περιοδικό 'Enseignement Mathematique' το επόμενο έτος. Ένας γενικός δημοσιογράφος έγραψε : "Η επιστημονική βιβλιογραφία, η ίδια, δεν έχει κάνει σαφές τους διαφορετικούς ορισμούς του διαφορικού". Τελικά, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο διαφορικός λογισμός βασίστηκε στην έννοια της παραγώγου, ορίστηκε ως ένα όριο ενός πηλίκου και συνδέθηκε με τη γεωμετρική εικόνα της εφαπτομένης, ως μια οριακή θέση τέμνουσας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΜΕ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2.1 Δυσκολίες με τους ορισμούς εννοιών

Σύμφωνα με τον Sholomo Vinner [17], ο ορισμός δημιουργεί ένα σοβαρό πρόβλημα στη μάθηση των μαθηματικών. Αντιπροσωπεύει ίσως, περισσότερο από οτιδήποτε άλλο την σύγκρουση ανάμεσα στη δομή των μαθηματικών, όπως την αντιλαμβάνονται οι επαγγελματίες μαθηματικοί, και στις γνωστικές διαδικασίες της κατανόησης μιας έννοιας. Οι περισσότεροι συμφωνούμε ότι τα μαθηματικά είναι μια παραγωγική θεωρία, η οποία ξεκινά με αρχικές έννοιες και αξιώματα. Με βάση τις αρχικές έννοιες ορίζονται και οι υπόλοιπες. Τα θεωρήματα, που δεν είναι αξιώματα, αποδεικνύονται από αυτά με τη βοήθεια συμπερασμάτων που προκύπτουν άμεσα. Μπορεί ο τρόπος αυτός να μην αντανακλά όλη τη διαδικασία το πώς δημιουργούνται τα μαθηματικά, ωστόσο αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στα σχολικά και πανεπιστημιακά εγχειρίδια. Βέβαια, δεν ξεκινάμε πάντα από αξιώματα, αλλά πολλές φορές η αφετηρία μας είναι κάποιες ήδη γνωστές έννοιες και ήδη γνωστά θεωρήματα και οδεύουμε στον ορισμό νέων εννοιών και θεωρημάτων. Επομένως, οι δάσκαλοι των μαθηματικών μπορούν να διαμορφώσουν στις τάξεις τους μια ακολουθία ορισμών, θεωρημάτων και αποδείξεων ως σκελετό για τα μαθήματά τους.

Πολλοί επιστήμονες, ύστερα από τη μελέτη σχολικών και πανεπιστημιακών εγχειριδίων, έχουν συμφωνήσει στις παρακάτω πέντε παραδοχές για τη σημασία και τον τρόπο που παρουσιάζονται οι ορισμοί :

1. Οι έννοιες κατακτώνται κυρίως μέσω των ορισμών τους.
2. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς για να λύσουν προβλήματα και να αποδείξουν θεωρήματα όποτε αυτό είναι απαραίτητο από μαθηματική άποψη.
3. Οι ορισμοί πρέπει να είναι ελάχιστοι.(Δηλαδή, δεν πρέπει να περιέχουν μέρη που μπορούν να προκύψουν από άλλα τμήματα των ορισμών. Λόγου χάρη, αν κανείς αποφασίζει να ορίσει ένα ορθογώνιο στην Ευκλείδεια γεωμετρία μέσω των γωνιών του, είναι προτιμότερο να το ορίσει ως τετράπλευρο με 3 ορθές γωνίες και όχι ως τετράπλευρο με 4 ορθές. Και αυτό γιατί στην Ευκλείδεια γεωμετρία αν ένα τετράπλευρο έχει 3 ορθές γωνίες, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η τέταρτη γωνία του είναι επίσης ορθή.)
4. Είναι επιθυμητό οι ορισμοί να είναι κομψοί. Λόγου χάρη, μερικοί μαθηματικοί θεωρούν ότι οι ο ορισμός της απόλυτης τιμής ως: $|x| = \sqrt{(x^2)}$ είναι πιο κομψός από τον ορισμό της ως: $|x| = -x$,αν $x \geq 0$ και $|x| = -x$,αν $\chi \prec 0$. Επίσης, μερικοί μαθηματικοί θεωρούν ότι ο ορισμός του πρώτου αριθμού ως αριθμού που έχει ακριβώς δύο διαφορετικούς διαιρέτες είναι πιο κομψός από τον ορισμό του ως αριθμού μεγαλύτερου από τη μονάδα και διαιρετού μόνο από το 1 και τον εαυτό του.
5. Οι ορισμοί είναι αυθαίρετοι: Τους ορισμούς τους διαμορφώνει ο άνθρωπος. Ορισμός στα μαθηματικά είναι η απόδοση ενός ονόματος(Λόγου χάρη, κατά τον ορισμό ενός τραπεζίου, μπορεί κανείς να το ορίσει ως τετράπλευρο που έχει τουλάχιστον ένα ζεύγος απέναντι πλευρών οι οποίες είναι παράλληλες. Αφ' ετέρου,

μπορεί να το ορίσει, αν επιθυμεί, ως τετράπλευρο που έχει τουλάχιστον ένα ζεύγος απέναντι πλευρών οι οποίες είναι παράλληλες. Αν επιλέξουμε τον πρώτο ορισμό, ένα παραλληλόγραμμο είναι επίσης τραπέζιο. Αν επιλέξουμε το δεύτερο, δεν είναι. Αν η ιδέα ότι οι ορισμοί είναι αυθαίρετοι γίνει κατανοητή, τότε το παραπάνω γεγονός δε θα προκαλέσει σύγχυση.)

Οι παραπάνω πέντε παραδοχές δεν αντανακλούν απαραιτήτως όλες τις πτυχές των ορισμών στα ανώτερα μαθηματικά. Μια γρήγορη ματιά στην πλειοψηφία των σχολικών εγχειριδίων γυμνασίου και λυκείου, καταδεικνύει ότι οι ορισμοί διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην παρουσίαση της ύλης των μαθημάτων και για αυτό πρέπει να μας ενδιαφέρει όχι μόνο το πώς οι μαθητές αναμένονται να κατακτήσουν τις μαθηματικές έννοιες, αλλά και ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος για να τις κατακτήσουν. Δηλαδή, ναι μεν μια μαθηματική έννοια κατακτείται μέσω του ορισμού της, αλλά πρέπει να επιδιώκουμε να εντοπίσουμε ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος να παρουσιάσουμε αυτόν τον ορισμό, έτσι ώστε να γίνει κατανοητός από τα παιδιά. Από έρευνα που πραγματοποίησε ο ίδιος, διαπίστωσε ότι η πλειοψηφία φοιτητών αποφεύγει την χρήση ορισμών.

ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ

Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε, είναι ένα ερέθισμα στη μνήμη μας. Κάτι προκαλείται από το όνομα της έννοιας στη μνήμη μας. Συνήθως, δεν πρόκειται για τον ορισμό της έννοιας, ακόμη και στην περίπτωση που η έννοια αυτή έχει ορισμό. Είναι αυτό που αποκαλούμε «εικόνα έννοιας»(concept image) (Tall & Vinner, 1981, Vinner, 1983) και άλλοι το αποκαλούν (Davis, 1984) «πλαίσιο έννοιας»(concept frame).

Η εικόνα έννοιας είναι κάτι μη λεκτικό που συνδέεται στο μυαλό μας με το όνομα της έννοιας. Μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας στην περίπτωση που η έννοια έχει οπτικές αναπαραστάσεις. Μπορεί επίσης, να είναι μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Οι οπτικές αναπαραστάσεις, οι νοητικές εικόνες, οι εντυπώσεις και οι εμπειρίες που συνδέονται που συνδέονται με το όνομα της έννοιας μπορούν να μεταφραστούν σε λεκτικές μορφές. Αλλά είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι αυτές οι λεκτικές μορφές δεν είναι το πρώτο πράγμα που προκλήθηκε στη μνήμη μας. Δημιουργήθηκαν μόνο σε ένα μεταγενέστερο στάδιο.

Λόγου χάρη, όταν ακούμε τη λέξη «τραπέζι» η εικόνα ενός συγκεκριμένου τραπεζιού μπορεί να προκληθεί στο μυαλό μας. Οι εμπειρίες του να καθόμαστε σε ένα τραπέζι, να τρώμε σε ένα τραπέζι κλπ, μπορούν επίσης να προκληθούν. Μπορούμε να θυμηθούμε ότι πολλά τραπέζια είναι ξύλινα, τα περισσότερα έχουν τέσσερα πόδια, συνήθως δεν ξαπλώνουμε σε ένα τραπέζι, αλλά μπορεί να καθίσουμε πάνω σε ένα, πράγμα που μπορεί να θεωρηθεί από κάποιους ως αγενής συμπεριφορά. Από την άλλη, όταν ακούμε τη λέξη συνάρτηση, μπορούμε να φέρουμε στη μνήμη μας την έκφραση «y = f(x)», ή να απεικονίσουμε νοερά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ή να σκεφτούμε τις συγκεκριμένες συναρτήσεις όπως: y = x^2 ή y = sinx ή y = lnx, κτλ.

Από αυτά που έχουμε ως τώρα αναφέρει, είναι σαφές ότι είναι μόνο δυνατό να μιλήσουμε για την εικόνα μιας έννοιας πάντα σε σχέση με ένα συγκεκριμένο άτομο. Επιπροσθέτως, το ίδιο άτομο μπορεί να αντιδράσει διαφορετικά σε ένα συγκεκριμένο όρο(όνομα μιας έννοιας) σε διαφορετικές περιστάσεις.

ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

Σύμφωνα με τον Vinner, η κατάκτηση μιας έννοιας σημαίνει το σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας για αυτήν. Η αποστήθιση του ορισμού μιας έννοιας δεν εγγυάται την κατανόηση της έννοιας. Πρέπει να αποδοθεί ένα ορισμένο νόημα στις λέξεις. Το να γνωρίζουμε για παράδειγμα, ότι το δυναμοσύνολο ενός δεδομένου συνόλου είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου, δε σημαίνει τίποτα, εκτός αν κάποιος μπορεί να κατασκευάσει μερικά δυναμοσύνολα δεδομένων συνόλων. Ως εκ τούτου, η εικόνα έννοιας του δυναμοσυνόλου ίσως συμπεριλαμβάνει μνήμες κατασκευής κάποιων δυναμοσυνόλων.

Ωστόσο, οι περισσότερες έννοιες στην καθημερινή ζωή, όπως το σπίτι, το πορτοκάλι, η γάτα, κτλ αποκτώνται χωρίς οποιαδήποτε συμμετοχή ορισμών. Από την άλλη, μερικές έννοιες, ακόμη και έννοιες της καθημερινής μας ζωής, μπορεί να εισαχθούν μέσω ορισμών. Η λέξη «δάσος» μπορεί να εξηγηθεί σε ένα παιδί με το να πούμε «πολλά, πολλά δέντρα μαζί»(ο ορισμός του λεξικού της Merriam Webster «μια μεγάλη παχιά συστάδα δέντρων και θάμνων», δεν είναι τόσο κατάλληλος για ένα μικρό παιδί). Ορισμοί όπως αυτός βοηθούν να σχηματιστεί μια εικόνα έννοιας. Αλλά τη στιγμή κατά την οποία η εικόνα σχηματίζεται, ο ορισμός καθίσταται αναλώσιμος. Θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμα θα ξεχαστεί κατά το χειρισμό των προτάσεων που σχετίζονται με την έννοια. Έτσι, για παράδειγμα, όταν ένα μικρό παιδί βρεθεί σε ένα δάσος και γνωρίζει τον ορισμό του, δε θα χρειαστεί να τον επαναφέρει στη μνήμη του για να καταλάβει ότι βρίσκεται εκεί. Κατά συνέπεια, σε μερικές έννοιες της καθημερινής ζωής μας, ναι μεν οι ορισμοί μπορεί να χρειάζονται για την κατανόησή της, ωστόσο αυτό δε σημαίνει ότι κάθε φορά που αντιμετωπίζουμε αυτή την έννοια, επαναφέρουμε τον ορισμό της στη μνήμη μας. Μπορούμε χαρακτηριστικά να αναφέρουμε τη μεταφορά : «από τη στιγμή που η οικοδόμηση ενός κτιρίου έχει αποπερατωθεί, η σκαλωσιά απομακρύνεται».

Αντιθέτως, στα τεχνικά πλαίσια, δηλαδή στα επιστημονικά πλαίσια, οι ορισμοί μπορεί να έχουν εξαιρετικά σημαντικούς ρόλους. Όχι μόνο βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας έννοιας, αλλά πολύ συχνά διαδραματίζουν έναν κρίσιμο ρόλο στους γνωστικούς στόχους. Έχουν τη δυνατότητα της διάσωσής μας από πολλούς κινδύνους που ελλοχεύουν από την εικόνα έννοιας. Για παράδειγμα, αν μας ζητηθεί να βρούμε τη μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα και εμείς φέρουμε στη μνήμη μας μια γραφική παράσταση που αντιστοιχεί σε ένα τοπικό μέγιστο και προσπαθήσουμε να παραγωγίσουμε τη δεδομένη συνάρτηση και να βρούμε το σημείο μηδενισμού της παραγώγου της, τότε ο ρητός ορισμός της μέγιστης τιμής σε ένα κλειστό διάστημα μπορεί να μας βοηθήσει να θεωρήσουμε άλλες δυνατότητες διαφορετικές από τα τοπικά μέγιστα. Μερικές φορές, αυτό μπορεί να αποτρέψει λάθη. Το να μη συμβουλευτούμε τον ορισμό στην παραπάνω περίπτωση, μπορεί να προκαλέσει προσκόλληση στην τεχνική της παραγώγισης που σχετίζεται με την έννοια της μέγιστης τιμής στο νου πολλών μαθητών.

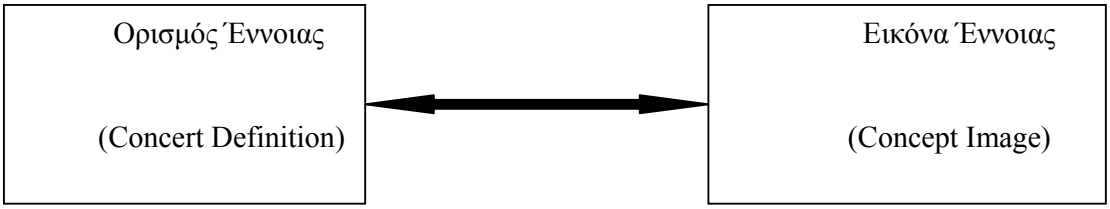
Κατά συνέπεια, τα τεχνικά πλαίσια επιβάλλουν στους μαθητές κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που είναι τυπικές στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Ο ρόλος του ορισμού, λοιπόν, είναι εντελώς διαφορετικός στα πλαίσια της καθημερινής ζωής μας από ότι είναι στα τεχνικά πλαίσια. Έτσι, μπορεί στην πρώτη περίπτωση η εκμάθηση και η κατανόηση ενός ορισμού να μην έχει καμία σημασία για την κατανόηση της δεδομένης έννοιας, αλλά κάτι τέτοιο δε συνεπάγεται και για τις μαθηματικούς ορισμούς και κατά συνέπεια για τις μαθηματικές έννοιες.

ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

Προκειμένου να παρουσιάσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στον ορισμό μιας έννοιας και στην εικόνα της έννοιας, θα υποθέσουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική μας δομή(όπως στον Vinner, 1983). Το ένα κελί είναι για τους ορισμούς έννοιας και το άλλο για την εικόνα έννοιας. Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά(το κελί της εικόνας έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με έναν άνευ νοήματος τρόπο). Μπορεί επίσης, να υπάρξει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αν και μπορούν να διαμορφωθούν ανεξάρτητα. Ένας μαθητής μπορεί να διαθέτει μια εικόνα έννοιας για μια έννοια Αργότερα, ο καθηγητής των μαθηματικών μπορεί να ορίσει την ίδια έννοια με έναν τρόπο διαφορετικό από αυτόν που έχει ο μαθητής στο μυαλό του. Ως αποτέλεσμα αυτού, τρία σενάρια ενδέχεται να εμφανιστούν:

1. Η εικόνα έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και καινούρια στοιχεία που προέρχονται από τον ορισμό(αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή).
2. Η εικόνα έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη. Το κελί του ορισμού θα περιέχει τον ορισμό του δασκάλου για λίγο, αλλά αυτός ο ορισμός θα ξεχαστεί ή θα διαστρεβλωθεί μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση ο τυπικός ορισμός δεν έχει αφομοιωθεί.
3. Και τα δύο κελιά θα παραμείνουν αμετάβλητα. Τη στιγμή κατά την οποία ο μαθητής καλείται να ορίσει την έννοια, θα επαναλάβει τον ορισμό του δασκάλου του, αλλά σε κάθε άλλη περίπτωση θα σκεφτεί την εικόνα που είχε αρχικά στο μυαλό του.

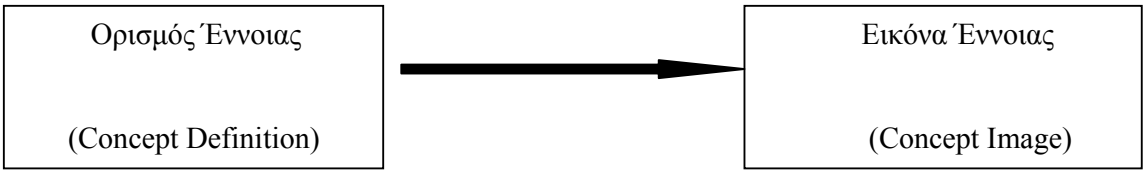
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μία έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας έννοιας είναι αρχικά κενό. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία. Εντούτοις, αυτό δεν αντανακλά απαραιτήτως όλες τις πτυχές του ορισμού της έννοιας. Σχηματικά, μπορούμε να αποδώσουμε την παραπάνω διαδικασία ως εξής:



Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας και ορισμού της έννοιας

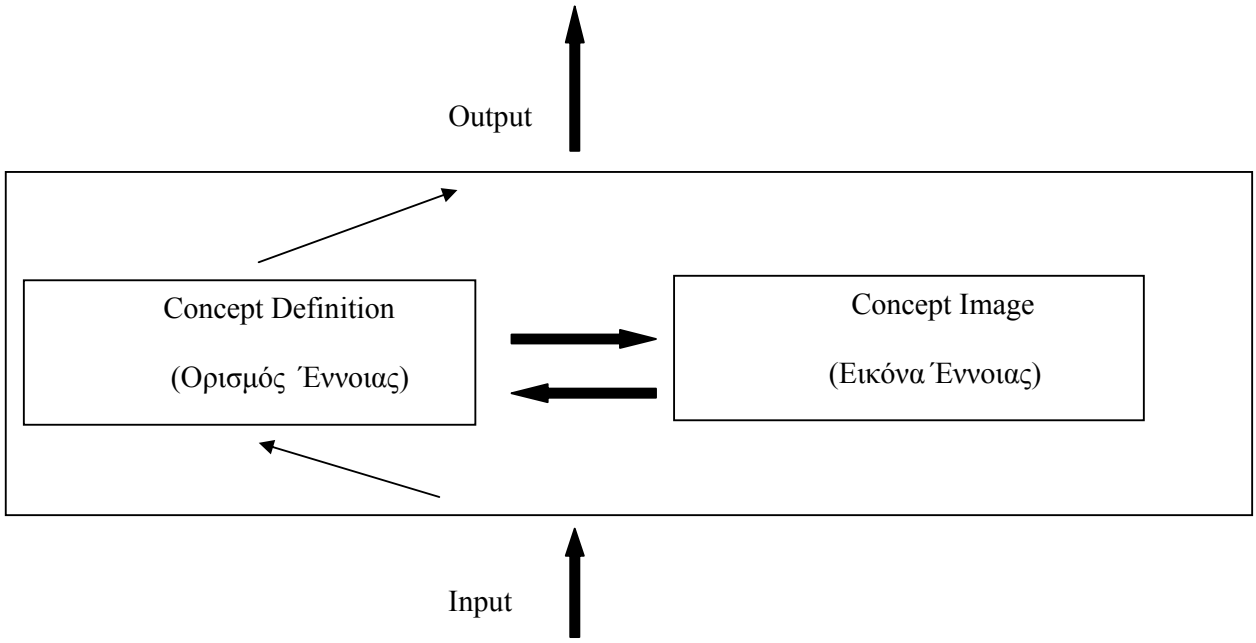
Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας. Ωστόσο, πολλοί δάσκαλοι της δευτεροβάθμιας και της

τριτοβάθμιας εκπαίδευσης αναμένουν μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό μιας έννοιας, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



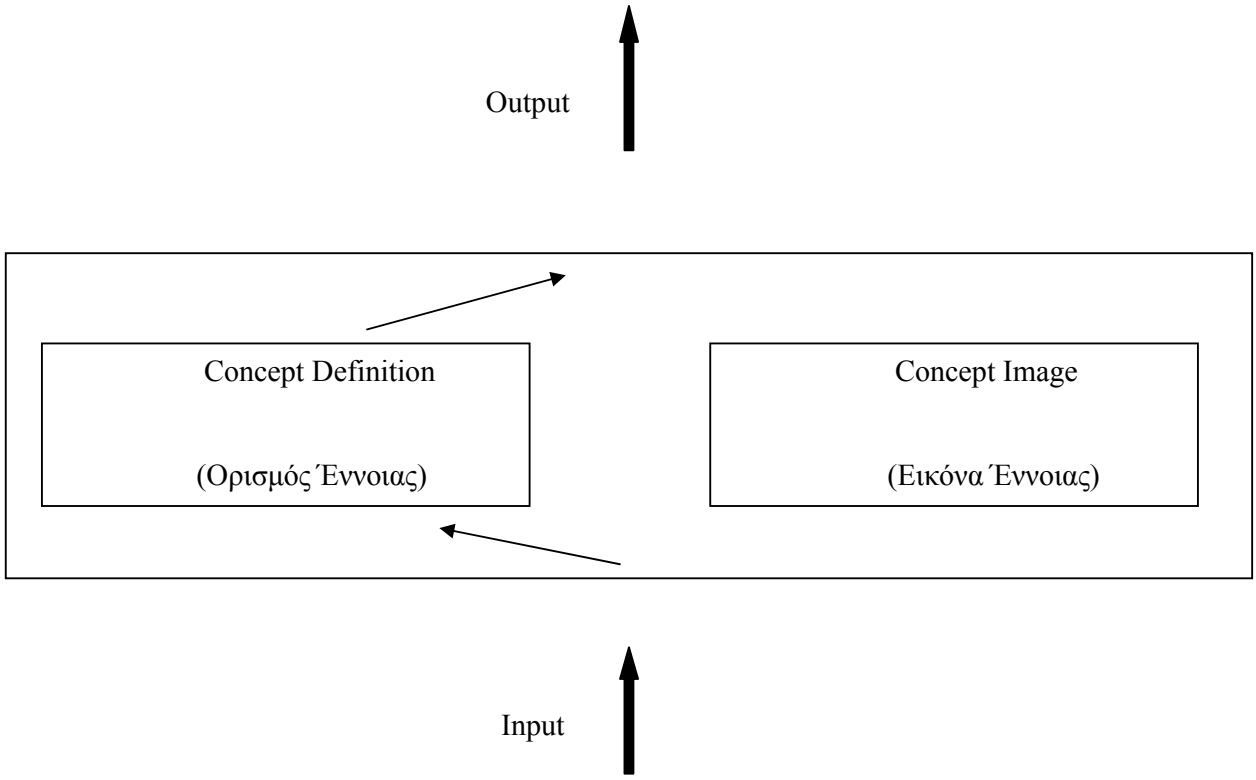
Σχήμα 2: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

Εκτός από τη διαδικασία του σχηματισμού έννοιας υπάρχουν επίσης οι διαδικασίες της επίλυσης προβλήματος. Όταν μια γνωστική εργασία ανατίθεται σε ένα μαθητή, τα κελιά της εικόνας έννοιας και ορισμού πρέπει να ενεργοποιηθούν. Πάλι όμως, πολλοί δάσκαλοι στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν ότι οι νοητικές διαδικασίες που μετέχουν στην εκτέλεση μιας δεδομένης νοητικής εργασίας θα πρέπει να εκφράζονται, σχηματικά, με ένα από τα τρία σχήματα που ακολουθούν(τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού της έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία). Τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.



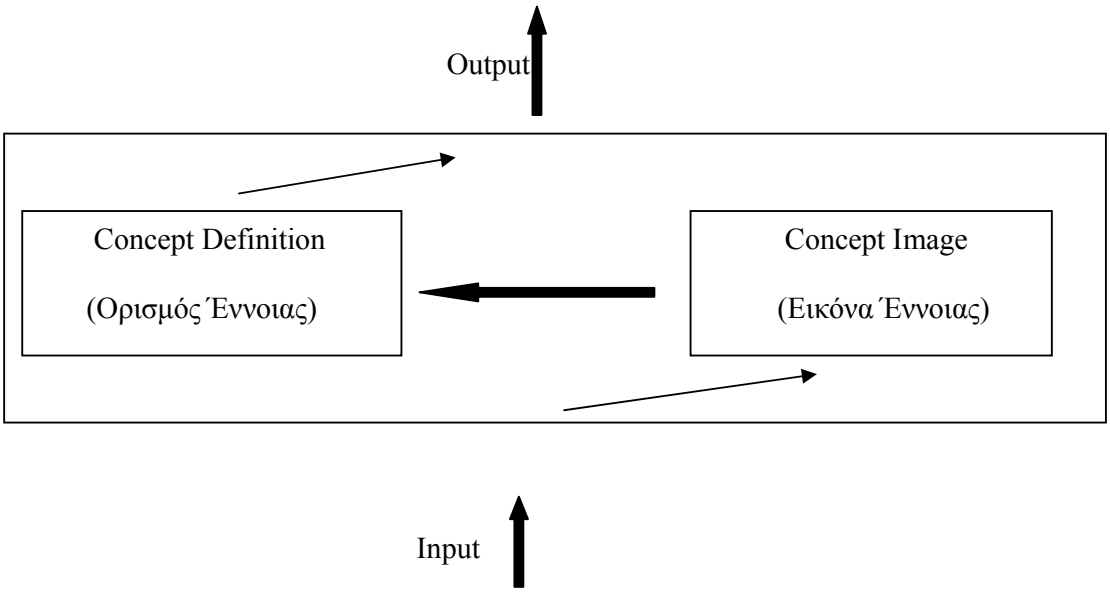
Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της έννοιας

Σε αυτή την περίπτωση, η οποία είναι και η ιδανική, οι μαθητές σκέφτονται τον ορισμό μιας έννοιας. Στη συνέχεια, περνούν στο κελί με την εικόνα ή τις εικόνες που έχουν για τη συγκεκριμένη έννοια και επανέρχονται στον ορισμό όσες φορές χρειάζεται, με μια διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ των δυο κελιών. Τελικά, προκύπτουν τα εξαγόμενα αφού για τελευταία φορά έχουν συμβουλευτεί τον ορισμό της έννοιας.



Σχήμα 4: Καθαρώς τυπική αφαίρεση

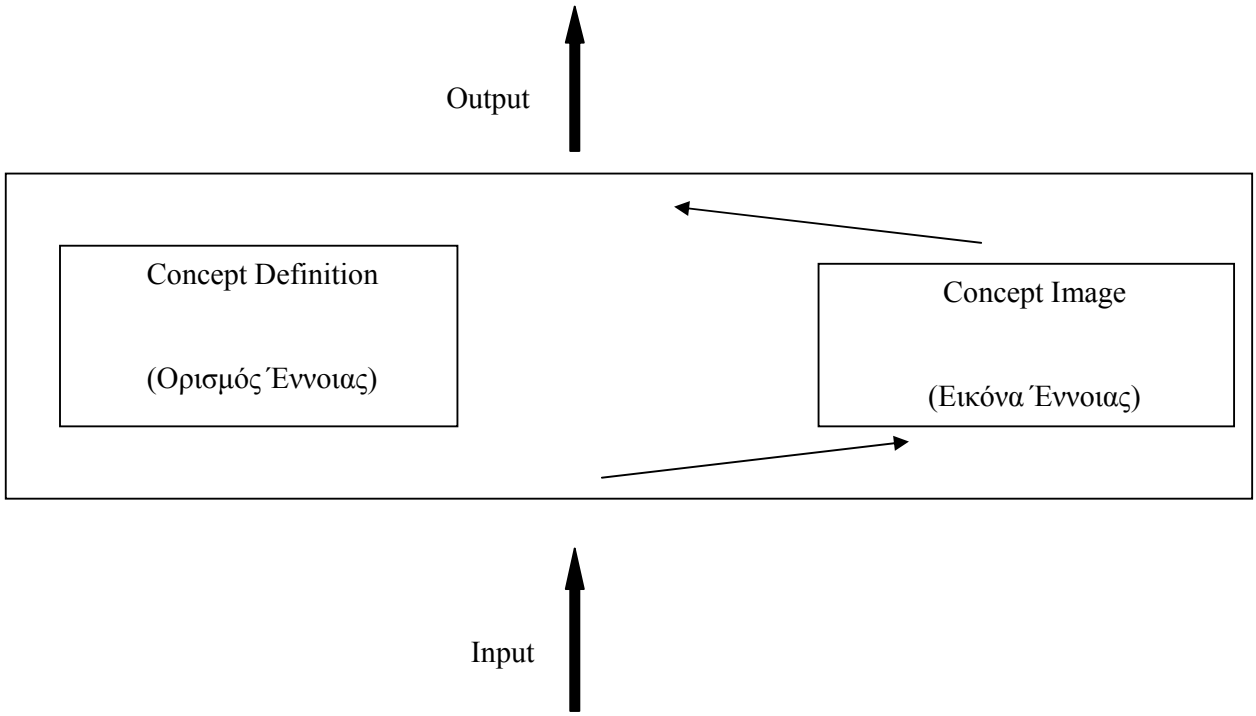
Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές δεν περνούν καθόλου από το κελί με της εικόνας, απλά χρησιμοποιούν μόνο τον τυπικό ορισμό. Πολλές φορές, μπορεί να γνωρίζουμε έναν ορισμό, μπορεί να τον κατανοούμε, αλλά έχουμε μια πληρέστερη γνώμη για το θέμα όταν εκμεταλλευόμαστε και το κελί με την εικόνα ή τις εικόνες μιας έννοιας.



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Τέλος, σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές ενεργοποιούν αρχικά το κελί της εικόνας της έννοιας. Στη συνέχεια περνούν στον τυπικό ορισμό και αμέσως μετά διεξάγουν τα συμπεράσματά τους. Όπως προαναφέραμε ο ορισμός μιας έννοιας μπορεί να μας προστατέψει από διάφορες παρανοήσεις που δημιουργούνται από την εικόνα μιας έννοιας. Ωστόσο για να έχουμε μια ολοκληρωμένη ιδέα το θεμιτό είναι να επιστρέψουμε στο κελί της εικόνας, να συμβουλευτούμε πάλι το κελί του ορισμού και να επαναλάβουμε όλη αυτή τη διαδικασία όσες φορές χρειάζεται για να ολοκληρώσουμε τις σκέψεις μας και να διεξάγουμε τα συμπεράσματά μας.

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των διαδικασιών που παρουσιάζονται με τα παραπάνω σχήματα είναι το εξής: Ανεξάρτητα από το πώς αντιδρά το σύστημα των συνειρμών μας, όταν μας τίθεται ένα πρόβλημα σε τεχνικό πλαίσιο, υποτίθεται ότι δεν πρέπει να σχηματίσουμε τη λύση πριν συμβουλευτούμε τον ορισμό της έννοιας. Αυτή φυσικά είναι η επιθυμητή διαδικασία(να «περνάμε» δηλαδή και από το κελί του ορισμού της έννοιας). Δυστυχώς στην πράξη δε συμβαίνει κάτι τέτοιο. Είναι δύσκολο να εκπαιδευτεί ένα γνωστικό σύστημα ώστε να δράσει ενάντια στην ίδια του τη φύση και να εξαναγκαστεί να συμβουλευτεί ορισμούς, είτε κατά το σχηματισμό της εικόνας έννοιας είτε όταν επεξεργάζεται ένα γνωστικό στόχο. Επομένως, ένα πιο κατάλληλο μοντέλο για τις διαδικασίες που συμβαίνουν στην πράξη είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 6: Διαισθητική απάντηση

Σε αυτή την περίπτωση, αν και το κελί ορισμού έννοιας δεν είναι κενό, δε το συμβουλευόμαστε κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος. Τα ηνία αναλαμβάνουν νοητικές συνήθειες της καθημερινής ζωής και ο αποκρινόμενος αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Δεν χρειάζεται να πούμε, ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η αναφορά στο κελί της εικόνας έννοιας θα είναι αρκετά επιτυχής. Το γεγονός αυτό δεν ενθαρρύνει τους μαθητές να στραφούν στο κελί του ορισμού έννοιας, αφού η διαίσθησή τους, τους οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

2.2 Δυσκολίες σχετικές με την απόδειξη

Σύμφωνα με διάφορες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί ([12], [13], [18]) η μαθηματική κοινότητα έχει εκφράσει την έντονη ανησυχία της για τις μαθηματικές δεξιότητες των φοιτητών. Μελέτη που διεκπεραιώθηκε στη μαθηματική κοινωνία του Λονδίνου το 1995, έδειξε ότι η έλλειψη τεχνικών ικανοτήτων καθώς και μια πολύ περιορισμένη αντίληψη για τη μαθηματική αυστηρότητα, χαρακτηρίζουν τους φοιτητές.

Οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τις διαδικασίες μιας τυπικής μαθηματικής αιτιολόγησης. Η δυσκολία στο να γράψουν τυπικά ή αυστηρά τους οδηγεί στην άρνηση μιας τέτοιας αντιμετώπισης. Συνήθως, επεκτείνουν τις σχολικές μαθηματικές πρακτικές τους και στα πανεπιστημιακά μαθήματα. Έτσι, κάνουν χρήση ενός θεωρήματος που το θεωρούν ότι είναι κάτι τόσο προφανές ή αληθινό και δεν χρειάζεται καμία απόδειξη, ή γιατί το θεωρούν περιττό, αφού οι ίδιοι είναι πεπεισμένοι ότι ισχύει.

Κάποιοι άλλοι, υποθέτουν στις αποδείξεις τους αυτό που είναι διαισθητικά προφανές για αυτούς ή υποθέτουν αυτό που θέλουν να αποδείξουν. Μοιραία, τα επιχειρήματά τους είναι ανεπαρκή ή οδηγούνται σε ένα φαύλο κύκλο, όπου τα ζητούμενα γίνονται υποθέσεις και αντίστροφα.

Η απόδειξη είναι για αυτούς μια δύσκολη έννοια και συνήθως την αποφεύγουν. Δύο φοιτητές σε μια έρευνα [12] είπαν τα εξής για την απόδειξη : «*Όχι, προσπαθώ να αποφεύγω τις αποδείξεις όσο το δυνατόν περισσότερο. Προφανώς, υπάρχει μια εξήγηση που μαθαίνουμε πολλές και μεγάλες αποδείξεις, οι εξετάσεις, αλλά δε μου φαίνεται σωστό αυτό για να το κάνω, αφού πολλοί άνθρωποι το έχουν κάνει ήδη.*» ή «*Στα καθαρά μαθηματικά αποδεικνύεις ένα συμπέρασμα και μετά δε το χρησιμοποιείς πουθενά, για τίποτε άλλο. Εκτός αν θες να αποδείξεις περαιτέρω αποτελέσματα. Πραγματικά δεν χρειάζεται πουθενά αλλού*».

Οι Davis και Hersh (1981)(βλέπε, [18]) , υποστήριξαν ότι είναι πιθανώς αδύνατο να καθοριστεί ακριβώς ποιος τύπος επιχειρήματος μπορεί να γίνει αποδεκτός ως έγκυρη απόδειξη. Πολλοί δάσκαλοι μαθηματικών υποστηρίζουν ότι εάν ένα επιχείρημα γίνεται αποδεκτό ή όχι ως απόδειξη εξαρτάται όχι μόνο από τη λογική δομή του, αλλά και πόσο πειστικό είναι το επιχείρημα αυτό (Hanna, 1991)(βλέπε, [18])

Στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης, μπορούμε να βρούμε διάφορους ορισμούς για το τι είναι απόδειξη, καθώς και ποιος είναι ο ρόλος της. «Είναι ένα επιχείρημα που πείθει τον εχθρό» (Mason, Burton και Stacey, 1982), ή «Ένα επιχείρημα που πείθει έναν μαθηματικό που γνωρίζει το θέμα» (Davis και Hersh, 1981), ή ακόμη «Ένα επιχείρημα που μπορεί να πείσει ένα λογικό σκεπτικιστή» (Volmink, 1990). Κάποιοι άλλοι που εστιάζουν στην κοινωνική και στη «επεξηγηματική»(contextual) φύση της απόδειξης, δίνουν τις ακόλουθες περιγραφές : «Καλούμε την απόδειξη μια εξήγηση που γίνεται αποδεκτή από μια συγκεκριμένη κοινότητα, μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή» (Balacheff, 1987), «ένα επιχείρημα γίνεται μια απόδειξη μετά την κοινωνική αποδοχή του ως απόδειξη» (Manin, 1977) (βλέπε, [18]). Επιπλέον, ο Davis(1986) (βλέπε, [8]), δηλώνει ότι μια απόδειξη μπορεί να διαδραματίσει διάφορους διαφορετικούς ρόλους. Μπορεί να οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις, μπορεί να είναι μια αφορμή για μια συζήτηση, μπορεί να βοηθήσει να εξαλειφθούν λάθη.

Όποιος και αν είναι ο ορισμός της απόδειξης ή όποιος και ας είναι ο ρόλος της, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν προβλήματα. Κάποιες σημαντικές δυσκολίες που έχουν καταγραφτεί από τις προηγούμενες έρευνες είναι οι ακόλουθες :

- Οι φοιτητές έχουν δυσκολίες όταν έρχονται αντιμέτωποι με πολλούς διαφορετικούς τρόπους επιλογών κατά τη διάρκεια μιας απόδειξης. Πολλές φορές δε γνωρίζουν ποιο δρόμο και ποιο τρόπο πρέπει να ακολουθήσουν, αφού ταυτόχρονα πρέπει να συντονίσουν πολλές πληροφορίες.

Ρωτήσαμε τους φοιτητές να μας πουν ποιες είναι οι δυσκολίες τους όταν διαβάζουν μια εκφώνηση και μας είπαν : «*Περισσότερο για τον τρόπο που χρειάζεται να χρησιμοποιήσεις, δηλαδή τι ζητάει ακριβώς η άσκηση ώστε να χρησιμοποιήσω την κατάλληλη λύση, αυτή με την οποί έβαλε ο καθηγητής την άσκηση. Δηλαδή το σκεπτικό*
του καθηγητή για να αντιληφθείς και εσύ τι χρειάζεται να κάνεις. Να μην κάνεις περιττά πράγματα, αλλά να μην κάνεις και λιγότερα από αυτά που ζητάει.» (συνέντευξη 1η, γραμμές 105-106).

- Η χρήση των ορισμών ε-δ αποτελεί κάτι πολύ δύσκολο για πολλούς φοιτητές(βλέπε, σελ 22). Η άρνηση και η αντιστροφή αυτών των προτάσεων είναι σχεδόν αδύνατος στόχος για τους περισσότερους. Επίσης, οι δυσκολίες στις μεθόδους της μαθηματικής επαγωγής, της απόδειξης με αντιθετοαντιστροφή και της απόδειξης με τη μέθοδο του αντιπαραδείγματος, αποδίδονται στην έλλειψη γνώσεων των βασικών κανόνων της λογικής.
- Οι φοιτητές πείθονται εύκολα ότι η ισχύς ή όχι μιας πρότασης μπορεί να αποδειχθεί με την χρήση ενός αντιπαραδείγματος. Ωστόσο, μερικοί φοιτητές θεωρούν ότι η χρήση πολλών παραδειγμάτων αποτελεί απόδειξη για τη βεβαιότητα μιας πρότασης, και αυτό κάνουν σε περιπτώσεις που τους ζητείται να αποδείξουν κάτι.

Οι μελέτες έχουν δείξει [13] ότι όλες αυτές οι δυσκολίες έχουν και ως ένα αποτέλεσμα ότι οι αποδείξεις των φοιτητών είναι ανεπαρκείς, τόσο στις περιορισμένες δεξιότητες που έχουν στην παρουσίαση μιας απόδειξης, όσο και στην ασάφεια για το ποιες υποθέσεις χρησιμοποίησαν και από πού προέκυψε το κάθε βήμα τους. Η αδυναμία τους αυτή, τους οδηγεί στην ανεπάρκεια ή στη αποφυγή της αυστηρότητας.. Άλλες φορές, γράφουν πάρα πολλά , χωρίς να καταλαβαίνουν τι αποδεικνύουν και αν χρειάζεται να το αποδείξουν και άλλες φορές γράφουν πολύ λιγότερα από ότι χρειάζεται.

Μια βασική αιτία αυτής της αδυναμίας τους είναι κατά πόσο το επίπεδο των γνώσεων τους είναι συμβατό με τις απαιτήσεις για μια αξιωματική αυστηρότητα που γίνεται από τους διδάσκοντες. Πολλές φορές, οι φοιτητές μαθαίνουν τις αποδείξεις όπως ακριβώς τις έχουν διδαχθεί από τους καθηγητές τους, ωστόσο, αυτό δε σημαίνει ότι και τις κατανοούν. Μπορεί να μαθαίνουν μηχανιστικά το πώς αποδεικνύεται μια πρόταση, ένα θεώρημα ή ακόμα ποια είναι η διαδικασία επίλυσης ενός τύπου ασκήσεων, όμως αυτό δε συνεπάγεται ότι έχουν καταλάβει τη λογική της απόδειξης ή ποια ήταν τα βήματα που χρησιμοποιήθηκαν από τους καθηγητές για να αποδείξουν το ζητούμενο. Αν αυτοί δηλαδή στηρίχθηκαν, για παράδειγμα, σε κάποιο προηγούμενο θεώρημα ή σε κάποιο αξίωμα ή και στα δύο, και πως συνδύασαν όλα τα δεδομένα τους. Κατά τους Daniel Alibert και Michael Thomas [1], ο αρχικός στόχος της απόδειξης δεν είναι μόνο να πείσει, αλλά να ενισχύσει τον ακροατή ή τον αναγνώστη να κατανοήσει τις ιδέες πίσω από την απόδειξη και να τις συνδέσει και με άλλα μαθηματικά αποτελέσματα. Σαφώς, η παρουσίαση μιας απόδειξης και η εξήγησή της είναι δυο εντελώς διαφορετικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Αυτό το φαινόμενο, παρατηρήθηκε από μελέτη [13], , κυρίως στα πλαίσια των ορίων, όπου οι φοιτητές ήταν αναποφάσιστοι ως προς το εάν έπρεπε να βρουν τα όρια μέσω του επίσημου ορισμού ή μέσω της άλγεβρας των ορίων. Επίσης, δεν είχαν κάποια άνεση στην εναλλαγή του ορισμού του ορίου και της άλγεβρας του ορίου καθώς επίσης απέφευγαν τις διαισθητικές πρακτικές, όπως η εικασία των ορίων και στη συνέχεια μια απόδειξη για αυτές.

Ακόμη και αν οι φοιτητές είναι 'λογικά ικανοί' (logically capable) [18], δηλαδή γνωρίζουν τι συγκροτεί μια απόδειξη και μπορούν να σκέφτονται αφαιρετικά, να παρουσιάζουν και να χρησιμοποιούν τους ορισμούς και να διεξάγουν έγκυρα αποτελέσματα, αυτό δεν εγγυάται ότι μπορούν να κατασκευάσουν κάτι περισσότερο από τετριμμένες αποδείξεις.

Ο Moore (1994)(βλέπε,[18]) παρατήρησε πέντε φοιτητές προπτυχιακού επιπέδου και διαπίστωσε, ότι ενώ οι φοιτητές μπορούσαν κάποιες φορές να διατυπώσουν τον ορισμό μιας έννοιας, και ας μη την είχαν κατανοήσει καλά, όταν κλήθηκαν να γράψουν κάποιες αποδείξεις για αυτή την έννοια, δεν ήξεραν πώς να αρχίσουν.

Έτσι, λοιπόν, και η έννοια της απόδειξης αποτελεί για τους φοιτητές ένα δύσκολο κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης.. Κάποιες φορές δε γράφουν ολοκληρωμένα, κάποιες άλλες γράφουν περισσότερα από όσα χρειάζονται και άλλες δε γράφουν τίποτα. Σπάνια γράφουν τα απαραίτητα και με την απαιτούμενη αυστηρότητα.

2.3 Ταξινόμηση δυσκολιών στον Απειροστικό Λογισμό σύμφωνα με τη Michele Artigue

Σύμφωνα με την Michele Artigue[2], οι δυσκολίες που συναντούν οι φοιτητές στον Απειροστικό Λογισμό και γενικότερα στα μαθήματα της ανάλυσης, ταξινομούνται σε κάποιες ομάδες, οι οποίες βέβαια μπορούν να υπάρχουν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Είναι οι ακόλουθες :

- Δυσκολίες που σχετίζονται με τη μαθηματική πολυπλοκότητα των βασικών αντικειμένων της περιοχής, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις, ακολουθίες, αντικείμενα που είναι ακόμη σε φάση κατασκευής όταν αρχίζει η επίσημη διδασκαλία της ανάλυσης.
- Δυσκολίες που σχετίζονται με την αντίληψη της έννοιας του ορίου και με τους τεχνικούς χειρισμούς του.
- Δυσκολίες που σχετίζονται με το αναγκαίο ρήγμα με την αλγεβρική σκέψη.

Δυσκολίες που σχετίζονται με τα βασικά αντικείμενα της περιοχής.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτά τα βασικά αντικείμενα της ανάλυσης δεν είναι άγνωστα κατά την είσοδο των μαθητών στις πανεπιστημιακές σχολές. Δεν αποτελούν κάποιες νέες έννοιες για αυτούς όταν πρωτοέρχονται σε επαφή με την περιοχή. Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα αντικείμενα αυτά είναι σταθεροποιημένα, αντιθέτως η σχέση που θα αναπτυχθεί μεταξύ τους θα διαδραματίσει έναν σπουδαίο ρόλο στην αντίληψη και ωρίμανσή τους.

1. Πραγματικοί αριθμοί

Διάφορες έρευνες έχουν δείξει ότι οι αντιλήψεις που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές για τους πραγματικούς αριθμούς δεν είναι κατάλληλες για την ανάλυση. Οι μαθητές θεωρούν ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι αλγεβρικά αντικείμενα. Αναγνωρίζουν ότι η διάταξή τους είναι πυκνή, αλλά ανάλογα με το πλαίσιο μπορεί να ταυτίσουν αυτή την ιδιότητα με την ύπαρξη αριθμών ακριβώς πριν ή ακριβώς από έναν δεδομένο αριθμό. Για παράδειγμα, το 0,999… συχνά λέγεται ότι είναι ο αριθμός ακριβώς πριν από το 1.

Η συσχέτιση πραγματικών αριθμών και πραγματικής ευθείας στερείται νοήματος. Αν εκ των προτέρων οι μαθητές δέχονται την αρχή της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ του R και της ευθείας, δεν είναι κατ’ ανάγκη πεπεισμένοι ότι ο κάθε δοθείς αριθμός έχει θέση στην ευθεία.

2. Συναρτήσεις

Όσον αφορά τις συναρτήσεις, η κατάσταση είναι πολύπλοκη. Οι φοιτητές, ακόμα και αν έχουν παρακολουθήσει ένα ικανό αριθμό μαθημάτων με μαθηματικό περιεχόμενο, δεν έχουν ένα συμπαγές υπόβαθρο κατανοήσεως της έννοιας της συνάρτησης. Σύμφωνα με έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, οι δυσκολίες αυτές δεν δρουν ανεξάρτητα. Αρχικά, διαπιστώνονται δυσκολίες στον καθορισμό του τι ακριβώς είναι συνάρτηση και στη θεώρηση των ακολουθιών ως συναρτήσεις. Κατά τους Vinner και Dreyfus(1989)(βλέπε, [2]) και Harel και Trgalova [9], τα κριτήρια που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να ελέγξουν αν κάτι είναι συνάρτηση ή όχι, δε συμφωνούν με τον τυπικό ορισμό της έννοιας, ακόμη και από αυτούς που έχουν τη δυνατότητα να αναπαράγουν τον τυπικό ορισμό. Αυτά τα κριτήρια εξαρτώνται περισσότερο από τα τυπικά παραδείγματα που λαμβάνονται ως πρότυπα και συσχετίσεις, όπως για παράδειγμα : συνάρτηση – τύπος - καμπύλη. Έτσι για παράδειγμα, το ίδιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση ή όχι, ανάλογα με τον τύπο ή τη συμβολική του αναπαράσταση. Για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι, ας θεωρήσουμε ως $f:\chi \to f(\chi)=2$, η οποία δεν είναι συνάρτηση γιατί η δοθείσα αλγεβρική έκφραση (τύπος) δεν εξαρτάται από το χ, αλλά είναι συνάρτηση λόγω της γραφικής παράστασης που είναι μια ευθεία γραμμή. Τέτοιου είδους φαινόμενα οδήγησαν τους ερευνητές στο διαχωρισμό του ορισμού μιας έννοιας από την εικόνα έννοιας, όπως είδαμε αναλυτικά λίγο πριν.

Επίσης, δυσκολίες συναντούν οι φοιτητές στη σύνδεση διαφορετικών σημειωτικών καταχωρήσεων. Αυτές, σχετίζονται με τη μεταφορά από μια σημειωτική καταχώρηση σε κάποια άλλη και ειδικότερα από μια γραφική καταχώρηση στην αλγεβρική.

Μια επιπλέον δυσκολία είναι η «μαθηματικοποίηση» ενός προβλήματος, δηλαδή η θεώρηση συναρτήσεων ως μαθηματικών εργαλείων στην επίλυση προβλημάτων. Ο Breidenback(1992)(βλέπε[9]), έχει επισημάνει «η βασική απαίτηση για την κατανόηση συναρτήσεων, την οποία δεν φαίνεται να έχουν οι μαθητές, είναι η ικανότητα να μετουσιώνουν μεταβολές πραγματικών καταστάσεων χρησιμοποιώντας συναρτήσεις».

3. Δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια του ορίου.

Η μαθηματική έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια, χαρακτηριστική του είδους σκέψης που απαιτείται στα ανώτερα μαθηματικά. Κατέχει μια κεντρική θέση που διεισδύει σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση, ως θεμέλιο στην ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Σύμφωνα με τον Cornu[7], μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες στη διδασκαλία και στη μάθηση της έννοιας του ορίου βρίσκεται αφ' ενός στην πολυπλοκότητά της, και αφ΄ ετέρου στο βαθμό στον οποίο οι γνωστικές πτυχές δεν μπορούν να παραχθούν καθαρά από το μαθηματικό ορισμό. Όπως προαναφέραμε η διάκριση μεταξύ του ορισμού μιας έννοιας και της ίδιας της έννοιας είναι πολύ σημαντική από διδακτική σκοπιά. Από τη μια, υπάρχει η απομνημόνευση του ορισμού, και από την άλλη η κατανόηση της έννοιας, που είναι δύο εντελώς διαφορετικά θέματα.

Ένας φοιτητής απάντησε σε ερώτησή μας για το ποια είναι η γνώμη του για τους ορισμούς : «*Μου αρέσουν; Στην αρχή, μέχρι να λύσεις αρκετές ασκήσεις ή να έχεις*

κάποιον να σου πει…Δεν ξέρω, δε μου αρέσουν καθόλου γιατί τους μαθαίνεις παπαγαλία. Δε μπορείς να τους κατανοήσεις και αυτό δε μου αρέσει καθόλου… Υπάρχει σχέση(ανάμεσα στον ορισμό-κατανόηση έννοιας), *αλλά δεν ξέρω κατά πόσο οι ορισμοί του βιβλίου σε βοηθούν να καταλάβεις πραγματικά την έννοια. Τουλάχιστον εμένα δε με έχουν βοηθήσει.*»(συνέντευξη 3η, γραμμή 52, γραμμή 58). Μια άλλη απάντηση ήταν η εξής : «*Βασικά έτσι πρέπει* (να χρησιμοποιεί ορισμούς), *αλλά συνήθως εγώ δε μπορώ… Όχι, τον μαθαίνεις παπαγαλία. Όμως να μάθεις να τους χρησιμοποιείς είναι λίγο δύσκολο Υπάρχει σχέση, αλλά χρειάζεται πολύ δουλειά για να μάθεις τον ορισμό και να μπορέσεις να τον χρησιμοποιήσεις.* » (συνέντευξη 2η, γραμμές 53-55, 74).

Επιπλέον, μια φοιτήτρια μας είπε : «*Δεν είναι απόλυτα σαφής* (εννοεί τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στον ορισμό μιας έννοιας και στην κατανόηση της ίδιας της έννοιας). *Ο ορισμός μιας έννοιας δε διευκολύνει την κατανόησή της και πολύ περισσότερο να την χρησιμοποιήσεις πρακτικά, όπως στην επίλυση μιας άσκησης ή να εξηγήσεις κάτι μέσα από τον ορισμό*». (συνέντευξη 1η, γραμμή 58).

Πολλές φορές οι φοιτητές χρησιμοποιούν την έννοια του ορίου για την επίλυση προβλημάτων, χωρίς να στηρίζονται στον ορισμό του, αλλά σε διάφορες διαισθητικές αντιλήψεις που έχουν για αυτό. Έτσι, ξεκινώντας από αυτό, θεωρούν ότι έχουν κατανοήσει τον ορισμό του ορίου, χωρίς όμως πραγματικά να συμβαίνει κάτι τέτοιο.

Επιπλέον, οι ποσοδείχτες «για κάθε», «υπάρχει», που εμφανίζονται στους ε-δ ορισμούς, καθώς και τα ε-δ δυσκολεύουν πολύ τους φοιτητές. Οι απαντήσεις που μας έδωσαν οι φοιτητές, τόσο για τους ποσοδείχτες, όσο και για τα ε-δ επισημαίνουν τις δυσκολίες τους.. Ένας φοιτητής απάντησε : «*Και εκεί είναι λίγο μπέρδεμα… Οι σχέσεις ανάμεσα στα ε και δ, πως τα χρησιμοποιείς, ότι μερικές φορές αυθαίρετα παίρνεις κάποιο ε ή δ για να σου βγει η άσκηση. Όλα αυτά δε νομίζω ότι είναι και τόσο εύκολα… Αυτά είναι αναγκαία, πρέπει να υπάρχουν και όταν δε τους χρησιμοποιούμε, ενώ θα έπρεπε, οι ασκήσεις είναι λάθος… Νομίζω ότι το παίρνουμε αυθαίρετα (εννοεί το ε), γύρω στο 1, για να μας βγει η άσκηση. Αυτό δε το λέει ο ορισμός, αλλά το κάνουμε έτσι μέσα από κάποιες ασκήσεις που έχουμε δει.»* (συνέντευξη 2η, γραμμές 65-72)

Κάποια φοιτήτρια απάντησε πάνω στις ίδιες ερωτήσεις : « *Ας μιλήσουμε για τους ορισμούς που έχουν ε και δ στον απειροστικό.*
Είναι σχετικά περίπλοκοι. Προσωπικά με δυσκολεύουν στο να τους κατανοήσω, Για να τους κατανοήσω θα πρέπει να ασχοληθώ πάρα πολύ, να λύσω κάποιες ασκήσεις και τελικά να τους βάλω στο μυαλό μου με ένα τρόπο δικό μου προσωπικό, που δε θα είναι καθαρά ο ορισμός, αλλά κάτι που θα έχω καταλάβει εγώ και θα με διευκολύνει πρακτικά…. Υπάρχει μια δυσκολία αρκετά μεγάλη…Ειδικά στο ε κάπου τα πράγματα μπερδεύονται Αναρωτιέσαι τι θα ορίσεις για ε, τι τιμή θα βάλεις για κάθε ε. Θα πρέπει δηλαδή….ίσως να σου δίνουν ένα βήμα, ή πόσο μικρό να είναι το ε. Όταν λέμε ότι το ε είναι θετικό, αλλά κοντά στο μηδέν, τι τιμή είναι αυτή; Πόσο κοντά στο μηδέν μπορεί να είναι;» (συνέντευξη 1η, γραμμές 65-72).
Ένας ακόμη φοιτητής μας απάντησε : «*Ναι, υπάρχει παντού το ε. Αλλά είναι πολύ αυθαίρετο… Σαν έννοια όμως, είναι γενικά αυθαίρετη. Δεν πιστεύω ότι υπάρχει άτομο που να έχει καταλάβει ακριβώς πως το παίρνουμε. Απλά βλέποντας κάποιες ασκήσεις που το ε=1 και το παίρνω και εγώ τόσο, χωρίς να ξέρω γιατί και πως. Αυτά για το ε, ….. και υπάρχει παντού… Και για αυτούς* (εννοεί τους ποσοδείχτες) *είναι λίγο αυθαίρετα τα πράγματα, αλλά πιστεύω ότι τους κατανοώ πολύ καλύτερα από το ε. Αλλά και για αυτούς η επιλογή είναι δύσκολη. Πότε λέμε 'υπάρχει', πότε 'για κάθε'*»(συνέντευξη 3η, γραμμές 71-74).

Ωστόσο, διάφορες έρευνες που έχουν διεξαχθεί παρουσιάζουν σαφέστατα ότι αν και η πλειοψηφία των φοιτητών δεν κατανοεί την έννοια του ορίου, αυτό δεν τους εμποδίζει να λύνουν ασκήσεις, προβλήματα ή και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους. Ρωτήσαμε έναν φοιτητή πάνω σε αυτό και μας απάντησε : «*Ναι, θα επιχειρούσα σίγουρα, αν τους ήξερα αυτό θα έκανα. Αυτό κάνω ανεξάρτητα με το αν καταλαβαίνω το νόημα κάτω από τους ορισμούς.*» (συνέντευξη 3η, γραμμές 53-56).

Παράλληλα, όπως όλοι γνωρίζουμε η διδασκαλία της έννοιας του ορίου δεν ξεκινά από παρθένο έδαφος. Είτε απευθυνόμαστε σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είτε σε φοιτητές ανώτερων εκπαιδευτικών ιδρυμάτων, ήδη υπάρχουν ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως οι κοινές σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται. Ο Cornu[7], περιγράφει τις αντιλήψεις μιας ιδέας που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία, ως αυθόρμητες αντιλήψεις (spontaneous conceptions). Κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος μαθηματικών, οι ιδέες αυτές δεν εξαφανίζονται, αντιθέτως, αναμιγνύονται με τη νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών.

Αυτό το φαινόμενο δυσκολεύει τους φοιτητές να κατανοήσουν τη μαθηματική έννοια του ορίου. Μια φοιτήτρια απάντησε σε ανάλογη ερώτηση : «*Ίσως τελικά να έχει λειτουργήσει και αρνητικά αυτό, γιατί έχοντας μια ιδέα για μια έννοια και προσπαθώντας να την προσδιορίσεις μετά καθαρά μαθηματικά, δυσκολεύεσαι. Δεχόμαστε πιο εύκολα κάποιους όρους που είναι καθαρά μαθηματικοί και δεν έχουμε στο μυαλό μας προηγούμενα μια εντύπωση για αυτή την έννοια. Οπότε το όριο, όντας δύσκολο σαν μαθηματική έννοια, γίνεται ακόμα πιο μπερδεμένο, θα έλεγα, μέσα στο μυαλό του φοιτητή όταν μπλέκει και την καθημερινή έννοια του ορίου, την καθημερινή φύση*» (συνέντευξη 1η , γραμμές 73-74), ενώ ένας άλλος φοιτητής μας είπε : «*Υπάρχει, αλλά αυτό βοηθάει στην κατανόηση της έννοιας μόνο στην αρχή. Νομίζω ότι ουσιαστικά δεν είναι το ίδιο πράγμα.*» (συνέντευξη 2η, γραμμές 91-94).

Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου, παρατηρούμε ότι οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν ακόμη εισαχθούν σε αμφιθέατρα και τάξεις, και συνήθως συνεχίζουν να βασίζονται σ' αυτές τις σημασίες αν και τους έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός

Οι διάφορες έρευνες έχουν αποκαλύψει πολλές διαφορετικές σημασίες για την έκφραση «τείνει προς» :

- Πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του) - [to approach]
- Πλησιάζει…χωρίς να το φθάνει - [to approach…without reaching it]
- Πλησιάζει…μέχρι σχεδόν να το φθάσει - [to approach…just reaching it]
- Μοιάζει (χωρίς οποιαδήποτε παραλλαγή, όπως «αυτό το μπλε τείνει προς το βιολετί») - [to resemble]

Στην έρευνά μας, οι φοιτητές έδωσαν τις δικές τους ερμηνείες : «*Είναι κάτι που δεν είναι και τόσο σαφές. Όμως, μέσα από το όριο χρησιμοποιούμε και άλλες έννοιες, για τη φύση του ορίου, όπως το «τείνει»,που δεν είναι μια καθαρά μαθηματική έννοια, αφού την χρησιμοποιούμε και στην καθημερινότητα μας. Δείχνει αυτή την προσέγγιση που θέλουμε να πετύχουμε με το όριο.*» (συνέντευξη 1η , γραμμές 69- 70)

«*Τείνει, σημαίνει ότι παίρνει…δηλαδή συγκεκριμένα ότι υπάρχει ένα δ…που ανάμεσα στον αριθμό αυτό και το δ παίρνει πολύ…παίρνει τις τιμές κοντά στον αριθμό, αλλά ποτέ δε θα πάρει τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή, τον προσεγγίζει.*» (συνέντευξη 3η , γραμμές 67-70)

Αντίστοιχα, η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετικές σημασίες, για κάθε άνθρωπο και κάθε διαφορετική στιγμή :

- Ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φτάσουμε -[an impassible limit which is reachable]
- Ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο αξεπέραστο - [an impassible limit which is impossible to reach]
- Ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε, χωρίς να το φθάνουμε -[a point which one approaches, without reaching it]
- Ένα σημείο το οποίο το πλησιάζουμε και το φθάνουμε - [a point which one approaches and reaches]
- Ένα ανώτερο (ή κατώτερο) όριο
- Ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο
- Ένα διάστημα
- Αυτό που έπεται «αμέσως μετά από» εκείνο ως το οποίο μπορούμε να φθάσουμε
- Ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας
- Το τέλος, το τέρμα.

Οι φοιτητές μας προσπάθησαν με το δικό τους τρόπο να ερμηνεύσουν αυτή την έννοια του ορίου :

«*Αν μιλήσουμε όπως μιλήσαμε για τη συνέχεια, μέσα από την καθημερινότητα, γιατί είναι μια έννοια που χρησιμοποιούμε και καθημερινά, είναι σαν κάτι το οποίο δείχνει μια κατεύθυνση προς τα πού μπορούμε να φτάσουμε, χωρίς όμως να μας λέει ότι μπορούμε να…,ναι μεν μπορούμε να το προσεγγίσουμε, είτε να είμαστε μακριά είτε πάρα πολύ κοντά σε αυτό*» (συνέντευξη 1η , γραμμές 69- 70)

«Ναι (εννοεί στην καθημερινότητα), λέμε ήμουν στο όριο, δηλαδή παραλίγο… *Είναι οι οριακές τιμές…είναι μια τιμή και με τα πλευρικά προσπαθούμε να φτάσουμε όσο μπορούμε αυτή την τιμή*» (συνέντευξη 2η , γραμμές 86-88).

«*Τι να πω! Αυτό που είναι και από την καθημερινή ζωή, όπως μας μαθαίνουν χρόνια, ότι απλά τείνει σε κάποιον αριθμό, αλλά ποτέ δεν παίρνει αυτή την τιμή. Αυτό είναι το πρώτο που μπορώ να σκεφτώ*» (συνέντευξη 3η , γραμμές 67-70)

Όλες οι παραπάνω σημασίες που δίνονται στη λέξη όριο, αφορούν διαφορετικούς μαθητές ή και ίδιους, αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, ανάλογα με τις περιστάσεις. Αυτές, οι αυθόρμητες ιδέες μπορούν να παραμείνουν σε ένα μαθητή για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι κάποιες φορές συμβαίνει να υπάρχουν ταυτόχρονα στο μυαλό ενός ατόμου αντιφατικές ιδέες, που οδηγούν σε μια εικόνα έννοιας, που περιέχει συγκρουόμενους παράγοντες.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με άλλες έννοιες, όπως με την έννοια της συνέχειας. Η συνέχεια πάσχει από το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη που προκαλείται από την χρήση της καθημερινής γλώσσας, σε φράσεις όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δεν υπήρξε διακοπή στη βροχόπτωση) ή «σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δηλαδή δεν υπάρχουν κενά στις ράγες) και έρχεται σε σύγκρουση με τον τυπικό ορισμό. Όπως είδαμε(βλέπε, σελ 9-16), ο ορισμός μιας έννοιας και η εικόνα που έχουν οι φοιτητές για αυτή, πολλές φορές είναι διαφορετικές. Αυτή η άποψη ενισχύεται από τις προσπάθειες των δασκάλων να δώσουν μια απλή εικόνα στην έννοια της συνέχειας λέγοντας, ότι η γραφική παράσταση μιας συνεχής συνάρτησης είναι μονοκόμματη ή σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Στις συνεντεύξεις που πήραμε από τους φοιτητές, σε ερώτησή μας πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της συνέχειας, πήραμε τις εξής απαντήσεις :

«*Πέρα από τα μαθηματικά, αυτό που χρησιμοποιούμε και στην καθημερινή μας ζωή ως συνέχεια, είναι κάτι που δεν έχει κενά δεν έχει…Δεν μπορούμε να κατανοήσουμε που είναι η αρχή και που το τέλος. Είναι κάτι…χωρίς…κάτι συνεχόμενο θα λέγαμε.*
Στα μαθηματικά όταν μιλάμε για μια συνάρτηση, για μια συνάρτηση που έχει συνέχεια, αντιλαμβάνομαι ότι είναι μια γραμμή, η οποία δεν έχει κενά ,δεν έχει τρύπες θα λέγαμε πιο απλά και μπορεί να χαραχθεί με τη μύτη ενός μολυβιού χωρίς να σηκωθεί το μολύβι.» (συνέντευξη 1η, γραμμές 39- 40).
« *Ότι είναι παντού συνεχής… Ότι δε διακόπτεται πουθενά το γράφημά της….*
Ότι σε κάθε σημείο θα παίρνει μια τιμή η συνάρτηση… Δε θα διακόπτεται πουθενά η συνάρτηση…Η συνάρτηση δε σταματάει (προφανώς εννοεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης)» (συνέντευξη 2η, γραμμές 41-48)

Εκτός από τα παραπάνω, οι διάφοροι συγγραφείς φαίνεται να συμφωνούν στην ύπαρξη επιστημολογικών εμποδίων, που αφορούν την έννοια του ορίου. Πριν, όμως, αναλύσουμε αυτά τα εμπόδια ας περιγράψουμε την φύση τους.

Ένα εμπόδιο είναι μια αντίληψη, πιθανώς μια γνώση, η οποία ήταν αποτελεσματική στην επίλυση ενός τύπου προβλημάτων, αποτυγχάνει όμως στην επίλυση ενός άλλου τύπου προβλημάτων. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας «αντιστέκεται» σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη της νέας γνώσης [10].

Η Sierpinska(1994)(βλέπε, [11]) έχει διακρίνει τρεις τύπους εμποδίων : τα επιστημολογικά, τα διδακτικά και τα γνωστικά. Τα διδακτικά εμπόδια προκύπτουν και από την φορμαλιστική διδασκαλία. Σε αυτή την περίπτωση, ο μαθητής δεν μπορεί να συνδέσει τις έννοιες με την υπάρχουσα γνώση και αυτή η ασυνέχεια αποτελεί πηγή πολλών εμποδίων. Δυστυχώς, η ύπαρξη αυτής της ασυνέχειας δεν είναι πάντα φανερή, δεδομένου ότι οι μαθητές μαθαίνουν να επαναλαμβάνουν ορισμούς και να χειρίζονται σύμβολα έστω και αν δε τα κατανοούν. Επίσης, μπορούν να προκύψουν και από τη διδακτική μεταφορά, εκλογικεύοντας με βάση τις αρχές όπως, από το απλό στο σύνθετο, από το μερικό στο γενικό κ .λ. π., όταν θέλουμε να παρουσιάσουμε ένα σύνθετο θέμα.

Τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών. Ο όρος εισήχθη από τον Gaston Bachelard (1938)(βλέπε, [7]) :
«Πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης από την άποψη των εμποδίων. Δεν αρκεί μόνο να λαμβάνουμε υπόψη τα εξωτερικά εμπόδια, όπως η πολυπλοκότητα και η προσωρινότητα των επιστημονικών φαινομένων, ούτε να θρηνήσουμε την αδυναμία των ανθρώπινων αισθήσεων και του πνεύματος. Είναι μέρος της δράσης της απόκτησης της ίδιας της γνώσης, το να γνωρίσουμε βαθιά, εκείνο που εμφανίζεται, ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα της λειτουργικής ανάγκης, να καθυστερεί την ταχύτητα της μάθησης και προκαλεί γνωστικές δυσκολίες. Εδώ μπορούμε να βρούμε τις αιτίες της στασιμότητας ακόμη και της οπισθοδρόμησης, και ίσως να αντιληφθούμε τους λόγους της αδράνειας, τους οποίους ονομάζουμε επιστημολογικά εμπόδια….Αντιμετωπίζουμε τη γνώση που έρχεται σε αντίθεση με την προυπάρχουσα γνώση, και έτσι πρέπει να καταστρέψουμε τις προυπάρχουσες λανθασμένες ιδέες».

Ο Guy Brousseau(βλέπε, [7]), ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή δραστηριότητας και επομένως εδραιώνεται, αλλά κατόπιν αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σε ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί σε αντιφάσεις. Επομένως, καθίσταται αναγκαίο να καταστραφεί η αρχική ανεπαρκής, και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με τη νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο. Γενικά, ένα εμπόδιο αναιρείται, αν είμαστε ικανοί να αποστασιοποιηθούμε από τα

«πιστεύω» και τις σκέψεις μας και να ερευνήσουμε προς διαφορετικές κατευθύνσεις.

Τέλος, τα γνωστικά εμπόδια είναι το αντίστοιχο των επιστημολογικών εμποδίων στο ατομικό επίπεδο. Υπάρχει μια παράλληλη πορεία ανάμεσα στην εξέλιξη των επιστημών και την ανάπτυξη της σκέψης στο επίπεδο του κάθε ανθρώπου. Επομένως, ότι έχουμε πει για τα επιστημολογικά εμπόδια μεταφέρονται στα γνωστικά εμπόδια. Είναι πιθανό πως όταν μια γνώση έχει αναγνωριστεί ως επιστημολογικό εμπόδιο, τότε θα υπάρχει και το αντίστοιχο γνωστικό εμπόδιο στο επίπεδο του μαθητή.

Μετά από αυτή τη σύντομη αναφορά στα εμπόδια, συνεχίζουμε με τη μελέτη των επιστημολογικών εμποδίων στην έννοια του ορίου. Πολλοί συγγραφείς συμφωνούν στην ύπαρξη τέτοιου είδους εμποδίων στην ιστορία της έννοιας του ορίου.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο της εξάντλησης στα διάφορα γεωμετρικά προβλήματα που αντιμετώπιζαν. Η μέθοδος της εξάντλησης ήταν μια παραγωγική μέθοδος, η οποία ήταν κατάλληλη για την απόδειξη αποτελεσμάτων, τα οποία όμως ήταν γνωστά εκ των προτέρων. Δηλαδή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά κάποιον τρόπο 'νομιμοποιούσε' κάποιο ήδη γνωστό αποτέλεσμα. Η μέθοδος εφαρμοζόταν σε γεωμετρικά μεγέθη και όχι σε αριθμούς. Επιπλέον, κάθε περίπτωση αντιμετωπιζόταν μεμονωμένα με την χρήση ενός συγκεκριμένου επιχειρήματος. Δεν μπορούμε να δηλώσουμε υπεύθυνα ότι οι αρχαίοι κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου. Δεν υπήρχε καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρώς αριθμητική ερμηνεία. Συνειρμικά, η έννοια του ορίου των αριθμών απουσίαζε.

Σε όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου, αισθητή είναι η παρουσία των απειροελάχιστων ποσοτήτων. Πόσο μικρές μπορεί να είναι αυτές οι ποσότητες ώστε να είναι σχεδόν μηδενικές, αλλά ταυτόχρονα να έχουν και ένα συγκεκριμένο «προσδιορίσιμο» μέγεθος; Τέτοιου είδους φιλοσοφικά ερωτήματα προκάλεσαν αντιθέσεις στους μαθηματικούς της εποχής. Ο Euler(βλέπε, [7]) χρησιμοποίησε ελεύθερα την έννοια του απείρως μικρού ως μια ποσότητα που μπορεί, όταν απαιτείται, να θεωρηθεί ίση με μηδέν. Και ο Cauchy(βλέπε, [7]) χρησιμοποίησε την έννοια του απείρως μικρού και εξήγησε την ιδέα του απειροελάχιστου ως εξής : «Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν». Ο D' Alembert(βλέπε, [7]) εναντιώθηκε στην χρήση των απείρως μικρών ποσοτήτων και επιδίωξε να τις απομακρύνει από το διαφορικό λογισμό. Η επιχειρηματολογία του βασίστηκε στο ότι μια ποσότητα είναι είτε κάτι ή τίποτα. Ομοίως και ο Berkeley, το 1734(βλέπε, [5]), επιτέθηκε στον απειροστικό σε αυτό ακριβώς το σημείο. Είπε, ότι «μια ποσότητα είναι είτε μηδέν, είτε όχι. Δεν υπάρχει τίποτε ενδιάμεσο». Η ιδέα μιας 'ενδιάμεσης κατάστασης' μεταξύ εκείνου που είναι τίποτα και εκείνου που δεν είναι τη συναντάμε συχνά στους μαθητές. Συχνά τους ακούμε να λένε ότι το ε αναπαριστά έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν, αλλά ταυτόχρονα είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Η φοιτήτρια που ρωτήσαμε απορεί : «*Όταν λέμε ότι το ε είναι θετικό, αλλά κοντά στο μηδέν, τι τιμή είναι αυτή; Πόσο κοντά στο μηδέν μπορεί να είναι;*» (συνέντευξη 1η, γραμμές 55-56) ή ένας φοιτητής μας απάντησε, δείχνοντας έντονα την απορία του, «*Το μόνο που ξέρεις είναι ότι είναι σίγουρα κάποιος θετικός αριθμός ... το παίρνουμε συνήθως κοντά στο μηδέν*» (συνέντευξη 3η , γραμμές 71- 72).

Επίσης, η έννοια του ορίου είναι δύσκολο να εισαχθεί στα μαθηματικά επειδή φαίνεται πιο συναφής με τη μεταφυσική ή τη φιλοσοφία. Οι μαθηματικοί επιφυλάσσονται να μιλήσουν για τέτοιες έννοιες, από τους αρχαίους Έλληνες μέχρι και τον D' Alembert, που έγραψε ότι «κάποιος μπορεί να τα καταφέρει εύκολα στο διαφορικό λογισμό χωρίς όλα τα υπόλοιπα μεταφυσικά του απείρου»(βλέπε, [7]). Η μεταφυσική σκοπιά του της έννοιας του ορίου αποτελεί ένα από τα κύρια εμπόδια των μαθητών. Απαντήσεις από μαθητές του τύπου «δεν είναι ακριβώς μαθηματικάεπιβεβαιώνουν την παραπάνω αντίληψη. Ακόμη, οι δυσκολίες στο χειρισμό της έννοιας του απείρου, καθιστούν πιο δύσκολη την κατανόηση της έννοιας του ορίου, ειδικά όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογισθεί άμεσα με την χρήση της άλγεβρας και της αριθμητικής. Το επιχείρημα ενισχύεται από αντιλήψεις για το άπειρο, «είναι πολύ αφηρημένο», «δεν υπάρχει».
Τέλος, η αντιπαράθεση του αν επιτυγχάνεται το όριο ή όχι, έχει παραμείνει ζωντανή στους μαθητές μέχρι και σήμερα. «*Είναι σαν κάτι το οποίο δείχνει μια κατεύθυνση προς τα πού μπορούμε να φτάσουμε, χωρίς όμως να μας λέει ότι μπορούμε να….,ναι μεν μπορούμε να το προσεγγίσουμε, είτε να είμαστε μακριά είτε πάρα πολύ κοντά σε αυτό… Είναι κάτι που δεν είναι και τόσο σαφές*» (συνέντευξη $1^{η}$, γραμμή 70). Ο Robins (1697-1751)(βλέπε, [7]), υπολόγισε ότι το όριο δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί, όπως τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στον κύκλο δεν μπορούν ποτέ να είναι ίσα με αυτόν, ο D' Alembert, επέμενε ότι μια ποσότητα δεν πρέπει ποτέ να γίνει ίση με το όριό της : «Για να μιλήσουμε σωστά, το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δε γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει κατά μια ποσότητα τόσο μικρή όσο κάποιος επιθυμεί»(βλέπε, [7]). Ο Jurin (1685-1750) είχε ακριβώς την αντίθετη άποψη για το θέμα.

4. Δυσκολίες που συνδέονται με το αναγκαίο ρήγμα μα την αλγεβρική σκέψη

Η μαθηματική δραστηριότητα στην ανάλυση βασίζεται κατά πολύ στις αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες, αλλά ταυτόχρονα απαιτείται και η αναλυτική σκέψη, την οποία πρέπει να τη διαφοροποιήσουμε από την αλγεβρική. Κατά κύριο λόγο, για να εισαχθούμε στην αναλυτική σκέψη και αυτό να είναι αποτελεσματικό, πρέπει να αναπτύξουμε μια άλλη όψη για την ισότητα.

Στην άλγεβρα για να αποδείξουμε ότι δύο παραστάσεις α(χ) και β(χ) είναι ίσες, η τυπική στρατηγική είναι η ακόλουθη : να μετασχηματίσουμε τη μια ή και τις δύο από αυτές με διαδοχικές ισοδυναμίες, ώσπου να πάρουμε δύο προφανώς ισοδύναμες παραστάσεις, ή να μετασχηματίσουμε τη διαφορά τους (αντίστοιχα το πηλίκο τους) με διαδοχικές ισοδυναμίες μέχρι να πάρουμε το 0 (αντίστοιχα το 1).

Στην ανάλυση, αν δεν περιοριστούμε βέβαια στο αλγεβρικό της μέρος, αυτή η στρατηγική είναι συχνά ανέφικτη, είτε γιατί αυτή η στρατηγική είναι εκτός πλαισίου, είτε γιατί δεν είναι και πολύ οικονομική. Έτσι, πρέπει να αναπτύξουμε μια εικόνα της ισότητας συνδεδεμένη με την τοπική προσέγγιση του απείρου, δηλαδή να πούμε για παράδειγμα ότι αν $\forall \varepsilon \succ 0, d(A,B) \prec \varepsilon$, για μια κατάλληλη απόσταση d, τότε A = B. Ως αποτέλεσμα, οι ανισότητες παίζουν στην ανάλυση κυρίαρχο ρόλο έναντι των αλγεβρικών ισοτήτων, ενώ και αυτές αποτελούν ένα βασικό τρόπο απόδειξης με ικανές συνθήκες.

2.4 Λάθη και ταξινόμηση λαθών

Όλα τα παραπάνω εμπόδια καθώς και οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, γίνονται εμφανή από τα λάθη τους. Ο Orton (1980)(βλέπε, [2]) πραγματοποίησε μια μελέτη, πειραματικά βασισμένη στις μεμονωμένες συνεντεύξεις 110 σπουδαστών, ηλικίας 16 έως 22 χρόνων, για να διαπιστώσει τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι φοιτητές. Όλοι οι φοιτητές είχαν επιλέξει ενότητες μαθηματικών και σίγουρα είχαν πάρει τουλάχιστον μια σειρά μαθημάτων απειροστικού λογισμού. Τελειώνοντας την εργασία του, ταξινόμησε τα λάθη που διέπραξαν οι φοιτητές σε τρεις κατηγορίες : 'δομικά λάθη', 'εκτελεστικά λάθη' και 'αυθαίρετα λάθη'.

Τα δομικά λάθη, είναι αυτά που εμφανίζονται από κάποια αποτυχία να εκτιμηθούν οι σχέσεις που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα ή να συλληφθεί μια στοιχειώδης αρχή λύσης. Δηλαδή, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι σε αυτή την κατηγορία συγκαταλέγονται τα λάθη που εμφανίζονται στην εγγραφή ορισμών, θεωρημάτων, προτάσεων. Όταν για παράδειγμα, οι φοιτητές πράττουν λάθη στην εγγραφή ενός ορισμού, αυτό μπορεί να σημαίνει όπως έχουμε δει, ότι δεν έχουν κατανοήσει την ίδια την έννοια ή δεν ξεκαθαρίσει τη σημασία των ποσοδεικτών. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν μπορούν να εκτιμήσουν τα αρχικά τους δεδομένα και επομένως τα «σφάλματα» πραγματοποιούνται από την αρχή. Με λίγα λόγια, τα προβλήματα εντοπίζονται στην κατανόηση αρχικών και θεμελιωδών συνθηκών, εννοιών.

Τα αυθαίρετα, είναι αυτά που προκύπτουν από την αποτυχία του αντικειμένου να λάβει υπόψη του τους περιορισμούς που καθορίζονται από τα δεδομένα. Έτσι, ενώ κάποιος φοιτητής μπορεί να έχει αντιληφθεί μια ιδιότητα, ωστόσο να συμπεράνει κάτι που δεν παράγεται από αυτή, αλλά ή να χρειάζεται και κάποιος επιπλέον περιορισμός για να οδηγηθεί στο συμπέρασμά του, ή να μην υπάρχει καμία λογική συνέχεια στους συνειρμούς του.

Τέλος, εκτελεστικά είναι αυτά που περιλαμβάνουν την αποτυχία να πραγματοποιηθούν οι χειρισμοί, αν και οι αρχικές σχέσεις μπορεί να έχουν γίνει κατανοητές. Εδώ, συμπεριλαμβάνονται τα λάθη που πραγματοποιούνται στις πράξεις ή λάθη που προκύπτουν από τη μη ικανότητα να εξαχθεί ένα συμπέρασμα μέσα από σχέσεις, οι οποίες όμως είναι σωστές.

Σύμφωνα με την παραπάνω ταξινόμηση θα χαρακτηρίσουμε τα λάθη που πραγματοποίησαν οι φοιτητές στο μάθημα του Απειροστικού Ι, κατά τη γραπτή εξέταση του Σεπτεμβρίου του 2003.

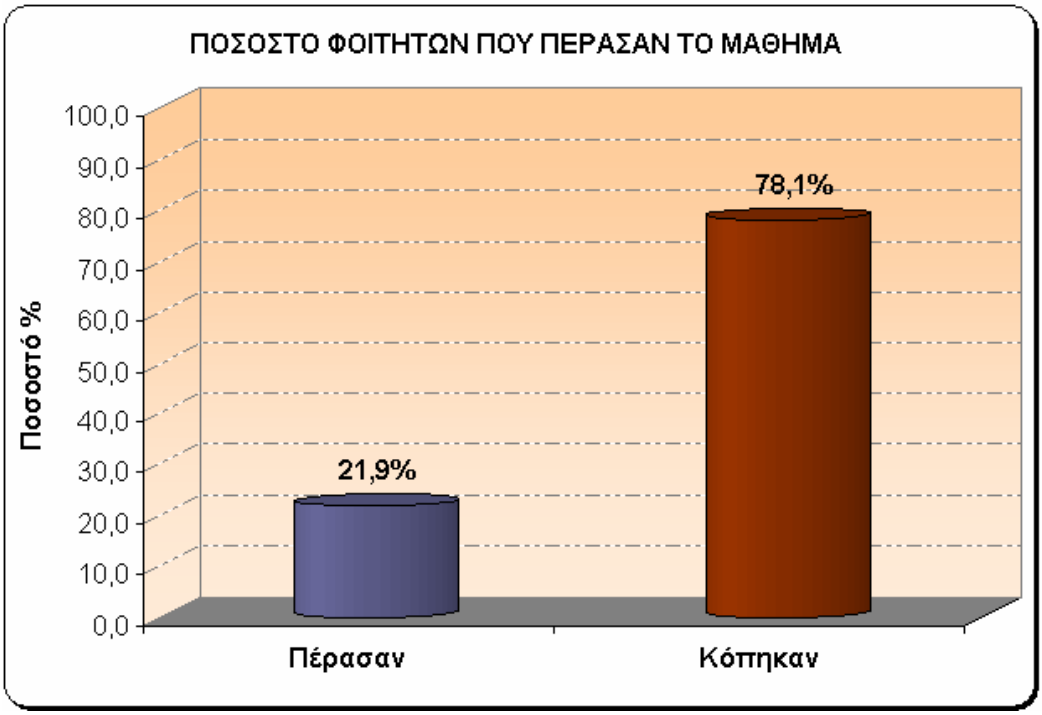
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΛΑΘΩΝ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ "ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι" ΤΟΝ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟ ΤΟΥ 2003

Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι, τον Σεπτεμβρίου του 2003, δόθηκε συνολικά από 379 φοιτητές, διάφορων ετών. Τα γραπτά των φοιτητών, που ήταν ήδη αξιολογημένα και βαθμολογημένα από τους διδάσκοντες του μαθήματος, τα μελετήσαμε για να ανακαλύψουμε τις δυσκολίες και τα συνήθη λάθη που πράττουν οι φοιτητές στις γραπτές εξετάσεις τους στο μάθημα αυτό.

Η μεθοδολογία μελέτης των γραπτών ήταν η ίδια, για όλα τα ζητούμενα. Χωρίζαμε τα γραπτά σε δυο κατηγορίες : στα γραπτά που οι φοιτητές είχαν ασχοληθεί με το συγκεκριμένο θέμα που μελετούσαμε και στα γραπτά των φοιτητών που δεν ασχολήθηκαν καθόλου με το θέμα, τα οποία δεν μπορούσαμε να μελετήσουμε και περισσότερο. Όσα λοιπόν γραπτά είχαν απάντηση, τα χωρίζαμε σε αυτά που η απάντηση ήταν σωστή(αυτό το βλέπαμε από τη βαθμολογία του θέματος) και στα γραπτά που οι απαντήσεις ήταν μη σωστές.(λέγοντας μη σωστές απαντήσεις, εννοούμε όχι μόνο τις λανθασμένες λύσεις, αλλά και απαντήσεις μη ολοκληρωμένες, ασαφείς, με κενά στην αλληλουχία των βημάτων κατά τη διαδικασία επίλυσης των θεμάτων). Συνεχίζαμε με τη μελέτη των γραπτών με τις μη σωστές απαντήσεις. Κάθε τέτοιο γραπτό το εξετάζαμε ξεχωριστά με πολύ μεγάλη προσοχή. Διαπιστώναμε οτι τόσο κάποιοι τρόποι αντιμετώπισης των θεμάτων, όσο και διάφορα λάθη ήταν κοινά σε πολλά διαφορετικά γραπτά. Σύμφωνα λοιπόν με τον τρόπο αντιμετώπισης του κάθε θέματος, αλλά και με τα λάθη που παρατηρούσαμε, χωρίζαμε τα γραπτά σε κατηγορίες. Με αυτό τον τρόπο ξέραμε πόσοι από τους φοιτητές επέλεξαν έναν συγκεκριμένο τρόπο αντιμετώπισης του εκάστοτε θέματος, αλλά και ποιο ακριβώς ήταν το λάθος ή τα λάθη σε κάθε περίπτωση.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήσαμε στατιστική μελέτη των δεδομένων μας για να έχουμε τα ακριβή ποσοστά επιτυχίας σε κάθε θέμα, καθώς και τα ποσοστά των φοιτητών που ακολούθησαν τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης των θεμάτων, αλλά και των λαθών που διέπραξαν. Τέλος, χαρακτηρίσαμε τα λάθη τους σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Orton(βλέπε, [2]) και σε κάθε θέμα χωριστά επισημάναμε τα συμπεράσματά μας.

Πριν τη μελέτη των θεμάτων, θελήσαμε να μάθουμε ποιο ήταν το ποσοστό επιτυχίας των φοιτητών στη συγκεκριμένη εξεταστική περίοδο, δηλαδή να δούμε πόσοι από αυτούς κατάφεραν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του μαθήματος. Χωρίσαμε τα γραπτά σε δύο κατηγορίες, σε αυτά που ο βαθμός τους ήταν μεγαλύτερος ή ίσος του πέντε και σε αυτά που είχαν βαθμό μικρότερο του πέντε. Έτσι, από τους 379 φοιτητές που συμμετείχαν σε αυτές τις γραπτές εξετάσεις, μόνο οι 83 μπόρεσαν να «περάσουν» το μάθημά τους. Η στατιστική ανάλυση έδειξε τα παρακάτω ποσοστά:



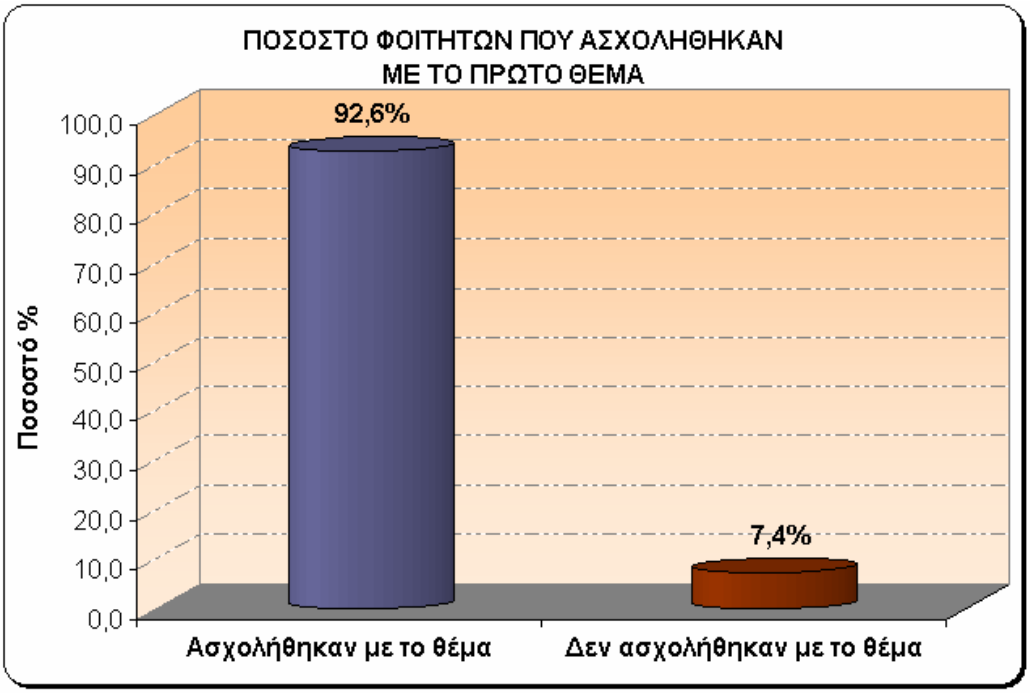
Έτσι, μόνο το 21,9% των φοιτητών κατάφερε να αντεπεξέλθει στις υποχρεώσεις του μαθήματος και συνεπώς να το «περάσει», ενώ το 78,1% των φοιτητών δεν μπόρεσε να επιτύχει στις εξετάσεις. Είναι γεγονός, ότι το ποσοστό επιτυχίας του μαθήματος είναι αρκετά μικρό και για αυτό η μελέτη και έρευνα που ακολουθεί είναι ενδιαφέρουσα για το πώς και που έγιναν τα λάθη, ποιες είναι οι αδυναμίες των φοιτητών και οδηγούμαστε σε τόσο μικρά ποσοστά επιτυχίας.

3.1 ΘΕΜΑ Ι : Αν $A \subseteq R$ μη κενό, φραγμένο και $\sup A = \inf A$, τι συμπεραίνετε για το Α;

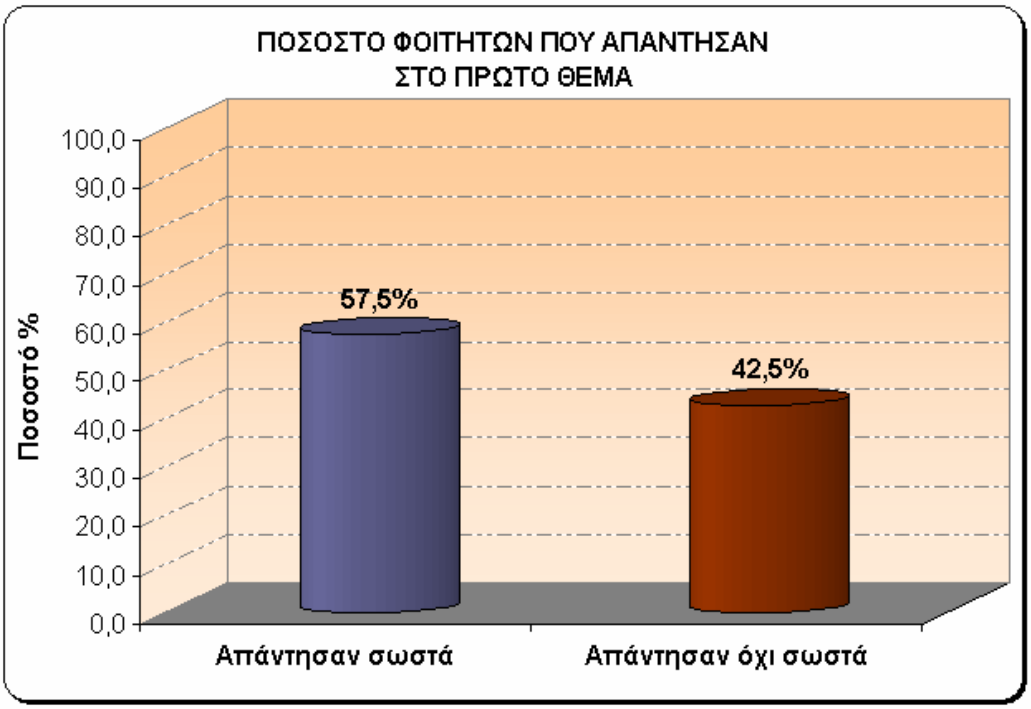
Με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν 351 φοιτητές. Από αυτούς, οι 202 απάντησαν σωστά, ενώ οι 149 δεν απάντησαν σωστά. Δηλαδή:

Ασχολήθηκαν με το θέμα : 351
Απάντησαν σωστά : 202
Απάντησαν όχι σωστά : 149

Η στατιστική ανάλυση έδειξε το παρακάτω ποσοστό φοιτητών που ασχολήθηκε με το θέμα:

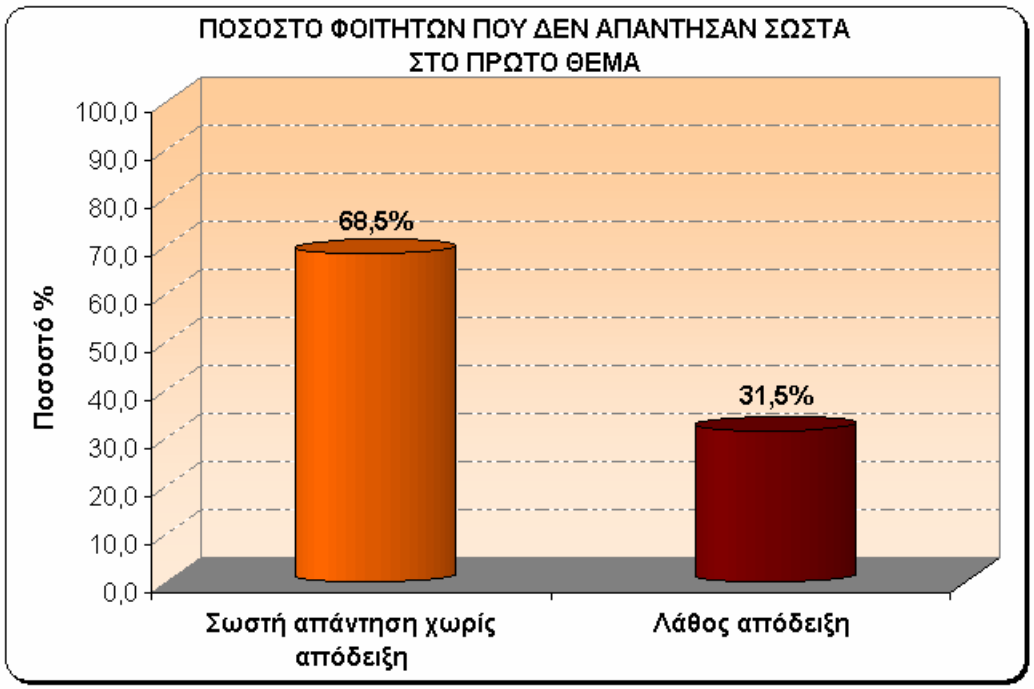


Τα ποσοστά επιτυχίας και αποτυχίας στο θέμα απεικονίζονται από το ακόλουθο διάγραμμα :



Πού έγιναν τα λάθη στα γραπτά; Είναι πραγματικά αξιοσημείωτο αυτό που παρατηρήσαμε κατά τη διαδικασία μελέτης των γραπτών. Από τα 149 γραπτά που ήταν όχι σωστά, τα 102 περιείχαν τη σωστή απάντηση(δηλαδή, ότι το σύνολο Α είναι μονοσύνολο), χωρίς όμως καμία αιτιολογία γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο ή πως μπορεί να γίνει αυτό. Κάποιοι από τους φοιτητές δεν έγραψαν απολύτως καμία εξήγηση, θεωρώντας ότι είναι κάτι το προφανές και το αναμφισβήτητο, ενώ κάποιοι άλλοι επαναλάμβαναν τα δεδομένα του θέματος ως αιτιολόγηση. Και στις δύο περιπτώσεις οι απαντήσεις θεωρούνται μη επαρκείς..Τα υπόλοιπα 47 γραπτά, περιείχαν ή λύσεις, οι οποίες δεν προέκυπταν από τα δεδομένα της εκφώνησης ή μη ολοκληρωμένες απαντήσεις ή λανθασμένες σχέσεις και αιτιολογήσεις.

Ας δούμε τα ποσοστά των γραπτών που αφενός υπήρχε η ζητούμενη απάντηση, αλλά χωρίς εξηγήσεις, και αφετέρου αυτών, που υπήρχαν απαντήσεις, αλλά ήταν ή μη ολοκληρωμένες, ανεπαρκείς ή απαντήσεις που δεν προέκυπταν από τα δεδομένα του θέματος(απαντήσεις, δηλαδή, που δεν έχουν μαθηματική αλληλουχία, μαθηματικές συνεπαγωγές).



Ενδεικτικά, θα αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα απαντήσεων, που αφορούν και τις δύο κατηγορίες γραπτών.

1η κατηγορία:

1. Ότι το A είναι μονοσύνολο, $\mathrm{A} = \{\alpha\}$.

2. Ότι το A έχει ένα μόνο στοιχείο.

3. Αφού το $\mathrm{A} \subseteq R$ μη κενό, φραγμένο και ισχύει για το A ότι $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το A αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

4. Αν $\mathrm{A} \subseteq R$ μη κενό και φραγμένο με $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$ τότε συμπεραίνουμε ότι το A είναι μονοσύνολο.

5. Επειδή $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$, το A είναι μονοσύνολο, $\mathrm{A} = \{\alpha\}$.

6. Το συμπέρασμα που βγαίνει από αυτά είναι ότι το A είναι μονοσύνολο, δηλαδή $\mathrm{A} = \{a\}$.

7. Προφανώς το Α αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

8. Αναγκαστικά το Α είναι μονοσύνολο. $A = \{\omega\}$ και το $\omega \in R$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

9. Προφανώς το Α είναι μονοσύνολο.

10. Α μονοσύνολο, $A = \{\alpha\}$.

Οι παραπάνω τρόποι απαντήσεων σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικά σωστοί. Ίσως κάποιοι από τους φοιτητές να απάντησαν διαισθητικά, να είκασαν δηλαδή το αποτέλεσμα και να μη το απέδειξαν. Όμως, αυτό δεν μπορεί να συνέβαινε για όλους, γιατί εκφράσεις του τύπου «αναγκαστικά» ή «προφανώς» δεν περιέχουν κάποια έννοια εικασίας, αλλά δείχνουν μια βεβαιότητα του αποτελέσματος. Ωστόσο, ορισμένοι ίσως να μη μπόρεσαν να το αποδείξουν, μη γνωρίζοντας τους ορισμούς των supremum και infimum ενός συνόλου.

Κάποιοι άλλοι θεώρησαν ότι ο ισχυρισμός τους δεν χρειάζονταν απόδειξη, αφού οι ίδιοι ήταν σίγουροι για αυτό, φαινόμενο που έχουν διαπιστώσει πολλοί ερευνητές(βλέπε, σελ 17). Έτσι, δημιουργούνται καταστάσεις σαν τις παραπάνω.

Μια φοιτήτρια που τη ρωτήσαμε για το θέμα αυτό, μας απάντησε ως εξής :
«Φ *Λοιπόν, νομίζω ότι μου έρχεται κατευθείαν στο μυαλό ότι είναι μονοσύνολο το Α. Συμπεραίνουμε δηλαδή από αυτά που μας λέει ότι πρόκειται για ένα μονοσύνολο*
Σ *Ναι. Αυτό;*
Φ *Το έχουμε πει, είναι δεδομένο. Οπότε θα έγραφα ότι το Α είναι ένα μονοσύνολο*
Σ Δε θα χρειαζόταν να γράψεις κάτι άλλο;
Φ Δε νομίζω πως θα ήταν απαραίτητο
Σ *Δηλαδή δε θα σκεφτόσουν να γράψεις κάποιες σχέσεις. Το θεωρείς περιττό;*
Φ *Ναι. Από τη στιγμή που μου λέει τι συμπεραίνετε για το Α, ναι θα ήταν περιττό να γράψω κάτι παραπάνω*» (συνέντευξη $1^{η}$, γραμμές 86-92)

Εδώ, η φοιτήτρια, προφανώς, είχε ακούσει την απάντηση είτε μέσα στο αμφιθέατρο είτε από κάποιον άλλο συμφοιτητή της ή ακόμη την είχε διαβάσει σε κάποιες σημειώσεις της. Δεν έχει καταλάβει πως στα μαθηματικά πρέπει να αποδεικνύουμε τους ισχυρισμούς μας ακόμα και αν κάτι αντίστοιχο έχει ειπωθεί κατά τη διάρκεια των μαθημάτων ή βρίσκεται σε κάποια από τα βιβλία μας. Επιπλέον, δίνει πολύ μεγάλη έμφαση στη λέξη «συμπεραίνετε» και την επικαλείται ως αιτιολογία στο να μη γράψει μια απόδειξη για όσα ισχυρίζεται.

Ένας άλλος φοιτητής, που συζητήσαμε μαζί του, μας απάντησε για το ίδιο θέμα ως εξής : «*Το σύνολο Α είναι κάτω φραγμένο,.. δηλαδή, από το inf του και επειδή είναι και άνω φραγμένο, δηλαδή από το sup του, είναι το μονοσύνολο… Όχι, δε νομίζω να χρειάζεται*(απαντά σε ερώτηση αν χρειάζεται να γράψει κάποιες σχέσεις παραπάνω)» (συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 106-110).

Εδώ, ο φοιτητής επικαλείται τα στοιχεία που πρέπει να χρησιμοποιήσει για τα συμπεράσματά του, ως αίτιο για αυτό που ισχυρίζεται. Δηλαδή, ενώ πρέπει να χρησιμοποιήσει τη σχέση $\inf A = \sup A$ για να διεξάγει ένα συμπέρασμα(δηλαδή ότι το σύνολο A είναι μονοσύνολο), αυτός απλά την χρησιμοποιεί για να ανακοινώσει το συμπέρασμά του(παράδειγμα 5).

2η κατηγορία:

1. Εφόσον για το σύνολο A ισχύει $\sup A = \inf A$ αυτό θα είναι της μορφής $A = \{\chi \in R : \alpha\chi + \beta \succ 0\}$, όπου $\alpha, \beta \in R$

2. Συμπεραίνουμε ότι $A = \{0\}$.

3. Είναι $A = 0$.

4. Το A είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο.

5. Το A περιέχει δύο φορές το ίδιο στοιχείο.

6. Το $A = ct$ σύνολο.

7. Για να έχουμε ένα $A \subseteq R$ μη κενό του οποίου το $\sup A = \inf A \Rightarrow$ ότι έχουμε ένα σύνολο ενός στοιχείου είτε ένα σύνολο από πολλά (περισσότερα) ίδια στοιχεία του τύπου $(\alpha, \alpha, \alpha, ..., \alpha)$.

8. Σημαίνει ότι το A είναι ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από ένα στοιχείο ή αποτελείται από n ίδια στοιχεία $n \geq 2, n \in (2, +\infty)$.

9. Κατ' αρχήν, από την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών έπεται ότι υπάρχει το $\sup A$ και το $\inf A$. Αφού τώρα το $\sup A = \inf A$ συμπεραίνουμε ότι $A = \varnothing$
   Γιατί (ι) το κενό είναι φραγμένο σύνολο και (ii) αν $\chi \notin \varnothing$ τότε $\chi = \sup A$ και $\chi = \inf A$ ταυτόχρονα.

10. Το A είναι μονοσύνολο αφού δεν είναι κενό σύνολο.

11. Αποτελείται από μια σταθερή συνάρτηση.

12. Έστω ότι $\left.\begin{array}{r}\sup \mathrm{A} = s \\ \\ \inf \mathrm{A} = s\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c}s \geq \chi \\ \\ \chi \geq s\end{array}\right\} \Longrightarrow \chi = s$.

Συμπεραίνουμε ότι το A είναι σταθερό στοιχείο.

13. Αφού το $\mathrm{A} \subseteq R$ είναι μη κενό και φραγμένο άρα θα υπάρχει $\gamma \in R$ και $\chi \in \mathrm{A}$ με $|\chi| \leq \gamma \Leftrightarrow -\gamma \leq |\chi| \leq \gamma$.
Το $\gamma = \sup \mathrm{A}$ και $-\gamma = \inf \mathrm{A}$. Όμως $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$.
Άρα $\gamma = -\gamma \Rightarrow \gamma = 0$.
Άρα το σύνολο A θα είναι $\mathrm{A} = \{0\}$.

14. $\mathrm{A} \subseteq R, \mathrm{A} \neq \varnothing$ τότε $\exists\{\chi, y.....\} \in \mathrm{A}$.
Έστω $\sup \mathrm{A} = \chi$ και $\inf \mathrm{A} = y$ με $\chi, y \in \mathrm{A}$..
Όμως $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A} = \chi = y$.
Οι πραγματικοί αριθμοί όμως είναι συνεχόμενοι και γνωρίζουμε ότι $\chi = y$.
Το A είναι μονοσύνολο εφ' όσον αποκλείεται να παρεμβάλλεται κάποιος άλλος μεταξύ του χ και του y και το σύνολο είναι μη κενό.

15. Αφού το $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{A} = m$ τότε αυτό το $m \in \mathrm{A}$ και είναι μοναδικό. Έστω ότι και $n \in \mathrm{A}, m \neq n$ τότε το $\sup \mathrm{A} \neq \inf \mathrm{A}$ άρα το σύνολο A αποτελείται από έναν μόνο αριθμό m.

Στην κατηγορία αυτή υπάρχει μια διαφορετική αντιμετώπιση του θέματος. Μπορεί ορισμένοι να απάντησαν σχεδόν μονολεκτικά, αλλά και λανθασμένα (παραδείγματα 2, 3, 4, 5, 6), αλλά άλλοι προσπάθησαν να αποδείξουν το συμπέρασμά τους, χωρίς όμως να υπάρχει αυστηρότητα σε όσα έγραψαν, φαινόμενο που έχει επιβεβαιωθεί από διάφορους ερευνητές(βλέπε σελ 17-19). Αυτοί, δοκίμασαν να αποδώσουν τους ορισμούς των supremum και infimum, αλλά παρέλειψαν πολλά στοιχεία, όπως τους ποσοδείκτες(παράδειγμα 12). Αυτό, επιβεβαιώνει(βλέπε, σελ 22-23) τη δυσκολία των φοιτητών να αποδίδουν ορισμούς εννοιών, και κυρίως ορισμούς που περιέχουν ποσοδείκτες. Τέλος, διαπιστώσαμε ότι ορισμένοι φοιτητές δοκίμασαν άλλους τρόπους αποδείξεων, όπως την εις άτοπον απαγωγή(παράδειγμα 15), αλλά και εκεί δεν τα κατάφεραν ή έκαναν κάποιους «λανθασμένους» συλλογισμούς από τους οποίους βέβαια δεν προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα (παραδείγματα 7, 8, 9, 13) ή έφτασαν στο ζητούμενο με μη λογικά βήματα (παραδείγματα 10, 14).

Σε αυτή την κατηγορία τα λάθη που διέπραξαν οι φοιτητές είναι κυρίως αυθαίρετα, μια και προκύπτουν από μη λογικούς συνειρμούς. Δηλαδή, ενώ ξεκινούν από την υπόθεσή τους, το αμέσως επόμενο συμπέρασμα δεν προκύπτει από την υπόθεση που έχουν.

Όπως και να έχει όμως, αυτό που αποδείχτηκε από το συγκεκριμένο θέμα είναι ότι οι φοιτητές έχουν τρομερές δυσκολίες με την έννοια της απόδειξης. Και αν λάβουμε υπόψη μας ότι αρκετοί από αυτούς βρίσκονται σε μεγάλα έτη, επομένως θα έπρεπε να είχαν εισχωρήσει στην έννοια της απόδειξης, το γεγονός είναι πολύ ανησυχητικό.

Συμπεράσματα

Όπως είδαμε από τη μελέτη του θέματος, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με την έννοια της απόδειξης. Ένα σημαντικό ποσοστό ενώ έγραψε τη σωστή απάντηση, δε δικαιολόγησε πως και από πού προκύπτει. Με τη βοήθεια των φοιτητών που συμμετείχαν στην έρευνα μας, διαπιστώσαμε ότι δεν έχουν κατανοήσει τι πρέπει να αποδεικνύουν, τι θεωρείται δεδομένο, ποιο είναι το ζητούμενο.Ρωτήσαμε έναν φοιτητή για τις εκφωνήσεις των θεμάτων και απάντησε : «*Μερικά θέματα δεν είναι σαφή. Αρχικά, δεν είναι σαφή τα δεδομένα και μετά δεν είναι σταδιακά τα ερωτήματα, έτσι ώστε να μας βοηθούν. Κάποιες φορές είναι λίγο «απότομα» τα ερωτήματα, θα πρέπει να υπάρχουν κάποια ερωτήματα βοηθητικά… Ναι, κάποιες φορές υπάρχουν, όπως σε ένα θέμα των εξετάσεων του Ιανουαρίου*(εννοεί ότι υπάρχει πρόβλημα στην κατανόηση των ζητούμενων)»(συνέντευξη 2^{η} , γραμμές 123-126). Ένας άλλος φοιτητής, στην ίδια ερώτηση, είπε : «*Πολλές φορές τα δεδομένα δεν είναι και πολύ σαφή, πρέπει να «φας» αρκετή ώρα μέχρι να καταλάβεις τι σου ζητάει. Τις περισσότερες φορές είναι κατανοητά και τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Όμως, υπάρχουν και φορές που χρειάζεται πολύ ώρα να βρεις τα δεδομένα, να τα μαζέψεις, γιατί τα γράφουν αλλού το ένα, αλλού το άλλο.»* (συνέντευξη 3^{η}, γραμμές 111- 112)

Πολλοί από τους φοιτητές θεωρούν πως ότι τους φαίνεται αυτονόητο δεν χρειάζεται απόδειξη και αρκούνται στη διατύπωση του συμπεράσματος. Άλλοι, επαναλαμβάνουν τα δεδομένα τους ως αιτία του αποτελέσματος, ενώ πρέπει να τα αναλύσουν για να οδηγηθούν στο συμπέρασμα. Έτσι, οι απαντήσεις τους είναι ανεπαρκείς και ασαφείς, όπως επισημαίνουν και πολλοί ερευνητές.(βλέπε, σελ 17-19)

Επίσης, διαπιστώσαμε ότι πολλοί από τους φοιτητές που προσπάθησαν να αποδώσουν τους ορισμούς των $\sup A$ και $\inf A$ δεν τα κατάφεραν. Έγραφαν κάποιες σχέσεις που προκύπτουν από αυτούς, αλλά παρέλειπαν, για παράδειγμα, να γράψουν τους ποσοδείκτες, γεγονός που δείχνει τη δυσκολία των φοιτητών να γράφουν ορισμούς εννοιών και κυρίως εννοιών που περιέχουν ποσοδείκτες(βλέπε ,σελ 22)

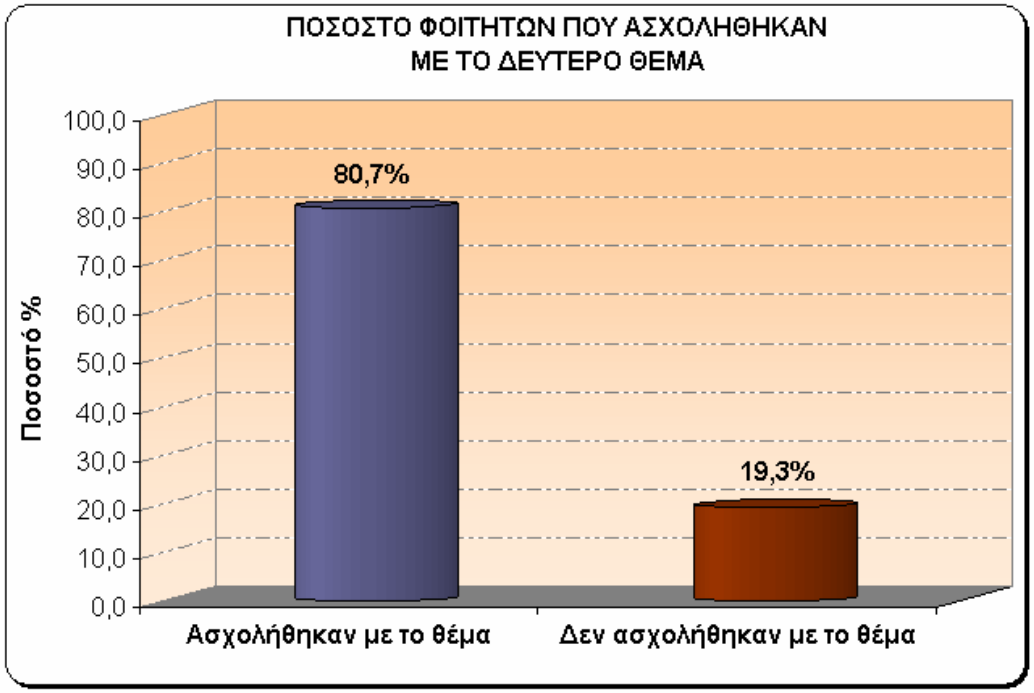
Συνειρμικά, εντοπίσαμε δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με την έννοια της απόδειξης καθώς και δυσκολίες που έχουν στη γραφή των ορισμών των εννοιών των $\sup A$ και $\inf A$.

3.2 ΘΕΜΑ ΙΙ : Αν $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum του B.

Με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν 306 φοιτητές, από τους οποίους οι 113 απάντησαν σωστά, ενώ οι 193 απάντησαν μη σωστά. Δηλαδή,

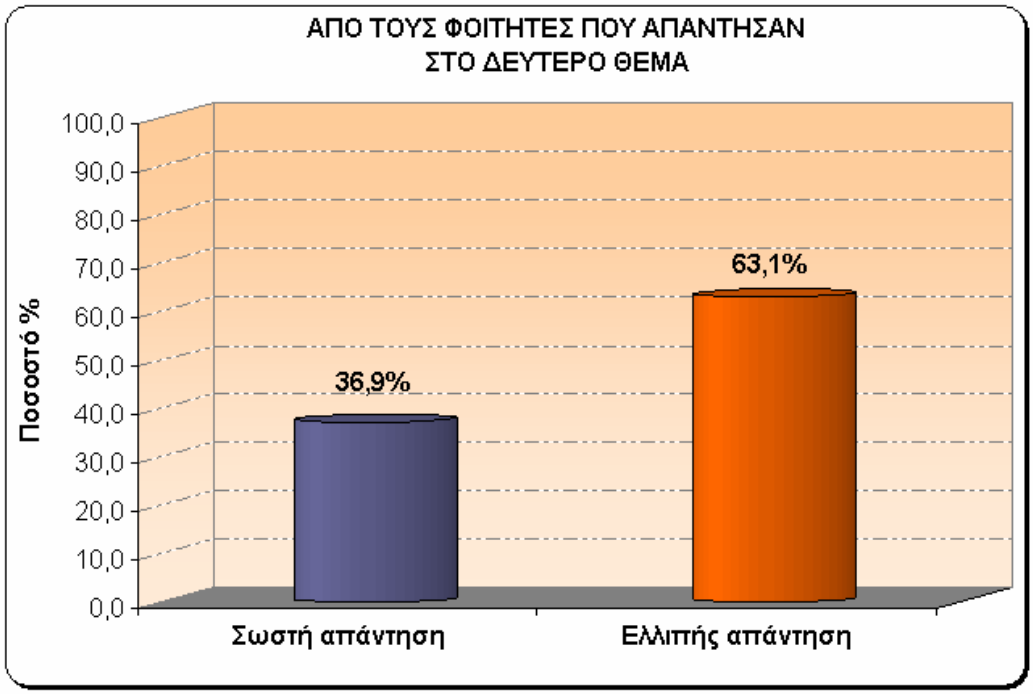
Ασχολήθηκαν με το θέμα: 306
Απάντησαν σωστά : 113
Δεν απάντησαν σωστά : 193

Κάνοντας τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων μας, πήραμε τα πιο κάτω ποσοστά για την ενασχόληση των φοιτητών με το θέμα.



Από όλους τους φοιτητές που επεδίωξαν να απαντήσουν ολοκληρωμένα, με σαφήνεια και με απόλυτες αιτιολογημένες λύσεις, μόνον οι 113 τα κατάφεραν. Στους υπόλοιπους, παρατηρήθηκαν σημαντικά λάθη και σπουδαίες παραλείψεις .

Πρώτα, θα δούμε το ποσοστό επιτυχίας των φοιτητών στο ζητούμενο θέμα:



Βλέπουμε, λοιπόν, ότι μόνο το 36,9% των φοιτητών (λιγότεροι, δηλαδή, από τους μισούς) κατάφερε να δώσει μαθηματικά ολοκληρωμένη απάντηση. Ωστόσο, αυτό που θα δούμε πολύ αναλυτικά είναι που παρατηρήθηκαν τα διάφορα λάθη Αρχικά, διαπιστώσαμε ότι υπήρξε ένα μικρό ποσοστό φοιτητών που βρήκε σωστά το σύνολο Β, έδωσε τη σωστή απάντηση για τα inf, sup, max, min, αλλά δεν εξήγησε πώς προέκυπταν αυτά. Άλλοι , δεν παρουσίασαν στο γραπτό τους ποιο είναι το σύνολο Β, αλλά απάντησαν σωστά τα ερωτήματα Μπορεί, δηλαδή, να έφτασαν κάποιοι στο ζητούμενο, στο επιθυμητό αποτέλεσμα, δεν ήταν όμως αυστηρή η απάντησή τους. Διαβάζοντας κανείς τις λύσεις αυτές, δεν κατανοεί πως οδηγήθηκαν σε αυτό το συμπέρασμα. Ας δούμε, λοιπόν, αναλυτικά μια τέτοια αντιμετώπιση του ζητήματος :

Κάποιοι φοιτητές παρουσίασαν τον παρακάτω πίνακα, για την εύρεση του Β.

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$
$\chi-1$	-	-	+	
$\chi+\sqrt{2}$	-	+	+	
$(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})$	+	-	+	

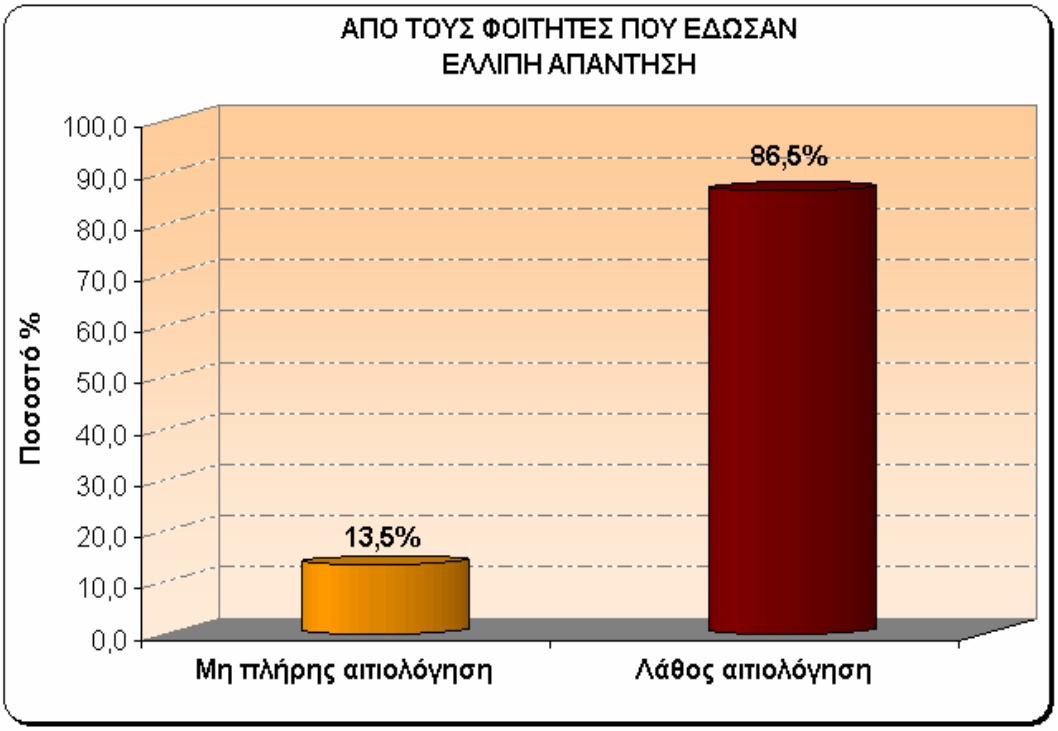
Στη συνέχεια συμπλήρωσαν :

«Άρα, το σύνολο Β είναι $B=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(1,+\infty)$ και τα supremum, maximum, minimum, infimum δεν υπάρχουν.»

Κάποιοι άλλοι έγραφαν: «Το σύνολο $B=\{\chi\in Q:(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})\succ 0\}$ δεν είναι φραγμένο, οπότε δεν υπάρχουν τα supremum, maximum, minimum, infimum».

Οι πρώτοι, πουθενά δεν ανέφεραν, ότι το σύνολο Β δεν είναι φραγμένο και ως συνέπεια αυτού δεν υπάρχουν τα supremum, maximum, minimum, infimum. Οι δεύτεροι, δε έγράψαν ποιο είναι το σύνολο, αλλά απάντησαν στα ερωτήματα. Μπορεί να απουσιάζουν από τις συγκεκριμένες απαντήσεις μερικές λέξεις για να είναι ολοκληρωμένες, ωστόσο έστω και αυτές οι λιγοστές, αρκούν για να θεωρηθούν μη πλήρως αιτιολογημένες.

Τι ποσοστό αντιπροσωπεύουν τα γραπτά αυτά;



Άρα, το ποσοστό των 13,5% των φοιτητών παρόλο που απαντά στα ζητούμενα (και μάλιστα δίνει σωστά αποτελέσματα), δεν ανταποκρίνεται όμως στις απαιτήσεις που τίθενται από τα μαθηματικά, δηλαδή σε πλήρως αιτιολογημένες λύσεις. Η έλλειψη αυστηρότητας, για το τι πρέπει να γράψουν για να είναι τεκμηριωμένες οι απαντήσεις τους, χαρακτηρίζει και αυτό το θέμα. Επιπλέον, το 86,5% των φοιτητών δίνει λανθασμένες απαντήσεις, τόσο για το Β, όσο και για τα sup, max, min, inf αυτού.

Ο διάλογος που είχαμε με μια φοιτήτριά για το συγκεκριμένο θέμα, ήταν ο εξής :

«Φ *Καταρχήν, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τι είναι το Β. Οπότε πρέπει να λύσουμε την ανισότητα.*

Σ *Τι βαθμού είναι η ανίσωση;*

Φ *Η ανισότητα είναι δευτέρου βαθμού.*

Σ *Πως θα τη λύσουμε;*

Φ *Θα την κάνουμε εξίσωση για να βρούμε τις ρίζες, θα φτιάξουμε το γνωστό από το Λύκειο πινακάκι για να βρούμε τα πρόσημα.*

Σ *Μπορείς να μου τα γράψεις αυτά;*

Φ *Ναι.*

Οπότε, βρίσκουμε το σύνολο Β μετά από τους πρόχειρους υπολογισμούς .Αυτό αποτελείται από δύο ανοιχτά σύνολα, από δύο ανοιχτά διαστήματα ,συγγνώμη, το $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$.

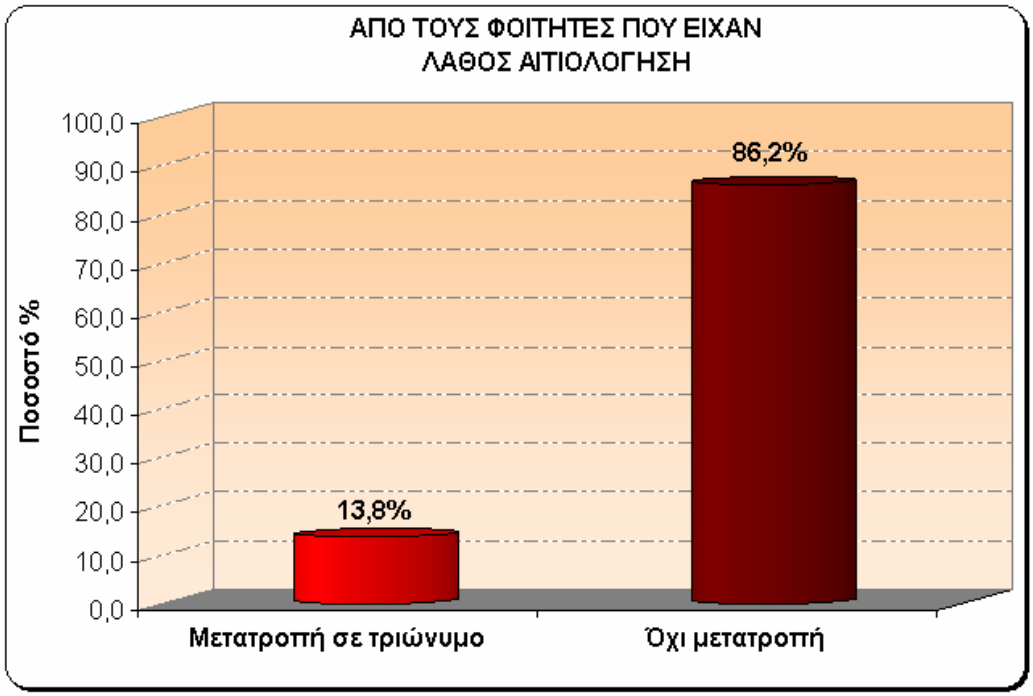
Όσον αφορά τα sup, inf, max, min, καταλαβαίνουμε κατ΄ ευθείαν ότι max και min δεν υπάρχουν, δεν υπάρχουν δηλαδή τιμές τέτοιες….και ούτε τα inf και sup υπάρχουν τελικά

Σ *Αυτό μπορείς να μου το εξηγήσεις από πού προκύπτει;*

Φ *Δεν υπάρχουν, φαίνεται από τα διαστήματα*»(συνέντευξη 1η , γραμμές 94-102»

Κατά τη διάρκεια μελέτης των γραπτών παρατηρήσαμε ότι υπήρξαν δύο δρόμοι για την αντιμετώπιση της άσκησης. Μια μερίδα φοιτητών μετέτρεψε την ανίσωση σε τριώνυμο και στη συνέχεια βρήκε τις ρίζες είτε από τη διακρίνουσα, είτε από τη μορφή του τριωνύμου, ενώ η άλλη, βρήκε τις ρίζες χωρίς να μετατρέψει την ανίσωση σε τριώνυμο. Από εκεί και πέρα, όλοι τους προσπάθησαν να γράψουν το Β και να απαντήσουν στα ερωτήματα.

Εδώ, διαπιστώνουμε ότι ορισμένοι φοιτητές επιλέγουν να μετασχηματίσουν την ανίσωση σε εξίσωση, αφού προφανώς η αντιμετώπισή της είναι πιο εύκολη. Τα ποσοστά και των δύο κατηγοριών φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:



Έτσι, μόνο το 13,8% ακολούθησε τη διαδικασία μετατροπής σε τριώνυμο, ενώ το 86,2% επέλεξε τον άλλο τρόπο. Εντούτοις, οι φοιτητές παρουσίασαν ίδιας μορφής λάθη, είτε αποφάσισαν να δουλέψουν με τον πρώτο τρόπο, είτε με το δεύτερο. Σε πρώτη φάση θα τα δούμε ξεχωριστά για κάθε κατηγορία και στη συνέχεια θα τα δούμε συνολικά.

Πρώτη κατηγορία (μετατροπή σε τριώνυμο)

Όπως προαναφέραμε, κάποιοι από τους φοιτητές επέλεξαν να βρουν τις ρίζες με τη βοήθεια της διακρίνουσας, αφού προφανώς δεν μπορούσαν να τις δουν από τη μορφή της ανίσωσης. Ας δούμε, όμως, τι έγραψαν :

$$B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$$

$$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \chi^2 + \sqrt{2}\chi - \chi - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} = 0.$$

$$\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} = \begin{cases} \chi_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \\ \chi_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Σημείωση : Οι φοιτητές, αφ' ενός δεν «είδαν» τις ρίζες «με το μάτι» και αφετέρου δεν πρόσεξαν ότι η διακρίνουσα είναι ένα τέλειο τετράγωνο.

Οι υπόλοιποι αυτής της κατηγορίας, μετέτρεψαν την ανίσωση σε τριώνυμο και βρήκαν τις ρίζες από τη μορφή του. Δηλαδή, έγραψαν:

$$B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$$

$$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \chi^2 + \sqrt{2}\chi - \chi - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} = 0.$$

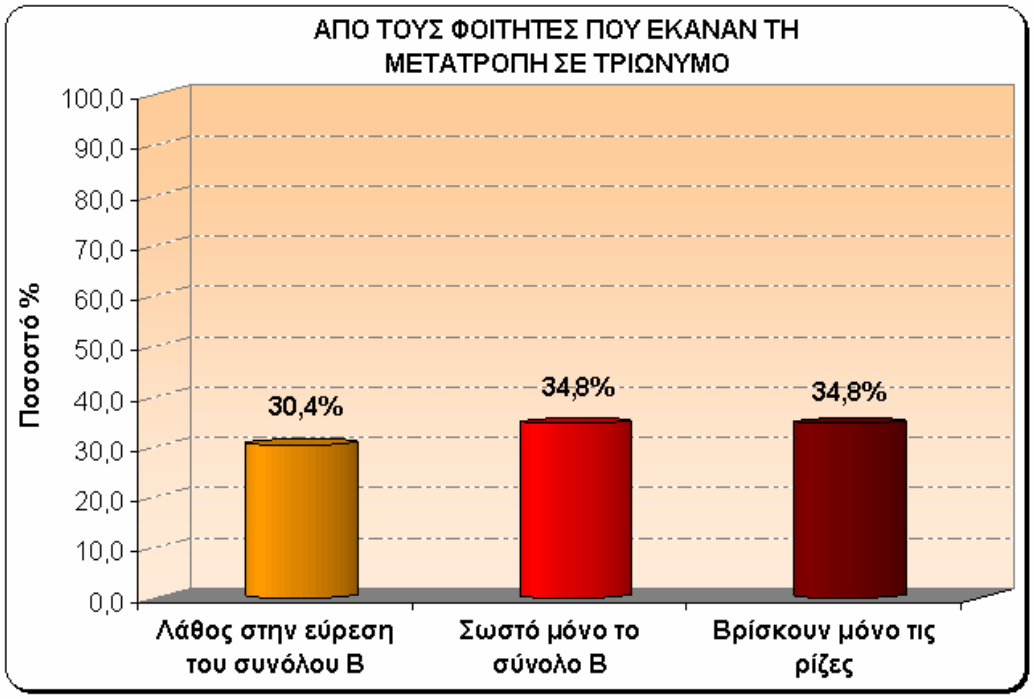
Άρα, οι ρίζες της ανισότητας είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$.

Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση που οι φοιτητές έγραψαν ως ρίζες το 1 και το $-\sqrt{2}$, προτίμησαν να μετασχηματίσουν την ανίσωση σε τριώνυμο και μετά να απαντήσουν. Και αυτό, βέβαια, δείχνει κατά ένα τρόπο την «ασφάλεια» που νιώθουν να δουλεύουν με εξισώσεις παρά με ανισώσεις.

Αφού βρέθηκαν οι ρίζες, είτε με τη διακρίνουσα είτε όχι, σημειώσαμε τα εξής:

- 7 φοιτητές έκαναν λάθος στην εύρεση του Β (πρόσημα στον πίνακα ή στη λύση της ανισότητας αντί για «ή», έβαζαν «και»).
- 8 φοιτητές βρήκαν σωστά το Β, αλλά έκαναν λάθη στα sup, inf, max, min.
- 8 φοιτητές έδωσαν και άλλες απαντήσεις(σε όλες αυτές έχουν βρει τις ρίζες).

Τα αποτελέσματα που πήραμε από τη στατιστική ανάλυση είναι τα ακόλουθα:



Ας δούμε αναλυτικά. Όμως, την κάθε περίπτωση:

(α) Λάθος εύρεση του Β.

1. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} = 0$

$\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

Άρα, οι δύο ρίζες είναι:

$$\chi_{1,2} = \frac{-2 + 1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} = \begin{cases} \chi_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \\ \chi_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Το τριώνυμο είναι θετικό ανάμεσα στις ρίζες. Άρα,

χ	$-\infty$	χ_2	χ_1 $+\infty$
Τριώνυμο	-	+	-

2. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})=0 \Rightarrow \chi^2+(\sqrt{2}-1)\chi-\sqrt{2}=0$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$. Άρα,

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1 $+\infty$
Τριώνυμο	-	-	+

Το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για $\chi \in (1,+\infty)$

3. $B=\{\chi \in Q : (\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \succ 0\}$
$(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})=0 \Rightarrow \chi^2+(\sqrt{2}-1)\chi-\sqrt{2}=0$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$. Άρα,

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1 $+\infty$
Τριώνυμο	+	-	+

Άρα, το $\chi \prec -\sqrt{2}$ και $\chi \succ 1$. Δηλαδή, $B=\{\chi \in Q : \chi \prec -\sqrt{2}$ και $\chi \succ 1\}$.

4. $B=\{\chi \in Q : (\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})=0 \Rightarrow \chi^2+(\sqrt{2}-1)\chi-\sqrt{2}=0$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$.

Άρα, $\chi \succ 1$ και $\chi \succ -\sqrt{2}$. Όμως, $\chi \in Q$ οπότε $\chi \succ 1$.

(β) Σωστή εύρεση του Β, αλλά λάθος στα inf, max, min, sup.

1. $\mathrm{B}=\{\chi \in Q : (\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})=0 \Rightarrow \chi^2+(\sqrt{2}-1)\chi-\sqrt{2}=0$

Άρα, οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$. Άρα,

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$
Τριώνυμο	+	-	+	

$\mathrm{B}=\{\chi \in Q : \chi \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (1,+\infty)\}$

Έστω $\mathrm{A}=(-\infty,-\sqrt{2})$ και $\Gamma=(1,+\infty)$

Για $\chi \in \mathrm{A}$: Δεν υπάρχει $\inf \mathrm{A}$
Δεν υπάρχει $\min \mathrm{A}$

Δεν υπάρχει $\max \mathrm{A}$

Για $\chi \in \Gamma$: Δεν υπάρχει $\min \Gamma$ $\min \Gamma$
Δεν υπάρχει

Δεν υπάρχει $\sup \Gamma$

$\sup A = -\sqrt{2}$ $\inf \Gamma = 1$

Όμως, $\chi \in B \Rightarrow \chi \in (A \cup \Gamma)$
Άρα, έχουμε ότι:
$\sup B = \sup(A \cup \Gamma) = \max\{\sup A, \sup \Gamma\} = -\sqrt{2}$ -
$\inf B = \inf(A \cup \Gamma) = \min\{\inf A, \inf \Gamma\} = 1$

Επομένως, $\sup B = -\sqrt{2}$
$\inf B = 1$
Δεν υπάρχει $\max B$
Δεν υπάρχει $\min B$

2. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$
$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} = 0$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

Για να είναι το τριώνυμο θετικό πρέπει το $\chi \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$

Για $\chi = 1$: $(1\text{-}1)(1 + \sqrt{2}) = 0$
Για $\chi = -\sqrt{2}$: $(-\sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 0$
Για $\chi = +\infty$: $(+\infty - 1)(+\infty + \sqrt{2}) = +\infty$
Για $\chi = -\infty$: $(-\infty - 1)(-\infty + \sqrt{2}) = +\infty$

Επομένως, $\sup B = +\infty$ διότι $\forall \chi \in B \Rightarrow f(\chi) \leq \sup B$
Επειδή το $\sup B \notin B, (+\infty \notin (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty))$ και για αυτό δεν υπάρχει το $\max B$.
Το $\inf B = 0$ διότι $\forall \chi \in B \Rightarrow \inf B \leq f(\chi)$
Επειδή το $\inf B \notin B \Rightarrow$ Δεν υπάρχει και το $\min B$.

3. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

Τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες το1 και το $-\sqrt{2}$

$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

Άρα, $\chi \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$

Δηλαδή, $\chi \prec -\sqrt{2}$ οπότε $\sup B = 1$ ή $\chi \succ 1$ οπότε $\inf B = -\sqrt{2}$

Τα max και min του συνόλου δεν υπάρχουν, διότι τα διαστήματα είναι ανοιχτά, γιατί δεν υπάρχει το (=) στην αρχική ανισότητα.

4. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} = \begin{cases} \chi_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \\ \chi_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

χ	$-\infty$	χ_2	χ_1 $+\infty$
Τριώνυμο	+	-	+

Το Β είναι φραγμένο σύνολο, άρα, $\sup B = \chi_2$ και $\inf B = \chi_1$, ενώ max και min δεν έχει.

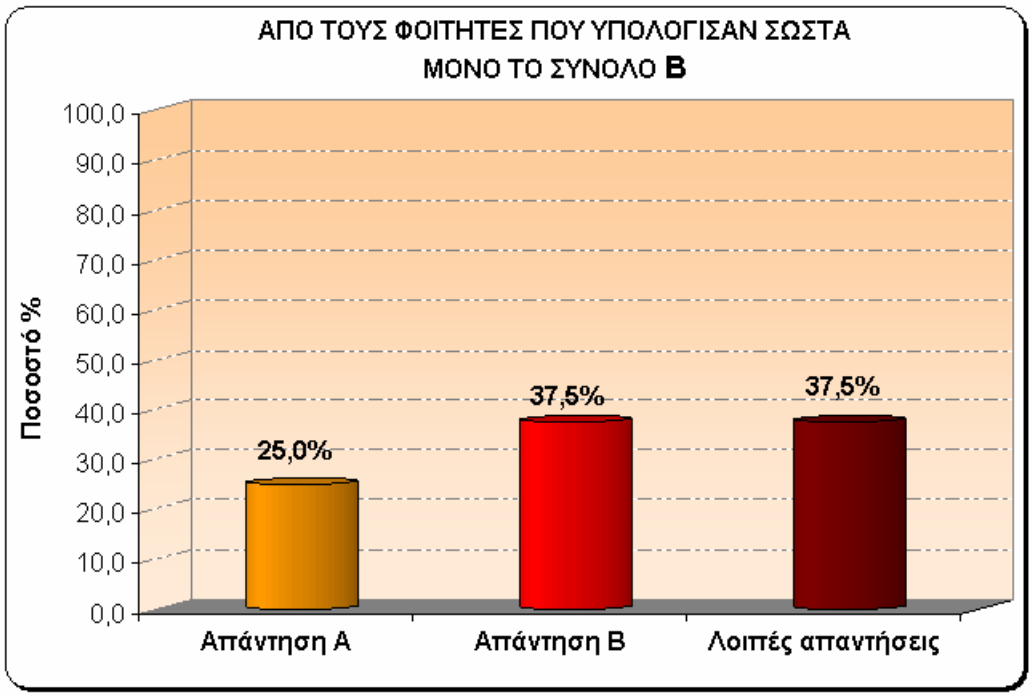
5. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

χ	$-\infty$	χ_2	χ_1	$+\infty$
Τριώνυμο	+	-	+	

Άρα είναι $\sup B = \chi_1$ και $\inf B = \chi_2$, ενώ τα max, min δεν υπάρχουν, γιατί τα άκρα είναι άρρητοι, ενώ τα $\chi \in Q$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ως απάντηση Α : $\sup B = \max\{\chi_1, \chi_2\}$, $\inf B = \min\{\chi_1, \chi_2\}$, ως απάντηση Β : $\sup B = \min\{\chi_1, \chi_2\}$, $\inf B = \max\{\chi_1, \chi_2\}$ και τις υπόλοιπες απαντήσεις ως λοιπές λύσεις, θα έχουμε την παρακάτω κατανομή αυτών, σε ποσοστιαίες μονάδες:



(γ) Άλλες απαντήσεις

1. $\mathrm{B} = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$$

Οι ρίζες είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$

Η παράγωγος είναι $2\chi + \sqrt{2} - 1$.

$$2\chi + \sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow \chi = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι $2 \succ 0$ άρα στο σημείο χ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Άρα $\sup \mathrm{B} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \notin Q$, άρα δεν υπάρχει το min του συνόλο.

Αφού η συνάρτηση δεν παρουσιάζει πουθενά άλλο τοπικό ακρότατο συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει max και inf.

2. $\mathrm{B} = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$$

$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} = \begin{cases} \chi_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \\ \chi_2 = \dfrac{-\sqrt{2}+1-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Το B δεν είναι φραγμένο επομένως δεν υπάρχει supremum.

3. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2}-1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \begin{cases} 1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=2 \\ 1-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Άρα, είναι $\inf B = 2$ και min δεν έχει.

4. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

$\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

Επομένως, δεν υπάρχει λύση στους ρητούς, άρα B=∅⇒sup B = -∞ και inf B = +∞.

5. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

Παρατηρώ ότι $\inf B = 0$ αφού από την πρόταση χαρακτηρισμού του infimum :
$\forall \varepsilon \succ 0, \alpha = \inf A \Leftrightarrow \alpha + \varepsilon \succ \chi$ για κάποιο $\chi \in A, A \subseteq R$, προκύπτει ότι
$0 + \varepsilon \succ \chi \Rightarrow \varepsilon \succ \chi$.
Το min B δεν υπάρχει, αφού $\inf B \notin B$. Ακόμα, $\sup B = \max B = +\infty$.

6. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Leftrightarrow \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi - \sqrt{2} \succ 0$

Το sup B δεν υπάρχει, όπως δεν υπάρχει και το max B.
Για $\chi = 1$: $(1-1)(1+\sqrt{2}) = 0$. Άρα, $\inf B = 1$.

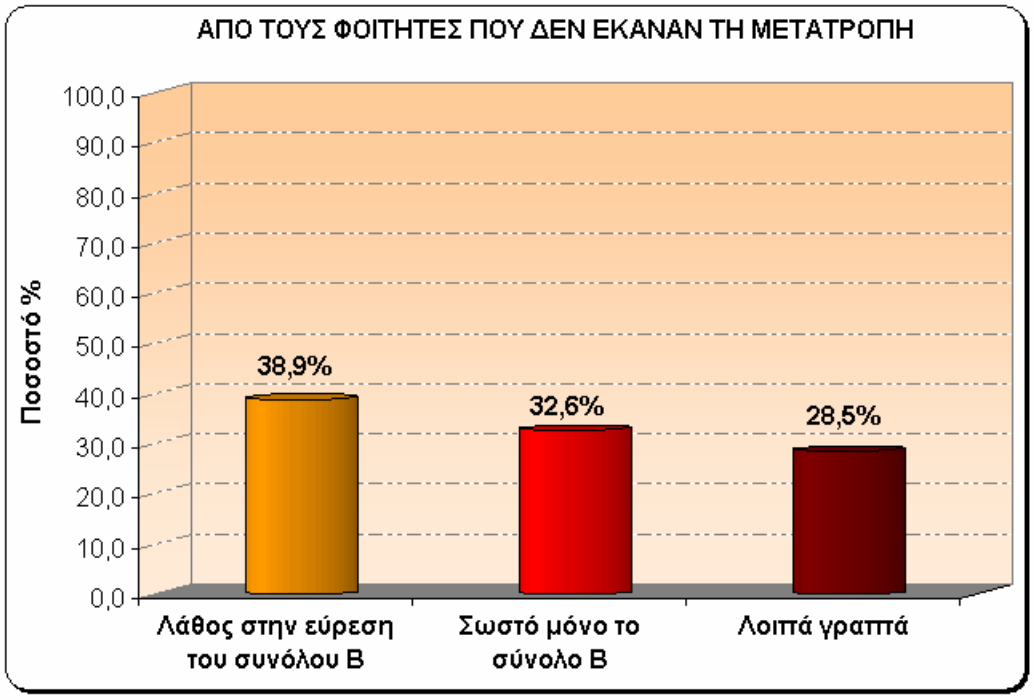
7. Γνωρίζουμε ότι : $\sup A = \sup\{f(\chi) : \chi \in A\}$ και $\inf A = \inf\{f(\chi) : \chi \in A\}$.
Μέγιστο έχουμε όταν για κ ισχύει: $f(\kappa) \succ f(\chi)$
Ελάχιστο έχουμε όταν για λ ισχύει: $f(\lambda) \prec f(\chi)$.
Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = \chi^2 + (\sqrt{2} - 1)\chi + \sqrt{2}$
Για $\chi = -\sqrt{2}$: $(-\sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 0$
Άρα, $\min f(\chi) = \inf f(\chi) = 0$.
Το max δεν υπάρχει γιατί $f(\chi) \succ 0$, άρα η συνάρτηση τείνει στο $+\infty$. Επομένως δεν υπάρχει και το sup της συνάρτησης.

Όπως παρατηρήσαμε στα πιο πάνω παραδείγματα, οι περισσότεροι από τους φοιτητές απάντησαν στα ερωτήματα χωρίς να έχουν βρει το σύνολο B. Κάποιοι μπορεί να έγραψαν τις ρίζες, αλλά αυτό δεν είναι αρκετό για να μπορέσει κανείς να βρει τα ζητούμενα του θέματος. Ωστόσο, αυτοί θεώρησαν ότι μπορούν να το κάνουν. Βέβαια, όπως είδαμε, λιγοστοί ήταν αυτοί που προσπάθησαν να

αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, έστω και λανθασμένα, αφού οι υπόλοιποι αρκέστηκαν με το να «ανακοινώσουν» ποιες είναι αυτές.

Δεύτερη κατηγορία (χωρίς μετατροπή σε τριώνυμο):

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι φοιτητές που δεν χρειάστηκε να μετασχηματίσουν την ανίσωση σε τριώνυμο για να βρουν τις ρίζες της. Παρόλο αυτά, και εδώ παρατηρήθηκαν λάθη, τόσο στην εύρεση του συνόλου Β, όσο και στα $\inf B, \sup B, \max B, \min B$. Μετά τη μελέτη των 144 γραπτών διαπιστώσαμε ότι στα 56 δεν ήταν υπολογισμένο σωστά το Β, στα 47 ήταν σωστά το Β, αλλά ήταν λάθος τα inf, max, min, sup και στα υπόλοιπα 41 υπήρχαν διάφορα άλλα λάθη. Έτσι, η στατιστική ανάλυση έδειξε τα πιο κάτω αποτελέσματα:



Ποια ήταν τα λάθη, όμως, σε αυτή την κατηγορία; Αυτό το ερώτημα και εδώ θα το δούμε πάρα πολύ αναλυτικά, έτσι ώστε να μπορέσουμε να καταλάβουμε ποιες είναι πραγματικά οι αδυναμίες των φοιτητών μας. Θα αναφερθούμε σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά, όπως κάναμε και προηγουμένως.

(α) Λάθος εύρεση του Β

1. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες είναι το1 και το $-\sqrt{2}$. Άρα,

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$
Τριώνυμο	-	-	+	

Άρα, τελικά έχουμε $B = \{\chi \in Q : \chi \succ 1\}$.

2. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

Πρέπει $\left.\begin{array}{c} \chi - 1 \succ 0 \\ \text{και} \\ \chi + \sqrt{2} \succ 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \chi \succ 1$

(Άρα, $B = \{\chi \in Q : \chi \succ 1\}$.

Αν $f(\chi) = (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2})$, τότε $\lim\limits_{\chi \to 1^+} f(\chi) = \inf f(\chi)$.

Το Β δεν έχει supremum εφόσον δεν είναι άνω φραγμένο.

Η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f'(\chi) = (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2})' + (\chi + \sqrt{2})(\chi + 1)' = (\chi + \sqrt{2}) + (\chi - 1)(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) =$

$$\frac{2\chi\sqrt{2} + 4 + 2\chi\sqrt{2} + \chi - 2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{4\chi\sqrt{2} + \chi + 3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi = \frac{2\sqrt{2} - 3}{4\sqrt{2} + 1}$$

χ	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}+1}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	-		+
$f(\chi)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως το Β έχει minimum το $\frac{2\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}+1}$ και δεν έχει maximum)

3. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \Rightarrow -1 \prec \chi \prec \sqrt{2}$

4. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

Αφού $(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0$ έχουμε ότι $\chi \in \left(-\sqrt{2}, 1\right)$.

5. $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

$(\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \chi = 1$ ή $\chi = -\sqrt{2}$ (απορρίπτεται αφού πρέπει $\chi \in Q$)

Άρα, $B = \{\chi \in Q : \chi \succ 1\}$.

6. Το σύνολο $B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$ γράφεται:

(α. $(\chi-1)\succ 0$ (απορρίπτεται γιατί $\chi\in Q$) και $(\chi+\sqrt{2})\succ 0 \Rightarrow \inf B=-\sqrt{2}$
και το minimum του B δεν υπάρχει.

ΚΑΙ

$(\chi-1)\prec 0$ (απορρίπτεται γιατί $\chi\in Q$) και $(\chi+\sqrt{2})\prec 0 \Rightarrow \sup B=-\sqrt{2}$ και το maximum B δεν υπάρχει.
Δηλαδή το B είναι το μονοσύνολο B=$\{-\sqrt{2}\}$.

β. <u>1η περίπτωση:</u>
$(\chi-1)\succ 0$ και $(\chi+\sqrt{2})\succ 0 \Leftrightarrow \chi\succ 1$ και $\chi\succ -\sqrt{2}$.
Άρα $\chi\succ 1$.
Έστω ότι $\sup B=1$. Αρκεί να δειχθεί ότι: $1\prec\chi+\varepsilon, \forall\varepsilon\succ 0, \forall\chi\in B$.
Έχω ότι $\chi\succ 1\Rightarrow 1+\varepsilon\prec\chi+\varepsilon\Rightarrow 1\prec 1+\varepsilon\prec\chi+\varepsilon\Rightarrow 1\prec\chi+\varepsilon$. Άρα, sup B = 1
Επίσης $1\in B$ άρα max B = sup B = 1.

<u>2η περίπτωση:</u>
$(\chi-1)\prec 0$ και $(\chi+\sqrt{2})\prec 0 \Leftrightarrow \chi\prec 1$ και $\chi\prec -\sqrt{2}$
Άρα $\chi\prec -\sqrt{2}$.
Έστω ότι $\inf B=-\sqrt{2}$. Αρκεί να δειχθεί ότι: $\chi-\varepsilon\prec -\sqrt{2}, \forall\varepsilon\succ 0, \forall\chi\in B$
Έχω ότι:
$\chi\prec -\sqrt{2}\Rightarrow\chi-\varepsilon\prec -\sqrt{2}-\varepsilon\Rightarrow\chi-\varepsilon\prec -\sqrt{2}-\varepsilon\prec -\sqrt{2}\Rightarrow\chi-\varepsilon\prec -\sqrt{2}$.
Άρα $\inf B=-\sqrt{2}$
Επίσης $-\sqrt{2}\notin B$ άρα δεν υπάρχει το minimum του B.

Τελικά, max B = sup B = 1, $\inf B=-\sqrt{2}$ και δεν υπάρχει το minimum του B).

7. $B=\{\chi\in Q:(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})\succ 0\}$
Για να ισχύει αυτό πρέπει $\chi\prec -\sqrt{2}$ και $\chi\succ 1$
(α. Άρα $\inf B=-\sqrt{2}$ και $\sup B=1$ γιατί για $\chi\prec -\sqrt{2}$ και $\chi\succ 1$ ισχύει η ανισότητα $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})\succ 0$. Τα maximum και minimum δεν υπάρχουν

β. Το σύνολο δεν είναι φραγμένο και επομένως $\sup B=+\infty$ και $\inf B=-\infty$. Επομένως δεν υπάρχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο)

(β) Σωστή εύρεση του B, αλλά λάθος στα inf, max, min, sup.

$$B = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0 \}$$

Οι ρίζες είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$. Άρα,

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$
ανισότητα	+	-	+	

Άρα, $B = \{\chi \in Q : \chi \prec -\sqrt{2} \} \cup \{\chi \in Q : \chi \succ 1 \} = \{\chi \in Q : (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty) \}$

Τις απαντήσεις που δόθηκαν στα ερωτήματα τις ταξινομήσαμε με τον εξής τρόπο:

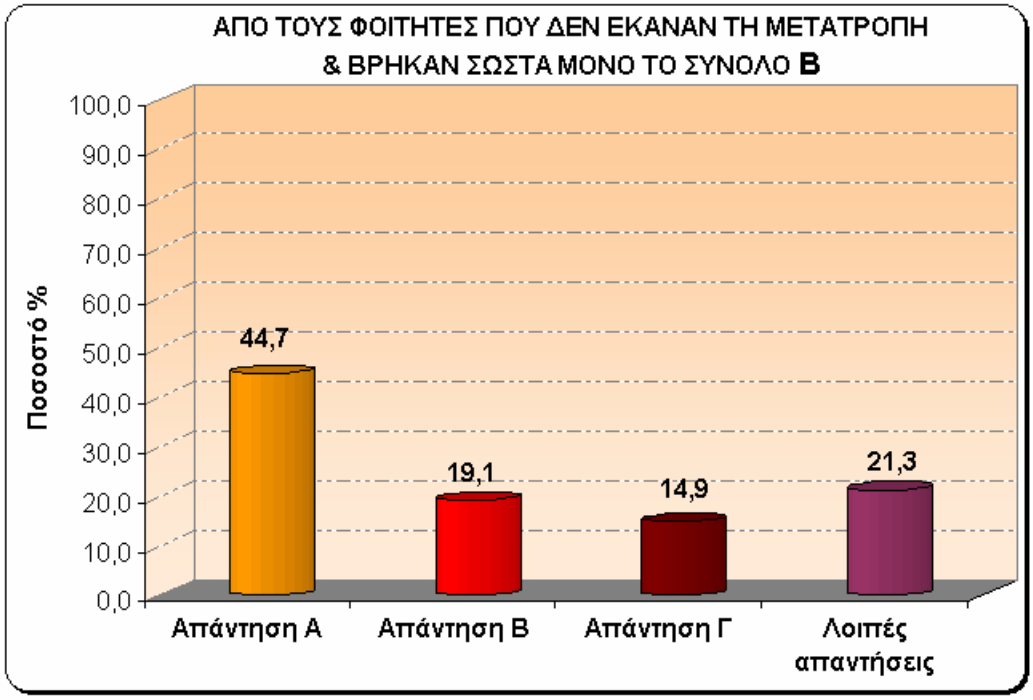
Θεωρήσαμε ως απάντηση Α: $\inf B = 1, \sup B = -\sqrt{2}$ (απαντούν 21 φοιτητές)

απάντηση Β: $\inf B = -\sqrt{2}$, $\sup B = 1$ (απαντούν 9 φοιτητές)

απάντηση Γ : $\inf B = 1$ και δεν υπάρχει $\sup B$ (απαντούν 7 φοιτητές)

λοιπές απαντήσεις : (απαντούν 10 φοιτητές)

και πήραμε τα πιο κάτω στατιστικά αποτελέσματα(εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι τα maximum, minimum διέφεραν σε κάθε περίπτωση)



Θα αναφέρουμε αναλυτικά ορισμένα παραδείγματα για την κάθε απάντηση.

Απάντηση Α:

1. $\inf \mathrm{B} = 1$, $\sup \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, maximum, minimum δεν υπάρχουν γιατί $-\sqrt{2} \notin \mathrm{B}, 1 \notin \mathrm{B}$.

2. Άρα $\inf \mathrm{B} = 1$, $\sup \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, ενώ το minimum του Β δεν υπάρχει αφού $\chi \in Q$, ενώ $\max \mathrm{B} = -\sqrt{2}$.

3. Δεν υπάρχουν τα minimum και maximum του Β, το $-\sqrt{2}$ είναι άνω φράγμα του Β εφόσον κάθε $\chi \le -\sqrt{2}$, άρα $\sup \mathrm{B} = -\sqrt{2}$ και το 1 είναι κάτω φράγμα του Β εφόσον κάθε $\chi \ge 1$, άρα $\inf \mathrm{B} = 1$.

4. $\mathrm{B} = \{\chi \in Q : \chi \prec -\sqrt{2}\} \cup \{\chi \in Q : \chi \succ 1\} = \Gamma \cup \Delta$

Το σύνολο Γ έχει $\sup \Gamma = -\sqrt{2}$ γιατί, είναι άνω φραγμένο από το $-\sqrt{2}$. Άρα από την ιδιότητα της πληρότητας έχει supremum.

Έστω $\sup \Gamma = s \ne -\sqrt{2} \Rightarrow s \ge \chi, \forall \chi \in \Gamma \, (1)$

Από την πυκνότητα των αρρήτων $\exists q \in R - Q$ τέτοιο ώστε $s \prec q \prec \chi \, (2) \Rightarrow s \prec q$.

Άτοπο, άρα $\sup \Gamma = -\sqrt{2}$.

Όμοια, το Δ είναι κάτω φραγμένο από το 1, άρα από την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών υπάρχει το $\inf \Delta = t$.
Έστω ότι $t \neq 1$, τότε $\forall \chi \in \Delta, \chi \geq t$
Από πυκνότητα των αρρήτων, $\exists p \in R - Q : \chi \prec p \prec t \Rightarrow p \prec t$. Άτοπο, άρα $\inf \Delta = 1$.
Τελικά, $\inf \mathrm{B} = \inf \Delta = 1$, $\sup \mathrm{B} = \sup \Gamma = -\sqrt{2}$ και δεν υπάρχουν τα minimum, maximum του B.

Απάντηση Β:

1. Για να υπάρχει $\sup \mathrm{B}$ θα πρέπει να υπάρχει α ώστε $\chi \leq \alpha$, με $\chi \in \mathrm{B}$ και θα ισχύει $\alpha = \sup \mathrm{B}$. Ισχύει $\chi \prec 1$, άρα $\sup \mathrm{B} = 1$.
Για να υπάρχει $\inf \mathrm{B} = \beta$ αρκεί $\beta \leq \chi$. Άρα $\beta = \inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$.
Όμως δεν υπάρχουν τα maximum, minimum του B.

2. Είναι $\sup \mathrm{B} = 1$ και $\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$. Τα maximum, minimum δεν υπάρχουν.
Αυτά από τους ορισμούς των supremum, infimum, δηλαδή :
αν $\chi = \sup \mathrm{B}$, τότε $\beta \leq \chi, \forall \beta \in \mathrm{B}$
αν $\psi = \inf \mathrm{B}$, τότε $\beta \geq \psi, \forall \beta \in \mathrm{B}$.

3. Άρα για κάθε $\chi \in \mathrm{B}$ με $\chi \prec -\sqrt{2}$ ή $\chi \succ 1$ το γινόμενο είναι θετικό.
Επομένως $\sup \mathrm{B} = 1$ και $\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$. Τα maximum, minimum δεν υπάρχουν.

4. Επομένως $\sup \mathrm{B} = 1$ και $\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$. Το $\max \mathrm{B} = 1$, ενώ το minimum του B δεν υπάρχει, γιατί $-\sqrt{2} \notin Q$.

5. Είναι $\sup \mathrm{B} = 1$, γιατί βλέπουμε ότι το 1 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B. Όμως, δεν υπάρχει το maximum γιατί το $1 \notin Q$.
Επίσης, είναι $\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, γιατί είναι το μέγιστο κάτω φράγμα και $\min \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, γιατί $-\sqrt{2} \in \mathrm{B}$, οπότε μπορεί να είναι το minimum του συνόλου B.

Απάντηση Γ:

1. Το σύνολο B παρατηρώ ότι δεν έχει sup, max. Δεν υπάρχει λοιπόν
$\alpha \in R : \chi \leq \alpha$ ($-\sqrt{2} \notin Q$).
Επίσης το σύνολο έχει $\min \mathrm{B} = \inf \mathrm{B} = 1$
Για να είναι $\inf = 1$ θα πρέπει :
(α)Το 1 να είναι ένα κάτω φράγμα του B: $\chi \geq 1$
(β)Το 1 να είναι και το μέγιστο κάτω φράγμα.
Θα αποδείξω λοιπόν με απαγωγή σε άτοπο ότι αυτό είναι μέγιστο κάτω φράγμα:

Έστω ότι υπάρχει t ένα κάτω φράγμα. Τότε από την πυκνότητα των ρητών αριθμών θα υπάρχει $q \in Q : 1 \prec q \prec \min\{1, -\sqrt{2}\}$. Άρα $q \succ t$ το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε t ένα κάτω φράγμα.

2. Το B είναι άνω φραγμένο.
Πράγματι, για $\chi = 2 : (2-1)(2+\sqrt{2}) \succ 0$
Έστω ότι ισχύει η σχέση για $\chi = \kappa \succ 2$
Θα δείξω ότι ισχύει για $\chi = \kappa + 1$:
$(\kappa + 1 - 1)(\kappa + 1 + \sqrt{2}) \succ 0 \Rightarrow \kappa(\kappa + 1 + \sqrt{2}) \succ 0$, που αληθεύει.
Άρα το B δεν έχει sup, max.
Ένα κάτω φράγμα του B είναι το 1, αφού $(1-1)(1+\sqrt{2}) = 0 \notin \mathrm{B}$
Μάλιστα είναι και το ελάχιστο, αφού $\forall \varepsilon \succ 0, [1 - (1+\varepsilon)](1+\sqrt{2}) \succ 0$, δηλαδή δεν υπάρχει μεγαλύτερο άνω φράγμα του B. Οπότε $\min \mathrm{B} = \inf \mathrm{B} = 1$.

3. Άρα $\inf \mathrm{B} = 1$, ενώ minimum B υπάρχει, όπως δεν υπάρχουν και τα maximum, supremum του συνόλου.

4. Παρατηρούμε ότι για $\chi = 1$ το $f(1) = 0$. Αφού το $f(\chi) \succ 0$, τότε το $\inf \mathrm{B} = 1$. Το $\min \mathrm{B} = m$, όταν $m \succ 0, m \in Q$. Τα sup B, max B δεν μπορούν να προσδιοριστούν καθώς για $\chi \succ 1$ η $f(\chi)$ είναι αύξουσα οπότε $\sup \mathrm{B} = \max \mathrm{B} = +\infty$.

5. Έστω 1 ένα κάτω φράγμα, άρα $\chi \succ 1$, που ισχύει.
Θα αποδείξουμε ότι 1 μέγιστο κάτω φράγμα.
Έστω ότι υπάρχει β μέγιστο κάτω φράγμα του B. Από τον χαρακτηρισμό του $\inf \mathrm{B} = \beta$ με ε = 1 καταλήγουμε σε άτοπο, άρα $\inf \mathrm{B} = 1$.
$\mathrm{N} \subseteq Q$ και εφόσον N δεν είναι άνω φραγμένο, άρα δεν έχει άνω φράγμα, άρα δεν υπάρχει το sup B, άρα και το max B.
Και $\chi \geq 1 \Rightarrow \min \mathrm{B} = 1$

Λοιπές απαντήσεις :

1. Παρατηρούμε ότι $\sup \mathrm{B} = 1 \in \mathrm{B} = \max \mathrm{B}$, ενώ δεν υπάρχουν τα $\inf \mathrm{B}, \min \mathrm{B}$ διότι $-\sqrt{2} \notin Q$.

2. Άρα υπάρχουν τα $\sup \mathrm{B} = \inf \mathrm{B} = 1$.

3. Επειδή $\chi \in Q$, είναι $\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, ενώ το sup B δεν υπάρχει γιατί το ελάχιστο κάτω φράγμα είναι το 1, το οποίο όμως δεν ανήκει στο Q. Επίσης, $\min \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, ενώ το max B δεν υπάρχει.

4. Επομένως, είναι $\inf \mathrm{B} = \min \mathrm{B} = 1$, ενώ δεν υπάρχει το $\sup \mathrm{B}$, γιατί $-\sqrt{2} \notin Q$ και άρα δεν υπάρχει και το $\max \mathrm{B}$.

5. Το $\sup \mathrm{B}$ είναι το $+\infty$ διότι, έστω $q \in Q$ με $q \succ \mathrm{B}$.
Υπάρχει $r \succ q \succ \mathrm{B}$. Άρα, $\sup \mathrm{B} = +\infty$ και δεν υπάρχει το max B.
Το inf B = 0 και δεν υπάρχει το minimum του συνόλου γιατί $0 \notin \mathrm{B}$.

Σε αυτή την κατηγορία ανήκει και ένας φοιτητής από τον οποίο πήραμε μια συνέντευξη και μας απάντησε ως εξής : «…*Είναι το* $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (1,+\infty)$
…Τελικά, δεν ορίζεται σίγουρα το $\sqrt{2}$ *γιατί δεν ανήκει στους ρητούς, σαν inf A, και το sup A θα είναι το 1. Δεν θα υπάρχουν(εννοεί τα max, min)…Γιατί δεν παίρνει τις τιμές 1 και -*$\sqrt{2}$*, μηδενίζεται δηλαδή εκεί*»(συνέντευξη 3η, γραμμές 98-100).
.

(γ) Λοιπά γραπτά

1. Το σύνολο B έχει άπειρους όρους.
Δεν υπάρχει supremum διότι δεν υπάρχει αριθμός $\alpha \in R$, τέτοιος ώστε $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \le \alpha$ καθώς $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \to \infty$.
Ομοίως, δεν υπάρχει maximum διότι δεν υπάρχει αριθμός $\beta \in \mathrm{B}$, τέτοιος ώστε $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \le \beta$.
Το σύνολο B έχει infimum τον αριθμό 0, αφού $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \ge 0$ και 0 ελάχιστο άνω φράγμα.
Δεν υπάρχει minimum αφού δεν υπάρχει $\gamma \in \mathrm{B}$ τέτοιος ώστε $(\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) \ge \gamma$.

2. Προφανώς δεν έχει supremum, γιατί το B δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα δεν έχει ούτε maximum. Επίσης, το B είναι κάτω φραγμένο από το 0. Άρα $\inf \mathrm{B} = 0$.
Το minimum δεν υπάρχει. Για να υπήρχε θα έπρεπε $\mathrm{B} \ge 0$.

3. Έστω $f(\chi) = (\chi-1)(\chi+\sqrt{2}) = \chi^2 + (\sqrt{2}-1)\chi - \sqrt{2}$
Τότε, $f'(\chi) = 2\chi + \sqrt{2} + 1$

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	$+\infty$
$f(\chi)$	+	-	-	-	+	
$f'(\chi)$	↘	↘		↗	↗	

↑

ελάχιστο

Το σύνολο B έχει ελάχιστο και είναι το:

$$f(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{2})(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2})=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$=-(\frac{3}{4}+\sqrt{2})$$

Αλλά επειδή το $f(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})\notin Q$ δεν έχει minimum το B. Αλλά το B έχει infimum το $-(\frac{3}{4}+\sqrt{2})\cong-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δηλαδή $\sup \mathrm{B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\mathrm{B}=\{\chi\in Q:(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})\succ 0\}$
   Το B δεν έχει supremum και maximum.
   Επειδή οι τιμές του B είναι μεγαλύτερες του μηδενός, το B έχει infimum το μηδέν, ενώ δεν έχει minimum.

5. Αφού $\mathrm{B}=\{\chi\in Q:(\chi-1)(\chi+\sqrt{2})\succ 0\}$ και $b\in \mathrm{B}, b\succ 0, \forall b\in \mathrm{B}\Rightarrow \inf \mathrm{B}=0$.
   Το σύνολο B δεν είναι άνω φραγμένο, άρα δεν υπάρχουν supremum και maximum.

Το $\min \mathrm{B}$ δεν υπάρχει, γιατί για κάθε $\omega \in Q$ και $b \succ 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $\psi \in Q$ ώστε ένα άλλο στοιχείο $c \in \mathrm{B}$ να ισχύει $0 \prec c \prec b$.

6. $\mathrm{B} = \{\chi \in Q : (\chi - 1)(\chi + \sqrt{2}) \succ 0\}$

Άρα: $\max \mathrm{B} = +1$, όπου το $\omega = 1$ είναι ρίζα ($\chi - 1$)

$\min \mathrm{B} = -\sqrt{2}$, όπου το $\varphi = -\sqrt{2}$ είναι η ρίζα του ($\chi + \sqrt{2}$)

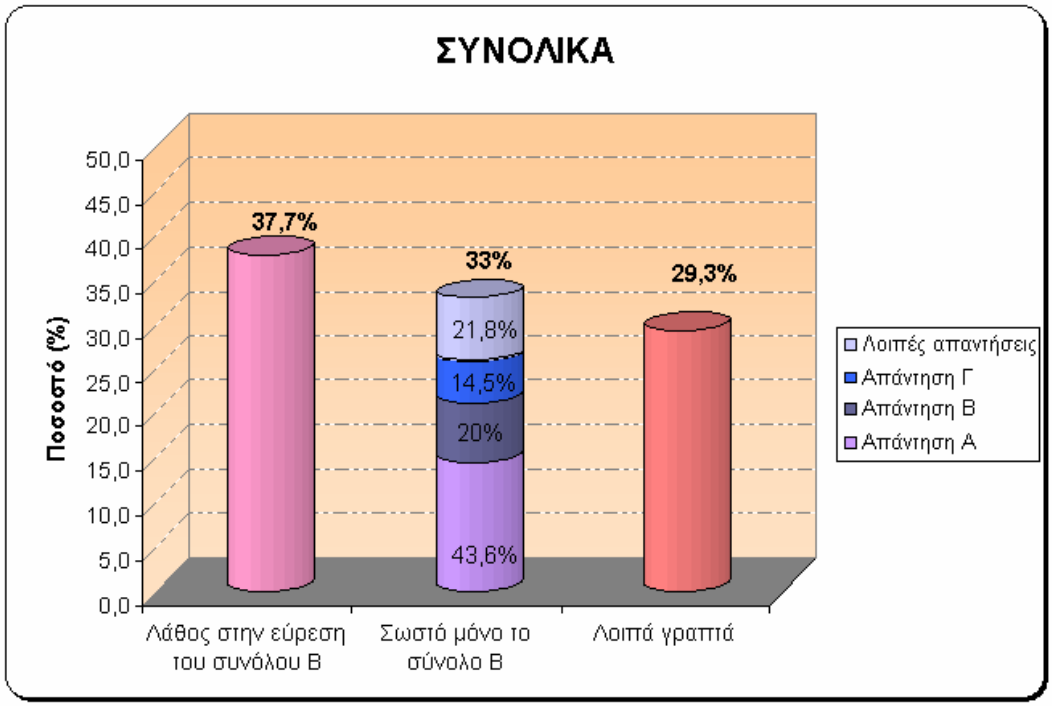
$\inf \mathrm{B} = -\sqrt{2}$

το B δεν έχει supremum.

Σε αυτή την κατηγορία υπήρξαν αρκετά γραπτά που δεν ήταν γραμμένο το σύνολο B, αλλά υπήρχαν απαντήσεις για τα ερωτήματα, οι οποίες βέβαια ήταν και λανθασμένες. Πως είναι δυνατό να απαντήσουμε σε ένα ερώτημα όταν απουσιάζουν οι προυποθέσεις για την απάντηση; Μια τέτοια αντιμετώπιση του θέματος υπήρξε και από έναν φοιτητή που έλαβε μέρος στη διαδικασία των συνεντεύξεων : «*Είναι μια ανισότητα. Θα τη λύσω… Είναι (οι ρίζες) οι 1,* $-\sqrt{2}$ *… Θα βρω τα πρόσημα εντός και εκτός των ριζών. Μετά, θα δω αν ανήκουν οι ρίζες στους ρητούς, γιατί τις περισσότερες φορές δεν ανήκουν σε αυτές τις ασκήσεις. …*

Εδώ, δεν υπάρχουν τα max και τα min, υπάρχουν μόνο τα sup και inf. Είναι sup=1 και inf = $-\sqrt{2}$ » (συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 112-122)

Από όσα προαναφέραμε, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όποια διαδρομή και αν επέλεξαν να ακολουθήσουν οι φοιτητές(είτε μέσα από το τριώνυμο, είτε όχι) δυσκολεύτηκαν αφενός να λύσουν μια ανισότητα δευτέρου βαθμού και αφετέρου να βρουν τα maximum, minimum, supremum και infimum. Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:



Στις λύσεις που οι φοιτητές έχουν βρει σωστά μόνο το σύνολο Β(δηλαδή το 33% των φοιτητών) οι απαντήσεις τους ήταν οι ακόλουθες:

Απάντηση Α: $\sup B = \min\{\chi_1, \chi_2\}$, $\inf B = \max\{\chi_1, \chi_2\}$

Απάντηση Β: $\sup B = \max\{\chi_1, \chi_2\}$, $\inf B = \min\{\chi_1, \chi_2\}$

Απάντηση Γ : $\inf B = 1$, και δεν υπάρχει sup B.

Παρατηρήσαμε ότι οι φοιτητές δεν μπορούν να λύσουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού. Εκεί ή έκαναν λάθη στα διαστήματα όπου η ανισότητα ήταν θετική ή αρνητική, ή χρησιμοποιούσαν «και» αντί για «ή» στις τιμές που έπαιρνε το χ, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθος συναληθεύσεις. Τα λάθη που πραγματοποιούν τόσο στην πρώτη περίπτωση όσο και στη δεύτερη θα μπορούσαμε να τα χαρακτηρίσουμε δομικά, αφού προφανώς δεν έχουν κατανοήσει τους κανόνες για την εύρεση προσήμων μιας ανίσωσης ή ενός τριωνύμου ή δεν έχουν εμπεδώσει τη διαφορά που κάνει η χρήση του «και» από την χρήση του «ή». Επιπλέον, τα λάθη στην εύρεση των inf, max, min, sup του συνόλου Β, προκύπτουν από τη μη κατανόηση του ορισμού τους, επομένως και αυτά χαρακτηρίζονται δομικά.

Στις απαντήσεις διαπιστώσαμε και άλλους τύπους λαθών. Δηλαδή, εκτός από τα λάθη που πραγματοποίησαν είτε στη λύση της ανίσωσης είτε στην εύρεση των inf, max, min, sup του συνόλου Β, διέπρεξαν και αυθαίρετα και εκτελεστικά λάθη. Ωστόσο, επειδή η αφετηρία όλων των άλλων λαθών είναι η μη κατανόηση των ορισμών maximum, minimum, supremum και infimum ενός συνόλου και η ημιμάθεια λύσης ανισοτήτων δευτέρου βαθμού, δεν θα επεκταθούμε σε μεμονωμένα λάθη, που πραγματοποιεί ο κάθε φοιτητής.

Συμπεράσματα

Η μελέτη αυτού του θέματος μας έδειξε τη μεγάλη δυσκολία των φοιτητών να λύνουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού. Οι δυσκολίες αυτές εμφανίζονται τόσο στον εντοπισμό των ριζών των ανισώσεων, όσο και στον εντοπισμό του διαστήματος που αποτελεί τη λύση της ανίσωσης. Το φαινόμενο αυτό είναι αρκετά λυπηρό αν σκεφτεί κανείς ότι οι ανισότητες διδάσκονται από την Α Λυκείου. Τελικά, κάποιοι φοιτητές «φοβούνται» τις ανισότητες, και για αυτό προτίμησαν να τις μετατρέψουν σε ισότητες, αν και οι ανισότητες παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην ανάλυση, γενικότερα, από ότι οι ισότητες όπως μας επισημαίνει και η M. Artigue[3].

Ακόμη, επιβεβαιώσαμε ότι και σε αυτό το ζήτημα υπήρξαν απαντήσεις μη ολοκληρωμένες. Η μη αυστηρότητα των απαντήσεων χαρακτήριζε αρκετά από τα γραπτά των φοιτητών, δείχνοντας για ακόμη μια φορά τη δυσκολία τους να γράφουν αυστηρά και με σαφήνεια(βλέπε σελ 17-19).

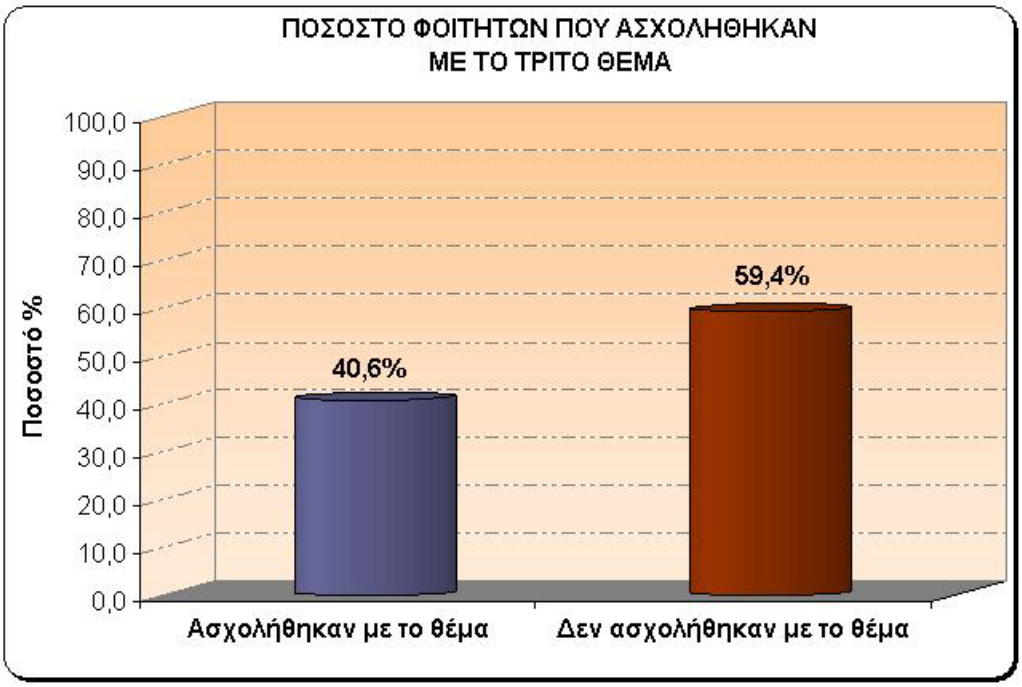
Επιπλέον, τα λάθη που προέκυψαν στην εύρεση των maximum, minimum, supremum και infimum,προκύπτουν από τη μη κατανόηση των ορισμών τους, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από το προηγούμενο θέμα(απέφευγαν την χρήση ορισμών ή δε τους έγραφαν ολοκληρωμένα(βλέπε σελ 31-37).

3.3 ΘΕΜΑ ΙΙΙ : Αν $f:[0,3]\to R$ συνεχής συνάρτηση και $0\le \chi_n \le 3$ για κάθε $n\in N$, να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$.

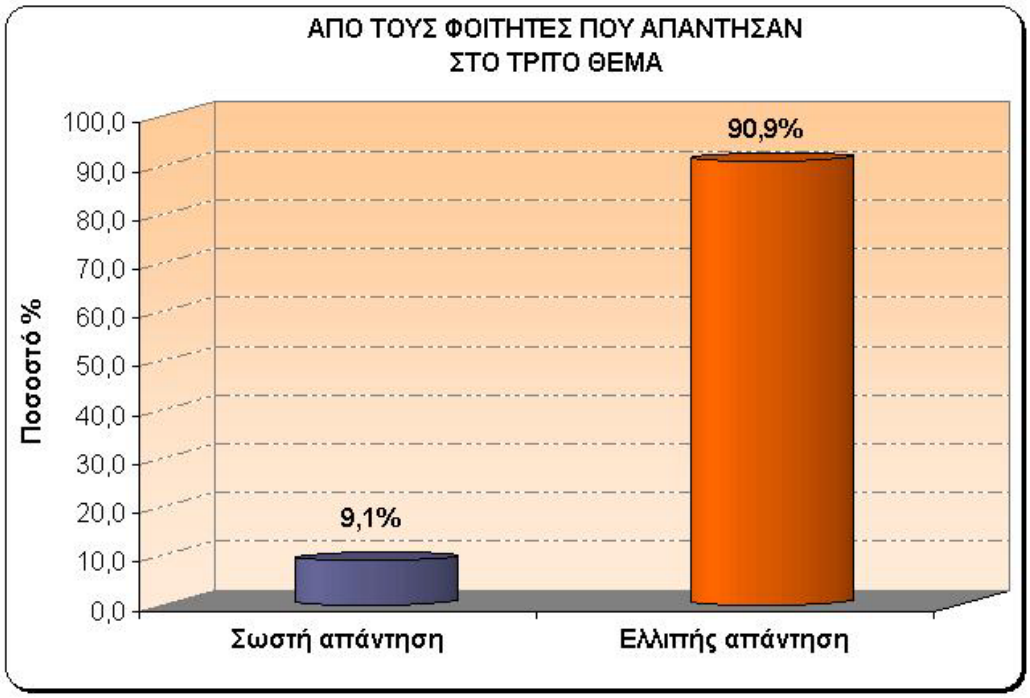
Με αυτό το θέμα ασχολήθηκαν 154 φοιτητές, αλλά μόνο οι 14 μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν το ζήτημα ολοκληρωμένα, χωρίς παραλήψεις και ασάφειες. Ας δούμε, όμως, αναλυτικά ποια ήταν τα ποσοστά επιτυχίας των φοιτητών στο συγκεκριμένο θέμα.

Ασχολήθηκαν με το θέμα : 154
Απάντησαν σωστά : 14
Απάντησαν όχι σωστά : 140

Σε αυτά τα δεδομένα πραγματοποιήσαμε στατιστική ανάλυση και πήραμε τα πιο κάτω ποσοστά:



Παρατηρήσαμε ότι, παρόλο ένα μεγάλο ποσοστό φοιτητών κατέβαλε προσπάθεια να επιλύσει το ζητούμενο θέμα, ένα πολύ μικρό ποσοστό κατάφερε να Αντεπεξέλθει στις απαιτήσεις του ζητήματος. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά που μας έδωσε η ανάλυση είναι τα εξής :



Είναι συντριπτικό το ποσοστό των φοιτητών που δεν οδηγήθηκε στη λύση του ζητήματος, αλλά έδωσε ελλιπείς απαντήσεις ή και εντελώς λανθασμένες. Πού έγιναν τα λάθη σε αυτή την περίπτωση; Ποια ήταν η τακτική των φοιτητών στην αντιμετώπιση της άσκησης; Υπήρξαν ομοιότητες στη λογική των φοιτητών για την επίλυση του θέματος; Αυτά είναι ερωτήματα που θα απαντηθούν άμεσα από την ταξινόμηση των γραπτών που έχουμε κάνει και θα τα δούμε αναλυτικά.

Α Κατηγορία

Ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό φοιτητών έγραφε την εξής συνεπαγωγή:

$$0 \le \chi_n \le 3 \Rightarrow f(0) \le f(\chi_n) \le f(3).$$

Μερικοί από αυτούς το αιτιολογούσαν λόγω της συνέχειας της συνάρτησης, ενώ κάποιοι άλλοι ή δε το αιτιολογούσαν καθόλου ή έβρισκαν άλλου τύπου εξηγήσεις για να εισάγουν τη συνάρτηση στην ανισότητα.

Όλοι οι φοιτητές που αντιμετώπισαν το θέμα με τον παραπάνω τρόπο, βεβαιώνουν ότι έχουν καταλάβει ότι αφού η συνάρτηση είναι συνεχής είναι και γνησίως αύξουσα και για αυτό την εισάγουν στην ανισότητα. Ωστόσο, μπορεί να μην έχουν στο μυαλό τους αυτή τη συνεπαγωγή, αλλά με τον τρόπο αυτό να μεταφέρουν τη σύγχυση που έχουν με την έννοια της συνέχειας. Όλος αυτός ο συλλογισμός προκύπτει από τις αντιλήψεις που έχουν για αυτή. Είναι φανερή η συγχυση που προκύπτει από από τον ορισμό της έννοιας της συνέχειας και την εικόνα που έχουν στο μυαλό τους για την έννοια(βλέπε, σελ 24-25). Έτσι δημιουργούνται προβλήματα, τα οποία με τη σειρά τους οδηγούν σε λάθη, τα οποία θα τα χαρακτηρίζαμε δομικά, μιας και προκύπτουν από τη μη κατανόηση έννοιας.

Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις των φοιτητών όταν ρωτήθηκαν γιατί μπορούμε να περάσουμε τη συνάρτηση στην ανισότητα : «*Από τη συνέχεια…και από το ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα…Μια συνεχής συνάρτηση είναι και μονότονη συνάρτηση. Οπότε μπορούμε να συσχετίσουμε τις δυο έννοιες*» (συνέντευξη 1η, γραμμές 42-46) ή

«*Επειδή η f είναι μια συνεχής συνάρτηση, το f(x_n) θα είναι ανάμεσα στο f(0) και στο f(3)… Για να είναι μονότονη, θα πρέπει να είναι και συνεχής… Το αντίστροφο νομίζω πως όχι…Όχι, δεν ισχύει*» (συνέντευξη 2η, γραμμές 52-58)

Όσο αφορά αυτούς που δεν επικαλούνται τη συνέχεια για να περάσουν τη συνάρτηση στην ανισότητα, ίσως να το κάνουν μόνο και μόνο για να έχουν μια σχέση με την $f(\chi_n)$, οπότε ο συλλογισμός τους είναι εντελώς αυθαίρετος.

Κατά την εγγραφή των απαντήσεων προκύπτουν και άλλα λάθη, που σε κάθε περίπτωση είναι διαφορετικά.

1. Ισχύει ότι $0 \le \chi_n \le 3$.

   Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής,

   $f(0) \le f(\chi_n) \le f(3)$

   $$\Rightarrow \frac{f(0)}{n} \le \frac{f(\chi_n)}{n} \le \frac{f(3)}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(0)}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{f(3)}{n}.$$

   Επειδή η f-συνεχής, θα είναι $f(0)=0, f(3)=3$.

   Τότε, $\lim_{n\to\infty}\frac{0}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = 0$

$0 \le \chi_n \le 3 \Rightarrow f(0) \le f(\chi_n) \le f(3)$,επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, από όπου προκύπτει ότι σίγουρα το $f(\chi_n) \in R$, γιατί αλλιώς η συνάρτηση δε θα ήταν συνεχής.

Επομένως, το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n}$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν.

3. Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής, $f(0) \le f(\chi_n) \le f(3)$.

Άρα, το $f(\chi_n)$ δεν εξαρτάται από το n.

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = 0 \lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = 0\alpha = 0.$

Ο αριθμός α είτε είναι θετικός, είτε αρνητικός, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

4. $\frac{f(0)}{n} \le \frac{f(\chi_n)}{n} \le \frac{f(3)}{n}$, όπου $f(0), f(3) \in R$, για $n \to \infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(3)}{n} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0$.

5 Θέτω $g(\chi) = \frac{f(\chi)}{n}$, συνεχής. Αφού $0 \le \chi_n \le 3$, τότε $g(0) \le g(\chi_n) \le g(3) \Rightarrow \frac{f(0)}{n} \le \frac{f(\chi_n)}{n} \le \frac{f(3)}{n}$ και επειδή η f είναι συνεχής, θα έχουμε ότι $\frac{1}{n} 0 \le \frac{f(\chi_n)}{n} \le 3\frac{1}{n}$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0$$

Άρα και η $g(\chi_n) \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0$.

Β. Κατηγορία

Σε αυτήν την κατηγορία γραπτών, οι φοιτητές προσπαθούν να εξηγήσουν την ύπαρξη του ορίου της $f(\chi_n)$ και στη συνέχεια να υπολογίσουν το ζητούμενο όριο. Βέβαια, υπήρξαν και κάποιοι που θεώρησαν δεδομένη την ύπαρξη του ορίου της

$f(\chi_n)$ και επέμειναν στον υπολογισμό του ζητούμενου ή και μόνο στην ύπαρξή του. Τα πιο κάτω αποτελούν ενδεικτικά παραδείγματα αυτής της περίπτωσης.

1. Για οποιοδήποτε n, το χ_n παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 3 και το $f(\chi_n)$ παίρνει τιμές στο R. Δηλαδή, οι τιμές του $f(\chi_n)$, για $n \to \infty$, είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα το πηλίκο πραγματικού προς ∞ είναι μηδέν.

Έτσι, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0.$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{\downarrow \atop 0} \lim_{n\to\infty} f(\chi_n)$$

Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0.$

3. Οι τιμές του χ_n συμπίπτουν με τις τιμές που παίρνει η f. Επομένως, το $f(\chi_n)$ ισχύει. Ακόμη, οι τιμές που δίνει το $f(\chi_n)$ πάνε στο R.

Άρα, $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{\downarrow \atop 0} \lim_{n\to\infty} f(\chi_n) = 0.$$

4. Αφού $0 \le \chi_n \le 3$ και f συνεχής στο $[0.3]$, άρα και $f(\chi_n)$ συνεχής.

Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = f(\kappa), 0 \le \kappa \le 3$ και το $f(\kappa) \in R$, δηλαδή θα είναι κάποιος πραγματικός αριθμός.

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0.$

5. Αφού $f : [0,3] \to R$ συνεχής συνάρτηση, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n)$.

Έστω, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = l, l \in R$.

Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = l0 = 0, l \ne 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty^+}\frac{f(\chi_n)}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty^+}f(\chi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty^+}n}=\frac{3}{\infty^+}=0$ (1)

$\lim\limits_{n\to\infty^-}\frac{f(\chi_n)}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty^-}f(\chi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty^-}n}=\frac{0}{\infty^-}=0$ (2)

Άρα το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ υπάρχει, αφού (1) = (2) και αυτό είναι ίσο με μηδέν,

δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=0$.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, θεωρούν ότι η $f(\chi_n)$ συγκλίνει και για αυτό έχει και όριο. Καταρχήν, δεν έχουν καταλάβει ότι ναι μεν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση, αλλά η $f(\chi_n)$ είναι μια ακολουθία, για την οποία δεν υφίσταται να πούμε αν είναι συνεχής ή αν δεν είναι. Επομένως, από τη στιγμή που οι φοιτητές δεν έχουν ξεκαθαρίσει τι είναι συνάρτηση και τι είναι ακολουθία, δεν μπορούν και να δουλέψουν με τις έννοιες αυτές. Συνεπώς, πραγματοποιούν δομικά λάθη και στη συνέχεια ακολουθούν και άλλα.

Αρχή της μεταφοράς

Στην κατηγορία αυτή, οι φοιτητές επικαλούνται την αρχή της μεταφοράς για να επιλύσουν το θέμα. Ωστόσο, και εδώ τα λάθη τους είναι αφ' ενός ουσιαστικά και αφετέρου επαναλαμβάνονται στους περισσότερους από αυτούς.

1. Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε θα <u>υπάρχει ακολουθία</u> $\chi_n\in[0,3]$ για την οποία ισχύει $\chi_n\to\chi_0$. Από την αρχή της μεταφοράς $\Rightarrow f(\chi_n)\to f(\chi_0)$.
Άρα, η $f(\chi_n)$ τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό $f(\chi_0)=a$.
Άρα, το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ υπάρχει και
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}f(\chi_n)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=a(+\infty)=+\infty$.

2. Εφ' όσον η f είναι συνεχής, μπορώ να χρησιμοποιήσω την αρχή της μεταφοράς.

Δηλαδή, υπάρχει χ_n, η οποία να ορίζεται στο $[0,3]$.

Άρα, αν $\chi_n \to \chi_0 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(\chi_0)$.

Δηλαδή, θα υπάρχει το όριο της $f(\chi_n)$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} f(\chi_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = f(\chi_0)0 = 0.$$

3. Αφού η f είναι συνεχής, $\forall\chi \in [0,3]\exists(\chi_n)$ τέτοια ώστε : $\chi_n \to \chi_0 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(\chi_0)$.

Αφού η χ_n είναι φραγμένη και συγκλίνει, συγκλίνει στο supremum των όρων της, το 3.

Άρα, $\chi_n \to 3 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(3)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{f(3)}{\infty} = 0$$

Σημειώσεις :

1. Οι τρεις παραπάνω μορφές επίλυσης του θέματος έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Οι φοιτητές δεν έχουν καταλάβει το νόημα του θεωρήματος. Το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής δε σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία η οποία να συγκλίνει, αλλά κάποια ακολουθία συγκλίνει. Οι ύπαρξη ποσοδεικτών, για άλλη μια φορά δυσκολεύει τους φοιτητές(βλέπε σελ 22). Επομένως πρόκειται για ένα δομικό λάθος, που προκύπτει από τη μη κατανόηση των προυποθέσεων του θεωρήματος.

2. Από το γεγονός ότι η ακολουθία είναι φραγμένη, δε συνεπάγεται ότι και συγκλίνει. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο χρειάζονται και κάποιες άλλες συνθήκες, όπως για παράδειγμα να είναι μονότονη. Το αντίστροφο της πρότασης ισχύει, δηλαδή αν μια ακολουθία συγκλίνει, είναι και φραγμένη. Άρα, αν και οι φοιτητές είδαν ότι η ακολουθία είναι φραγμένη, η σκέψη τους δεν είχε μια λογική αλληλουχία. Άρα, πρόκειται για ένα αυθαίρετο λάθος.

3. Οι φοιτητές που χρησιμοποιούν αυτό το συλλογισμό (φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει), γράφουν διάφορες απαντήσεις για το που συγκλίνει. Κάποιοι υποστηρίζουν ότι συγκλίνει σε έναν αριθμό α, άλλοι στο3, άλλοι στο 0. Αν δεχτούμε ότι ο ισχυρισμός τους είναι σωστός, δηλαδή ότι συγκλίνει, τότε ξέρουμε ότι συγκλίνει σε έναν αριθμό, αλλά δεν ξέρουμε σε ποιο. Το ότι γράφουν ότι συγκλίνει στο 0 ή στο 3, είναι ένα ακόμη λάθος, που είναι εντελώς αυθαίρετο, μιας και δε γνωρίζουμε ποιος είναι ο αριθμός αυτός.

4. Αφού $0 \le \chi_n \le 3$ συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία χ_n είναι άνω φραγμένη άρα

συγκλίνει. Έστω $\chi_n \to a \Rightarrow f(\chi_n) \to f(a)$. Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ και είναι ίσο με μηδέν. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = f(a)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = f(a)0 = 0$.

5. Η ακολουθία χ_n είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε συγκλίνει. Δηλαδή, $\chi_n \to \xi \in [0,3]$.
Επειδή, η f είναι συνεχής, θα ισχύει ότι $f(\chi_n) \to f(\xi) \in R$.
Οπότε, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = 0 f(\xi) = 0$.

Η ακολουθία είναι φραγμένη, άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.
Από την αρχή της μεταφοράς, αν $\chi_n \to \chi_0$, και επειδή f είναι συνεχής, $f(\chi_n) \to f(\chi_0)$.
Επομένως, και η $f(\chi_n)$ συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό.
Επίσης, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n) = 0$.

7. Από υπόθεση έχουμε ότι $0 \le \chi_n \le 3$, που σημαίνει ότι η ακολουθία χ_n είναι φραγμένη και επίσης ισχύει ότι , $\chi_n \to 3$ καθώς $n \to \infty$.
Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής(από υπόθεση) από την αρχή της μεταφοράς ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = f(3)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Οπότε υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ και είναι ίσο με μηδέν.

8. Αφού $0 \le \chi_n \le 3$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, ισχύει ότι όταν $\chi_n \to \chi_0 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(\chi_0)$, από την αρχή της μεταφοράς.

$0 \le \chi_n \le 3$, άρα $\forall n \in N, \chi_n \in [0,3]$

όταν $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\frac{\lim_{n\to\infty}f(\chi_n)}{\lim_{n\to\infty}n}$, το $\lim_{n\to\infty}f(\chi_n)$ παίρνει τιμές από το 0 ως το 3, αφού $f(\chi_n)\to f(\chi_0)$.

Όμως, $\lim_{n\to\infty}n=\infty$, άρα το $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ είναι ίσο με μηδέν.

9. Η $f(\chi_n)$ είναι συνεχής και φραγμένη.

Είναι , $\chi_n\to 3$ και από θεώρημα μεταφοράς, $f(\chi_n)\to f(3)$, δηλαδή σε πραγματικό αριθμό, έστω l.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{l}{n}=0.$$

10. Η χ_n είναι άνω φραγμένη από το 3 και κάτω φραγμένη από το 0. Άρα, $\chi_n\to a$, $0\le a\le 3$.

Επειδή, η f είναι συνεχής, τότε από την αρχή της μεταφοράς, $f(\chi_n)\to f(a)\in R$.

Άρα, η ακολουθία $\frac{1}{n}f(\chi_n)\to 0a=0$, επειδή $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ υπάρχει και ισούται με μηδέν, και $\lim_{n\to\infty}f(\chi_n)$ υπάρχει και ισούται με $f(a)$.

Άρα, υπάρχει και το $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$ και είναι ίσο με μηδέν.

Από όλους όσους χρησιμοποίησαν την αρχή της μεταφοράς, μόνο δύο φοιτητές κατανόησαν ότι δε γνωρίζουν ότι η ακολουθία συγκλίνει και προσπάθησαν να το αποδείξουν, έστω και λανθασμένα. Ωστόσο, αυτοί διέκριναν τις προυποθέσεις του θεωρήματος για να το εφαρμόσουν.

11. Επειδή η f είναι συνεχής, από το κριτήριο της μεταφοράς,
αν $\chi_n\to\chi_0\Rightarrow f(\chi_n)\to f(\chi_0)$.
Αρκεί να αποδείξω ότι $\chi_n\to x_0$
Για την χ_n ισχύει : $0\le\chi_n\le 3$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να πούμε ότι $-3\le\chi_n\le 3\Rightarrow|\chi_n|\prec 3$.
Για $\varepsilon=3$, η $\chi_n\to 0\Rightarrow f(\chi_n)\to f(0)$, δηλαδή η $f(\chi_n)$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $f(0)$.

Έστω $\alpha=\lim_{n\to\infty}f(\chi_n)$, οπότε $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}f(\chi_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\alpha 0=0$.

12. Η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow \forall(\chi_n)$, αν $\chi_n \to \chi_0 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(\chi_0)$.
Για να εφαρμόσω την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξω ότι $\chi_n \to x_0 \in [0,3]$.
Η χ_n είναι άνω φραγμένη.

- Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow \lim_n \chi_n = \sup \chi_n = 3$.

  Συνεπώς, $\chi_n \to 3 \Rightarrow f(\chi_n) \to f(3)$, επειδή η f είναι συνεχής.

  Άρα, $\lim_n \frac{f(\chi_n)}{n} = \lim_n f(\chi_n) \lim_n \frac{1}{n} = f(3)0 = 0$

- Έστω ότι είναι γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow \lim_n \chi_n = \inf \chi_n = 0$.

  Οπότε, $f(\chi_n) \to f(0)$, εφ' όσον η f είναι συνεχής.

  Άρα, $\lim_n \frac{f(\chi_n)}{n} = \lim_n f(\chi_n) \lim_n \frac{1}{n} = f(0)0 = 0$.

- Έστω χ_n σταθερή $\Rightarrow \chi_n = c \to c$, εφ' όσον η f είναι συνεχής.

  Άρα, $\lim_n \frac{f(\chi_n)}{n} = f(c)0 = 0$.

Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών

Άλλη μια μερίδα φοιτητών χρησιμοποιεί το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών για να επιλύσει το θέμα. Και εδώ παρατηρήθηκαν λάθη που είναι άξια λόγου να τα σχολιάσουμε. Αντιπροσωπευτικά είναι τα πιο κάτω παραδείγματα από τις λύσεις των φοιτητών.

1. Ισχύει $0 \le \chi_n \le 3$, για κάθε $n \in N$.

Για $n \neq 0$, έχω $0 \ge \frac{\chi_n}{n} \ge \frac{3}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Οπότε, από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχω και $\lim_{n\to\infty} \frac{\chi_n}{n} = 0$

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής, ισχύει :

$$\lim_{n\to\infty} \chi_n = f(\chi_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_n}{n} = \frac{f(\chi_n)}{n} \Rightarrow 0 = \frac{f(\chi_n)}{n}. \ (1)$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

Από το ότι η συνάρτηση είναι συνεχής δε συνεπάγεται σε καμία περίπτωση η σχέση (1). Εξάλλου, δεν υπάρχει κανένα νόημα στη σχέση αυτή. Προφανώς, ο φοιτητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τη συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Όμως, δεν έχει κατανοήσει ότι οι $\chi_n, f(\chi_n)$, δεν είναι συναρτήσεις, αλλά ακολουθίες. Επομένως, αφού δεν υπάρχει σωστή αξιολόγηση των δεδομένων, προκύπτουν δομικά λάθη.

2.Έχουμε $0 \le \chi_n \le 3$ και διαιρώ με το n: $0 \le \frac{\chi_n}{n} \le \frac{3}{n}$.

Αφού το $\frac{3}{n} \to 0$, από το γνωστό θεώρημα των ισοσυγκλινουσών , θα είναι και $\frac{\chi_n}{n} \to 0$.

Επίσης, εφ' όσον η f είναι συνεχής και $\chi_n \to \chi_0$, θα είναι $\lim_{n\to\infty} f(\chi_n) = f(\chi_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = f(0) = 0$.

Εδώ, το λάθος γίνεται στη συνεπαγωγή φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει, η οποία δεν υφίσταται. Όπως είπαμε πρόκειται για ένα αυθαίρετο λάθος.

3. Είναι $0 \le \frac{\chi_n}{n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{3}{n}}$.

Άρα, από το Θ.Ι. θα είναι και $\frac{\chi_n}{n} \to 0$.

Επειδή υπάρχει το όριο της χ_n , και επειδή $f:[0,3] \to R$ συνεχής, θα υπάρχει και το όριο και της $f(\chi_n)$. Επομένως, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n}$.

Όμοια, ο φοιτητής θεωρεί ότι η χ_n συγκλίνει και σιωπηρά εφαρμόζει την αρχή της μεταφοράς. Άρα, πρόκειται για ένα αυθαίρετο λάθος.

Θεώρημα Bolzano-Weirestrass

Ένα μικρό ποσοστό φοιτητών κατέφυγε στο θεώρημα των Bolzano-Weirestrass για την επίλυση του θέματος. Όμως, και εδώ παρατηρήθηκαν διάφορα λάθη. Τα παρακάτω παραδείγματα είναι χαρακτηριστικά.

1. Παρατηρούμε ότι $0 \le \chi_n \le 3$, δηλαδή η χ_n είναι φραγμένη. Συνεπώς, από το θεώρημα B-W για ακολουθίες, η χ_n συγκλίνει, οπότε το όριό της υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} \chi_n = a \in R$. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} f(\chi_n) = a \in R$.

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \frac{a}{\infty} = 0$.

Οι φοιτητές έχουν γράψει λάθος το θεώρημα. Ωστόσο, ίσως έτσι να τους βόλεψε για να κερδίσουν τη σύγκλιση. Όμως, όπως και να έχει πρόκειται για ένα δομικό λάθος.

2. Αφού $0 \le \chi_n \le 3$, έχουμε ότι η χ_n είναι φραγμένη. Άρα, από το θεώρημα των B-W, υπάρχει υπακολουθία της χ_n, η χ_{n_k}, η οποία συγκλίνει, έστω στο $\chi_0 \in [0,3]$ (αφού $0 \le \chi_n \le 3 \Rightarrow 0 \le \chi_{n_k} \le 3$, άρα αφού $\chi_{n_k} \to \chi_0 \Rightarrow 0 \le \chi_0 \le 3$).
Αφού f συνεχής στο χ_0 ως συνεχής στο $[0,3]$ και $\chi_{n_k} \subseteq [0,3]$, έπεται από την αρχή της μεταφοράς $f(\chi_{n_k}) \to f(\chi_0)$.

Σωστή η παρουσίαση του θεωρήματος, αλλά ο τρόπος αυτός δεν οδηγεί σε κάποιο αποτέλεσμα.

3. Η χ_n είναι φραγμένη, άρα από το θεώρημα των B-W, υπάρχει υπακολουθία της χ_n, η χ_{n_k}, $\chi_{n_k} \to \xi, \xi \in (o,3)$. Τότε, από την αρχή της μεταφοράς $f(\chi_{n_k}) \to f(\xi)$.
Όμως, $f(\chi_{n_k})$ υπακολουθία της $f(\chi_n)$, άρα $f(\chi_n) \to f(\xi)$.
Τελικά, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = \xi 0 = 0$.

Λοιπά γραπτά

1. Το $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n}$ δεν ορίζεται αν $f(\chi_n) \to \pm\infty$ ή αν $f(\chi_n) = 0$. Σε κάθε άλλη περίπτωση $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} \to 0$.
2. Είναι $0 \le \chi_n \le 3 \quad \forall n \in N$.
Θεωρούμε τις ακολουθίες $b_\nu = 0$ και $g_\nu = 0$.
Είναι $\lim b_\nu = 0$, ενώ $\lim g_\nu = 3$.
Επομένως η ακολουθία χ_n δεν έχει όριο.

Η συνάρτηση $f:[0,3]\to R$ είναι συνεχής. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n)$, επομένως δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$.

3. Η $f:[0,3]\to R$ είναι συνεχής, άρα $\forall\chi_n\in[0,3]$, αν $\chi_n\to\chi_0\Rightarrow f(\chi_n)\to f(\chi_0)$. Άρα, η $f(\chi_n)$ είναι συγκλίνουσα και ως γνωστό θα είναι φραγμένη, άρα αφού είναι φραγμένη και $\frac{1}{n}\to 0$ (μηδενική), το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=$ 0.

<u>Σημείωση</u> : Ο φοιτητής που απάντησε τα παραπάνω ως λύση της άσκησης, είναι εμφανές ότι είχε στο μυαλό του το σωστό θεώρημα για να οδηγηθεί στην επίλυσή της. Ωστόσο, για να εφαρμόσει το«μηδενική επί φραγμένη», αναγκάστηκε να περάσει μέσα από το κριτήριο της μεταφοράς, στο οποίο βέβαια υπάρχει το πρόβλημα με τη σύγκλιση της χ_n.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(\chi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} n}$

Επειδή, $f(\chi_n)\to R$, διακρίνω τις περιπτώσεις :

<u>1η περίπτωση</u> : Έστω η $f(\chi_n)=\kappa$, πεπερασμένο, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}=0$.

<u>2η περίπτωση</u> : Έστω $f(\chi_n)=$ άπειρο, δηλαδή $f(\chi_n)\to\infty$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}$.

5. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{f(\chi_{n+1})}{n+1}}{\frac{f(\chi_n)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nf(\chi_{n+1})}{(n+1)f(\chi_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nf(\chi_{n+1})}{n(\frac{1}{n}+1)f(\chi_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\chi_{n+1})}{f(\chi_n)}=\gamma.$$

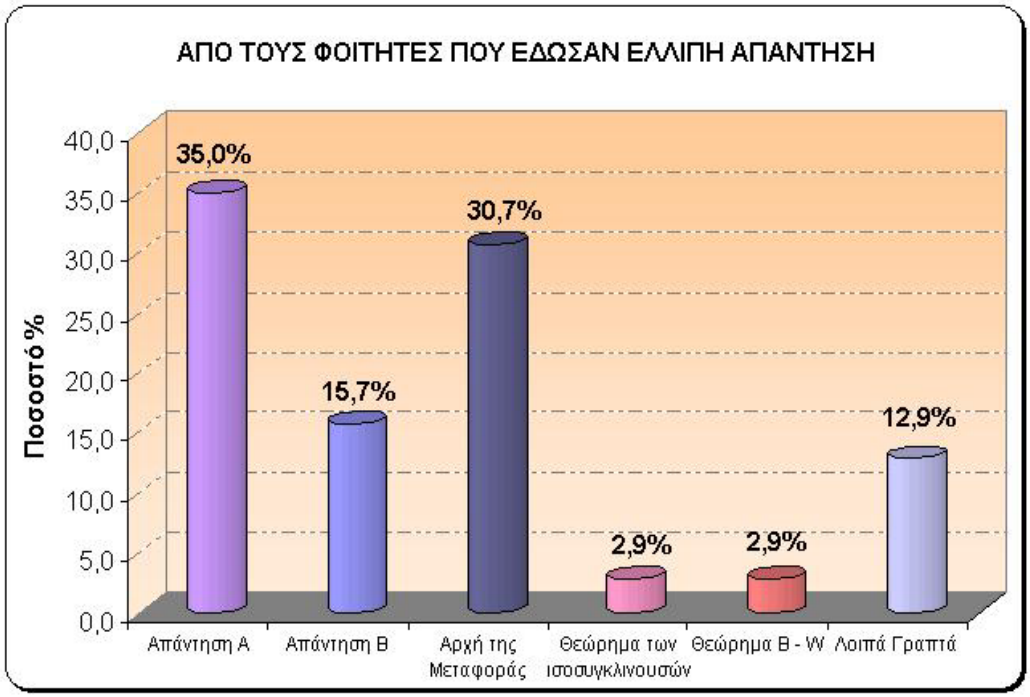
Αν $\gamma\prec 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=0$.

Αν $\gamma=\alpha\in R\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{f(\chi_0)}{n}}=\alpha$.

Αν $\gamma\succ 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\chi_n)}{n}=+\infty$

6. Η $f(\chi_n)$, εφ' όσον $0 \leq \chi_n \leq 3$, είναι φραγμένη. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\chi_n)}{n} = 0$, ως μηδενική επί φραγμένη(δεν υπάρχει αιτιολόγηση γιατί η $f(\chi_n)$ είναι φραγμένη).

Συνολικά, από όλα όσα γράψαμε παραπάνω, μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας, με τα πιο κάτω στατιστικά αποτελέσματα.



Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι όποιο τρόπο και να επέλεξαν οι φοιτητές για να επιλύσουν το θέμα, πραγματοποίησαν κυρίως λάθη που προέρχονται από την έννοια της συνέχειας. Από ότι φάνηκε, η συνέχεια αποτελεί για αυτούς ένα εργαλείο που μπορούν να το επικαλούνται σχεδόν πάντα, χωρίς να διστάζουν να το χρησιμοποιήσουν . Έγινε φανερό ότι τα λάθη που προέκυψαν μέσα από τις διαδικασίες επίλυσης του θέματος, είναι διαφορετικών τύπων.

Συμπεράσματα

Από τη μελέτη και ανάλυση του θέματος, αρχικά, διαπιστώσαμε ότι οι φοιτητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της συνέχειας. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τους ορισμούς των εννοιών και αυτό γιατί έχουν διαφορετική εικόνα από την καθημερινότητά τους για κάποιες έννοιες, όπως αυτής της συνέχειας(βλέπε, σελ 24-25). Η μη κατανόηση της έννοιας τους οδηγεί σε λανθασμένους συλλογισμούς και συμπεράσματα, όπως η σύνδεση και η σχέση συνέχειας και μονοτονίας(η φοιτήτρια έκανε το συνειρμό συνεχής συνάρτηση $\Rightarrow$ μονότονη συνάρτηση).

Επίσης, παρατηρήσαμε ότι δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις εκφωνήσεις θεωρημάτων. Δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν ποιες είναι οι υποθέσεις ή οι προϋποθέσεις ενός θεωρήματος για να το εφαρμόσουν(όπως στην Αρχή της Μεταφοράς). Σε αυτή την περίπτωση, δεν καταλαβαίνουν τι πρέπει να αποδείξουν και ποια είναι τα δεδομένα τους. Φράσεις, όπως «αν για κάποια», «αν για κάθε», «τότε υπάρχει», δηλαδή προτάσεις που περιέχουν τις έννοιες των ποσοδεικτών τους δημιουργούν συγχύσεις(βλέπε, σελ 22).

Παράλληλα, σημειώσαμε ότι οι φοιτητές δεν έχουν διαχωρίσει την έννοια της συνάρτησης από την έννοια της ακολουθίας. Όπως είδαμε και στην επίλυση του θέματος, θεωρούσαν ότι η ακολουθία $f(\chi_n)$ είναι συνάρτηση και οι συλλογισμοί τους βασίζονταν σε ιδιότητες συναρτήσεων και όχι ακολουθιών.

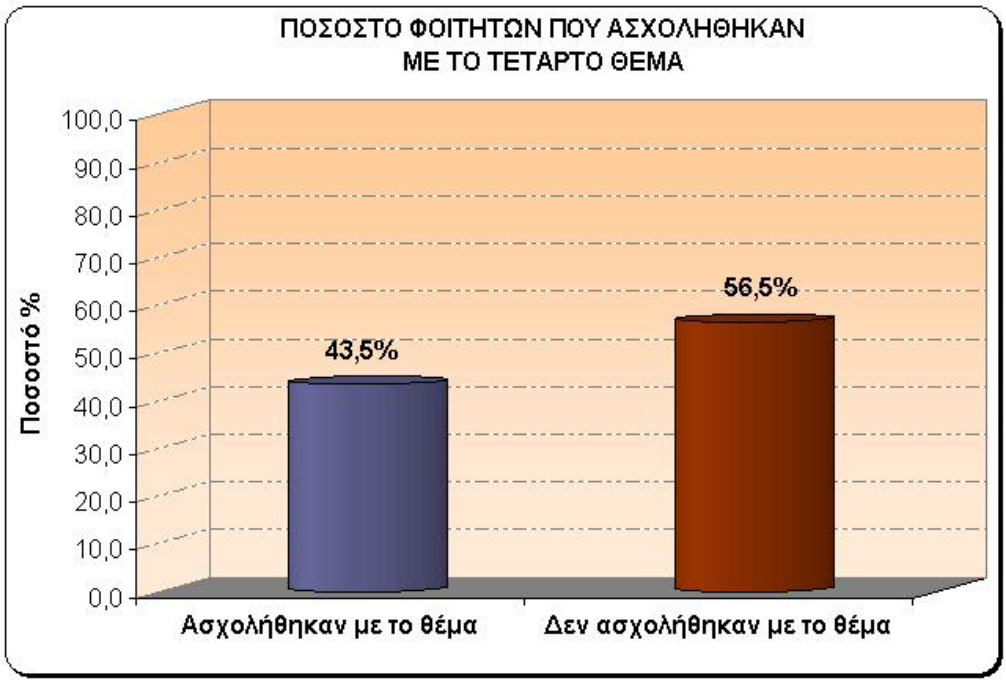
Και σε αυτό το θέμα είδαμε τους φοιτητές να απαντούν χωρίς να επεξηγούν το τι ακριβώς κάνουν και γιατί. Η έλλειψη αυστηρότητας των απαντήσεων χαρακτηρίζει και αυτό το θέμα. Στην Α κατηγορία των γραπτών, ορισμένοι φοιτητές «πέρασαν» τη συνάρτηση στην ανισότητα χωρίς να το αιτιολογήσουν ή στη Β κατηγορία, «έσπαζαν» το όριο σε γινόμενο ορίων δίχως να εξηγούν γιατί μπορούν να κάνουν κάτι τέτοιο(βλέπε, σελ 17-19).

3.4 Θέμα IV: Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi)=1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\chi_0 \succ 0$ με $f(\chi_0)=\frac{1}{2}$.

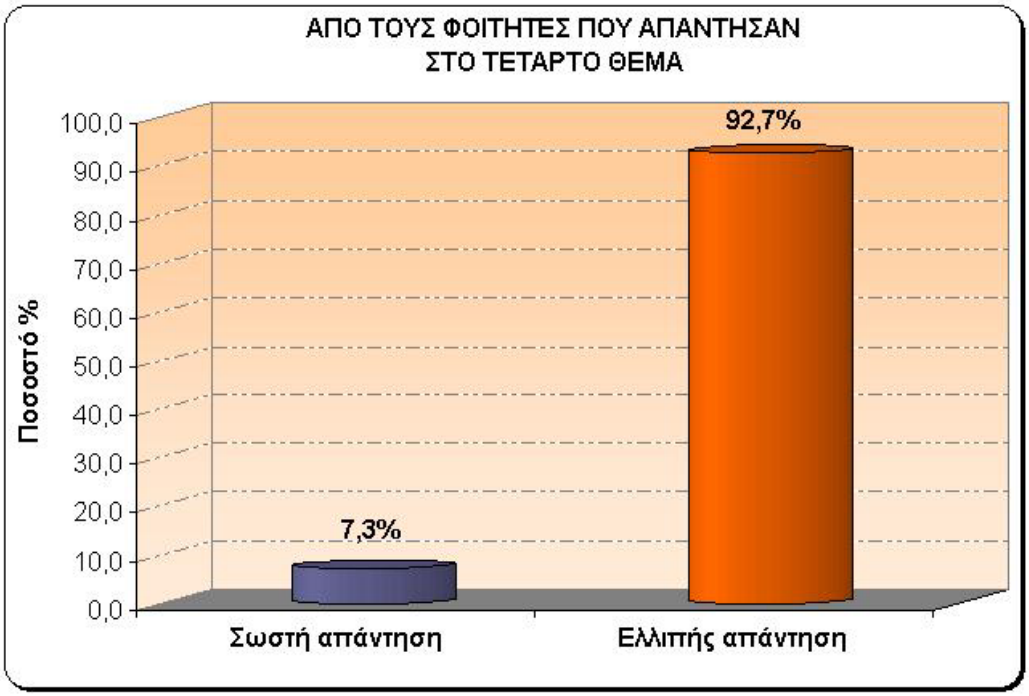
Με αυτό το θέμα ασχολήθηκαν 165 φοιτητές, αλλά δυστυχώς πολλοί λίγοι κατάφεραν να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα,

Ασχολήθηκαν με το θέμα : 165
Απάντησαν σωστά : 12
Απάντησαν όχι σωστά : 153

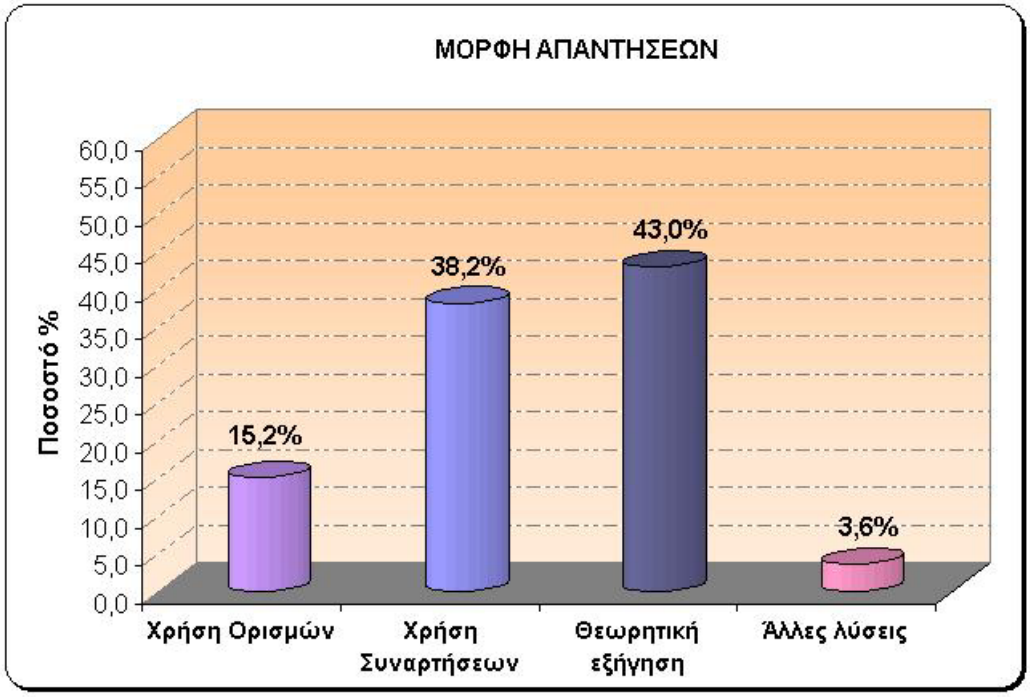
Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων μας, μας έδωσε τα πιο κάτω ποσοστά για την ενασχόληση των φοιτητών με το ζήτημα :



Παρατηρούμε ότι το 43,5% ασχολήθηκε, ενώ το 56,5% δεν μπήκε στη διαδικασία επίλυσής του. Ας δούμε, όμως, και τα ποσοστά επιτυχίας των φοιτητών που αποπειράθηκαν να αντιμετωπίσουν το συγκεκριμένο ζητούμενο

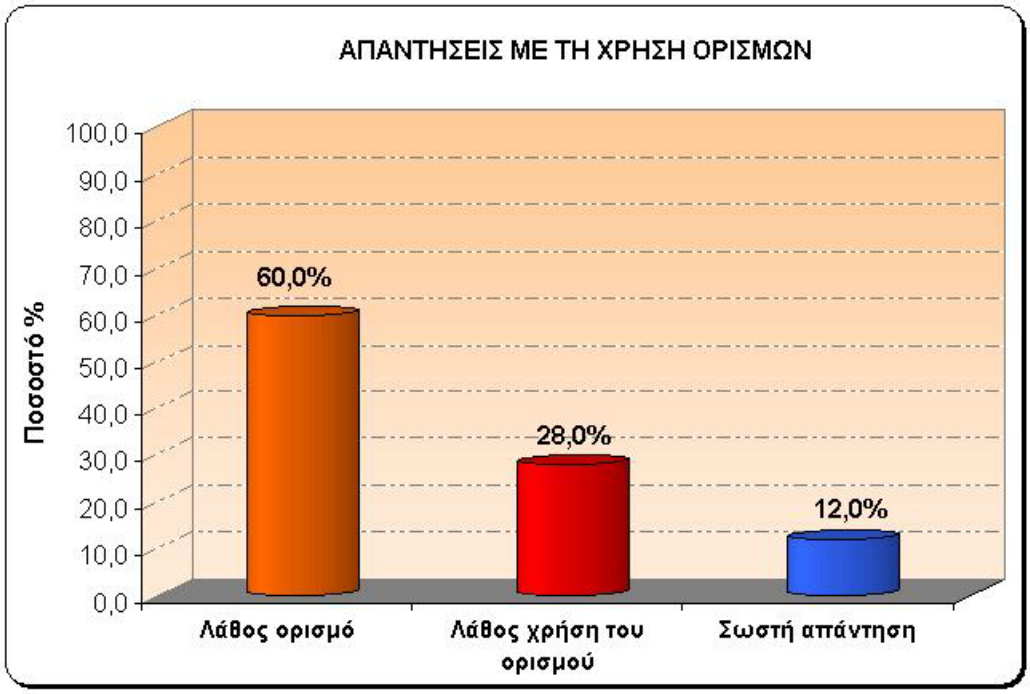


Είναι φανερό πως ένα πολύ μικρό ποσοστό αυτών που ασχολήθηκαν με το θέμα, μόνο το 7,3%, κατάφερε να οδηγηθεί μέσα από σωστές διαδικασίες στην απάντηση της άσκησης.. Οι φοιτητές επέλεξαν διάφορους τρόπους αντιμετώπισης του ζητήματος και είναι πολύ ενδιαφέρον να δούμε τόσο αυτούς τους τρόπους, όσο και τα λάθη που διέπραξαν κατά την εφαρμογή τους.



ΧΡΗΣΗ ΟΡΙΣΜΩΝ

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι φοιτητές που επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς των ορίων και της συνέχειας για την επίλυση του θέματος. Η μορφή των λαθών που παρατηρήθηκαν με αυτό τον τρόπο αντιμετώπισης, καθώς και τα ποσοστά φοιτητών που πραγματοποίησαν το κάθε λάθος, παρουσιάζεται από τον ακόλουθο πίνακα αποτελεσμάτων.



Είναι φανερό πως το μεγαλύτερο πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι φοιτητές ήταν η απόδοση του ίδιου του ορισμού, προκαλώντας δομικά λάθη. Αν και δεν ήταν μεγάλο το ποσοστό που επέλεξε να αντιμετωπίσει το θέμα με την χρήση ορισμών(βλέπε, σελ 10), ήταν μεγάλο το ποσοστό των φοιτητών που τους έγραψαν λάθος, επιβεβαιώνοντας έτσι τις δυσκολίες τους στην κατανόηση και χρήση των ποσοδεικτών καθώς και στα ε-δ(βλέπε, σελ 22-23).

Βέβαια, πολλοί ήταν και αυτοί που δεν μπόρεσαν να εφαρμόσουν τους ορισμούς, αν και τους έγραψαν σωστά. Σύμφωνα με τον Moore(1994)(βλέπε,[18]), οι φοιτητές κάποιες φορές μπορούν να διατυπώνουν ορισμούς εννοιών(έστω και αν δεν έχουν κατανοήσει την έννοια), αλλά δεν μπορούν να τους εφαρμόσουν. Η αδυναμία αυτή των φοιτητών τους οδήγησε σε εκτελεστικά λάθη, ενώ το πιο μικρό ποσοστό ήταν αυτό που τελικά απόδωσε σωστά τους ορισμούς, συνδύασε τις σχέσεις και οδηγήθηκε και στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα. Θα δούμε για κάθε περίπτωση, χωριστά, ορισμένα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα προσπάθειας επίλυσης του ζητήματος.

Λάθος ορισμός.

1. Ισχύει, $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0$, δηλαδή $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0$ με $|\chi - 0| \prec \delta$, ώστε : $|f(\chi) - 0| \le \varepsilon \Rightarrow |f(\chi)| \le \varepsilon$

Επίσης, ισχύει $\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 1$, άρα $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0$ με $|\chi| \prec \delta$, ώστε $|f(\chi) - 1| \succ \varepsilon$.

2. $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0$: αν $\chi \in (0, +\infty)$ και $\chi \in (\chi_0, \chi_0 + \delta) = (0, \delta)$ για $\chi_0 = 0 \Rightarrow |f(\chi) - f(0)| \prec \varepsilon \Rightarrow |f(\chi)| \prec \varepsilon$.

$\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0$: αν $\chi \in (0, +\infty)$ και $\chi \succ \delta \Rightarrow |f(\chi) - 1| \prec \varepsilon$.

3. $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0 \Rightarrow \forall \delta \succ 0$ με $|\chi| \prec \delta, \exists \varepsilon \succ 0$, ώστε $|f(\chi)| \prec \varepsilon$.

4. Αφού f συνεχής $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0$ τέτοιο ώστε για $\chi \in \mathrm{X}$ με $|\chi - \chi_0| \prec \delta \Rightarrow |f(\chi) - f(\chi_0)| \prec \delta$.

5. $\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon \succ 0,$ να ισχύει $|f(\chi) - 1| \prec \varepsilon$

$\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0 \Rightarrow |f(\chi) - 0| \prec \varepsilon$ και $|\chi - 0| \prec \delta \Rightarrow |\chi| \prec \delta$.

6. Επειδή υπάρχουν τα όρια και η f είναι συνεχής, έχουμε ότι $|f(\chi)| \prec \varepsilon$ με $|\chi| \prec \delta_1$ και $|f(\chi) - 1| \prec \varepsilon$ με $\chi \succ \delta_2$.

7. $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0 : |\chi - 0| \prec \delta \Rightarrow |f(\chi) - f(0)| \prec \varepsilon$.

$\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 1$, $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0 : 0 \prec |\chi - \chi_0| \prec \delta \Rightarrow |f(\chi) - 1| \prec \varepsilon$.

Παρατήρηση : ο φοιτητής αρχικά είχε γράψει αντί για 1, $f(\infty)$.

Είναι φανερό ότι ούτε μεγάλο ποσοστό φοιτητών επέλεξε να δουλέψει με τους ορισμούς, αλλά και όσοι δοκίμασαν με αυτό τον τρόπο δυσκολεύτηκαν πολύ. Υπήρξαν διάφορα λάθη στην απόδοση των ορισμών. Κάποιοι μπέρδεψαν τα ε, δ, δηλαδή, όπου έπρεπε να γράψουν ε, έγραψαν δ και αντίστροφα (παράδειγμα 3). Σχεδόν όλοι δεν εκφράστηκαν αυστηρά, αφού παρέλειψαν να γράψουν «αν … τότε..» ή ακόμη έγραψαν το μισό ορισμό, όπως στα παραδείγματα 5 και 6. Επιπλέον, οι περισσότεροι που έγραψαν και τους δυο ορισμούς των ορίων, χρησιμοποίησαν το

ίδιο δ (π. χ. 1, 2, 7). Ακόμη, έγραψαν λάθος τις ανισότητες, όπως στο παράδειγμα 1. Τέλος, κάποιοι έγραψαν και $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, θεωρώντας βέβαια ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0.

Λάθος χρήση του ορισμού

1. Αφού ισχύουν οι σχέσεις για ε, ισχύουν και για $\frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε, $|f(\chi)| \prec \frac{\varepsilon}{2}$, για $0 \prec \chi \prec \delta_1$ και $|f(\chi) - 1| \prec \frac{\varepsilon}{2}$, για $\chi \succ \delta_2$.

Για $0 \prec \delta_2 \prec \chi \prec \delta_1$ έχουμε ότι :

$\left| f(\chi) - \frac{1}{2} \right| = |2f(\chi) - 1| = |f(\chi) - 1 + f(\chi)| \prec |f(\chi)| + |f(\chi) - 1| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \prec \varepsilon$, ισχύει,

άρα $\exists \chi_0 \succ 0 : f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

2. Έστω $\delta \succ 0$, ώστε $0 \prec \delta_2 \prec \chi_0 - \delta \prec \chi_0 \prec \chi_0 + \delta \prec \delta_1$

Τότε $|f(\chi_0)| \prec \varepsilon$ (1) και $|f(\chi_0) - 1| \prec \varepsilon$ (2).

Για $\varepsilon = 1$, έχουμε από την (1) : $|f(\chi_0)| \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec f(\chi_0) \prec 1$, δηλαδή $f(\chi_0) \prec 1$ και από τη (2) προκύπτει ότι :

$|1 - f(\chi_0)| \prec 1 \Leftrightarrow -1 \prec 1 - f(\chi_0) \prec 1 \Leftrightarrow 1 - f(\chi_0) \prec 1 \Leftrightarrow f(\chi_0) \succ 0$.

Άρα υπάρχει χ_0, ώστε $0 \prec f(\chi_0) \prec 1$.

3. $|f(\chi)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \prec f(\chi) \prec \varepsilon$

$|f(\chi) - 1| \prec \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + 1 \prec f(\chi) \prec \varepsilon + 1$

Οι παραπάνω σχέσεις για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, γίνονται :

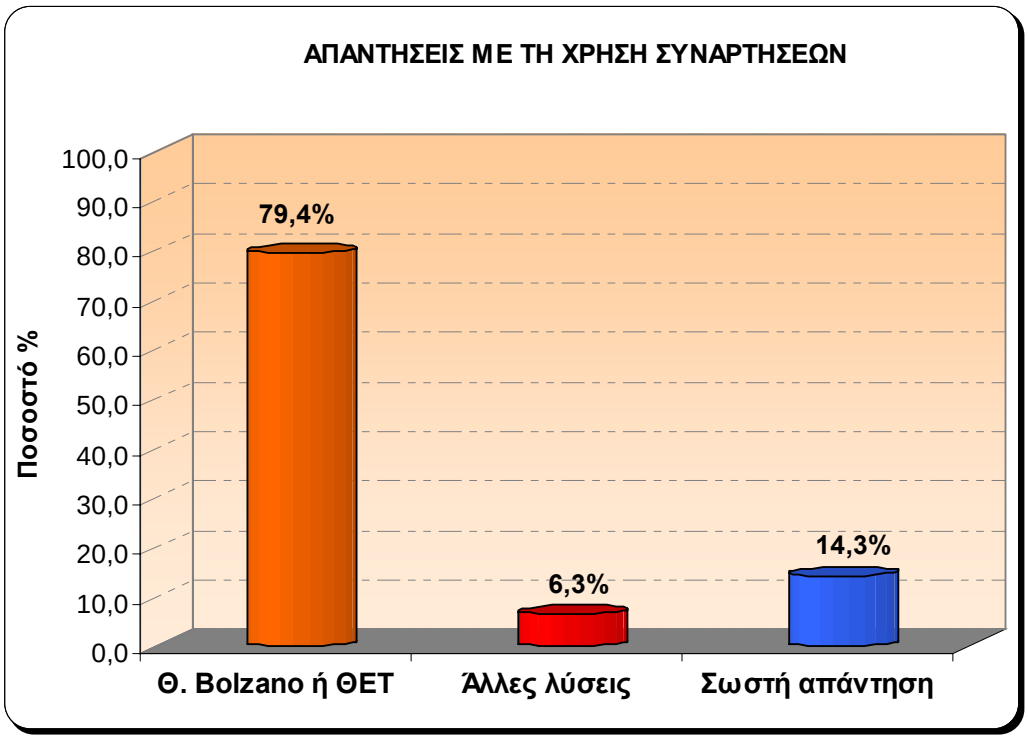
$$\left.\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \prec f(\chi) \prec \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \frac{1}{2} \prec f(\chi) \prec \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \le f(\chi_0) \le \frac{1}{2} \Rightarrow f(\chi_0) = \frac{1}{2}$$

Τα παραπάνω λάθη, που οφείλονται στην αποτυχία χειρισμού των ορισμών, ενώ οι αρχικές σχέσεις είναι σωστές, σύμφωνα με τον Orton(1980)(βλέπε [2]), θα τα χαρακτηρίζαμε εκτελεστικά.

Σημείωση : Υπήρξαν γραπτά στα οποία ήταν γραμμένοι μόνο οι ορισμοί, σωστά, και δεν υπήρχε καμία συνέχεια για την επίλυση του θέματος.

ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι φοιτητές, σε αυτή την περίπτωση, επέλεξαν τη θεώρηση κάποιων συναρτήσεων που θα τους βοηθούσαν να αντιμετωπίσουν την άσκηση. Η επιλογή αυτών, καθώς και τα ποσοστά προτίμησης των θεωρημάτων που χρησιμοποιήθηκαν απεικονίζονται στο διάγραμμα που ακολουθεί :



Διαπιστώνουμε ότι η πλειοψηφία των φοιτητών, διάλεξε να δουλέψει με το θεώρημα Bolzano ή με το θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Όμως, από όλους όσους εργάστηκαν με κάποια συνάρτηση και συνέχισαν με τα προαναφερθέντα θεωρήματα, μόνο το 14,3% κατάφερε να απαντήσει σωστά τη ζητούμενη άσκηση. Αν και τα θεωρήματα του Bolzano και της μέσης τιμής είναι γνωστά από τα

μαθητικά χρόνια, οι φοιτητές δεν μπόρεσαν να τα εφαρμόσουν, αφού όπως θα δούμε παρερμηνεύουν και τις υποθέσεις, αλλά και τα εξαγόμενα που προκύπτουν από αυτά.

Θεώρημα Bolzano ή θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

1. Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$, με $g(\chi)=f(\chi)-\frac{1}{2}$.

Τότε, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi)=-\frac{1}{2}\\ \\ \lim\limits_{\chi\to\infty} g(\chi)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi)\lim\limits_{\chi\to\infty} g(\chi)=-\frac{1}{4}$. (1)

Άρα, από το θεώρημα Bolzano $\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως το λάθος που πράττουν οι φοιτητές είναι αυθαίρετο, αφού κάνουν λάθος εκτίμηση στις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Η διαδικασία μέχρι να φτάσουν στη σχέση (1) είναι σωστή, αλλά δεν αρκούν μόνο αυτοί οι περιορισμοί για την εφαρμογή του θεωρήματος.

2. Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$, με $g(\chi)=f(\chi)-\frac{1}{2}$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=f(0)=0$ (1) $\qquad g(0)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi)=f(+\infty)=1$ (2) $\qquad g(+\infty)=\frac{1}{2}$

Άρα, $g(0)g(+\infty)\prec 0\Rightarrow$ από το θεώρημα Bolzano $\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$

Σημείωση : Οι σχέσεις (1) και (2) συνεπάγονται από τη συνέχεια της f.

Εδώ, αντιλαμβανόμαστε ότι το λάθος έχει διαφορετική μορφή. Προκύπτει από τη λανθασμένη αντίληψη για τη συνέχεια της συνάρτησης τόσο στο 0, όσο και στο άπειρο. Οι φοιτητές αφενός δεν έχουν λάβει υπόψη τους ότι η συνάρτηση ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα ή δεν έχουν συνειδητοποιήσει τις διαφορές ανάμεσα σε ένα ανοιχτό και ένα κλειστό διάστημα, και αφετέρου φαίνεται η σύγχιση που έχουν για τη συμπεριφορά των συναρτήσεων στο άπειρο.

Ρωτήσαμε μια φοιτήτρια τι έχει να μας πει για τα παραπάνω όρια και απάντησε με τον εξής τρόπο : «*Όσον αφορά το πρώτο όριο, του οποίου η τιμή του είναι μηδέν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το f(0)=0,αφού μας λέει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής... Ότι η συνάρτηση f στο άπειρο προσεγγίζει το μηδέν, είναι ίση με το ένα,*

συγγνώμη (η ερώτηση έγινε και για το όριο καθώς $\chi \to +\infty$*)... Πάλι λόγω της συνέχειας βέβαια*» Βέβαια, της επισημάναμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ανοιχτό διάστημα και μας εξήγησε πάνω σε αυτό : «*Από τη συνέχεια και πάλι... Και ανοιχτό να είναι και κλειστό.. Θα είναι το ίδιο*» (συνέντευξη 1η, γραμμές 76-84). Εννοεί, λοιπόν, ότι είτε ανοικτό είναι το διάστημα είτε κλειστό, από τη στιγμή που η συνάρτηση είναι συνεχής μπορεί να πάρει τις τιμές στα άκρα του διαστήματος, δείχνοντας με αυτό τον τρόπο ότι δεν έχει κατανοήσει την έννοια της συνέχειας καθώς και τις διαφορές των ανοιχτών και κλειστών διαστημάτων. Εδώ, πρέπει να επισημάνουμε ότι καθώς η φοιτήτρια μας απαντούσε έγραφε ταυτόχρονα σε ένα χαρτί τις σχέσεις $f(0)=0$ και $f(\infty)=1$.

Ρωτήσαμε και έναν άλλο φοιτητή ακριβώς τα ίδια, αλλά επειδή δεν υπήρχε μεγάλη άνεση στις απαντήσεις του, θα σας παρουσιάσουμε όλο το διάλογο για τα συγκεκριμένα ερωτήματα :

«Σ *Να γίνω πιο σαφής. Η f(x) παίρνει τη τιμή μηδέν;*
Φ *Ναι, την παίρνει.*
Σ *Και πόσο είναι;*
Φ *Μηδέν.*
Σ *Και με το άπειρο;*
Φ *...Όχι; Δεν ξέρω γιατί είναι ανοιχτό το διάστημα, μπορεί να πάρει...*
Σ *Το ότι η f είναι συνεχής μήπως αλλάζει τα πράγματα;*
(η ερώτηση έγινε με σκοπό να δούμε πόσο σίγουρος είναι για αυτά που απαντάει)
Φ *Ναι, παίζει ρόλο, αλλά τώρα...*
Σ *Άρα, μπορεί να την παίρνει την τιμή στο άπειρο;*
Φ *...Δεν ξέρω, έχω μπερδευτεί πολύ.*» (συνέντευξη 3η , γραμμές77-86)

Είναι ολοφάνερο ότι ο συγκεκριμένος δεν έχει ξεκαθαρίσει μέσα του την έννοια της συνέχειας, την έννοια του ορίου. Παρουσιάζει μια εικόνα που έχει, αλλά δεν μπορεί να την υποστηρίξει. Εξάλλου, ο ίδιος μας επιβεβαιώνει ότι είναι πολύ μπερδεμένος.

Με λίγα λόγια, οι φοιτητές δεν έχουν εκτιμήσει σωστά τα δεδομένα τους, αφού δεν έχουν καταλάβει τις βασικές έννοιες του ορίου και της συνέχειας και μοιραία διαπράττουν λάθη, που σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Orton(1980)(βλέπε [2]), θα τα χαρακτηρίζαμε δομικά.

3. Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$, με $g(\chi)=f(\chi)-\frac{1}{2}$.

Είναι, $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=f(0)$ και $\lim\limits_{\chi\to\alpha} f(\chi)=f(\alpha)$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $\lim\limits_{\chi\to\alpha} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\infty} f(\chi)=1$.

Άρα, $g(0)g(\alpha)=\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]\left[f(\alpha)-\frac{1}{2}\right]=(-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\prec 0$.

Επομένως, από θεώρημα Bolzano $\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και σε αυτή την περίπτωση. Μόνο που εδώ φαίνεται και ο «φόβος» των φοιτητών με το άπειρο. Το τέχνασμα που χρησιμοποιούν είναι ένας τρόπος για να αποφύγουν την επαφή με το άπειρο. Επομένως και εδώ πρόκειται για ένα δομικό λάθος.

Κάποιος φοιτητής μας είπε τα παρακάτω : «*Θα υπάρχει η τιμή σε εκείνα τα σημεία, στο μηδέν.. Μηδέν (εννοεί ότι είναι* $f(0)=0$*)... Στο άπειρο; Ένα...Δεν μπορεί να υπάρχει αυτή η τιμή... f του απείρου;.....Για κάποιο πολύ μεγάλο χ μπορούμε να πούμε, όπου εκεί θα παίρνει την τιμή1*» (συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 99-104).

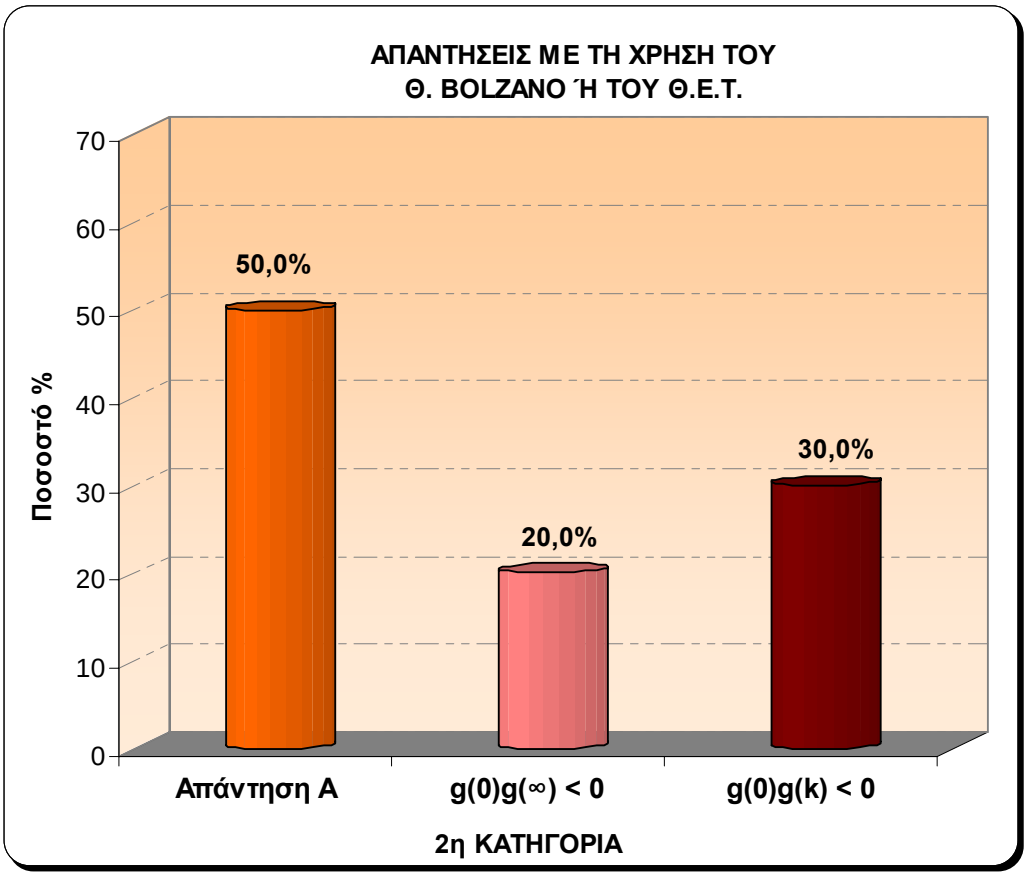
Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι διαδικασίες επίλυσης του θέματος από τους φοιτητές που επικαλέστηκαν το θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, είναι ακριβώς ίδιες με τις παραπάνω. Το μόνο που αλλάζει είναι η ονομασία του θεωρήματος και όχι το περιεχόμενό του.

Έτσι, αν θεωρήσουμε ως απάντηση Α, $\lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi)\lim\limits_{\chi\to +\infty} g(\chi)\prec 0 \Rightarrow$ Θ.Β ή Θ.Ε.Τ ότι

$\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$,

ως μια δεύτερη απάντηση $g(0)g(+\infty)\prec 0\Rightarrow$ από το Θ.Β. ή Θ.Ε.Τ., $\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$ και

ως μια τρίτη απάντηση $g(0)g(\alpha)\prec 0\Rightarrow$ από το Θ.Β. ή Θ.Ε.Τ., $\exists\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0)=0\Rightarrow f(\chi_0)=\frac{1}{2}$, θα πάρουμε τα παρακάτω στατιστικά αποτελέσματα



Άλλες λύσεις

1. Η μόνη συνάρτηση για την οποία ισχύουν αυτά τα δύο(δηλαδή τα όρια)είναι η $f(\chi)=c^{\frac{1}{\chi}}, 0 \prec c \prec 1$

$$f(\chi_0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \ln\frac{1}{2}=\ln c^{\frac{1}{\chi_0}} \Rightarrow \frac{1}{\chi_0}\ln c=\ln 1-\ln 2 \Rightarrow \ln c=(-\ln 2)\chi_0 \Rightarrow \chi_0=-\frac{\ln c}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow \chi_0=\frac{\ln\frac{1}{c}}{\ln 2}.$$

2. Έστω $g:(0,+\infty)\to R$, με $g(\chi)=f(\chi)-\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi) = -\dfrac{1}{2} \prec 0 \\ \\ \lim\limits_{\chi\to\infty} g(\chi) = \dfrac{1}{2} \succ 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το } (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \text{ και}$$

επειδή είναι συνεχής, $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε

$$g(\chi_0) = 0 \Rightarrow f(\chi_0) = \frac{1}{2}.$$

Αφού $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) = 0$, σημαίνει ότι ο περιορισμός της f στο $(0,+\infty)$ είναι η $g, g:(0,+\infty)$, ώστε $\lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi) = 0$. Ακόμα είναι $\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi) = 1$.

Άρα για να είναι $f(\chi_0) = \frac{1}{2}, \chi_0 \succ 0$, πρέπει να δείξω ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \frac{1}{2} = f(\chi_0)$, δηλαδή να δείξω ότι η f είναι συνεχής στο χ_0.

Όμως, η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή $\forall \chi \in (0,+\infty)$. Άρα, $\chi_0 \in (0,+\infty)$, δηλαδή $\chi_0 \succ 0$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \frac{1}{2} = f(\chi_0)$. Άρα, $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $g(\chi_0) = 0 \Rightarrow f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

Η πλειοψηφία των φοιτητών επέλεξε έναν πιο θεωρητικό τρόπο αντιμετώπισης του θέματος. Δεν χρησιμοποίησε ούτε τους ορισμούς των εννοιών, ούτε θεώρησε κάποια συνάρτηση, αλλά επεδίωξε κάπως πιο θεωρητικά να προσεγγίσει το ζητούμενο. Αν και υπήρξε μαζικότητα στην επιλογή αυτού του τρόπου, δυστυχώς κανείς από όλους τους φοιτητές δεν κατάφερε να αποδώσει με ακρίβεια και πλήρως αιτιολογημένα μια ορθά μαθηματική απόδειξη. Το τι ακριβώς έγραψαν οι φοιτητές, θα το περιγράψουμε αναλυτικά μέσα από χαρακτηριστικά και αντιπροσωπευτικά παραδείγματα. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι ορισμένοι από αυτούς επιχείρησαν να κάνουν και μια γραφική παράσταση της συνάρτησης, σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης. Ας συνεχίσουμε όμως, με τα παραδείγματά μας.

1. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από ιδιότητες διαστημάτων θα έχουμε ότι $f(0,+\infty) = (0,1)$, όπου $(0,1)$ είναι το πεδίο τιμών της f και επειδή $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1, \exists \chi_0 \in (0,+\infty) : f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(0,+\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι $(\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi), \lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi)) = (0,1)$.

Όμως, $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1$. Άρα, από Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

3. Αφού f είναι συνεχής συνάρτηση, το $(0,1)$ είναι κομμάτι του πεδίου τιμών της και από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής το $(0,1)$ είναι διάστημα. Άρα, $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

4. Εφ' όσον $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = 0$ και $\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 1$, το $f[(0,+\infty)] = (0,1)$.

Άρα, από Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

5. Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,1)$, δηλαδή ένα διάστημα.
Έχουμε ότι $\exists \theta = \frac{1}{2}$, ώστε $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1$.
Η f είναι συνεχής, άρα από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

6. Παρατηρώ ότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση από το 0 και τι 1, δηλαδή $0 \prec f(\chi) \prec 1$, $\forall \chi \in (0,+\infty)$. Άρα, όποιο χ και να βάλουμε στην f, η τιμή της θα είναι μεγαλύτερη από το 0 και μικρότερη από το 1. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποιο χ έτσι ώστε $f(\chi) = \frac{1}{2}$.
Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο τιμών θα παίρνει κάθε τιμή από το 0 ως το 1, άρα θα υπάρχει κάποιο $\chi \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε $f(\chi) = \frac{1}{2}$.

Όλοι οι φοιτητές που επέλεξαν να απαντήσουν το ερώτημα με θεωρητικό τρόπο, όπως παραπάνω, δεν αιτιολόγησαν γιατί το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το (0,1) (ορισμένοι έγραψαν και $[0,1]$). Σε κανένα από τα γραπτά δεν υπήρξε έστω και κάποια προσπάθεια αιτιολόγησης. Ωστόσο, όλοι αυτοί οι φοιτητές είχαν μια διαισθητική αντίληψη για τι συμβαίνει. Όμως, για ακόμη μια φορά διαπιστώνουμε ότι δεν έχουν αντιληφθεί ότι στα μαθηματικά πρέπει να υπάρχει αυστηρότητα σε όσα ισχυριζόμαστε και σε όσα γράφουμε(βλέπε, σελ 17-19). Μπορεί κάτι να φαίνεται αυτονόητο, αλλά τίποτα στην επιστήμη αυτή δεν εννοείται, όλα χρειάζονται μια απόδειξη.

Στα γραπτά που υπήρξε και κάποια γραφική παράσταση της συνάρτησης, παρατηρήσαμε ότι κάποιοι ερμήνευσαν τη συνέχειας της f ως μια συνεχόμενη

γραμμή. Κάποιος φοιτητής έγραψε : «Αφού η f είναι συνεχής, η γραφική παράσταση θα είναι μια συνεχόμενη γραμμή, χωρίς κενά, που θα ξεκινάει από το 0 και θα τείνει στο 1, ενώ στην ενδιάμεση διαδρομή μπορεί να πάρει και μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές. Έτσι, η γραφική της παράσταση θα τείνει τουλάχιστον μια φορά την ευθεία $y=\frac{1}{2}$. Άρα, υπάρχει $\chi \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε $f(\chi)=\frac{1}{2}$».

Μπορεί στην προκειμένη περίπτωση αυτό να ισχύει, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης να είναι μια συνεχόμενη γραμμή, χωρίς κενά, αλλά αυτό συμβαίνει γιατί το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα. Κανείς από τους φοιτητές δεν έγραξε κάτι πάνω σε αυτό.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Τέλος, υπήρξαν και μερικά γραπτά που οι απαντήσεις τους είναι λίγο ακραίες. Πρέπει να σημειώσουμε ότι καμία από αυτές τις λύσεις δεν ανταποκρινόταν στις προσδοκίες του θέματος. Συγκεκριμένα,

1. Θέλω να δείξω ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) = \frac{1}{2}$.

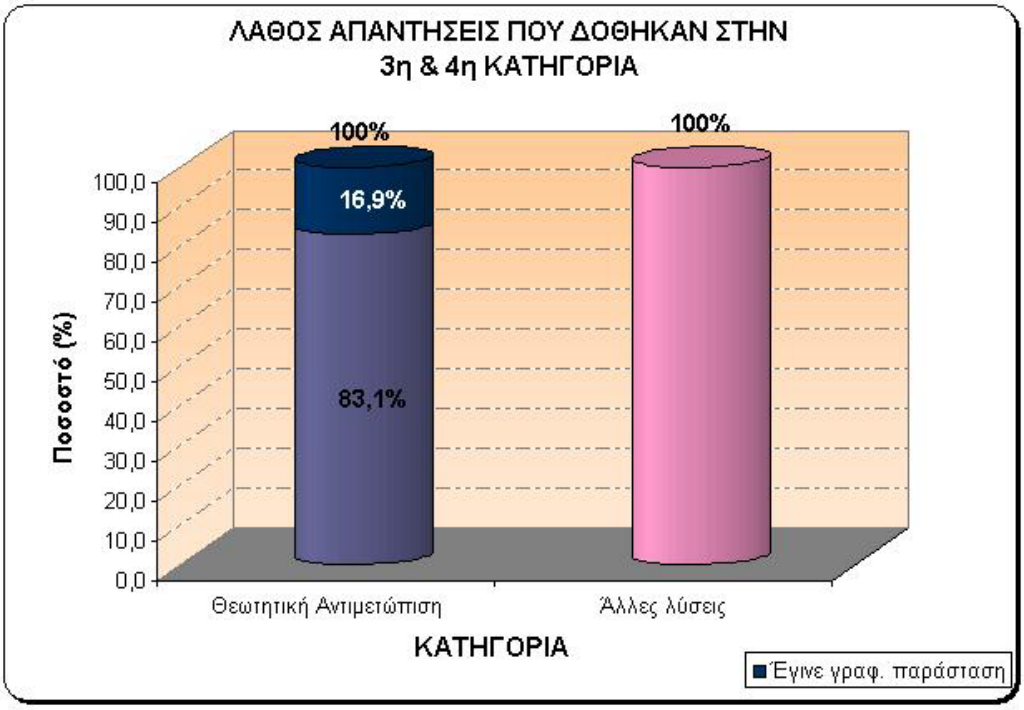
Αρκεί να δείξω ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \dfrac{\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) + \lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)}{2} = \frac{1}{2}$, $\chi_0 \succ 0$.

Άρα, $\chi_0 \in (0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής.

Άρα, πράγματι $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f(\chi_0) = \dfrac{\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) + \lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)}{2} = \frac{1}{2}$.

2. Εφ' όσον η συνάρτηση είναι συνεχής, άμεσα συμπεραίνουμε πως είναι και γνησίως μονότονη(την ερμηνεία αυτή την είδαμε και στο προηγούμενο θέμα), με ελάχιστο το $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) = 0$ και μέγιστο το $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi) = 1$. Επομένως, $\exists \chi_0 \in (0,+\infty)$ για το οποίο ισχύει $f(\chi_0) = \frac{1}{2}$. Και αυτό γιατί το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το (0,1), αφού η f είναι συνεχής..

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, ας δούμε και τη στατιστική ανάλυση που πραγματοποιήσαμε στις δύο τελευταίες κατηγορίες αντιμετώπισης του θέματος, στις οποίες δεν υπήρξε κάποιο ποσοστό επιτυχίας από τους φοιτητές.



Συμπεράσματα

Η μελέτη και επεξεργασία αυτού του θέματος μας οδήγησε στη διεξαγωγή ορισμένων γενικών συμπερασμάτων. Αρχικά, διαπιστώσαμε ότι το πιο μικρό ποσοστό των φοιτητών επέλεξε να αντιμετωπίσει το θέμα με την χρήση ορισμών(15,2%)(βλέπε, σελ 10). Οι υπόλοιποι επέλεξαν άλλους τρόπους, γεγονός που μας δείχνει την άρνηση των φοιτητών να χρησιμοποιούν τους ορισμούς εννοιών. Ωστόσο, και από αυτούς που επέλεξαν αυτό τον τρόπο λύσης, οι περισσότεροι δεν τα κατάφεραν. Το 60% δεν μπόρεσε να γράψει σωστά τους ορισμούς, αφού είτε υπήρχαν λάθη στους ποσοδείχτες, είτε δεν ήταν ολοκληρωμένοι(έλειπαν οι υποθέσεις, οι συνθήκες, οι ποσοδείχτες)(βλέπε, σελ 17-19, 22-23). Επιπλέον, το 28% των φοιτητών διατύπωσε με ακρίβεια τους ορισμούς, αλλά δεν κατάφερε να τους συνδυάσει(βλέπε, σελ 19)

Επίσης, σημειώσαμε και σε αυτό το θέμα, ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση των προϋποθέσεων για την εφαρμογή ενός θεωρήματος. Έτσι, καταλήξαμε ότι δεν ελέγχουν με προσοχή ποια είναι τα δεδομένα τους, τι χρειάζεται να αποδείξουν και ποιες είναι οι συνθήκες για την εφαρμογή του θεωρήματος που θέλουν να χρησιμοποιήσουν. Αρκούνται σε σχέσεις που είναι περίπου ίδιες με αυτές που θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν, αρκεί να γράψουν το αποτέλεσμα.(αντιμετώπιση θέματος με την χρήση συναρτήσεων(βλέπε ,σελ 87-91).

Ακόμη, είδαμε ότι οι φοιτητές δεν έχουν κατανοήσει τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας(αντιμετώπιση του θέματος με συναρτήσεις, βλέπε, σελ 87-91). Ήδη έχουμε αναφέρει ορισμένες αντιλήψεις φοιτητών για την έννοια του ορίου και την έννοια της συνέχειας(βλέπε, σελ 21-25, 89-90), οι οποίες με σαφήνεια επιβεβαιώνουν τις δυσκολίες τους στην κατανόηση αυτών των εννοιών.

Επιπλέον, για άλλη μια φορά, διαπιστώσαμε τη μη αυστηρή γραφή απαντήσεων. Όλοι οι φοιτητές που ακολούθησαν το δρόμο με τη θεωρητική αντιμετώπιση του θέματος, έδωσαν ανεπαρκείς και μη πλήρως αιτιολογημένες απαντήσεις, που φανερώνει τη δυσκολία να αποδίδουν απαντήσεις τεκμηριωμένες.(βλέπε, σελ 17-19) .

Τέλος, παρατηρήσαμε και μια «φοβία» των φοιτητών με το άπειρο, αφού με το «τέχνασμα» $\lim_{\chi \to \alpha} f(\chi) = f(\alpha)$, όπου $\alpha \in (0,+\infty)$, το απέφυγαν. Οι δυσκολίες στο χειρισμό της έννοιας του απείρου καθιστούν πιο δύσκολη και την κατανόηση της έννοιας του ορίου, όπως μας επιβεβαιώνει και ο Cornu[7](βλέπε, σελ 26-27).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΣΤΑ ΛΑΘΗ ΤΟΥΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι ΤΟΝ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟ ΤΟΥ 2003

4.1 Οργάνωση των συνεντεύξεων

Για την οργάνωση των συνεντεύξεων, στηριχθήκαμε στο βιβλίο των L. Cohen και L. Manion, Μεθοδολογία εκπαιδευτικής Έρευνας[6].Οι στόχοι της συνέντευξης στο ευρύτερο πλαίσιο της ζωής είναι πολλοί και ποικίλοι. Μπορεί, έτσι, να την χρησιμοποιήσουμε ως μέσο για την αξιολόγηση ή την εκτίμηση ενός ατόμου από κάποια πλευρά, για την επιλογή ή την προώθηση ενός εργαζομένου, για την επίτευξη θεραπευτικής αλλαγής, όπως στην ψυχιατρική συνέντευξη. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο ή την ανάπτυξη υποθέσεων, για τη συγκέντρωση στοιχείων(όπως σε επισκοπήσεις ή σε πειραματικές καταστάσεις) ή για τη δειγματοληψία απόψεων ερωτημένων, όπως σε συνεντεύξεις σε σπίτια.

Αν και σε καθεμία από αυτές τις καταστάσεις οι αντίστοιχοι ρόλοι εκείνου που κάνει και εκείνου που δέχεται τη συνέντευξη μπορεί να ποικίλουν και τα κίνητρα συμμετοχής τους μπορεί να διαφέρουν, ένας κοινός παρανομαστής είναι η συναλλαγή που γίνεται μεταξύ αναζήτησης πληροφοριών από την πλευρά του ενός και παροχής πληροφοριών από την πλευρά του άλλου.

Οι συνεντεύξεις, ως ειδικό εργαλείο έρευνας, ποικίλουν από την τυπική συνέντευξη, στην οποία τίθενται συγκεκριμένες ερωτήσεις και οι απαντήσεις καταγράφονται σε τυποποιημένα διάγραμμα, σε λιγότερο τυπικές συνεντεύξεις, στις οποίες ο συνεντευκτής είναι ελεύθερος να τροποποιήσει την αλληλουχία των ερωτήσεων, να αλλάξει τη διατύπωση, να τις εξηγήσει ή να κάνει προσθήκες σε αυτές. Επιπλέον, υπάρχει και η απόλυτα άτυπη συνέντευξη, όπου ο συνεντευκτής μπορεί να έχει μια σειρά από θέματα –κλειδιά τα οποία αναπτύσσει σε ελεύθερη συζήτηση αντί να έχει ένα δεδομένο ερωτηματολόγιο. Πέρα από αυτό το σημείο βρίσκεται η μη κατευθυνόμενη συνέντευξη, στην οποία ο συνεντευκτής παίζει δευτερεύοντα λόγο.

Η ερευνητική συνέντευξη έχει οριστεί ως «συζήτηση δυο ατόμων, που αρχίζει από τον συνεντυκτή, με ειδικό σκοπό την απόκτηση σχετικών με την έρευνα πληροφοριών, και επικεντρώνεται από αυτόν σε περιεχόμενο καθορισμένο από τους στόχους της έρευνας με συστηματική περιγραφή, πρόβλεψη ή ερμηνεία».(Cannell and Kahn, 1968). Είναι ασυνήθιστη μέθοδος δεδομένου ότι περιλαμβάνει τη συλλογή στοιχείων μέσω της άμεσης λεκτικής συναλλαγής μεταξύ ατόμων.

Με αυτή την έννοια διαφέρει από το ερωτηματολόγιο, όπου ζητείται από τον ερωτώμενο να καταγράψει με κάποιον τρόπο τις απαντήσεις του σε ερωτήσεις που τίθενται. Έχει επισημανθεί ότι η άμεση αλληλεπίδραση στη συνέντευξη είναι η πηγή τόσο των πλεονεκτημάτων, όσο και των μειονεκτημάτων της ως τεχνικής έρευνας(Borg, 1963) . Ένα πλεονέκτημα, για παράδειγμα, είναι ότι επιτρέπει μεγαλύτερο βάθος από ότι στην περίπτωση των άλλων μεθόδων συλλογής στοιχείων. Ένα μειονέκτημα, από την άλλη πλευρά, είναι ότι είναι επιρρεπής στην υποκειμενικότητα και μπορεί να επηρεάζεται από τον συνεντευκτή.

Ως ξεχωριστή ερευνητική τεχνική, η συνέντευξη μπορεί να εξυπηρετήσει τρεις στόχους. Αρχικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως το κύριο μέσο συλλογής πληροφοριών που έχουν άμεση σχέση με τα αντικείμενα της έρευνας. Όπως το

περιγράφει ο Tuckman(1972), «Παρέχοντας μια πρόσβαση σε αυτό που βρίσκεται ‘μέσα στο κεφάλι ενός ανθρώπου, δίνει τη δυνατότητα να μετρηθεί τι γνωρίζει ένα άτομο(γνώση ή πληροφόρηση), τι αρέσει ή δεν αρέσει σε ένα άτομο(αξίες και προτιμήσεις) και τι σκέφτεται ένα άτομο(στάσεις και πεποιθήσεις)» . Δεύτερον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθούν υποθέσεις ή να υποδειχθούν νέες. Και τρίτον, η συνέντευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους στη διεξαγωγή μιας έρευνας. Σχετικά με αυτό, ο Kerlinger (1970) , υποδεικνύει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παρακολούθηση μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων, για παράδειγμα, ή για την αξιολόγηση άλλων μεθόδων ή για τη βαθύτερη εξέταση των κινήτρων των ερωτώμενων και για τους λόγους που απάντησαν έτσι.

Υπάρχουν τέσσερα είδη συνεντεύξεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ειδικά ως εργαλεία έρευνας : η δομημένη συνέντευξη, η μη δομημένη συνέντευξη, η μη κατευθυνόμενη συνέντευξη και η εστιασμένη συνέντευξη. Η δομημένη συνέντευξη είναι αυτή στην οποία το περιεχόμενο και η διαδικασία είναι οργανωμένα εκ των προτέρων. Αυτό σημαίνει ότι η αλληλουχία και η διατύπωση των ερωτήσεων είναι καθορισμένα βάσει σχεδιαγράμματος και αφήνεται λίγη ελευθερία στο συνεντευκτή να κάνει τροποποιήσεις. Κάποια ελευθερία κινήσεων, όπου του παρέχεται, είναι επίσης καθορισμένη από την αρχή. Έτσι, χαρακτηρίζεται ως κλειστή κατάσταση. Σε αντίθεση με αυτό, από την ίδια σκοπιά, η μη δομημένη συνέντευξη είναι μια ανοιχτή κατάσταση και έχει μεγαλύτερη ευελιξία και ελευθερία. Όπως σημειώνει ο Kerlinge, αν και οι στόχοι της έρευνας καθορίζουν τις ερωτήσεις που τίθενται, το περιεχόμενό τους, η αλληλουχία τους και η διατύπωσή τους βρίσκονται αποκλειστικά στα χέρια του συνεντευκτή. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι η μη δομημένη συνέντευξη είναι τυχαία υπόθεση, γιατί, με το δικό της τρόπο, πρέπει επίσης να είναι προσεκτικά σχεδιασμένη.

Η μη κατευθυνόμενη συνέντευξη ως ερευνητική τεχνική προέρχεται από τη θεραπευτική ή την ψυχιατρική συνέντευξη. Τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι ότι ο συνεντευκτής εκδηλώνει ελάχιστη καθοδήγηση ή έλεγχο και ότι ο ερωτώμενος έχει την ελευθερία να εκφράσει τα υποκειμενικά του συναισθήματα, όσο απόλυτα και όσο αυθόρμητα επιλέγει ή μπορεί.

Σύμφωνα με τους Moser και Kalton(1977), «Ο πληροφοριοδότης ενθαρρύνεται να μιλήσει για το υποκείμενο της έρευνας(συνήθως τον εαυτό του) και η πορεία της συνέντευξης καθοδηγείται κυρίως από τον ίδιο. Δεν υπάρχουν προκαθορισμένες ερωτήσεις και συνήθως δεν υπάρχει προκαθορισμένο πλαίσιο για καταγραφή των απαντήσεων. Ο συνεντευκτής περιορίζεται στη διευκρίνιση αμφισβητούμενων σημείων, στην επαναδιατύπωση των απαντήσεων του ερωτώμενου και στη γενικότερη παρακίνηση για απαντήσεις. Είναι μια προσέγγιση που συνιστάται ειδικά όταν εμπλέκονται πολύπλοκες στάσεις και όταν η γνώση κάποιου για αυτές είναι ακόμα σε ασαφή και αδόμητη μορφή».

Η ανάγκη να εισαχθεί κάπως περισσότερος έλεγχος από τον συνεντευκτή στη μη κατευθυνόμενη κατάσταση οδήγησε στην ανάπτυξη της εστιασμένης συνέντευξης, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς στην έρευνά μας. Το διακριτικό χαρακτηριστικό αυτού του τύπου είναι ότι εστιάζεται στις υποκειμενικές απαντήσεις του ερωτώμενου για μια γνωστή κατάσταση στην οποία έχει συμμετάσχει και η οποία έχει αναλυθεί από τον συνεντευκτή πριν από την συνέντευξη. Έχει έτσι τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει στοιχεία από τη συνέντευξη, για να τεκμηριώσει ή να απορρίψει υποθέσεις που δημιουργήθηκαν προηγουμένως. Όπως εξηγούν οι Merton και Kendall(1946), «Στη συνηθισμένη συνέντευξη σε βάθος, μπορεί κανείς να πιέσει τους πληροφοριοδότες να θυμηθούν

τις εμπειρίες τους. Στην εστιασμένη συνέντευξη όμως, ο συνεντευκτής μπορεί, όταν είναι σκόπιμο, να παίζει έναν πιο ενεργητικό ρόλο: μπορεί να εισάγει πιο σαφείς λεκτικές υποδείξεις για τον τύπο του ερεθίσματος, ή ακόμα και να το αναπαραστήσει. Σε κάθε περίπτωση, αυτό συνήθως ενεργοποιεί μια συγκεκριμένη διατύπωση απαντήσεων από τους πληροφοριοδότες».

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Το προκαταρκτικό στάδιο μιας έρευνας συνεντεύξεων είναι το σημείο κατά το οποίο αποφασίζεται ο σκοπός της έρευνας. Μπορεί να αρχίσει με την περιγραφή της θεωρητικής βάσης της έρευνας, των λόγων για τους οποίους επιλέχτηκε η προσέγγιση της συνέντευξης, της πρακτικής της αξίας, των ευρύτερων στόχων της. Αυτό είναι το πιο σημαντικό βήμα, γιατί μόνον η προσεκτική διατύπωση των στόχων σε αυτό το σημείο θα παράγει τελικά το σωστό είδος στοιχείων που είναι απαραίτητα για ικανοποιητικές απαντήσεις στο πρόβλημα της έρευνας. Εμείς, θέλαμε να ακούσουμε τις προσωπικές εμπειρίες των φοιτητών που αποχτήθηκαν από το μάθημα του Απειροστικού Ι καθώς και τις αντιλήψεις τους για αυτό. Μας ενδιέφερε να μάθουμε ποια είναι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στο συγκεκριμένο μάθημα, ποιες είναι οι βασικές τους αδυναμίες, ποιες έννοιες τους δυσκολεύουν ιδιαίτερα, ποιες είναι οι εντυπώσεις τους για αυτές. Επιδιώξαμε να αντλήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στο μάθημα, να εκμαιεύσουμε τις γνώμες τους για αυτό. Η όλη προσπάθειά μας ήταν να εξωτερικεύσουμε όσα δεν τόλμησαν να πουν στους καθηγητές τους, είτε από φόβο, είτε από ανασφάλεια, είτε και από αδιαφορία.

Στη συνέχεια ακολούθησε η προετοιμασία του ίδιου του διαγράμματος της συνέντευξης. Αυτή περιλαμβάνει τη μεταγραφή των στόχων της έρευνας σε ερωτήσεις οι οποίες θα διαμορφώσουν το κύριο σώμα του προγράμματος. Αυτό έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ερωτήσεις μπορούσαν να αντανακλούν ικανοποιητικά αυτό που προσπαθούσαμε να βρούμε. Ταυτόχρονα, ορίσαμε και τις μεταβλητές μας, με τις οποίες έπρεπε να ασχοληθούμε στην συνέντευξη(για παράδειγμα, το όριο τους ορισμούς κλπ). Όπως λέει κάποιος σχολιαστής, «Το πρώτο βήμα στη σύνταξη των ερωτήσεων της συνέντευξης είναι να προσδιορίσετε με σαφήνεια τις μεταβλητές σας. Οι μεταβλητές σας είναι αυτό που προσπαθείτε να μετρήσετε. Σας λένε από πού να ξεκινήσετε (Tuckman, 1972).

Παράλληλα με τα ερωτήματα της συνέντευξης, προσδιορίσαμε τη μορφή των ερωτήσεων καθώς και τους τύπους των απαντήσεων. Εφόσον είχαν εντοπιστεί οι μεταβλητές που θα εξετάζαμε, οι ερωτήσεις θα έπρεπε να συνταχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να τις αντικατοπτρίζουν. Η επιλογή της μορφής της ερώτησης, για παράδειγμα, εξαρτάται από την εξέταση ενός ή περισσοτέρων από τους ακόλουθους παράγοντες: τους στόχους της συνέντευξης, τη φύση του διερευνώμενου ζητήματος, αν ο συνεντευκτής ασχολείται με γεγονότα, γνώμες ή στάσεις, αν επιζητείται η συγκεκριμενοποίηση ή το βάθος. Επιπλέον, εξαρτάται από το επίπεδο εκπαίδευσης του ερωτώμενου, το είδος της πληροφόρησης που αναμένεται από αυτόν να έχει, αν οι σκέψεις του χρειάζεται ή όχι να συγκροτηθούν, ο βαθμός κατανόησης της κατάστασης του ερωτώμενου από την πλευρά του συνεντευκτή, το είδος της σχέσης που μπορεί να περιμένει ο συνεντευκτής ότι θα αναπτύξει με τον ερωτώμενο. Έχοντας δώσει προτεραιότητα στην εξέταση αυτών των ζητημάτων, αποφασίσαμε ότι οι ερωτήσεις έπρεπε να είναι ανοιχτού τύπου, κάποιες να είναι πολύ συγκεκριμένες, κάποιες ίσως όχι τόσο, μερικές από αυτές να δίνονται άμεσα και κάποιες άλλες έμμεσα. Ο Tuckman υποδεικνύει ότι, κάνοντας το σκοπό των ερωτήσεων λιγότερο εμφανή, η έμμεση προσέγγιση είναι πιθανότερο να προκαλέσει ειλικρινείς και ανοιχτές απαντήσεις. Ο ίδιος υποστηρίζει, ότι οι εξειδικευμένες ερωτήσεις, όπως οι άμεσες, μπορεί να προκαλέσουν έναν ερωτώμενο να γίνει πιο προσεκτικός ή επιφυλακτικός και να δίνει λιγότερο ειλικρινείς απαντήσεις. Οι μη εξειδικευμένες ερωτήσεις, μπορεί να

οδηγήσουν πλαγίως στις επιθυμητές πληροφορίες, αλλά προκαλούν λιγότερη ανησυχία στους ερωτώμενους (Tuckman,1972). Έτσι, ανάλογα με το τι θέλαμε να μάθουμε, πόσο συγκεκριμένη ή όχι ήταν η απάντηση που περιμέναμε, επιλέγαμε και τη μορφή των ερωτήσεων(Για παράδειγμα, όταν θέλαμε να μάθουμε το έτος φοίτησης ενός σπουδαστή, κάναμε μια άμεση ερώτηση).

Οι ανοιχτές ερωτήσεις έχουν οριστεί από τον Kerlinger ως «εκείνες που παρέχουν ένα πλαίσιο αναφοράς για τις απαντήσεις των ερωτώμενων, αλλά βάζουν ελάχιστους περιορισμούς στις απαντήσεις και στην έκφρασή τους» (Kerlinger, 1970). Εκτός από το θέμα της ερώτησης, το οποίο καθορίζεται από τη φύση του προβλήματος που ερευνάται, δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί είτε στο περιεχόμενο είτε στον τρόπο της απάντησης του ερωτώμενου.

Η επιλογή των ερωτήσεων ανοιχτού τύπου έγινε εφόσον αυτές έχουν μια σειρά από πλεονεκτήματα: είναι ευέλικτες, αφού επιτρέπουν στο συνεντευκτή να κάνει ερωτήσεις, έτσι ώστε να μπορεί να πάει σε μεγαλύτερο βάθος, αν το επιλέξει, ή να διευκρινίσει οποιεσδήποτε παρανοήσεις. Δίνουν τη δυνατότητα στο συνεντευκτή να ελέγξει τα όρια της γνώσης του ερωτώμενου καθώς επίσης, ενθαρρύνουν τη συνεργασία και βοηθούν στη δημιουργία επαφής. Ακόμη, επιτρέπουν στον συνεντευκτή να κάνει πιο σωστή εκτίμηση αυτού που πράγματι πιστεύει ο ερωτώμενος. Οι ανοιχτές ερωτήσεις μπορεί επίσης να έχουν ως αποτέλεσμα μη αναμενόμενες ή απρόβλεπτες απαντήσεις, οι οποίες μπορεί να υποδείξουν σχέσεις ή υποθέσεις που δεν είχαν εξεταστεί μέχρι τη συγκεκριμένη στιγμή. Ένα ιδιαίτερο είδος ανοιχτής ερώτησης είναι το «χωνί». Αυτό αρχίζει με μια ευρεία ερώτηση ή δήλωση και στη συνέχεια στενεύει σε πιο εξειδικευμένες ερωτήσεις.

Ως γενικός κανόνας, το είδος των πληροφοριών που ζητούνται και τα μέσα για την απόκτησή τους καθόρισαν την επιλογή του τύπου των απαντήσεων. Αυτός ήταν της «μη δομημένης απάντησης», η οποία επιτρέπει στον ερωτώμενο να δώσει την απάντησή του με οποιονδήποτε τρόπο, χωρίς να υπάρχουν δεσμεύσεις και προκαθορισμένα πλαίσια.

Η οργάνωση και η διεξαγωγή της συνέντευξης αποτέλεσαν το επόμενο στάδιο της δοκιμασίας. Η επιλογή των φοιτητών που συμμετείχαν, έγινε με μεγάλη προσοχή. Αυτοί έπρεπε να έχουν εξεταστεί στο μάθημα του Απειροστικού Ι, το Σεπτέμβριο του 2003 και να έχουν αποτύχει σε αυτό. Επιδιώξαμε να προέρχονται από διάφορα έτη και να μην είναι όλοι του ίδιου φύλου. Ωστόσο, θέλαμε να κρατήσουμε και μια καλή αναλογία ανάμεσα τους, όσον αφορά και την ηλικία, αλλά και το φύλο.

Ο Tuckman(1972), έχει συνοψίσει περιληπτικά τις διαδικασίες που υιοθετούνται στην ίδια τη συνέντευξη. Γράφει:

«Κατά τη συνάντηση, ο συνεντευκτής θα πρέπει να ενημερώσει τον ερωτώμενο για τη φύση ή το σκοπό της συνέντευξης(όντας όσο το δυνατόν πιο ειλικρινής, χωρίς να επηρεάζει τις απαντήσεις) και να προσπαθήσει να κάνει τον ερωτώμενο να αισθάνεται άνετα. Θα πρέπει να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο θα καταγράψει τις απαντήσεις και, αν σχεδιάζει να τις μαγνητοφωνήσει, θα πρέπει να πάρει τη συγκατάθεση του ερωτώμενου. Σε κάθε περίπτωση, ένας συνεντευκτής πρέπει να θυμάται ότι είναι όργανο συλλογής στοιχείων και να προσπαθεί να μην αφήνει τις δικές του προκαταλήψεις, τις απόψεις του ή την περιέργειά του να επηρεάζουν τη συμπεριφορά του. Είναι σημαντικό ο συνεντευκτής να μην παρεκκλίνει από τη μορφή και το σχέδιο της συνέντευξής του, αν και πολλά ερευνητικά σχέδια επιτρέπουν κάποια ευελιξία στην επιλογή των ερωτήσεων. Ο ερωτώμενος θα πρέπει να εμποδίζεται να απομακρυνθεί από την ουσία μιας ερώτησης, αλλά αυτό να γίνεται πάντα με ευγένεια

Τέλος, αφού συγκεντρώσαμε τα δεδομένα των συνεντεύξεων, αναλύσαμε το περιεχόμενό τους και τα ερμηνεύσαμε υπό το φως των στόχων της έρευνάς μας. Για την ανάλυση των στοιχείων μας, ακολουθήσαμε κάποιες οδηγίες που μας τις δίνει ο Hycner (Hycner, 1985). Περιληπτικά, οι οδηγίες έχουν ως εξής;

1. *Μεταγραφή:* μεταγράφοντας τη μαγνητοφώνηση της συνέντευξης, σημειώναμε όχι μόνον τις λεκτικές δηλώσεις, αλλά επίσης και τις μη λεκτικές και την εξωλεκτική επικοινωνία.

2. *Ακρόαση της συνέντευξης για την απόκτηση μιας συνολικής αίσθησης:* ακούσαμε αρκετές φορές τις μαγνητοφωνήσεις και διαβάσαμε αρκετές φορές τις μεταγραφές, με σκοπό να προκύψει ένα πλαίσιο για τη μετέπειτα εμφάνιση συγκεκριμένων νοημάτων και θεμάτων.

3. *Σκιαγράφηση ενοτήτων γενικού νοήματος:* έγινε εξονυχιστική εξέταση τόσο των λεκτικών όσο και των μη λεκτικών εκφράσεων, για να εξαχθεί το νόημα του συμμετέχοντος. Ο Hycner λέει: «Είναι η αποκρυστάλλωση και η συμπύκνωση όσων έχει πει ο συμμετέχων, με την χρησιμοποίηση πάντα όσο το δυνατόν περισσότερο της κατά λέξη διατύπωσης του συμμετέχοντος» (Hycner, 1985).

4. *Εντοπισμός γενικών και μοναδικών θεμάτων για όλες τις συνεντεύξεις:* σε αυτό το στάδιο ψάξαμε για θέματα κοινά στις περισσότερες ή σε όλες τις συνεντεύξεις, καθώς και για ατομικές παραλλαγές. Το πρώτο βήμα ήταν να σημειώσουμε αν υπάρχουν θέματα κοινά σε όλες ή στις περισσότερες συνεντεύξεις. Το δεύτερο βήμα ήταν να σημειώσουμε πότε υπήρχαν θέματα που ήταν μοναδικά σε μία ή σε μία μειοψηφία συνεντεύξεων.

4.2 Συνεντεύξεις

Συνέντευξη 1η
30 Μαρτίου 2004

1	Σ Νίκη γεια σου.	
2	Φ Χαίρετε.	
3	Σ Θα ήθελα να κουβεντιάσουμε λίγα πράγματα για τον απειροστικό λογισμό, το μάθημα που κάνεις στο πανεπιστήμιο.	
4	Φ Ωραία.	
5	Σ Λοιπόν, θέλω να μου πεις αρχικά σε ποιο έτος είσαι.	
6	Φ Είμαι στο τέταρτο.	
7	Σ Ωραία. Επομένως, έχεις παρακολουθήσει το μάθημα, πόσες φορές;	
8	Φ Δύο φορές.	
9	Σ Μάλιστα. Και;	
10	Φ Όχι εντατικά όμως.	
11	Σ Δηλαδή;	
12	Φ Τη δεύτερη φορά υπήρχαν απουσίες αρκετές.	
13	Σ Ναι. Αυτό σημαίνει ότι είχες αρκεστεί από αυτά που είχες ακούσει την πρώτη φορά;	
14	Φ Όχι. Χωρίς να φταίει κάτι στο μάθημα. Απλά υπήρχαν κενά και δεν παρακολουθούσα, έφευγα.	Δίνει έμφαση στη λέξη «κενά»
15	Σ Μάλιστα. Και δε μου λες, όταν παρακολούθησες το μάθημα την πρώτη φορά, όπως είπες εντατικά, ασχολιόσουν στο σπίτι; Έλυνες ασκήσεις;	
16	Φ Έλυνα, αλλά όχι αρκετές.	
17	Σ Ναι.	

18	Φ Κάπου χάθηκα Δηλαδή, δεν αντιλαμβανόμουν κάποια πράγματα. Δεν μπορούσα να κατανοήσω κάποιες έννοιες.	
19	Σ Είχες σκεφτεί ποτέ να ρωτήσεις κάποιον καθηγητή σου ή κάποιον συμφοιτητή σου για να σου λυθούν αυτές οι απορίες;	
20	Φ Το είχα κάνει ελάχιστες φορές όμως.	
21	Σ Δόθηκε λύση στο πρόβλημα; Είδες διαφορά;	
22	Φ Όχι μεγάλη διαφορά.	Τονίζει το «όχι»
23	Σ Ναι.	
24	Φ Ίσως θα έπρεπε να υπήρχε κάποια βοήθεια παραπάνω. Ή να τη ζητούσα εγώ ή να προσφερόταν από τους καθηγητές μέσα στο αμφιθέατρο	
25	Σ Ήσαστε πολλοί φοιτητές που παρακολουθούσατε το μάθημα;	
26	Φ Ναι, αρκετά. Περίπου διακόσια άτομα.	
27	Σ Και αυτό πως σου φαίνεται;	
28	Φ Αρνητικό.	
29	Σ Μπορείς να μου το εξηγήσεις λίγο;	
30	Φ Είναι τελείως διαφορετικά να κάνεις μάθημα σε ένα μικρό αριθμό φοιτητών από ότι να κάνεις σε ένα αμφιθέατρο γεμάτο. Στα γεμάτα αμφιθέατρα γίνεται πολύ φασαρία. Η ροή του μαθήματος δεν είναι καλή .Ο καθηγητής δεν μπορεί να λύσει τις απορίες όλων των φοιτητών. Δεν είναι δυνατό να παρακολουθεί όλους τους φοιτητές και επομένως δε μπορεί να δίνει την αρμόζουσα σημασία σε αυτούς που έχουν κάποιο πρόβλημα. Έτσι, δημιουργούνται κενά στους φοιτητές.	
31	Σ Ναι. Να σε ρωτήσω και κάτι άλλο που θέλω. Πόσες φορές έδωσες εξετάσεις για να περάσεις στο πανεπιστήμιο;	
32	Φ Πέρασα με την πρώτη, με το καινούριο σύστημα.	

33	Σ Ωραία. Μπορείς να μου πεις ποια είναι η συνέχεια από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο;	
34	Φ Νομίζω πως δεν υπήρξε συνέχεια και ειδικά στο μάθημα του Απειροστικού. Ενώ αρχίζει πάρα πολύ ήρεμα και λες πως πρόκειται για ένα μάθημα που μπορώ να κατανοήσω, δηλαδή με τα δεκατρία αξιώματα που παρουσιάζονται στην αρχή, από το δέκατο τέταρτο της πληρότητας και μετά υπάρχει ένα χάος. Αρχίζεις και νιώθεις ότι αυτό το μάθημα τελικά έχει ξεφύγει πολύ από αυτό που φαινόταν στην αρχή. Δεν υπήρχε συνέχεια από το Λύκειο, σχεδόν ελάχιστη. Δεν μπορώ να πω ότι με βοήθησε σε αυτό το μάθημα. Κάποιες βάσεις, αλλά όχι πολλά πράγματα. Ίσως να έπρεπε να υπήρχε κάτι ενδιάμεσο πριν τον Απειροστικό Λογισμό 1	Έμφαση στη λέξη «χάος» Καθώς περιγράφει, κάνει διάφορες χειρονομίες και μορφασμούς για να τονίσει την κατάσταση.
35	Σ Υπήρχαν κάποιες έννοιες που σου φάνηκαν αρκετά εύκολες ή κάποιες αρκετά δύσκολες από την πρώτη επαφή που είχες με το μάθημα;	
36	Φ Λίγο οι έννοιες του supremum και του infimum,αλλά όχι τρομερές. Ίσως φαίνονται στην αρχή λίγο δύσκολες και σε αποθαρρύνουν, αλλά μετά είναι πιο προσπελάσιμες.	
37	Σ Νίκη, τώρα θα ήθελα να συζητήσουμε για ένα μεγάλο κεφάλαιο των μαθηματικών, τη συνέχεια.	
38	Φ Ωχ! Για πάμε.	Έμφαση στο «ωχ» και γελάει ειρωνικά.
39	Σ Λοιπόν, για πες μου, πώς αντιλαμβάνεσαι την έννοια της συνέχειας;	
40	Φ Πέρα από τα μαθηματικά, αυτό που χρησιμοποιούμε και στην καθημερινή μας ζωή ως συνέχεια, είναι κάτι που δεν έχει κενά δεν έχει….Δεν μπορούμε να κατανοήσουμε που είναι η αρχή και που το τέλος. Είναι κάτι….χωρίς….κάτι συνεχόμενο θα λέγαμε. Στα μαθηματικά όταν μιλάμε για μια συνάρτηση, για μια συνάρτηση που έχει συνέχεια, αντιλαμβάνομαι ότι είναι μια γραμμή, η οποία δεν έχει κενά ,δεν έχει τρύπες θα λέγαμε πιο απλά και μπορεί να χαραχθεί με τη μύτη ενός μολυβιού χωρίς να σηκωθεί το μολύβι.	Τονίζει τα «δεν»
41	Σ Μάλιστα. Ας δούμε τώρα ένα σχετικό θέμα ,το οποίο το έγραψες τον Σεπτέμβριο του 2003 στο μάθημα του Απειροστικού 1.Το θέμα είναι το εξής:	

	Αν $f:[0,3] \to R$ *συνεχής συνάρτηση και* $0 \le \chi_n \le 3$ *για κάθε* $n \in N$*,να βρεθεί, αν υπάρχει, το* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{n}$ Πώς το αντιλαμβάνεσαι; Ποιος είναι ο σκελετός που έχεις μέσα στο μυαλό σου για να λύσεις το θέμα;	
42	Φ Αφού γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής, θεωρώ ότι θα πρέπει να τη βάλουμε μέσα στην ανισότητα που μας δίνεται για το χ_n.Δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι η f(χ_n) βρίσκεται μεταξύ του f(0) και του f(3).	Απαντάει με μεγάλη ευκολία.
43	Σ Ναι. Αυτό από πού προκύπτει;	
44	Φ Από τη συνέχεια…και από το ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα.	Ο τόνος της φωνής της χαμηλώνει όταν απαντά για το κλειστό διάστημα. Δεν απαντά με σιγουριά.
45	Σ Μπορείς να μου πεις αν η έννοια της συνέχειας συνδέεται με άλλες έννοιες, όπως για παράδειγμα με την έννοια της μονοτονίας; Υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσά τους;	
46	Φ Μια συνεχής συνάρτηση είναι και μονότονη συνάρτηση. Οπότε μπορούμε να συσχετίσουμε τις δυο έννοιες.	Απαντά αμέσως, δείχνει βεβαιότητα.
47	Σ Ναι.	
48	Φ Τώρα για άλλες έννοιες ….δε μου έρχεται αυτή τη στιγμή κάτι.	
49	Σ Τώρα Νίκη, θα ήθελα να συζητήσουμε για τους ορισμούς.	
50	Φ Ναι.	
51	Σ Πώς τους βλέπεις;	
52	Φ Ας μιλήσουμε για τους ορισμούς που έχουν ε και δ στον απειροστικό. Είναι σχετικά περίπλοκοι. Προσωπικά με δυσκολεύουν στο να τους κατανοήσω, Για να τους κατανοήσω θα πρέπει να ασχοληθώ πάρα πολύ, να λύσω κάποιες ασκήσεις και τελικά να τους βάλω στο μυαλό μου με ένα τρόπο δικό μου προσωπικό, που δε θα είναι καθαρά ο ορισμός, αλλά κάτι που θα έχω καταλάβει εγώ και θα με διευκολύνει	Τονίζει την έκφραση «που δε θα είναι καθαρά ο ορισμός ,αλλά κάτι που θα έχω καταλάβει εγώ και θα με διευκολύνει πρακτικά.»

	πρακτικά.	
53	Σ Στους ορισμούς ε-δ, τους ποσοδείχτες τους καταλαβαίνεις; Το «για κάθε»,το «υπάρχει»;	
54	Φ Δεν είναι και τόσο σαφής θα έλεγα. Υπάρχει μια δυσκολία αρκετά μεγάλη… Ειδικά στο ε κάπου τα πράγματα μπερδεύονται	Μικρή παύση
55	Σ Μπερδεύονται ως προς τι;	
56	Φ Αναρωτιέσαι τι θα ορίσεις για ε, τι τιμή θα βάλεις για κάθε ε. Θα πρέπει δηλαδή….ίσως να σου δίνουν ένα βήμα, ή πόσο μικρό να είναι το ε. Όταν λέμε ότι το ε είναι θετικό, αλλά κοντά στο μηδέν, τι τιμή είναι αυτή; Πόσο κοντά στο μηδέν μπορεί να είναι;	
57	Σ Θα ήθελα να σε ρωτήσω και κάτι άλλο. Νομίζεις ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στην έννοια και στον ορισμό της έννοιας;	
58	Φ Δεν είναι απόλυτα σαφής Ο ορισμός μιας έννοιας δε διευκολύνει την κατανόησή της και πολύ περισσότερο να την χρησιμοποιήσεις πρακτικά, όπως στην επίλυση μιας άσκησης ή να εξηγήσεις κάτι μέσα από τον ορισμό. Οπότε, το να μάθεις παπαγαλία τον ορισμό με τα ε-δ είναι σχετικά δύσκολο και ουσιαστικά άχρηστο .Δε μπορείς να τον χρησιμοποιήσεις αν τον μάθεις παπαγαλία. Οπότε συνήθως απορρίπτουμε τους ε-δ ορισμούς και προσπαθούμε να φτιάξουμε στο μυαλό μας ένα δικό μας ορισμό, όπως τον αντιλαμβανόμαστε μέσα από τις ασκήσεις ,την θεωρία και τις σχετικές έννοιες.	
59	Σ Ας δούμε λοιπόν ένα θέμα το οποίο και αυτό ζητήθηκε το Σεπτέμβριο του 2003: *Έστω f: (0, +∞) → R συνεχής συνάρτηση ώστε* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \succ 0$ *με* $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Εδώ υπάρχουν δύο όρια, για τα οποία θα μιλήσουμε και αργότερα .Όμως, τώρα θέλω να σε ρωτήσω το εξής: Όπως βλέπεις την εκφώνηση θα επέλεγες να χρησιμοποιήσεις τους ορισμούς των ορίων;	

60	Φ Ίσως σαν πρώτη ιδέα, ναι. Όμως, έτσι όπως την ξαναβλέπω δε νομίζω να με διευκόλυνε και πολύ ακόμα και αν κατάφερνα να τους γράψω σωστά με τα ε-δ.	
61	Σ Γιατί;	
62	Φ Δε θα μπορούσα πολύ πιθανά να συνδυάσω τις δυο σχέσεις που θα έβγαζα από τους ορισμούς των ορίων .Οπότε ουσιαστικά θα μου ήταν ανώφελο. Ίσως έψαχνα να βρω ένα άλλο τρόπο να λύσω το θέμα για να ξεφύγω από τον ορισμό.	
63	Σ Ναι.	
64	Φ Ίσως όριζα μια καινούρια συνάρτηση……για να βγάλω κάτι πιο χρήσιμο	Μικρή παύση.
65	Σ Ωραία. Λοιπόν ,ας πούμε και για κάτι άλλο που το βλέπεις στα βιβλία του Απειροστικού και όχι μόνο, το όριο.	
66	Φ Ξανακάνω ωχ τώρα;	Γελάει με απορία
67	Σ Πώς το βλέπεις;	
68	Φ Ένα ωχ πάει	
69	Σ Μάλιστα. Για πες μου λίγα πράγματα για την έννοια αυτή. Πώς την αντιλαμβάνεσαι;	
70	Φ Αν μιλήσουμε όπως μιλήσαμε για τη συνέχεια, μέσα από την καθημερινότητα, γιατί είναι μια έννοια που χρησιμοποιούμε και καθημερινά, είναι σαν κάτι το οποίο δείχνει μια κατεύθυνση προς τα πού μπορούμε να φτάσουμε, χωρίς όμως να μας λέει ότι μπορούμε να.…,ναι μεν μπορούμε να το προσεγγίσουμε, είτε να είμαστε μακριά είτε πάρα πολύ κοντά σε αυτό. Είναι κάτι που δεν είναι και τόσο σαφές. Όμως, μέσα από το όριο χρησιμοποιούμε και άλλες έννοιες, για τη φύση του ορίου, όπως το «τείνει»,που δεν είναι μια καθαρά μαθηματική έννοια, αφού την χρησιμοποιούμε και στην καθημερινότητα μας. Δείχνει αυτή την προσέγγιση που θέλουμε να πετύχουμε με το όριο. Αυτά.	Έμφαση στο «σαφές» Έμφαση στην «προσέγγιση»
71	Σ Δηλαδή και στην έννοια αυτή όπως μου προανέφερες, υπάρχει μια σχέση με την καθημερινότητα. Επομένως, μπαίνοντας στο	

	αμφιθέατρο είχες ήδη μια εικόνα για την έννοια του ορίου.	
72	Φ Ναι.	
73	Σ Αυτό πώς το αξιολογείς;	
74	Φ Ίσως τελικά να έχει λειτουργήσει και αρνητικά αυτό, γιατί έχοντας μια ιδέα για μια έννοια και προσπαθώντας να την προσδιορίσεις μετά καθαρά μαθηματικά, δυσκολεύεσαι. Δεχόμαστε πιο εύκολα κάποιους όρους που είναι καθαρά μαθηματικοί και δεν έχουμε στο μυαλό μας προηγούμενα μια εντύπωση για αυτή την έννοια. Οπότε το όριο, όντας δύσκολο σαν μαθηματική έννοια, γίνεται ακόμα πιο μπερδεμένο, θα έλεγα, μέσα στο μυαλό του φοιτητή όταν μπλέκει και την καθημερινή έννοια του ορίου, την καθημερινή φύση.	
75	Σ Για να γυρίσουμε στο θέμα το προηγούμενο και να συζητήσουμε για τα δεδομένα της άσκησης Πώς θα μπορούσες να αξιοποιήσεις αυτά τα στοιχεία;	
76	Φ Όσον αφορά το πρώτο όριο, του οποίου η τιμή του είναι μηδέν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το f(0)=0,αφού μας λέει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής.	Απαντάει αμέσως.
77	Σ Ναι. Και για το άλλο όριο;	
78	Φ Ότι η συνάρτηση f στο άπειρο προσεγγίζει το μηδέν, είναι ίση με το ένα, συγγνώμη.	Γράφει $f(\infty)=1$
79	Σ Ναι, και αυτό από πού το λες;	
80	Φ Πάλι λόγω της συνέχειας βέβαια.	Έμφαση στην αιτιολόγηση.
81	Σ Να σε ρωτήσω και κάτι άλλο εδώ. Η f ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα, στο $(0,\infty)$.Όμως, από ότι μου είπες παίρνει τη τιμή μηδέν και την τιμή άπειρο. Αυτό από πού προκύπτει;	
82	Φ Από τη συνέχεια και πάλι.	
83	Σ Οπότε…	
84	Φ Και ανοιχτό να είναι και κλειστό.. Θα είναι το ίδιο.	
85	Σ Τώρα θα δούμε ένα άλλο θέμα.: *Αν $A\subseteq R$ μη κενό, φραγμένο και supA=infA, τι*	

	συμπεραίνετε για το Α; Τι μπορείς να μου πεις για το θέμα αυτό; Πως το βλέπεις;	
86	Φ Λοιπόν, νομίζω ότι μου έρχεται κατευθείαν στο μυαλό ότι είναι μονοσύνολο το Α. Συμπεραίνουμε δηλαδή από αυτά που μας λέει ότι πρόκειται για ένα μονοσύνολο.	
87	Σ Ναι. Αυτό;	
88	Φ Το έχουμε πει, είναι δεδομένο. Οπότε θα έγραφα ότι το Α είναι ένα μονοσύνολο	
89	Σ Δε θα χρειαζόταν να γράψεις κάτι άλλο;	
90	Φ Δε νομίζω πως θα ήταν απαραίτητο	
91	Σ Δηλαδή δε θα σκεφτόσουν να γράψεις κάποιες σχέσεις. Το θεωρείς περιττό;	
92	Φ Ναι. Από τη στιγμή που μου λέει τι συμπεραίνετε για το Α, ναι θα ήταν περιττό να γράψω κάτι παραπάνω.	
93	Σ Μάλιστα. Για να δούμε και άλλο ένα ερώτημα: *Αν* $B=\{\ \chi \in Q : (x-1)(x+\sqrt{2}) \succ 0\ \}$, *να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum του Β.* Για πες μου, το Β τι είναι;	
94	Φ Καταρχήν, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τι είναι το Β. Οπότε πρέπει να λύσουμε την ανισότητα.	
95	Σ Τι βαθμού είναι η ανισότητα;	
96	Φ Η ανισότητα είναι δευτέρου βαθμού.	
97	Σ Πως θα τη λύσουμε;	
98	Φ Θα την κάνουμε εξίσωση για να βρούμε τις ρίζες, θα φτιάξουμε το γνωστό από το Λύκειο πινακάκι για να βρούμε τα πρόσημα.	
99	Σ Μπορείς να μου τα γράψεις αυτά;	Σημείωση: Η Νίκη μετατρέπει την ανισότητα σε εξίσωση για να βρει τις ρίζες .Στη συνέχεια φτιάχνει σωστά το πινακάκι.
100	Ναι. Οπότε, βρίσκουμε το σύνολο Β μετά από τους πρόχειρους υπολογισμούς .Αυτό αποτελείται από δύο ανοιχτά σύνολα, από δύο ανοιχτά διαστήματα	

	,συγγνώμη, το $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$. Όσον αφορά τα sup, inf, max, min, καταλαβαίνουμε κατ΄ ευθείαν ότι max και min δεν υπάρχουν, δεν υπάρχουν δηλαδή τιμές τέτοιες….και ούτε τα inf και sup υπάρχουν τελικά.	
101	Σ Αυτό μπορείς να μου το εξηγήσεις από πού προκύπτει;	
102	Φ Δεν υπάρχουν, φαίνεται από τα διαστήματα	Σημείωση: Ο τόνος της φωνής της Νίκης στη τελευταία απάντησή της, ανέβηκε, θέλοντας δείξει πόσο σίγουρη ήταν για αυτό που έλεγε
103	Σ Θα ήθελα να σε ρωτήσω και κάτι ακόμη. Οι εκφωνήσεις των θεμάτων σου φαίνονται κατανοητές;	
104	Φ Ναι, νομίζω ότι στα συγκεκριμένα που είδαμε ήταν αρκετά κατανοητές .Βέβαια, υπάρχουν και φορές στον Απειροστικό, έχω δώσει αρκετές, που κάποια θέματα χρειάζονται διευκρινήσεις από τους καθηγητές.	
105	Όσον αφορά τι πρέπει να βρεις ή πάνω στα δεδομένα;	
106	Περισσότερο για τον τρόπο που χρειάζεται να χρησιμοποιήσεις, δηλαδή τι ζητάει ακριβώς η άσκηση ώστε να χρησιμοποιήσω την κατάλληλη λύση, αυτή με την οποί έβαλε ο καθηγητής την άσκηση. Δηλαδή το σκεπτικό του καθηγητή για να αντιληφθείς και εσύ τι χρειάζεται να κάνεις. Να μην κάνεις περιττά πράγματα, αλλά να μην κάνεις και λιγότερα από αυτά που ζητάει.	
107	Μάλιστα. Νίκη σε ευχαριστώ πάρα πολύ και σου εύχομαι καλή επιτυχία.	

Συνέντευξη 2η
2 Απριλίου 2004

1	Σ Γεια σου Θάνο.	
2	Φ Καλημέρα.	
3	Σ Θα ήθελα να κουβεντιάσουμε λίγα πράγματα για το μάθημα του Απειροστικού 1.	
4	Φ Ναι, βέβαια.	
5	Σ Αρχικά, θα ήθελα να μου πεις σε ποιο έτος είσαι.	
6	Φ Στο τρίτο έτος.	
7	Σ Και πόσες φορές έχεις δώσει το μάθημα;	
8	Φ Τρεις.	
9	Σ Το έχεις παρακολουθήσει;	
10	Φ Ε, ναι.	
11	Σ Πόσες φορές;	
12	Φ Δύο.	
13	Σ Εντατικά και τις δύο;	
14	Φ Όχι, τη δεύτερη ήταν εντατικά.	
15	Σ Την πρώτη;	
16	Φ Δεν παρακολουθούσα όλες τις φορές.	
17	Σ Γιατί;	
18	Φ Γιατί ήταν περίεργη η ώρα και επειδή μένω αρκετά μακριά δεν προλάβαινα να έρθω. Και όταν έφτανα με μια καθυστέρηση δεν έβρισκα θέση για να κάτσω. Αναγκαζόμουν να κάτσω στα σκαλιά ή και όρθιος .Είμαστε πολλοί οι φοιτητές που το παρακολουθούμε.	
19	Σ Τη δεύτερη φορά που πήγαινες εντατικά, σε ικανοποιούσε το μάθημα;	
20	Φ Το συγκεκριμένο δε με ικανοποιούσε και πάρα	

	πολύ.	
21	Σ Γιατί το λες αυτό;	
22	Φ Τρέχουν στην ύλη, δε τους ενδιαφέρει και πολύ αν καταλαβαίνει το κοινό .Γράφουν στον πίνακα, γράφουν, γράφουν, νιώθουν ότι είναι ευχαριστημένοι ότι το είπαν και αυτό.	
23	Σ Ναι. Όταν επέστρεφες στο σπίτι, ασχολιόσουν με το μάθημα;	
24	Φ Καθόλου. Καθημερινά καθόλου.	Τονίζει το καθόλου.
25	Σ Ασκήσεις δίνονταν από τον καθηγητή για να ασχοληθείτε στο σπίτι;	
26	Φ Μερικές φορές, αλλά ποτέ δεν εξετάζονται. Τις δίνει ο καθηγητής, αλλά δε τις εξετάζει κανείς.	
27	Σ Εσύ, ωστόσο, μπήκες ποτέ στη διαδικασία να ρωτήσεις τις απορίες σου στον ίδιο το διδάσκοντα ή κάποιον συμφοιτητή σου;	
28	Φ Τον καθηγητή όχι. Μερικές φορές τους μεγαλύτερους φοιτητές.	
29	Σ Γιατί όχι τον καθηγητή;	
30	Φ Γιατί οι απορίες λύνονται στο τέλος του μαθήματος, ε και στο τέλος δε μένει κανείς.	
31	Σ Ναι. Για πες μου, πόσες φορές έδωσες εξετάσεις για να περάσεις στο πανεπιστήμιο;	
32	Φ Μια και με το καινούριο σύστημα.	
33	Σ Θέλω να μου πεις αν φεύγοντας από το Λύκειο και μπαίνοντας στο Πανεπιστήμιο είδες να υπάρχει σχέση όσο αφορά τα μαθηματικά και κυρίως τα μαθηματικά που διαπραγματεύεται ο Απειροστικός.	
34	Φ Σχέση υπάρχει, αλλά υπάρχουν πολύ μεγάλα κενά.	
35	Σ Το Λύκειο σε βοήθησε να κατανοήσεις την εισαγωγή του Απειροστικού;	
36	Φ Τα μισά .Λίγα πράγματα .Όμως, υπάρχει σύγχιση	Μιλούσε έντονα σε

	σε κάποιες έννοιες, όπως το όριο και η παράγωγος.Τον ορισμό του ορίου τον κάναμε εντελώς διαφορετικά στο Λύκειο από ότι στο Πανεπιστήμιο….Το σχολείο δε με βοήθησε καθόλου. Είχα μια εικόνα για τους ορισμούς του ορίου και της παραγώγου και όταν ήρθα εδώ, όλα ήταν διαφορετικά.	όλη τη διάρκεια της απάντησης .
37	Σ Ποια ήταν η εντύπωση που σχημάτισες για το μάθημα από τις πρώτες παρακολουθήσεις;	
38	Φ Ότι δε θα το περάσω ποτέ. Μου δημιουργήθηκε αρνητικότατη εντύπωση για το μάθημα.	Τονίζει το «ποτέ»
39	Σ Τώρα, θα ήθελα να συζητήσουμε για ένα μεγάλο κεφάλαιο των μαθηματικών, τη συνέχεια.	
40	Φ Ωραία! Δεν έχω καταλάβει τον ορισμό ακριβώς….	Γελάει ειρωνικά.
41	Σ Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Πώς αντιλαμβάνεσαι την έννοια της συνέχειας; Διαισθητικά, ποια είναι η εικόνα που έχεις;	
42	Φ Ότι είναι παντού συνεχής	
43	Σ Ναι, πες μου λίγα περισσότερα για αυτό.	
44	Φ Ότι δε διακόπτεται πουθενά το γράφημά της.	
45	Σ Δηλαδή;	
46	Φ Ότι σε κάθε σημείο θα παίρνει μια τιμή η συνάρτηση… Δε θα διακόπτεται πουθενά η συνάρτηση. Αυτός είναι ο ορισμός του Λυκείου. Εδώ είναι λίγο διαφορετικά, είτε με πλευρικά όρια είτε …..τέτοια πράγματα	
47	Σ Άρα;	
48	Φ Η συνάρτηση δε σταματάει. Και να διακόπτεται σε κάποιο σημείο, θα υπάρχει μια τιμή, θα υπάρχει ένα σημείο που να παίρνει την τιμή αυτή.	
49	Σ Τελικά, μπαίνοντας στο αμφιθέατρο είχες μια εικόνα για τη συνέχεια;	
50	Φ Ναι, αλλά ήταν εντελώς διαφορετική από αυτά που άκουσα στη σχολή. Δεν ήταν αυτό που περίμενα.	

51	Σ Ναι. Τώρα, θα συζητήσουμε ένα θέμα, το οποίο γράψατε το Σεπτέμβριο του 2003: *Αν* $f:[0,3] \to R$ *συνεχής συνάρτηση και* $0 \le \chi_n \le 3$ *για κάθε* $n \in N$*,να βρεθεί, αν υπάρχει, το* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{n}$. Μπορείς να μου πεις πως βλέπεις το θέμα ;Πώς θα αξιοποιούσες τα δεδομένα σου;	
52	Φ Επειδή η f είναι μια συνεχής συνάρτηση, το f(x_n) θα είναι ανάμεσα στο f(0) και στο f(3).	Απαντάει αμέσως.
53	Σ Η συνέχεια συνδέεται με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως είναι η μονοτονία;	
54	Φ Ναι.	
55	Σ Εξήγησέ το αυτό λίγο παραπάνω.	
56	Φ Για να είναι μονότονη, θα πρέπει να είναι και συνεχής.	
57	Σ Το αντίστροφο ισχύει;	
58	Φ Το αντίστροφο νομίζω πως όχι.. .Όχι, δεν ισχύει .	
59	Σ Μάλιστα. Θα ήθελα να κουβεντιάσουμε και ένα άλλο θέμα, τους ορισμούς, Ποια είναι η γνώμη σου για τους ορισμούς;	
60	Φ Νομίζω ότι είναι πάρα πολύ τυπικοί. Δηλαδή τους λέμε, απλά τους μαθαίνουμε παπαγαλία και ουσιαστικά δε τους κατανοούμε, κανείς δε μπορεί να το εξηγήσει από τους φοιτητές .Τον λέει ο καθηγητής, τον αποδεικνύει κιόλας, αλλά στο τέλος τον μαθαίνεις όπως είναι στο βιβλίο.	
61	Σ Θα επέλεγες να λύσεις μια άσκηση χρησιμοποιώντας τους ορισμούς εννοιών;	
62	Φ Βασικά έτσι πρέπει, αλλά συνήθως εγώ δε μπορώ.	
63	Σ Υπάρχει δυσκολία στο να μάθεις απ' έξω τον ορισμό;	
64	Φ Όχι, τον μαθαίνεις παπαγαλία. Όμως να μάθεις	

	να τους χρησιμοποιείς είναι λίγο δύσκολο.	
65	Σ Ας πούμε και λίγα πράγματα για τους ορισμούς ε-δ.	
66	Φ Και εκεί είναι λίγο μπέρδεμα.	
67	Σ Πού είναι η δυσκολία;	
68	Φ Οι σχέσεις ανάμεσα στα ε και δ, πως τα χρησιμοποιείς, ότι μερικές φορές αυθαίρετα παίρνεις κάποιο ε ή δ για να σου βγει η άσκηση. Όλα αυτά δε νομίζω ότι είναι και τόσο εύκολα.	
69	Σ Τους ποσοδείχτες τους καταλαβαίνεις;	
70	Φ Αυτά είναι αναγκαία, πρέπει να υπάρχουν και όταν δε τους χρησιμοποιούμε, ενώ θα έπρεπε, οι ασκήσεις είναι λάθος.	
71	Σ Το ε το συναντάμε πολύ συχνά στους ορισμούς. Έχεις καταλάβει τι γίνεται με αυτό; Είναι μεγάλο, είναι μικρό, θετικό, αρνητικό; Πώς το παίρνουμε κάθε φορά;	
72	Φ Νομίζω ότι το παίρνουμε αυθαίρετα, γύρω στο 1, για να μας βγει η άσκηση. Αυτό δε το λέει ο ορισμός, αλλά το κάνουμε έτσι μέσα από κάποιες ασκήσεις που έχουμε δει.	
73	Σ Μάλιστα. Νομίζεις ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στον ορισμό και στην κατανόηση της έννοιας;	
74	Φ Υπάρχει σχέση, αλλά χρειάζεται πολύ δουλειά για να μάθεις τον ορισμό και να μπορέσεις να τον χρησιμοποιήσεις.	
75	Σ Βοηθάει ο ορισμός για την κατανόηση μιας έννοιας;	
76	Φ Ναι, βοηθάει…ναι.	Χαμηλώνει ο τόνος της φωνής του
77	Σ Δηλαδή, είναι απαραίτητος ο ορισμός της συνέχειας για την κατανόησή της;	
78	Φ Απαραίτητος….Θεωρώ ότι είναι η βάση, αλλά πρέπει να μάθεις και άλλα πράγματα.	
79	Σ Δεν αρκεί;	

80	Φ Εννοείται πως δεν αρκεί.	
81	Σ Μάλιστα. Ας δούμε και ένα ακόμη θέμα του Σεπτεμβρίου. *Αν f: (0, +∞) → R συνεχής συνάρτηση ώστε* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \succ 0$ *με* $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Εδώ, υπάρχουν δύο όρια. Θα χρησιμοποιούσες τους ορισμούς των ορίων για να λύσεις το θέμα;	
82	Φ Όχι, έτσι όπως είναι τα όρια, όχι.	Τονίζει το «όχι»
83	Σ Θα δούλευες την άσκηση με κάποιο άλλο τρόπο λοιπόν;	
84	Φ Ναι, ο ορισμός δε βολεύει εδώ.	
85	Σ Ας συνεχίσουμε, με κάποιο άλλο μεγάλο κεφάλαιο του Απειροστικού, το όριο. Πες μου λίγα πράγματα για το όριο, πώς το αντιλαμβάνεσαι;	
86	Φ Είναι οι οριακές τιμές….είναι μια τιμή και με τα πλευρικά προσπαθούμε να φτάσουμε όσο μπορούμε αυτή την τιμή.	
87	Σ Το φτάνουμε το όριο;	
88	Φ Όχι, ποτέ, τείνει απλά. Τείνει σε μια τιμή, δεν παίρνει ποτέ αυτή την τιμή.	
89	Σ Το όριο είναι μια έννοια που την χρησιμοποιούμε και στην καθημερινότητά μας.	
90	Φ Ναι, λέμε «ήμουν στο όριο», δηλαδή παραλίγο.	
91	Σ Υπάρχει κάποια σχέση στην έννοια του ορίου, όπως προκύπτει από την καθημερινή ζωή, και στη μαθηματική έννοια;	
92	Φ Υπάρχει, αλλά αυτό βοηθάει στην κατανόηση της έννοιας μόνο στην αρχή. Νομίζω ότι ουσιαστικά δεν είναι το ίδιο πράγμα.	
93	Σ Για τον ορισμό του ορίου, τι έχεις να πεις;	
94	Φ Δεν είναι ο ίδιος με αυτόν που κάνουμε στο	

	Λύκειο, βοηθάει, αλλά δεν αρκεί για να λύνουμε τις ασκήσεις.	
95	Σ Τώρα, ας γυρίσουμε πάλι στα θέματα, και ας δούμε αυτά τα δυο όρια: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Μπορείς να συνδυάσεις τα δεδομένα σου και να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα;	
96	Φ Όχι……Υπάρχει η τιμή των ορίων σε εκείνα τα σημεία;	
97	Σ Έχεις να πεις κάτι για αυτό;	
98	Φ Θα υπάρχει η τιμή σε εκείνα τα σημεία, στο μηδέν.	
99	Σ Πόσο θα είναι δηλαδή;	
100	Φ Μηδέν.	
101	Σ Και στο άπειρο;	
102	Φ Στο άπειρο; Ένα…..Δεν μπορεί να υπάρχει αυτή η τιμή.	Μεγάλη παύση
103	Σ Γιατί;	
104	Φ f του απείρου;…..Για κάποιο πολύ μεγάλο χ μπορούμε να πούμε, όπου εκεί θα παίρνει την τιμή1.	
105	Σ Ναι. Ας δούμε και ένα άλλο θέμα, το οποίο ζητήθηκε και αυτό το Σεπτέμβριο: *Αν $A \subseteq R$ μη κενό, φραγμένο και supA=infA, τι συμπεραίνετε για το A;* Τι μπορείς να μου πεις για αυτό;	
106	Φ Το σύνολο Α είναι κάτω φραγμένο,.. δηλαδή, από το inf του και επειδή είναι και άνω φραγμένο, δηλαδή από το sup του, είναι το μονοσύνολο.	
107	Σ Αυτή θα ήταν η απάντηση που θα έδινες;	
108	Φ Ναι.	
109	Σ Θα έγραφες κάτι άλλο; Κάποιες σχέσεις ίσως; Χρειαζόταν να συμπληρώσεις την απάντηση;	

110	Φ Όχι, δε νομίζω να χρειάζεται.	
111	Σ Ναι. Ας δούμε και κάτι άλλο τώρα. *Αν B=*$\{ \chi \in Q : (x - 1)(x + \sqrt{2}) \succ 0 \}$*, να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum του B.* Τι είναι το σύνολο B;	
112	Φ Των ρητών.	Μιλάει πιο σιγά από πριν
113	Σ Δηλαδή;	
114	Φ Είναι μια ανισότητα. Θα τη λύσω.	
115	Σ Πώς θα τη λύσεις;	
116	Φ Με τις ρίζες.	
117	Σ Ποιες είναι;	
118	Φ Είναι οι 1, $-\sqrt{2}$.	
119	Σ Και μετά;	
120	Φ Θα βρω τα πρόσημα εντός και εκτός των ριζών. Μετά, θα δω αν ανήκουν οι ρίζες στους ρητούς, γιατί τις περισσότερες φορές δεν ανήκουν σε αυτές τις ασκήσεις. Εδώ, δεν υπάρχουν τα max και τα min, υπάρχουν μόνο τα sup και inf.	Δεν απαντά ποιο είναι το σύνολο B.
121	Σ Μπορείς να μου πεις ποια θα είναι;	
122	Φ Είναι sup=1 και inf= $-\sqrt{2}$.	Μεγάλη παύση μέχρι να απαντήσει.
123	Σ Μάλιστα. Πώς σου φαίνονται οι εκφωνήσεις των θεμάτων;	
124	Φ Μερικά θέματα δεν είναι σαφή. Αρχικά, δεν είναι σαφή τα δεδομένα και μετά δεν είναι σταδιακά τα ερωτήματα, έτσι ώστε να μας βοηθούν. Κάποιες φορές είναι λίγο «απότομα» τα ερωτήματα, θα πρέπει να υπάρχουν κάποια ερωτήματα βοηθητικά.	
125	Σ Υπάρχουν προβλήματα στην κατανόηση των ζητουμένων;	
126	Φ Ναι, κάποιες φορές υπάρχουν, όπως σε ένα θέμα των εξετάσεων του Ιανουαρίου. Εκεί, οι περισσότεροι από εμάς δεν μπορούσαν να ξεχωρίσουν αν στο 2.5^{ν} το σύμβολο «.» ήταν υποδιαστολή ή επί.	
127	Σ Τελικά, μπορείς να μου πεις ποια είναι η εικόνα που έχεις σχηματίσει για το μάθημα αυτό; Ποια	

	είναι η τελική εντύπωση που σου μένει;	
128	Φ Το μάθημα είναι αρκετά δύσκολο,…..αν και ουσιαστικά δεν είναι. Απλά επειδή είναι η πρώτη επαφή που έχει κανείς με το Μαθηματικό, στο πρώτο εξάμηνο, σε απογοητεύει.	
129	Σ Θάνο, σε ευχαριστώ πάρα πολύ και σου εύχομαι καλή επιτυχία.	
130	Φ Ευχαριστώ.	

Συνέντευξη 3η
2 Απριλίου 2004

1	Σ Γιάννη, καλημέρα.	
2	Φ Καλημέρα.	
3	Σ Θα ήθελα να κάνουμε μια κουβέντα γύρω από το μάθημα του Απειροστικού 1.	
4	Φ Ναι.	
5	Σ Αρχικά, θα ήθελα να μου πεις σε ποιο έτος είσαι.	
6	Φ Είμαι στο τρίτο έτος.	
7	Σ Πόσες φορές έχεις δώσει το μάθημα;	
8	Φ Δύο φορές.	
9	Σ Πόσες φορές το έχεις παρακολουθήσει;	
10	Φ Δύο.	
11	Σ Και τις δύο φορές εντατικά;	
12	Φ Όχι, την τελευταία εντατικά, ενώ την πρώτη περιστασιακά.	
13	Σ Γιατί την πρώτη φορά έτσι;	
14	Φ Το μάθημα ήταν πολύ δύσκολο, μέσα στο αμφιθέατρο δεν καταλάβαινα βασικά τίποτα και έτσι περνούσα την περισσότερη ώρα έξω. Τη δεύτερη φορά το πήρα απόφαση, χωρίς να είχε αλλάξει κάτι στο μάθημα.	
15	Σ Όταν επέστρεφες στο σπίτι μετά το μάθημα, έλυνες ασκήσεις, διάβαζες;	
16	Φ Όχι πάντα, αλλά μερικές φορές το είχα κάνει και αυτό. Καθημερινά δε το έκανα, αλλά κάποιες φορές την εβδομάδα κάτι θα κοιτούσα και θα έλυνα.	
17	Σ Αυτό σε βοήθησε καθόλου;	
18	Φ Ναι, βοήθησε λίγο	
19	Σ Όταν είχες απορίες ρωτούσες τους καθηγητές σου;	
20	Φ Όχι, δε ρωτούσα, γιατί όταν σηκώναμε το χέρι για απορία, μας έλεγαν να πάμε στο διάλειμμα και	

	στο διάλειμμα δεν πήγαινε κανένας.	
21	Σ Το μάθημα το παρακολουθούσαν αρκετά παιδιά;	
22	Φ Ναι, και σε κάποιους καθηγητές που το δίδασκαν δεν έβρισκες να κάτσεις. Δε γίνεται καλά το μάθημα, έχει πολύ κόσμο και δεν μπορείς να παρακολουθήσεις, είναι πολλά που σε τραβάνε από το μάθημα.	
23	Σ Πόσες φορές έδωσες εξετάσεις για να περάσεις;	
24	Φ Μια φορά, με το καινούριο σύστημα.	
25	Σ Πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά του Λυκείου και στα μαθηματικά του Πανεπιστημίου και ειδικότερα του Απειροστικού 1;	
26	Φ Είναι μεγάλο το χάσμα, για εμένα δεν υπάρχει σχεδόν καμία σχέση. Δηλαδή είναι τελείως άλλο το πνεύμα. Ίσως, θα έπρεπε να υπάρχει κάτι ανάμεσα. Υπάρχει τεράστιο χάσμα που εκεί την «πατάνε» όλοι οι φοιτητές τα πρώτα χρόνια, δεν μπορούν να προσαρμοστούν στο Πανεπιστήμιο άνετα.	
27	Σ Αυτή η εικόνα παρουσιάζεται από τα πρώτα μαθήματα του Απειροστικού;	
28	Φ Τις δύο πρώτες εβδομάδες κάνουμε διάφορες έννοιες για τους αριθμούς, οι οποίες δεν είναι δύσκολες, αλλά μετά ξεκινάει απότομα, πολύ απότομα. Και έτσι δημιουργείται πρόβλημα.	
29	Σ Τώρα, θα ήθελα να συζητήσουμε για ένα μεγάλο θέμα των μαθηματικών και του Απειροστικού, τη συνέχεια.	
30	Φ Ναι!	Γελάει ειρωνικά
31	Σ Για πες μου λίγα πράγματα για τη συνέχεια, πώς την αντιλαμβάνεσαι;	
32	Φ Βασικά, δεν έχω καταφέρει να την αντιληφθώ πολύ καλά, …..καταλαβαίνω, …όχι δεν καταλαβαίνω, μπορώ σε κάποιο βαθμό να καταλάβω τον ορισμό και από αυτό μόνο μπορώ να λύσω ασκήσεις, αλλά μέσα στο μυαλό μου δεν έχω αποκωδικοποιήσει τι σημαίνει συνέχεια.	
33	Σ Η συνέχεια είναι μια έννοια που έχει νόημα και στην καθημερινή μας ζωή. Έχεις συνδυάσει την μαθηματική έννοια της συνέχειας με την έννοια που	

	έχει στην καθημερινότητά μας;	
34	Φ Όχι. Απλά ξέρω ότι στο διάστημα, ..στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης παίρνει τιμές πάντα σε αυτό το διάστημα. Δηλαδή δεν υπάρχει σημείο που να μην παίρνει τιμές. Μου φαίνεται, δεν ξέρω, δεν είμαι σίγουρος.	
35	Σ Ας δούμε ένα σχετικό θέμα, στο οποίο εξεταστήκατε το Σεπτέμβριο του 2003. *Αν* $f:[0,3] \to R$ *συνεχής συνάρτηση και* $0 \le \chi_n \le 3$ *για κάθε* $n \in N$*,να βρεθεί, αν υπάρχει, το* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{n}$. Από τα δεδομένα αυτά μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα; Έχεις ένα σκελετό στο μυαλό σου;	
36	Φ …….	Μεγάλη παύση
37	Σ Πώς θα την αντιμετώπιζες; Πώς θα μπορούσες να αξιοποιήσεις τα δεδομένα σου;	Επιμένουμε τρεις φορές.
38	Φ …….. Δεν ξέρω, μόνο τον ορισμό θα χρησιμοποιούσα. Έτσι όπως τη βλέπω δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι άλλο.	Απαντά με αβεβαιότητα
39	Σ Μπορείς να μου πεις την εικόνα που έχεις στο μυαλό σου για το πώς θα αντιμετώπιζες το θέμα;	
40	Φ Όχι, δεν ξέρω.	
41	Σ Η συνέχεια συνδέεται με άλλες έννοιες των μαθηματικών;	
42	Φ Δεν ξέρω…..Με τα όρια μου φαίνεται. Γενικά, είναι σημαντική σαν έννοια, αυτό το έχω καταλάβει.	
43	Σ Με τη μονοτονία συνδέεται η συνέχεια;	
44	Φ Ναι.	Δεν είναι σίγουρος.
45	Σ Πώς;	
46	Φ Δεν ξέρω, υπάρχουν κάποια θεωρήματα που τις συνδέουν.	
47	Σ Η συνεχής συνάρτηση είναι μονότονη;	
48	Φ …Ναι.	Δεν είναι πολύ σίγουρος.
49	Σ Ας συζητήσουμε και κάτι άλλο τώρα, ας	

	μιλήσουμε για τους ορισμούς.	
50	Φ Ναι.	
51	Σ Πώς τους βλέπεις; Σου αρέσουν οι ορισμοί;	
52	Φ Μου αρέσουν; Στην αρχή, μέχρι να λύσεις αρκετές ασκήσεις ή να έχεις κάποιον να σου πει…….Δεν ξέρω, δε μου αρέσουν καθόλου γιατί τους μαθαίνεις παπαγαλία. Δε μπορείς να τους κατανοήσεις και αυτό δε μου αρέσει καθόλου. Αλλά αν δε βρεις κάποιον να σου εξηγήσει, κάποιον μεγαλύτερο και εκτός βέβαια του μαθήματος(στο μάθημα δε γίνεται καλή δουλειά)και αν δε δεις αρκετές ασκήσεις, δε μπορείς, δηλαδή τους ορισμούς απλά τους μαθαίνεις για να τους μάθεις.	Γελάει ειρωνικά
53	Σ Θα επέλεγες σε μια άσκηση να γράψεις τους ορισμούς για την επίλυσή της;	
54	Φ Ναι, θα επιχειρούσα σίγουρα, αν τους ήξερα αυτό θα έκανα. Αυτό κάνω ανεξάρτητα με το αν καταλαβαίνω το νόημα κάτω από τους ορισμούς.	
55	Σ Δηλαδή εσένα σε ενδιαφέρει να φτάσεις…..	
56	Φ Όπως και στο θέμα που είδαμε πριν, θα ξεκινούσα από τον ορισμό. Μπορεί να μην έχω καταλάβει ακριβώς τον ορισμό της συνέχειας, αλλά από αυτόν θα ξεκινούσα.	
57	Σ Υπάρχει νομίζεις κάποια σχέση ανάμεσα στον ορισμό μιας έννοιας και στην ίδια την έννοια;	
58	Φ Υπάρχει σχέση, αλλά δεν ξέρω κατά πόσο οι ορισμοί του βιβλίου σε βοηθούν να καταλάβεις πραγματικά την έννοια. Τουλάχιστον εμένα δε με έχουν βοηθήσει. Μόνο με τον ορισμό δε θα έκανα τίποτα αν δεν υπήρχε κάποιος να μου τον εξηγήσει λίγο καλύτερα.	
59	Σ Ας γυρίσουμε στα θέματα και ας δούμε αυτό: *Αν f: (0, +∞) → R συνεχής συνάρτηση ώστε* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \succ 0$ *με* $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Εδώ υπάρχουν δύο όρια. Θα χρησιμοποιούσες τους ορισμούς των ορίων για να τα αναλύσεις;	
60	Φ Αυτά όχι, νομίζω πως όχι.	

61	Σ Γιατί;	
62	Φ ……	Ο Γιάννης δεν απαντά στην ερώτηση. Τον ξαναρωτήσαμε αλλά δεν μασ εξήγησε το λόγο που δε θα χρησιμοποιούσε τους ορισμούς.
63	Σ Μπορείς να μου πεις κάτι για το θέμα αυτό;	
64	Φ …Βασικά το θέμα αυτό πρέπει να «πηγαίνει» με τον ορισμό, αλλά όχι, όχι……	Μικρή παύση
65	Σ Εντάξει.	
66	Φ Έχω μπερδευτεί.	
67	Σ Ας αφήσουμε τώρα αυτό το κεφάλαιο και ας μιλήσουμε για τα όρια, για την έννοια του ορίου. Πες μου κάποια πράγματα για αυτήν.	
68	Φ Τι να πω! Αυτό που είναι και από την καθημερινή ζωή, όπως μας μαθαίνουν χρόνια, ότι απλά τείνει σε κάποιον αριθμό, αλλά ποτέ δεν παίρνει αυτή την τιμή. Αυτό είναι το πρώτο που μπορώ να σκεφτώ.	
69	Σ Τι σημαίνει «τείνει»;	
70	Φ Τείνει, σημαίνει ότι παίρνει……δηλαδή συγκεκριμένα ότι υπάρχει ένα δ…….που ανάμεσα στον αριθμό αυτό και το δ παίρνει πολύ…….παίρνει τις τιμές κοντά στον αριθμό, αλλά ποτέ δε θα πάρει τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή, τον προσεγγίζει.	
71	Σ Για να πούμε και λίγα πράγματα για το ε.	
72	Φ Ναι, υπάρχει παντού το ε. Αλλά είναι πολύ αυθαίρετο. Το μόνο που ξέρεις είναι ότι είναι σίγουρα κάποιος θετικός αριθμός, και στις ασκήσεις που το χρησιμοποιούμε το παίρνουμε συνήθως κοντά στο μηδέν, ξεκινώντας από το ένα και κατεβαίνοντας προς τα κάτω. Σαν έννοια όμως, είναι γενικά αυθαίρετη. Δεν πιστεύω ότι υπάρχει άτομο που να έχει καταλάβει ακριβώς πως το παίρνουμε. Απλά βλέποντας κάποιες ασκήσεις που το ε=1 και το παίρνω και εγώ τόσο, χωρίς να ξέρω γιατί και πως. Αυτά για το ε, ….. και υπάρχει παντού. Πιστεύω ότι στο μάθημα πρέπει να γίνεται μεγάλη αναφορά στο ε, οι καθηγητές θα πρέπει να	

	αφιερώνουν αρκετό χρόνο για την κατανόησή του, γιατί το συναντάμε συνέχεια.	
73	Σ Για τους ποσοδείχτες τι έχεις να πεις;	
74	Φ Και για αυτούς είναι λίγο αυθαίρετα τα πράγματα, αλλά πιστεύω ότι τους κατανοώ πολύ καλύτερα από το ε. Αλλά και για αυτούς η επιλογή είναι δύσκολη. Πότε λέμε «υπάρχει», πότε «για κάθε».	
75	Σ Ας γυρίσουμε και πάλι λίγο στα θέματα και ας επανέλθουμε σε αυτό: *Αν f: (0, +∞) → R συνεχής συνάρτηση ώστε* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \succ 0$ *με* $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Σου δίνουν κάποιες άλλες πληροφορίες τα όρια αυτά;	
76	Φ …….	Μεγάλη παύση
77	Σ Να γίνω πιο σαφής. Η f(x) παίρνει τη τιμή μηδέν;	
78	Φ Ναι, την παίρνει.	Μικρή παύση και απαντά
79	Σ Και πόσο είναι;	
80	Φ Μηδέν.	
81	Σ Και με το άπειρο;	
82	Φ ……..Όχι; Δεν ξέρω γιατί είναι ανοιχτό το διάστημα, μπορεί να πάρει……	Απαντά με αβεβαιότητα
83	Σ Το ότι η f είναι συνεχής μήπως αλλάζει τα πράγματα;	
84	Φ Ναι, παίζει ρόλο, αλλά τώρα……	
85	Σ Άρα, μπορεί να την παίρνει την τιμή στο άπειρο;	
86	Φ ….Δεν ξέρω, έχω μπερδευτεί πολύ.	
87	Σ Εντάξει. Ας δούμε και κάτι άλλο τώρα, ένα άλλο θέμα: *Αν* $A \subseteq R$ *μη κενό, φραγμένο και* $\inf A = \sup A$ *, τι συμπεραίνετε για το A;* Έχεις κάτι να πεις για το θέμα;	
88	Φ …Ναι……..Μήπως θα είναι το μονοσύνολο; Δεν ξέρω.	

89	Σ Αυτό πώς το σκέφτηκες;	
90	Φ Από το γεγονός ότι $\inf A = \sup A$ …Δεν ξέρω…	
91	Σ Αυτό που μου είπες, πώς θα το έγραφες στην κόλλα σου;	
92	Φ Όπως το είπα.	
93	Σ Θα έγραφες κάτι παραπάνω;	
94	Φ Δεν ξέρω. Εκείνη την ώρα θα είχα περισσότερο χρόνο να το σκεφτώ. Αλλά, τι παραπάνω να έγραφα; Θα το έγραφα καλύτερα, σίγουρα.	
95	Σ Ίσως να έγραφες κάποιες σχέσεις; Ή μήπως σου είναι γνωστό και δε θα έγραφες κάτι άλλο;	
96	Φ Δεν ξέρω σχέσεις που προκύπτουν άμεσα από αυτό, δε το έχω ξανασυναντήσει, δε το έχω ξαναδεί ούτε μέσα στη τάξη. Απλά, δε θα έγραφα και κάτι άλλο.	
97	Σ Ας πάμε να δούμε και αυτό το θέμα: *Αν* $B=\{\ \chi \in Q : (x - 1)(x + \sqrt{2}) \succ 0\ \}$, *να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα supremum, maximum, infimum και minimum του B.* *Τι είναι το σύνολο B;*	
98	Φ Είναι μια ανισότητα, τριώνυμο με……Δηλαδή θα πάρω,……..θα κάνω το πρόσημο εντός και εκτός των ριζών, που οι ρίζες είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$.	
99	Σ Να σε ρωτήσω κάτι πάνω σε αυτό, επειδή είπες τη λέξη τριώνυμο. Θα μετατρέψεις την ανίσωση σε τριώνυμο;	
100	Φ Όχι, όπως είναι. Στη συνέχεια θα δω για ποιες τιμές είναι θετικό.	
101	Σ Πού γίνεται θετική; Εντός ή εκτός των ριζών;	
102	Φ Εκτός των ριζών. Και οι ρίζες είπαμε είναι το 1 και το $-\sqrt{2}$ …..	
103	Σ Οπότε ποιο σύνολο είναι το B;	
104	Φ …….Είναι το $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (1,+\infty)$	
105	Σ Τελικά, στο σύνολο αυτό;	
106	Φ Τελικά, δεν ορίζεται σίγουρα το $\sqrt{2}$ γιατί δεν ανήκει στους ρητούς, σαν infA και το supA θα είναι	

	το 1.	
107	Σ Τα max A και min A ;	
108	Φ Δε θα υπάρχουν.	
109	Σ Γιατί;	
110	Φ Γιατί δεν παίρνει τις τιμές 1 και -$\sqrt{2}$, μηδενίζεται δηλαδή εκεί.	
111	Σ Ναι. Γενικά, πώς σου φαίνονται οι εκφωνήσεις στα θέματα του Απειροστικού;	
112	Φ Θα μπορούσαν να ήταν και καλύτερες. Πολλές φορές τα δεδομένα δεν είναι και πολύ σαφή, πρέπει να «φας» αρκετή ώρα μέχρι να καταλάβεις τι σου ζητάει. Τις περισσότερες φορές είναι κατανοητά και τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Όμως, υπάρχουν και φορές που χρειάζεται πολύ ώρα να βρεις τα δεδομένα, να τα μαζέψεις, γιατί τα γράφουν αλλού το ένα, αλλού το άλλο.	
113	Σ Θες να μου πεις ποια είναι η εντύπωση που έχεις τελικά από το μάθημα;	
114	Φ Όταν το κοίταξα καλύτερα διαπίστωσα ότι είναι ενδιαφέρον μάθημα, έχει τις δυσκολίες του, αλλά δεν είναι τόσο δύσκολο όσο φαίνεται, ούτε τόσο βαρετό. Γιατί, όταν αρχίζει δεν καταλαβαίνεις τίποτα, το βαριέσαι και το απεχθάνεσαι το μάθημα.	
115	Σ Γιάννη, σε ευχαριστώ πάρα πολύ και καλή επιτυχία.	
116	Φ Ευχαριστώ.	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Συμπεράσματα από τη μελέτη των γραπτών

Τελικά, μετά από τη μελέτη και ανάλυση των θεμάτων μπορέσαμε να συνοψίσουμε ορισμένα συμπεράσματα. Αρχικά, επιβεβαιώσαμε τις παρατηρήσεις ερευνητών([12], [13], [18]) σχετικά με την έννοια της απόδειξης. Είδαμε οτι σε όλα τα θέματα οι φοιτητές αντιμετώπισαν προβλήματα με την έννοια της απόδειξης. Δεν έχουν κατανοήσει ότι στα μαθηματικά πρέπει να γράφουμε αυστηρά και με σαφήνεια. Έτσι, στα γραπτά τους υπήρξαν απαντήσεις χωρίς να είναι αιτιολογημένες, χωρίς αναφορές στο που στηρίζονταν κάθε φορά (θεώρημα ή πρόταση) για να αποδείξουν το ζητούμενο(βλέπε, θέματα I-IV).

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις διαπιστώσαμε ότι υπήρχαν δυσκολίες στην κατανόηση των δεδομένων και ζητούμενων(βλέπε, σελ 37). Επιπλέον, παρατηρήσαμε ότι δεν κατανοούν τις εκφωνήσεις θεωρημάτων και προτάσεων για να μπορέσουν να τα εφαρμόσουν στην επίλυση των ζητούμενων. Δεν κατανοούν ποιες είναι κάθε φορά οι συνθήκες για την εφαρμογή τους, ποιες είναι οι υποθέσεις τους και τι συμπεράσματα ή σχέσεις προκύπτουν από αυτές(βλέπε, σελ 72-76, 88-90). Κυρίως, δυσκολεύονται στην ερμηνεία φράσεων του τύπου «για κάποια..», «υπάρχει..», «για οποιαδήποτε..», γεγονός που επιβεβαιώνει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με τους ποσοδείκτες(βλέπε, σελ 22). Γενικότερα, φάνηκε έντονα η αδυναμία τους να δίνουν ακριβείς και πλήρεις απαντήσεις.

Ένα άλλο κοινό γνώρισμα των γραπτών ήταν η δυσκολία γραφής των ορισμών εννοιών. Καταρχήν, επιβεβαιώσαμε(βλέπε[17]) ότι και αν πολλά θέματα προσφέρονταν να αναπτυχθούν με τους ορισμούς εννοιών, όπως της συνέχειας, του ορίου των supremum και infimum ενός συνόλου, απέφυγαν να τους χρησιμοποιήσουν, και άλλοι που δοκίμασαν να αντιμετωπίσουν τα ζητήματα με αυτό τον τρόπο, δυσκολεύτηκαν. Διαπιστώσαμε, ότι δεν ήξεραν τους ορισμούς, δεν μπορούσαν να τους αποδόσουν, και κυρίως δεν μπορούσαν να χειριστούν τα ε-δ και τους ποσοδείχτες(βλέπε, σελ 36,84-86) , γνωρίσματα που έχουν επισημάνει διάφοροι ερευνητές([3],[7],[17]).

Ακόμη, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να συνδυάζουν τις διάφορες σχέσεις που τους δίνονται ή που προκύπτουν από την επίλυση ενός θέματος. Έτσι, υπήρξαν γραπτά με σωστές σχέσεις, αλλά οι φοιτητές δεν είχαν την ικανότητα να τις εκμεταλλευτούν, να τις χρησιμοποιήσουν και να διεξάγουν κάποιο συμπέρασμα. (βλέπε, σελ 87)

Παράλληλα, η μελέτη των γραπτών μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι φοιτητές δεν έχουν εμπεδώσει, κυρίως, τις έννοιες της συνέχειας, του ορίου και της συνάρτησης. Σε όλα τα θέματα που αναφέρονταν οι παραπάνω έννοιες, υπήρξε δυσκολία στην ερμηνεία των δεδομένων που συνδέονταν με αυτές. Είδαμε, να συγχέουν την έννοια της συνάρτησης με την έννοια της ακολουθίας(βλέπε σελ 69-72) ή να μη γνωρίζουν τον ορισμό τόσο αυτής, όσο και τον ορισμό του ορίου(βλέπε, σελ 88-90), ή να συνδυάζουν, λανθασμένα, την έννοια της μονοτονίας με την έννοια της συνέχειας(βλέπε, σελ 69-72).Όλα αυτά τα φαινόμενα προκύπτουν από τη μη ουσιαστική κατανόηση των εννοιών.

Τέλος, σημειώσαμε και τη δυσκολία που έχουν οι φοιτητές να λύνουν ανισώσεις Αν και οι ανισώσεις διδάσκονται από τα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συμπεράναμε πως οι φοιτητές μας δεν έχουν ξεκαθαρίσει τις έννοιες

του «ή» και του «και», καθώς επίσης δε μπορούν με ευκολία να εντοπίσουν τις ρίζες μιας ανίσωσης (βλέπε, θέμα ΙΙ). Πολλοί από αυτους, για την εύρεση των ριζών, μετασχημάτισαν την ανίσωση σε εξίσωση, γεγονός που φανερώνει την προτίμησή τους στις εξισώσεις.

5.2 Συμπεράσματα από τις συνεντευξεις των φοιτητών

Σε γενικές γραμμές δεν υπήρχαν διαφορές στην αντιμετώπιση των ερωτήσεων από τους φοιτητές. Όλοι τους είχαν μια κοινή στάση απέναντι στα ερωτήματα που τους θέσαμε. Ο καθένας από αυτούς απάντησε με το δικό του, προσωπικό ύφος, αλλά τα περισσότερα συμπεράσματα που προέκυψαν ήταν κοινά :

- Οι φοιτητές έχουν εισαχθεί στο Μαθηματικό Τμήμα με το καινούριο σύστημα εξετάσεων(συνέντευξη 1η , γραμμές 31-31, συνέντευξη 2η , γραμμές 31-32, συνέντευξη 3η, γραμμές 23-24).
- Επισημαίνουν το «χάσμα» που υπάρχει ανάμεσα στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση. Τους ρωτήσαμε να μας πουν τη γνώμη τους για τη συνέχεια που υπάρχει, αν υπάρχει, μεταξύ του σχολείου και του πανεπιστημίου και όλοι τους με μεγάλη ευκολία απάντησαν ότι δεν υπάρχει καμία συνέχεια. .

«*Νομίζω πως δεν υπήρξε συνέχεια και ειδικά στο μάθημα του Απειροστικού. Ενώ αρχίζει πάρα πολύ ήρεμα και λες πως πρόκειται για ένα μάθημα που μπορώ να κατανοήσω, δηλαδή με τα δεκατρία αξιώματα που παρουσιάζονται στην αρχή, από το δέκατο τέταρτο της πληρότητας και μετά υπάρχει ένα χάος. Αρχίζεις και νιώθεις ότι αυτό το μάθημα τελικά έχει ξεφύγει πολύ από αυτό που φαινόταν στην αρχή. Δεν υπήρχε συνέχεια από το Λύκειο, σχεδόν ελάχιστη. Δεν μπορώ να πω ότι με βοήθησε σε αυτό το μάθημα. Κάποιες βάσεις, αλλά όχι πολλά πράγματα. Ίσως να έπρεπε να υπήρχε κάτι ενδιάμεσο πριν τον Απειροστικό Λογισμό Ι*» (συνέντευξη 1η, γραμμές 33-34).

«*Σχέση υπάρχει, αλλά υπάρχουν πολύ μεγάλα κενά… Τα μισά .Λίγα πράγματα*(απαντά σε ερώτηση μας κατά πόσο το Λύκειο τον βοήθησε να καταλάβει την αρχή του Απειροστικού).*Όμως, υπάρχει σύγχιση σε κάποιες έννοιες, όπως το όριο και η παράγωγος.Τον ορισμό του ορίου τον κάναμε εντελώς διαφορετικά στο Λύκειο από ότι στο Πανεπιστήμιο….Το σχολείο δε με βοήθησε καθόλου. Είχα μια εικόνα για τους ορισμούς του ορίου και της παραγώγου και όταν ήρθα εδώ, όλα ήταν διαφορετικά*.» (συνέντευξη 2η, γραμμές 33-36).

«*Είναι μεγάλο το χάσμα, για εμένα δεν υπάρχει σχεδόν καμία σχέση. Δηλαδή είναι τελείως άλλο το πνεύμα. Ίσως, θα έπρεπε να υπάρχει κάτι ανάμεσα. Υπάρχει τεράστιο χάσμα που εκεί την «πατάνε» όλοι οι φοιτητές τα πρώτα χρόνια, δεν μπορούν να προσαρμοστούν στο Πανεπιστήμιο άνετα*.» (συνέντευξη 3η, γραμμή 26)

- Διακρίνουν μια σχετική ευκολία στην εισαγωγή του Απειροστικού Λογισμού και την απότομη στροφή που πραγματοποιείται μέσα σε λίγα μαθήματα.

«*Τις δύο πρώτες εβδομάδες κάνουμε διάφορες έννοιες για τους αριθμούς, οι οποίες δεν είναι δύσκολες, αλλά μετά ξεκινάει απότομα, πολύ απότομα. Και έτσι δημιουργείται πρόβλημα*.»(συνέντευξη 3η, γραμμές 27-28)

«*Ενώ αρχίζει πάρα πολύ ήρεμα και λες πως πρόκειται για ένα μάθημα που μπορώ να κατανοήσω, δηλαδή με τα δεκατρία αξιώματα που παρουσιάζονται στην αρχή, από το δέκατο τέταρτο της πληρότητας και μετά υπάρχει ένα χάος. Αρχίζεις και*

νιώθεις ότι αυτό το μάθημα τελικά έχει ξεφύγει πολύ από αυτό που φαινόταν στην αρχή» (συνέντευξη $1^{η}$, γραμμή 34).

- Όλοι τους θεωρούν ότι οι συνθήκες διδασκαλίας του μαθήματος δεν είναι οι καλύτερες.(συνέντευξη $1^{η}$, γραμμές 25-30, συνέντευξη $3^{η}$, γραμμές 20-22).Χαρακτηριστική είναι η απάντηση ενός φοιτητή που συμμετείχε στη διαδικασία των συνεντεύξεων :

«Σ *Τη δεύτερη φορά που πήγαινες εντατικά, σε ικανοποιούσε το μάθημα;*
Φ *Το συγκεκριμένο δε με ικανοποιούσε και πάρα πολύ.*
Σ *Γιατί το λες αυτό;*
Φ *Τρέχουν στην ύλη, δε τους ενδιαφέρει και πολύ αν καταλαβαίνει το κοινό .Γράφουν στον πίνακα, γράφουν, γράφουν, νιώθουν ότι είναι ευχαριστημένοι ότι το είπαν και αυτό.*»(συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 19-22).

- Κανείς τους δεν εργάζεται εντατικά στο σπίτι. .(συνέντευξη $1^{η}$, γραμμές 15-16, συνέντευξη $3^{η}$, γραμμές 15-16). Ένας φοιτητής μας απάντησε ως εξής :

«Σ *Όταν επέστρεφες στο σπίτι, ασχολιόσουν με το μάθημα;*
Φ *Καθόλου. Καθημερινά καθόλου.*»(συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 23-24)

- Αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις έννοιες ορίου και συνέχειας, οι οποίες προκύπτουν από τη μη κατανόηση των ορισμών τους. Επιβεβαιώνουν οτι οι παραπάνω έννοιες είναι γνώριμες από την καθημερινότητά τους, έχουν μια αντίληψη για αυτές, τις συνδυάζουν με εικόνες και λέξεις που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή και αυτή συγκρουέται με τους δομικούς ορισμούς(βλέπε σελ 21-25).
- Αποφεύγουν να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς εννοιών, και κυρίως τους ε-δ ορισμούς, που περιέχουν και ποσοδείκτες, οι οποίοι τους δυσκολεύουν ιδιαίτερα.(βλέπε, σελ 21-26). Ρωτήσαμε τους φοιτητές αν θα επέλεγαν να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς στο τέταρτο θέμα και απάντησαν ως εξής :

«Σ Μάλιστα.

Ας δούμε και ένα ακόμη θέμα του Σεπτεμβρίου.

Αν f: (0, +∞) → R συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \succ 0$ *με* $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Εδώ, υπάρχουν δύο όρια. Θα χρησιμοποιούσες τους ορισμούς των ορίων για να λύσεις το θέμα;
Φ *Όχι, έτσι όπως είναι τα όρια, όχι.*»(συνέντευξη $2^{η}$, γραμμές 81-82).
«Φ *Αυτά όχι, νομίζω πως όχι*»(συνέντευξη $3^{η}$, γραμμές 60-61).
Φ *Ίσως σαν πρώτη ιδέα, ναι. Όμως, έτσι όπως την ξαναβλέπω δε νομίζω να με διευκόλυνε και πολύ ακόμα και αν κατάφερνα να τους γράψω σωστά με τα ε-δ.*
Σ *Γιατί;*
Φ *Δε θα μπορούσα πολύ πιθανά να συνδυάσω τις δυο σχέσεις που θα έβγαζα από τους ορισμούς των ορίων .Οπότε ουσιαστικά θα μου ήταν ανώφελο. Ίσως έψαχνα να βρω ένα άλλο τρόπο να λύσω το θέμα για να ξεφύγω από τον ορισμό*»(συνέντευξη $1^{η}$, γραμμές 59-62).

- Αντιμετωπίζουν προβλήματα με τις εκφωνήσεις των θεμάτων. Τονίζουν πως δεν μπορούν να κατανοήσουν ποια είναι τα ζητούμενα και ποια τα δεδομένα. Συμπληρώνουν, ότι δεν αναγνωρίζουν τι πρέπει να αποδείξουν σε κάθε περίπτωση(βλέπε, σελ 37).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Alibert, D. and Thomas, M. *Research on mathematical proof*.
[2] Artigue, M. *Analysis*, Advanced Mathematical Thinking, σελ 167-198.
[3] Artigue, M. *Teaching and Learning Elementary Analysis : What can we learn from didactical research and curriculum evolution?*, First Mediterranean Conference on Mathematics, 1997, σελ 207-212.
[4] Βαγενά, Δ. *Η θεωρία της ανάμνησης*, Εργασία που εκπονήθηκε στο ερευνητικό σεμινάριο Πλάτων και Μαθηματικά, Αθήνα, 2003.
[5] Γιαννακούλιας, Ε. *Σύντομη Ιστορική περίληψη της εξέλιξης του Απειροστικού Λογισμού*, Αθήνα 2003.
[6] Cohen, L. and Manion, L. *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*.
[7] Cornu, B. *Limits*, Advanced Mathematical Thinking, σελ 153-166.
[8] Hanna, G. *Mathematical Proof*, Advanced Mathematical Thinking, σελ 54-64.
[9] Harel, G. and Trgalova, J. *Higher Mathematics Education*, Purdue University U. S. A. and University Joseph Fourier, France.
[10] I. C. M. I. *Study on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, Bulletin $N_{o.}$ 43, December 1997, σελ. 1-3.
[11] Κλαουδάτος, Ν. *Σημειώσεις του μαθήματος Διδακτική των Μαθηματικών*,Αθήνα, 2003.
[12] Mathematical Association, *Newsletter $N_{o.}$ 3*, August 1995, σελ. 1-8.
[13] Mathematical Association, *Newsletter $N_{o.}$ 9*, September 1998, σελ. 1-6.
[14] Νεγεοπόντης, Σ. Σημειώσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Αθήνα, 2002.
[15] Νεγεοπόντης, Σ. Σημειώσεις του μαθήματος Πλάτων και Μαθηματικά, Αθήνα, 2002.
[16] Νεγρεπόντης, Σ, Γιωτόπουλος, Σ, Γιαννακούλιας, Ε. *Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι*, 1997.
[17] Vinner, S. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, Advanced Mathematical Thinking.
[18] Weber, K. *Students' Difficulties with Proof*, June 23, 2003, σελ 1-9, σελ. 1-9.