ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Μαθηματικών
Τμημα Μεθοδολογιας, Ιστοριας
και Θεωριας Της Επιστημης
Τμημα Φιλοσοφιας – Παιδαγωγικής & Ψυχολογιας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Τμημα Επιστημων Αγωγης

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών για ρητούς αριθμούς με δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις»

ΣΩΤΗΡΗΣ ΖΩΙΤΣΑΚΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής	…………….
2) Δέσποινα Πόταρη	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	……………
3) Χαράλαμπος Σακονίδης	Αναπληρωτής Καθηγητής	……………

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια εξελίσσονται έρευνες σε μια προσπάθεια κατανόησης του τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές ή οι φοιτητές τα μαθηματικά αντικείμενα και τις διαδικασίες. Κάποιες απ' αυτές έχουν σα στόχο να μας παράσχουν ένα γενικό πλαίσιο αναφοράς για τον τρόπο που αναπτύσσονται οι μαθηματικές έννοιες, στο νου των μαθητών. Οι γενικές αυτές έρευνες δεν έχουν σαν στόχο συγκεκριμένους κλάδους των μαθηματικών ή ηλικίες μαθητών αλλά φιλοδοξούν να αποτελέσουν τη βάση για την ερμηνεία των απόψεων τους. Εξειδικεύοντας τέτοιες έρευνες, μας δίνεται η δυνατότητα να έχουμε ένα εργαλείο ερμηνείας των απόψεων των μαθητών σε συγκεκριμένες περιοχές των μαθηματικών. Αντίστροφα, συγκεκριμένες ερευνητικές προσπάθειες που έχουν σαν στόχο την εξέταση του τρόπου κατανόησης από τους μαθητές συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων ανατροφοδοτούν τις γενικότερου χαρακτήρα έρευνες εξελίσσοντας τις.

Ερευνητές όπως ο D. Tall σε διαχρονική συνεργασία με τους E. Gray, Mc Gowen, D. Pitta, D., M. Pinto, G. Davis και άλλους, και επηρεασμένοι από τη δουλειά ερευνητών όπως οι G. Lakoff & E. Núñez, E. Dubinsky, A. Sfard, μας προσφέρουν ένα γενικό πλαίσιο αναφοράς για την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Θεωρούν ότι υπάρχουν τρεις κόσμοι προσέγγισης των μαθηματικών. Ο πρώτος είναι ο *ενσαρκωμένος (embodied)* κόσμος στον οποίο τα μαθηματικά, σχετίζονται άμεσα με δράσεις και αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, όπως αυτός γίνεται αντιληπτός διαμέσου των αισθήσεων. Ο δεύτερος είναι ο συμβολικός κόσμος των *διεργασιών-εννοιών* (symbolic-proceptual) ο οποίος αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων στα μαθηματικά, συνδυάζοντας την διπλή τους υπόσταση, ως διαδικασίες και ως έννοιες. Ο τρίτος είναι ο *αξιωματικός* κόσμος *(axiomatic)* ο οποίος αντιμετωπίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό τρόπο. Στον κόσμο αυτό ξεκινάμε από πρωταρχικές έννοιες και ορισμούς και με λογικούς συμπερασμούς αποδεικνύουμε θεωρήματα.

Με βάση αυτό το γενικό πλαίσιο προτείνονται ιεραρχίες ώστε να παρατηρήσουμε την γνωστική εξέλιξη των μαθητών, να εντοπίσουμε τις αιτίες που τους προκαλούν δυσκολίες, με στόχο να αναπτυχθούν διδακτικές προτάσεις που να τους βοηθήσουν να υπερβούν τις δυσκολίες αυτές.

Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε τους φοιτητές του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών, σχετικά με την έννοια των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση και συγκεκριμένα τον 0,3999… με βάση το εξής τρίπτυχο:

α) Ποια είναι για τους φοιτητές αυτούς η φύση μιας τέτοιας παράστασης.

β) Ποια είναι η γνωστική ικανότητα των συμμετεχόντων σε σχέση με τη συγκεκριμένη έννοια.

γ) Ποιος ο βαθμός επάρκειας των φοιτητών της έρευνας για τη διδασκαλία της έννοιας αυτής.

Για την κατανόηση του πως αντιλαμβάνονται οι φοιτητές την φύση της παράστασης ενός ρητού αριθμού με άπειρα 9 στα δεκαδικά του ψηφία, χρησιμοποιήσαμε τα εξής θεωρητικά εργαλεία:

α) Μια ιστορική – φιλοσοφική προσέγγιση, βασικά για τις έννοιες του απείρου και του απειροστού από την αρχαιότητα μέχρι τις απαρχές της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

β) Τις θεωρίες της διδακτικής των μαθηματικών των τελευταίων χρόνων στις οποίες αναφερθήκαμε προηγουμένως.

γ) Την σημειωτική προσέγγιση, για να κατανοήσουμε το ρόλο των συμβόλων στη διαμόρφωση των ερμηνειών για τα μαθηματικά αντικείμενα που παριστάνουν.

Σχετικά με την γνωστική ικανότητα των φοιτητών της έρευνας χρησιμοποιήσαμε βασικά τις έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών που αναφέραμε.

Για τον έλεγχο της διδακτικής δυνατότητας των φοιτητών ως μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών, εξετάσαμε την ικανότητά τους να ερμηνεύσουν τις απόψεις των υποθετικών μαθητών ενός σεναρίου, εντοπίζοντας θετικά σημεία ή παρανοήσεις σ' αυτές, καθώς και την δυνατότητά τους να κάνουν προτάσεις στους μαθητές αυτούς με βάση τις παρανοήσεις που εντόπισαν.

Οι φοιτητές της έρευνας μας ως μαθητές, έχουν έρθει σε επαφή με απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς ήδη από τη φοίτησή τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ως το αποτέλεσμα ατελών διαιρέσεων, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση τους αντιμετωπίζουν ως εναλλακτικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών και στην τριτοβάθμια ως όρια ακολουθιών ή αθροίσματα σειρών. Προσπαθήσαμε λοιπόν να εξετάσουμε κατά πόσο οι φοιτητές αυτοί, οι οποίοι έχουν επιτύχει σε πολλαπλές εξετάσεις του εκπαιδευτικού συστήματος, έχουν ξεπεράσει τη διαισθητική προσέγγιση των απειροψήφιων δεκαδικών όπως απαιτείται απ’ αυτούς και σε ποιο βαθμό έχουν την ικανότητα να περιγράψουν διδακτικές προτάσεις για να βοηθήσουν τους μελλοντικούς μαθητές τους.

Έχει γίνει προσπάθεια παρουσίασης της εξελικτικής πορείας των βασικών θεωριών που χρησιμοποιούμε στην εργασία για την καλύτερη κατανόησής τους, καθώς και της χρησιμοποίησής τους ως εργαλεία ερμηνείας των απόψεων των φοιτητών σχετικά με τους ρητούς δεκαδικούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Ελέγξαμε τη δυνατότητά τους, ως γενικών θεωριών να εφαρμοστούν στη συγκεκριμένη έννοια που εξετάζουμε και επιδιώξαμε μια προσπάθεια κριτικής κάποιων συγκεκριμένων σημείων τους. Θεωρούμε ότι τέτοια γενικά θεωρητικά σχήματα πρέπει να εφαρμόζονται σε συγκεκριμένες έρευνες και να ανατροφοδοτούνται απ’ αυτές με στόχο την εξέλιξή τους. Θεωρούμε σαν στόχο της παρούσας εργασίας τη συμβολή της σε μια τέτοια προσπάθεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ – ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι απειροψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί, που είναι με την ευρεία έννοια το θέμα της εργασίας μας, σχετίζονται άμεσα με τις έννοιες του απείρου και του απειροστού. Άλλωστε στην έρευνα που ακολουθεί, στην οποία εξετάσαμε τον τρόπο κατανόησης από τους φοιτητές του μαθηματικού τμήματος, της φύσης ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση, διαπιστώσαμε ότι αρκετοί, συνδέουν τους αριθμούς αυτούς με το άπειρο και τα απειροστά με τρόπους παρόμοιους με αυτούς που τους αντιμετώπισαν μεγάλοι διανοητές του παρελθόντος. Σε μια προσπάθεια βαθύτερης κατανόησης των εννοιών αυτών καθ' αυτών, αλλά και των απόψεων των φοιτητών για τις έννοιες αυτές, προχωρήσαμε σε μια ιστορικό φιλοσοφική προσέγγιση τους.

Στην ιστορικο-φιλοσοφική αυτή περιήγηση θα εξετάσουμε:

α) την κοσμοθεωρία των πυθαγορείων ως παράδειγμα μιας διαφορετικής, σε σχέση με τη σημερινή, αντιμετώπισης της φύσης των αριθμών,

β) τα παράδοξα του Ζήνωνα ως ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γύρω από το οποίο αναπτύχθηκαν ιδέες σχετικές με τη φύση το απείρου, τη διαισθητική προσέγγιση άπειρων διαδικασιών και το άθροισμα άπειρων προσθετέων,

γ) το άπειρο στο έργο του Αριστοτέλη,

δ) την επίδραση του Εύδοξου στα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη για να έχουμε μια εικόνα για το πώς προσέγγιζαν στην αρχαιότητα το λόγο μεγεθών και την επίδραση των ιδεών αυτών στη μετέπειτα θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, καθώς και τον τρόπο που αντιμετωπίστηκαν τα απειροστά στην αρχαιότητα,

ε) τις απόψεις του Leibniz για το άπειρο και το απειροστό,

στ) τις απόψεις του Berkeley και του Kant για το άπειρο,

ζ) κάποιες ιδέες του Cauchy για το άπειρο και το απειροστό με τις οποίες διαπιστώνονται κοινά χαρακτηριστικά με τις απόψεις των φοιτητών της έρευνάς μας .

1.2 Η ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

Εξετάζουμε κάποια στοιχεία της κοσμοθεωρίας των πυθαγορείων γιατί εμφανίζονται σ' αυτή κάποια ενδιαφέροντα στοιχεία για τη φύση των αριθμών, τα οποία είναι ουσιωδώς διαφορετικά από τη σημερινή θεώρηση και είναι πιθανό να μας βοηθήσουν στον τρόπο που αντιλαμβάνονται κάποιοι μαθητές τους αριθμούς.

Οι πυθαγόρειοι είχαν μια κοσμοθεωρία, κεντρική θέση στην οποία είχαν τα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα οι φυσικοί αριθμοί. Η δομή του πυθαγόρειου κόσμου είναι σύμφυτη, χαρακτηρίζει και χαρακτηρίζεται από τη δομή των μαθηματικών τους. Ήταν πεισμένοι για τη διακριτότητα του κόσμου και δεν χρησιμοποιούσαν στις γεωμετρικές τους κατασκευές και στις αποδείξεις τους συνεχή μεγέθη.

Η κοσμοθεωρία των πυθαγορείων έχει αριθμητικό χαρακτήρα και σαν δομικά υλικά χρησιμοποιεί τους φυσικούς αριθμούς. Σύμφωνα με την πυθαγόρεια κοσμογονία το σύμπαν δημιουργείται από το «Εν» μετά τη διαίρεσή του με εισπνοή «απείρου». Το «Εν» είναι πεπερασμένο και οριοθετείται από το κενό που είναι άπειρο. Το άπειρο έχει την ιδιότητα να διασπά τη μονάδα και να δημιουργεί τη δυάδα που για τους πυθαγόρειους ταυτίζεται με την ευθεία γραμμή. Όμοια η δυάδα διασπάται δημιουργώντας την τριάδα που σχετίζεται με το απλούστερο επίπεδο σχήμα το τρίγωνο και από το τρία δημιουργείται το τέσσερα το οποίο σχετίζεται με το τετράεδρο. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 παίζουν βασικό ρόλο στην πυθαγόρεια οντολογία. Έτσι το πυθαγόρειο σύμπαν έχει σαν πρότυπο το σύνολο των φυσικών αριθμών και φαίνεται φυσιολογικό, ο κόσμος των πυθαγορείων να υπακούει σε νόμους που περιγράφονται από λόγους φυσικών αριθμών.

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (Μετά τα Φυσικά Α, 985 b23-986 b8)[1] ο κόσμος για τους πυθαγόρειους βασίζεται σε δέκα αρχές, οι οποίες εμφανίζονται σε μορφή εννοιολογικών διπόλων που είναι τα εξής:

Πέρας και άπειρον

Περιττόν και άρτιον

Έν και πλήθος

Δεξιόν και αριστερόν

Άρρεν και Θήλυ

Ηρεμούν και κινούμενον

[1] TLG (Musaios).

Ευθύ και καμπύλον

Φως και σκότος

Αγαθόν και κακόν

Τετράγωνον και ετερομήκες

Στον παραπάνω πυθαγόρειο πίνακα των δέκα αντιθετικών άρχων τα δίπολα πέρας - άπειρον και περιττόν - άρτιον δεν κατέχουν απλά την πρώτη θέση αλλά έχουν πρωταρχική σημασία. Όταν επιβάλλεται ένα πέρας στο άπειρο, το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία των αριθμών. Η μονάδα ή το εν δεν είναι ένας αριθμός αλλά η αρχή του αριθμού, γιατί περιλαμβάνει και το πέρας και το άπειρο και το άρτιο και το περιττό. Εφόσον το ένα δεν είναι ένας αριθμός παρά η πηγή του αριθμού, το πεπερασμένο και το άπειρο που αυτό περιλαμβάνει είναι οι έσχατες αρχές όλων των πραγμάτων.

Η θεωρία των πυθαγορείων εδράζεται, στην πραγματικότητα, σε μια κοσμοαντίληψη εντός της οποίας ο αριθμός συλλαμβάνεται μ’ έναν τρόπο τελείως διαφορετικό αυτού που σήμερα μας είναι οικείος. Στις μέρες μας, αντιλαμβανόμαστε πλέον τον αριθμό ως επισώρευση μονάδων, ώστε το 3 για μας να προκύπτει από την πρόσθεση του 1 στο 1 και πάλι στο 1, οπότε ο αριθμός, γεννάται μέσω της επανάληψης της στοιχειώδους ενότητας. Για τους πυθαγόρειους, αντίθετα, ο αριθμός προκύπτει από τη διαίρεση της Ενότητας. «Το εν, διχαζόμενο, διπλασιάζεται: το ένα παρήγαγε το δύο», όπως λέει ο Αριστοτέλης (Μετά τα Φυσικά, XIV, 3).

1.3 ΤΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΑ

Η μελέτη της έννοιας της συνέχειας και του απείρου που συσχετίζονται, γίνεται από τον Αριστοτέλη στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη. Τα παράδοξα αυτά δημιουργούνται από τον Ζήνωνα για να στηρίξει το φιλοσοφικό σύστημα του δασκάλου του Παρμενίδη.

Κεντρική θέση στο φιλοσοφικό σύστημα του Παρμενίδη έχει η έννοια του ‘όντος’. Το ‘όν’ για τον Παρμενίδη αποτελεί την πρώτη δημιουργική αρχή, είναι μονογενές και υπάρχει ως ένα όλον. Επίσης είναι τέλειο αδιαίρετο και συνεχές.

Ο Παρμενίδης θεωρούσε πως κάθε κίνηση και φθορά που παρατηρείται στη φύση οφείλεται στην απάτη των αισθήσεων. Υποστήριζε ότι το ‘όν’ είναι αυτό που υπάρχει πραγματικά και ότι μόνο η γνώση του αποτελεί την αληθή γνώση.

Το ‘όν’ ως φιλοσοφικός όρος είναι δημιούργημα της ελεατικής σχολής (Ρούσσος 1982). Θεωρείται απολύτως ένα και δεν υπάρχει πολλαπλότητα σε αυτό. Είναι στατικό, αμετάβλητο, πλήρες, συνεχές και νοερό.

Ο Ζήνωνας ήθελε να δείξει με τα παράδοξά του, ότι οι αισθήσεις είναι απατηλές και εμφανίζουν το ένα όν ως περισσότερα του ενός. Με τη χρήση της εις άτοπο απαγωγής επιχειρηματολογεί υπερασπιζόμενος το παρμενίδιο, μονιστικό, φιλοσοφικό σύστημα.

Σύμφωνα με τον Βασιλείου (1973) η επιχειρηματολογία στρέφεται κυρίως εναντίον εκείνων που υποστήριζαν ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελείται από άτομα. Για τον Ζήνωνα τα άτομα αυτά πρέπει να είναι άπειρα το πλήθος. Στο σημείο αυτό ο Βασιλείου διαπιστώνει μια αντίθεση με τη διδασκαλία του Παρμενίδη για το ενιαίο του κόσμου. Κατά βάση ο Ζήνωνας αντιτίθεται στην ατομική θεωρία του Δημόκριτου αλλά και την αριθμοθεωρία των πυθαγορείων η οποία ενσωματωνόταν σε μια μεταφυσική πολυαρχική κοσμοθεωρία.

Σύμφωνα με τον Βασιλείου (1973) ο Ζήνων φαίνεται να θέλει να καταρρίψει τον πλουραλιστικό ισχυρισμό για τη δυνατότητα διαιρέσεως του συνεχούς σε άτομα τα οποία δεν έχουν μεταξύ τους συνοχή. Έτσι ο Ζήνωνας θεωρώντας αρχικά ότι κάτι που έχει έκταση συνίσταται από άπειρα μέρη στη συνέχεια διακρίνει δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη τα έσχατα, άπειρα το πλήθος, αδιαίρετα μέρη που φθάνουμε με τη γεννόμενη διαίρεση δεν έχουν μέγεθος· αυτό αποκλείεται από τον Ζήνωνα. Στη δεύτερη περίπτωση τα εν λόγω άτομα έχουν μέγεθος, οπότε το άθροισμα απείρου πλήθους μεγεθών που δεν είναι μηδενικά, είναι άπειρο.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ζήνωνας εστιάζεται σε μια φυσική παρά μαθηματική θεώρηση των εννοιών του χώρου και του χρόνου. Παρά ταύτα τα παράδοξά του θα επηρεάσουν καθοριστικά την εξέλιξη των μαθηματικών. Χαρακτηριστικά ο Βασιλείου αναφέρει: «Οι δοξασίες του Αριστοτέλους για το συνεχές, όπως και τα παράδοξα του Ζήνωνος δεν αφορούσαν τα καθαρά μαθηματικά. Ωστόσο, οι δοξασίες αυτές ήσαν αρκετές για να θέσουν σε σοβαρή αμφιβολία τη θέση των μαθηματικών ως μια καθαρά παραγωγικής επιστήμης.»

Τα παράδοξα του Ζήνωνα προαναγγέλουν την αδυναμία περιγραφής της έννοιας του συνεχούς από μια πρωτογενή ατομιστική θεωρία. Χαρακτηριστικά ο E. W. Beth[1] αναφέρει: «έχω δείξει ότι μια αρχική ατομιστική θεωρία συνεχούς έχει ανατραπεί από

[1] Στο P. S. Zervos, (1972).

τα παράδοξα του Ζήνωνα. Μετά την ανακάλυψη ασύμμετρων μεγεθών έγινε καθαρό ότι δεν ήταν πιθανή καμία επιδιόρθωση της ατομιστικής θεωρίας.

Τα παράδοξα του Ζήνωνα σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (Φυσική Ακρόασις VI, 239b-240b) είναι συνολικά τέσσερα. Θα περιγράψουμε τα πρώτα δύο γιατί τα δύο τελευταία είναι παρόμοια.

Το πρώτο παράδοξο έχει ως εξής:

Για να διανύσει κάποιος μια απόσταση ΑΒ θα πρέπει να διανύσει πρώτα την απόσταση AA_1 = ΑΒ/2, στη συνέχεια την απόσταση A_1A_2 =ΑΒ/4 και την A_2A_3 = ΑΒ/8 και ούτω καθ’ εξής. Αυτό εμφανίζεται ως αδύνατο γιατί κάποιος πρέπει να περάσει από άπειρο πλήθος σημείων για να διανύσει μια πεπερασμένη απόσταση ΑΒ. Πρέπει δηλαδή να πραγματοποιηθούν άπειρες το πλήθος μεταβάσεις. Επίσης το άθροισμα άπειρου πλήθους τμημάτων εμφανίζεται να είναι ένα πεπερασμένο τμήμα.

Το δεύτερο παράδοξο, γνωστό και ως παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας είναι το εξής:

Σ’ έναν αγώνα δρόμου ανάμεσα στον γοργοπόδαρο Αχιλλέα και σε μια χελώνα δίνεται προβάδισμα ενός σταδίου στη χελώνα. Στο χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί ο Αχιλλέας για να καλύψει την διαφορά του ενός σταδίου η χελώνα θα διανύσει ένα άλλο διάστημα (πολύ μικρότερο του ενός σταδίου). Στην προσπάθειά του ο Αχιλλέας να καλύψει τη νέα διαφορά θα χρειαστεί κάποιο νέο χρονικό διάστημα στο οποίο η χελώνα θα καλύψει μια νέα απόσταση και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ’ άπειρο. Έτσι φαίνεται ότι ο Αχιλλέας θα χρειαστεί άπειρο χρόνο για να φτάσει τη χελώνα.

Τα δύο παράδοξα σχετίζονται με την οντολογική φύση του συνεχούς και την ανθρώπινη αδυναμία, να πραγματώσει με τις αισθήσεις τις, άπειρες διαδικασίες σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Η συσχέτιση του άπειρου με το συνεχές γίνεται από τον Αριστοτέλη στο παρακάτω χωρίο:

«ἡ κίνησις εἶναι τῶν συνεχῶν, τὸ δ' ἄπειρον ἐμφαίνεται πρῶ-
τον ἐν τῷ συνεχεῖ· διὸ καὶ τοῖς ὁριζομένοις τὸ συνεχὲς συμ-
βαίνει προσχρήσασθαι πολλάκις τῷ λόγῳ τῷ τοῦ ἀπείρου,
ὡς τὸ εἰς ἄπειρον διαιρετὸν συνεχὲς ὄν. (Φυσικά 200b 17-20)

Στο χωρίο αυτό φαίνεται ότι η κίνηση αφορά τα συνεχή μεγέθη και το άπειρο το οποίο εμφανίζεται κατά προτεραιότητα στο συνεχές και γι’ αυτό το άπειρο χρησιμοποιείται στους ορισμούς του συνεχούς, όπως όταν λέμε ότι το άπειρα διαιρέσιμο είναι συνεχές.

Ο Fischbein (2001) θεωρεί ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα εμφανίζονται ως τέτοια λόγω της άδηλης δράσης του χωρικού μοντέλου στον τρόπο που σκεφτόμαστε και την έννοια του χρόνου. Χαρακτηριστικά αναφέρει: «Ζούμε με το άδηλο χωρικό μοντέλο του χρόνου, σκεπτόμαστε με αυτό, διαπραγματευόμαστε με αυτό, συμπράττουμε κοινωνικά χρησιμοποιώντας το συνειδητά. Η χωρική μεταφορά είναι τόσο βαθιά σφηνωμένη μέσα στη γλώσσα μας, μέσα στη λογική μας, που δεν αισθανόμαστε κάποια ασυμφωνία όταν συλλογιζόμαστε για το χρόνο σε χωρικούς όρους.»

Ψυχολογικά ο χρόνος θεωρείται άπειρος αλλά όχι άπειρα διαιρετός, ενώ ο χώρος θεωρείται και άπειρος αλλά και άπειρα διαιρετός. Σύμφωνα με τον Fischbein η κίνηση, και αντίστοιχα ο χρόνος, δεν είναι άπειρος διαιρετά. Ψυχολογικά δεν υφίσταται η απειρία στιγμών.

Έτσι για τα δυο πρώτα παράδοξα προτείνεται από τον Fischbein η απόσπαση διαίσθησης της διάρκειας από την εξάρτησή της από το χωρικό μοντέλο. Όμως η απόσπαση αυτή θεωρείται εξαιρετικά δύσκολη λόγω των ισχυρών εξαναγκασμών του χωρικού μοντέλου.

Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα δεν αποτελούν παράδοξα στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας. Για παράδειγμα το παράδοξο της διχοτομίας δεν αποτελεί μαθηματικά παράδοξο αφού το άπειρο άθροισμα των διαστημάτων είναι το άθροισμα άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 1/2$ που ισούται με ένα. Όμως η μαθηματική λύση δίνει απάντηση σ' ένα διαφορετικό πρόβλημα. Το παράδοξο εμφανίζεται στη φαινομενολογική ροή του ψυχολογικού χρόνου και της κίνησης που ενέχονται στο παράδοξο και προκαλούν αντίφαση. Αλλά αυτά είναι μέρος του παραδόξου.

1.4 ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Για τον Αριστοτέλη η ανάγκη να διερωτηθούμε για το άπειρο προέρχεται από τις εξής πέντε πηγές:[1]

α) Από την επαγωγικής υφής πίστη μας πως ο χρόνος είναι χωρίς πέρατα – απέραντος, άπειρος.

[1] Δ. Α. Αναπολιτάνος (1985), σ.61-62.

β) Από τη δυνατότητα ύπαρξης διαδικασιών τμήσης εκτεταμένων μεγεθών, όπου ο αριθμός των πράξεων τμήσης – χωρίς να είναι άπειρος – δεν είναι φραγμένος προς τα άνω.

γ) Από την αέναη παρουσία της γέννησης και της φθοράς κάθε αισθητού αντικειμένου.

δ) Από την αντίληψη πως οτιδήποτε έχει όρια, οριοθετείται πάντα από κάτι άλλο που δεν αποτελεί μέρος του, και επομένως η ολότητα των πραγμάτων δεν μπορεί να έχει όρια, γιατί αυτά τα όρια ήδη θα περιέχονταν στην ολότητα των πραγμάτων. (Η ολότητα των πραγμάτων δεν σχετίζεται με το Αριστοτελικό σύμπαν το οποίο είναι σφαιρικό και συνεπώς πεπερασμένο).

ε) Από το απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης, που συνεπάγεται το απεριόριστο των νοητικών κατασκευών, όπως για παράδειγμα το απεριόριστο των αριθμών και το απεριόριστο των γεωμετρικών μεγεθών.

Έτσι η έννοια του απείρου στον Αριστοτέλη δεν εκλαμβάνεται σ' ένα πλατωνικό σύμπαν ιδεών αλλά μέσα από διαδικασίες και αντικείμενα που δεν εξαντλούνται. Οι διαδικασίες αυτές είναι η αθροιστική και η διαιρετική.

Κατά την αθροιστική διαδικασία δοθέντος ενός τμήματος ΑΒ μπορούμε να δημιουργήσουμε και έτσι θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν, τα τμήματα 2ΑΒ, 3ΑΒ, …,νΑΒ όπου το ν είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει μια διάκριση μεταξύ του δυνητικού και του ενεστωτικού απείρου. Η άπειρη διαδικασία παραγωγής τμημάτων που περιγράψαμε προηγουμένως μπορεί να εξεταστεί σύμφωνα με τον Αριστοτέλη μόνο εσωτερικά και αποτελεί το *δυνητικό* άπειρο. Η διαδικασία αυτή αν θεωρηθεί τελειωμένη, ως αντικείμενο αποτελεί το *ενεστωτικό* άπειρο και δεν είναι δυνατή κατά τον Αριστοτέλη. Για παράδειγμα η διαδικασία της αρίθμησης με τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3,…είναι μια άπειρη διαδικασία που εκφράζεται το *δυνητικό* άπειρο. Το σύνολο όμως των φυσικών αριθμών ως αντικείμενο στα πλαίσια μιας θεωρίας αποτελεί το *ενεστωτικό* άπειρο. Τα φαινόμενα που συνηγορούν υπέρ της δυνητικής φύσης του απείρου κατά την αθροιστική διαδικασία είναι: α) το ατελεύτητο του χρόνου όπως βιώνεται «εν πορεία» και β) η αδυναμία περάτωσης μιας ανοιχτής προς τα μπρος αρίθμησης.

Η δεύτερη διαδικασία που σχετίζεται με το άπειρο είναι η διαιρετική. Έτσι ένα εκτεταμένο μέγεθος μπορεί να θεωρηθεί ως *δυνάμει* άπειρο, δεδομένου ότι μπορεί να τμηθεί άπειρες φορές. Στο σημείο αυτό πρέπει να προσέξουμε ότι για τον Αριστοτέλη στα πλαίσια του δυνητικού απείρου δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν άπειρες τομές σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα αλλά μόνο οσοδήποτε μεγάλος αλλά πεπερασμένος αριθμός τομών.

Από τις διαδικασίες που περιγράψαμε προηγουμένως αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αυτές είναι συνυφασμένες με τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους και μάλιστα σε πεπερασμένο χρόνο. Σ' αυτό το σημείο δεν εννοούμε την αισθητηριακή διαδικασία τομής ή επέκτασης φυσικών αντικειμένων. Δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο στη σκέψη του Αριστοτέλη. Αυτό που θέλουμε να τονίσουμε είναι η απομάκρυνση από τις ιδέες του Πλάτωνα, όπου οι έννοιες υπάρχουν στον κόσμο των Ιδεών. Η ύπαρξη των άπειρων διαδικασιών που περιγράψαμε αποκτούν οντολογικά χαρακτηριστικά και ταυτόχρονα δεσμεύονται απ' αυτά. Τα οντολογικά αυτά χαρακτηριστικά σχετίζονται με τη φύση, και τις περιορισμένες – πεπερασμένες δυνατότητες του έλλογου όντος του οποίου αποτελούν αντικείμενο σπουδής. Έτσι η έννοια του απείρου εξετάζεται καθ' αυτή μέσα από εποπτικές διαδικασίες και γίνεται προσπάθεια να περιγραφούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του. Η έννοια του απείρου δεν χαρακτηρίζεται ως υπαρκτή μόνο στα πλαίσια ενός ιδανικού κόσμου πλατωνικών ιδεών. Η προσέγγιση βέβαια αυτή στα πλαίσια της Αριστοτελικής θεωρίας προκαλεί και τους αντίστοιχους περιορισμούς. Δεν γίνεται δυνατό το απαραίτητο νοητικό άλμα για την αποδοχή του ενεστωτικού απείρου, το οποίο θα αργήσει άλλωστε να επιτευχθεί.

Συνηγορώντας στο προηγούμενο αξίζει να παρακολουθήσουμε τη σκέψη του Αριστοτέλη σε σχέση με την έννοια του χρόνου. Για τον Αριστοτέλη ο χρόνος είναι το μέτρο της αλλαγής και δεν υπάρχει ανεξάρτητα από το υποκείμενο που διενεργεί την πράξη της μέτρησης. Ο χρόνος θεωρείται συνεχής γιατί μετράει την συνεχώς ρέουσα αλλαγή. Η σαφής σύνδεση της έννοιας του χρόνου, της κίνησης και του υποκειμένου που πραγματώνει τη μέτρηση φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

«ἄξιον δ' ἐπισκέψεως καὶ πῶς ποτε ἔχει ὁ χρόνος πρὸς
τὴν ψυχήν, καὶ διὰ τί ἐν παντὶ δοκεῖ εἶναι ὁ χρόνος, καὶ
ἐν γῇ καὶ ἐν θαλάττῃ καὶ ἐν οὐρανῷ. ἢ ὅτι κινήσεώς τι πά-
Θος ἢ ἕξις, ἀριθμός γε ὤν, ταῦτα δὲ κινητὰ πάντα (ἐν τόπῳ
γὰρ πάντα), ὁ δὲ χρόνος καὶ ἡ κίνησις ἅμα κατά τε δύνα-
μιν καὶ κατ' ἐνέργειαν; πότερον δὲ μὴ οὔσης ψυχῆς εἴη ἂν
ὁ χρόνος ἢ οὔ, ἀπορήσειεν ἄν τις. ἀδυνάτου γὰρ ὄντος εἶναι
Τοῦ ἀριθμήσοντος ἀδύνατον καὶ ἀριθμητόν τι εἶναι, ὥστε δῆ-
Λον ὅτι οὐδ' ἀριθμός. ἀριθμὸς γὰρ ἢ τὸ ἠριθμημένον ἢ τὸ

ἀριθμητόν. εἰ δὲ μηδὲν ἄλλο πέφυκεν ἀριθμεῖν ἢ ψυχὴ καὶ
ψυχῆς νοῦς, ἀδύνατον εἶναι χρόνον ψυχῆς μὴ οὔσης, ἀλλ'
ἢ τοῦτο ὅ ποτε ὂν ἔστιν ὁ χρόνος, οἷον εἰ ἐνδέχεται κίνησιν εἶ-
Ναι ἄνευ ψυχῆς. τὸ δὲ πρότερον καὶ ὕστερον ἐν κινήσει ἐστίν·
χρόνος δὲ ταῦτ' ἐστὶν ᾗ ἀριθμητά ἐστιν.»
(Φυσικά 223 α 16-19)

‘Αξίζει να εξετάσουμε πως ο χρόνος σχετίζεται με την ψυχή… Μια ερώτηση που θα μπορούσε να διατυπώσει κανείς είναι αν θα υπήρχε ή όχι χρόνος στην περίπτωση που δεν θα υπήρχε ψυχή, γιατί αν δεν υπήρχε κανένας να μετρήσει, δεν θα υπήρχε και τίποτα που μπορούσε να μετρηθεί, επομένως είναι προφανές πως δεν θα υπήρχε και αποτέλεσμα της μέτρησης (αριθμός), γιατί αποτέλεσμα μέτρησης είναι ή οτιδήποτε έχει μετρηθεί ή οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί. Αλλά αν τίποτε εκτός από την ψυχή ή από το νου της ψυχής δεν μπορεί να μετρήσει, δεν θα υπήρχε χρόνος αν δεν υπήρχε ψυχή, παρά αυτό του οποίου ο χρόνος είναι ιδιότητα., δηλαδή, αν η κίνηση μπορεί να υπάρχει χωρίς την ψυχή και το πριν και το μετά είναι ιδιότητες της κίνησης, τότε ο χρόνος είναι αυτά τα πράγματα όταν μετρηθούν.’[1]

Η πράξη της μέτρησης ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος απαιτεί την οριοθέτηση του χρονικού διαστήματος μέσω κάποιων χρονικών στιγμών – εκάστοτε ‘τώρα’ και μια ομογενή περιοδική αλλαγή που θα παίξει το ρόλο της χρονικής μονάδας μέτρησης.

Στην Αριστοτελική αντίληψη οι χρονικές στιγμές, τα στιγμιαία ‘τώρα’ δεν υπάρχουν πραγματικά σ’ όλο το μήκος του χρονικού διαστήματος. Δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από την ύπαρξη του έλλογου όντος. Έτσι τα στιγμιαία ‘τώρα’ εντασσόμενα στο βασικό Αριστοτελικό δίπολο δυνητικότητα – πραγματικότητα υπάρχουν μόνο δυνητικά. Υπάρχουν μόνο όταν πραγματωθούν, όταν συνειδητοποιηθούν από το έλλογο όν.

Παρόμοια είναι η θέση του Αριστοτέλη για την ύπαρξη των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος. Τα σημεία ενός τμήματος αποκτούν υπόσταση μόνο στα πλαίσια μιας πράξης τομής του τμήματος. Στην Αριστοτελική λοιπόν αντίληψη η έννοιας του τμήματος είναι πρωταρχικότερη αυτής του σημείου. Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα δεν εκλαμβάνεται ως ένα σύνολο σημείων τα οποία υπόκεινται σε συγκεκριμένες ιδιότητες και σχέσεις αλλά αντίθετα το σημείο καθορίζεται από τμήματα που ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις κιβωτισμού.

[1] Δ. Α. Αναπολιτάνος (1985).

Έτσι η ερμηνεία των ελεατικών παραδόξων από τον Αριστοτέλη είναι ότι θεωρούμε λανθασμένα ότι όταν διανύει κάποιος μια διαδρομή ΑΒ συνειδητοποιεί και τα άπειρα εκάστοτε ‘τώρα’ που αντιστοιχούν στις θέσεις $\frac{1}{2}$ΑΒ, $\frac{3}{4}$ΑΒ, $\frac{5}{6}$ ΑΒ και ούτω καθεξής.

Το συνεχές λοιπόν για τον Αριστοτέλη ορίζεται από την ατέρμονη δυνατότητα διαιρετότητάς του. Δηλαδή από τη δυνατότητα μεταξύ δύο τομών να πραγματοποιηθεί μια τρίτη. Στο σημείο μπορεί να γίνει σύγχυση και να θεωρήσουμε ότι ο Αριστοτέλης ταυτίζει την ιδιότητα της πυκνότητας ενός γραμμικά διατεταγμένου συνόλου με την έννοια της συνέχειας. Η διαφορά έγκειται στο ότι ο Αριστοτέλης συσχετίζει την έννοια της συνέχειας με την έννοια της *δυνατότητας* πραγματοποίησης μιας τομής μεταξύ δύο οποιονδήποτε πράξεων τομών και όχι με την ύπαρξη *πραγματικού σημείου* μεταξύ δυο οποιονδήποτε σημείων στο οποίο παραπέμπει η έννοια της πυκνότητας.

1.5 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΕΥΔΟΞΟΥ ΣΤΑ ‘ΣΤΟΙΧΕΙΑ’ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Η θεωρία αναλογιών

Η θεωρία αναλογιών του Εύδοξου την συναντάμε στο βιβλίο V των ‘Στοιχείων’ του Ευκλείδη και έρχεται να απαντήσει στην κρίση που είχε δημιουργήσει η ασυμμετρία. Με τον Εύδοξο εισάγεται η έννοια του μεγέθους. Τα μεγέθη ήταν ποσότητες όπως τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, ο χρόνος τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο. Ο Εύδοξος εισάγει μια θεωρία λόγων κατά βάση γεωμετρική χωρίς να αναφέρεται σε σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη. Οι έξι πρώτοι ορισμοί του βιβλίου V έχουν ως εξής:

α΄ [1]. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄ [2]. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄ [3]. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

δ΄ [4].Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄ [5]. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ς΄ [6]. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.[1]

Στον ορισμό [3] όπου ορίζεται ο λόγος μεγεθών το μόνο που αναφέρεται είναι ότι δύο μεγέθη για να συνιστούν λόγο πρέπει να είναι ομοειδή. Δηλαδή για παράδειγμα δεν υφίσταται λόγος όγκου προς εμβαδό. Υπάρχουν λόγοι εμβαδών ή λόγοι όγκων ανεξάρτητα από τη μορφή των σχημάτων στα οποία αναφέρονται. Δεν αναφέρεται όμως ότι ο λόγος δυο μεγεθών είναι αριθμός ούτε και υπάρχει διάσταση στο λόγο μεγεθών. Μια προσπάθεια αιτιολόγησης της επιλογής αυτής του Εύδοξου σχετίζεται με το ότι κατά βάση η θεωρία του είναι γεωμετρική και στην εποχή του δεν υπάρχει πλήρη αντιστοίχηση γεωμετρικών μεγεθών και αριθμών. Άλλωστε πιθανός στόχος της θεωρίας ήταν η αποφυγή των ασύμμετρων μεγεθών τα οποία θα εκφράζονταν με λόγους άρρητων αριθμών οι οποίοι δεν γίνονται αποδεκτοί στα πλαίσια κάποιας θεωρίας.

Ο ορισμός [4] μας λέει ότι δυο ομοειδή μεγέθη x, y έχουν λόγο όταν υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε οποιοδήποτε από τα x, y πολλαπλασιαστεί με το n να υπερβαίνει το άλλο. Αυτός ο ορισμός αργότερα ονομάστηκε αξίωμα των Αρχιμήδη - Εύδοξου ή αξίωμα της συνέχειας. Ο λόγος για τον οποίο υιοθετείται το συγκεκριμένο αξίωμα είναι πιθανότατα για να αποφευχθούν τα απειροστά. Ένα χαρακτηριστικό μοντέλο απειροστού μεγέθους που ήταν γνωστό στην αρχαιότητα ήταν η κερατοειδής γωνία. Η γωνία δηλαδή που σχηματίζεται μεταξύ ενός κύκλου και της εφαπτομένης του σ' ένα σημείο του. Οποιοδήποτε πολλαπλάσιο της γωνίας αυτής είναι μικρότερο από οποιαδήποτε γωνία σχηματίζεται μεταξύ της εφαπτομένης του κύκλου και οποιασδήποτε χορδής που διέρχεται από το σημείο επαφής.

Ο ορισμός [5] αν και φαίνεται σχετικά μπερδεμένος θα μας διευκολύνει στην κατανόησή του μια μεταφορά του σε σύγχρονη γλώσσα. Αν έχουμε δύο ζεύγη όμοιων μεγεθών x, y και z, w (όμοια πρέπει να είναι το x με το y και το z με το w όχι απαραίτητα και τα τέσσερα μεταξύ τους) λέμε ότι αυτά βρίσκονται σε αναλογία

[1] http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/

δηλαδή ότι $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ όταν για οποιουσδήποτε δυο φυσικούς αριθμούς μ, ν ισχύει μια ακριβώς από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\mu \cdot x > \nu \cdot y$ και $\mu \cdot z > \nu \cdot w$.

β) $\mu \cdot x = \nu \cdot y$ και $\mu \cdot z = \nu \cdot w$.

γ) $\mu \cdot x < \nu \cdot y$ και $\mu \cdot z < \nu \cdot w$.

Οι προηγούμενες σχέσεις είναι ισοδύναμες με τις παρακάτω ισότητες συνόλων:[1]

i) $\left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} < \frac{x}{y} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} < \frac{z}{w} \right\}$.

ii) $\left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} = \frac{x}{y} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} = \frac{z}{w} \right\}$.

iii) $\left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} > \frac{x}{y} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} > \frac{z}{w} \right\}$.

Οι προηγούμενες ισότητες περιγράφουν τις τομές Dedekind με τις οποίες περί το 1870 έγινε μια από τις πλήρεις θεμελιώσεις των πραγματικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να οριοθετήσουμε τις ιδιότητες α, β, γ από τις ιδιότητες i, ii, iii. Οι ιδιότητες α, β, γ αναφέρονται σε μεγέθη ενώ οι ιδιότητες i, ii, iii αναφέρονται σε αριθμούς. Η θεωρία αναλογιών του Εύδοξου δεν ορίζει το λόγο μεγεθών ως αριθμό. Ίσως αυτό να φαίνεται ότι προσδίδει γενικότητα στον ορισμό αλλά ποτέ στην αρχαιότητα δεν χρησιμοποιήθηκε ο λόγος μεγεθών ως αριθμός. Η σκέψη του Εύδοξου μάλλον βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση. Προσπαθεί να απόφύγει τα ασύμμετρα μεγέθη και τους άρρητους αριθμούς. Η θεωρία του είναι κατά βάση γεωμετρική. Παρόλο που το ρόλο του μεγέθους θα μπορούσε να τον έχει και ο χρόνος ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκε στην αρχαιότητα η θεωρία αναλογιών του Εύδοξου για την περιγραφή της κίνησης. Οπότε το να αναγνωρίζουμε στην θεωρία αναλογιών του Εύδοξου τις βασικές ιδέες θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών του Dedekind του 19[ου] αιώνα, μάλλον δεν στοιχειοθετείται με επάρκεια. Χωρίς αυτό να μειώνει στο παραμικρό την αξία της θεωρίας του Εύδοξου θα πρέπει κάθε θεωρία έτσι κι αυτή να ερμηνεύεται και να κρίνεται στο ιστορικό και εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκε. Να αναγνωρίζονται οι επιπτώσεις της, που για την συγκεκριμένη ήταν τεράστιες αλλά και οι περιορισμοί της.

[1] Γιαννακούλιας, Ε. (2007), σ..63.

Οι επιπτώσεις της θεωρίας αναλογιών του Εύδοξου ήταν εξαιρετικά σημαντικές. Το βιβλίο V των ‘Στοιχείων’ θεμελιώνει της ιδιότητες των αναλογιών και το βιβλίο VI εφαρμόζει την θεωρία των αναλογιών στην ομοιότητα των ευθύγραμμων σχημάτων. Μια χαρακτηριστική πρόταση που αποδεικνύεται με βάση τη θεωρία είναι η πρόταση VI1: «Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.»[1]

Δηλαδή τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν ίσα ύψη έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των βάσεών τους.

Στην παραπάνω πρόταση διαφαίνεται ότι η προσπάθεια συσχέτισης ενός λόγου μεγεθών δυο διαστάσεων (τρίγωνα/παραλληλόγραμμα) με έναν λόγο μεγεθών μιας διάστασης (βάσεις - ευθύγραμμα τμήματα). Διαφαίνεται επίσης ότι δεν υπάρχει αριθμητική συσχέτιση με τους συγκεκριμένους λόγους μεγεθών φανερώνοντας την γεωμετρική βάση της θεωρίας. Επίσης φαίνεται η μη καταγραφή τύπων για τα εμβαδά των σχημάτων, όπου απαιτείται ο ορισμός μιας μονάδας μέτρησης, αλλά προσδιορίζονται οι σχέσεις μεταξύ των επιφανειών των σχημάτων μέσω της θεωρίας λόγων.

Η θεωρία λόγων χρησιμοποιήθηκε επίσης ως βοηθητικό εργαλείο μαζί με την μέθοδο της εξάντλησης στις συσχετίσεις όγκων στερεών στο βιβλίο XII.

Η μέθοδος της εξάντλησης

Η πρόταση που αργότερα ονομάστηκε μέθοδος της εξάντλησης είναι η πρόταση X1 των ‘Στοιχείων’:

«Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.»[2]

Δηλαδή αν έχουμε δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό γίνεται για πάντα, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικρότερου από τα δύο δοσμένα αρχικά μεγέθη.

Η πρόταση αυτή με σύγχρονους όρους θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής:

Αν βρούμε μια αύξουσα ακολουθία (α_ν) και μια φθίνουσα ακολουθία (β_ν) ώστε να

[1] http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/
[2] Ο.π.

ισχύουν $\alpha_\nu \leq A \leq \beta_\nu$, $\alpha_\nu \leq B \leq \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ και $\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}(\beta_\nu - \alpha_\nu), \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ και με βάση την εξής πρόταση (η οποία υπάρχει στο βιβλίο Χ και είναι γνωστή στον Εύδοξο): αν για δυο ακολουθίες θετικών όρων (α_ν), (β_ν) ισχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \beta_\nu$ με $\beta_\nu \geq \frac{\alpha_\nu}{2}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, (δηλαδή $\alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}\alpha_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$), τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\beta_\rho < \varepsilon$, οδηγούμαστε στο ότι $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\beta_\rho - \alpha_\rho < \varepsilon$. Όμως $\alpha_\nu \leq A \leq \beta_\nu$, $\alpha_\nu \leq B \leq \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ άρα $\alpha_\nu - \beta_\nu \leq A - B \leq \beta_\nu - \alpha_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ και συνεπώς $|A - B| \leq \beta_\nu - \alpha_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Αν λοιπόν $A \neq B$ τότε για $\varepsilon = \frac{|A - B|}{2} > 0$ θα $\exists \rho \in \mathbb{N}^*$ ώστε $|A - B| \leq \beta_\rho - \alpha_\rho < \frac{|A - B|}{2}$ το οποίο είναι άτοπο. Οπότε $A = B$.[1]

Να σημειώσουμε ότι εφαρμόζοντας τη μέθοδο της εξάντλησης δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε την ύπαρξη άπειρα μικρών ποσοτήτων αλλά να φθάσουμε σ' ένα μέγεθος οσοδήποτε μικρό θέλουμε, με συνεχιζόμενη διαίρεση κάποιου δοθέντος μεγέθους. Η διαδικασία δηλαδή εφαρμογής της μεθόδου σύμφωνα με τους αρχαίους δεν περιλαμβάνει άπειρα βήματα αλλά τόσα ώστε να μείνει οσοδήποτε μικρή ποσότητα επιθυμούσαν. Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι για να αποδειχθεί ένα αποτέλεσμα έπρεπε να είναι από τα πριν γνωστό. Έτσι για παράδειγμα ο Αρχιμήδης ο οποίος χρησιμοποίησε κατά κόρον τη μέθοδο εύρισκε με διάφορες μεθόδους τα αποτελέσματα και στη συνέχεια τα αποδείκνυε με τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης.

Σημαντικά αποτελέσματα, όπως είπαμε αποδείχθηκαν με τη χρήση της μεθόδου στο βιβλίο XII των 'Στοιχείων'. Στην πρόταση 2 αποδεικνύεται ότι δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Στην πρόταση 7 έχουμε ότι κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ίσες (ισοδύναμες) τριγωνικές πυραμίδες. Στην πρόταση 12 αποδεικνύεται ότι δυο όμοιοι κώνοι ή κύλινδροι είναι ανάλογοι των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους και στην πρόταση 18 αποδεικνύεται ότι δυο σφαίρες είναι ανάλογες των κύβων των διαμέτρων τους.

Να σημειώσουμε ότι στη μέθοδο της εξάντλησης κάποιοι διαβλέπουν τις απαρχές της έννοιας του ορίου. Ο ιστορικός των μαθηματικών C. Boyer (1949) κάνει κριτική

[1] Συλλογικό, (2001).

στην παραπάνω άποψη υπογραμμίζοντας α) ότι η μέθοδο της εξάντλησης έχει κατά βάση γεωμετρικό χαρακτήρα και εφαρμογές σε αντίθεση με την έννοια του ορίου που θεμελιώθηκε τον 19^{ο} αιώνα στηρίζεται στη θεμελίωση της συνέχειας των πραγματικών αριθμών, β) ότι η μέθοδος του Εύδοξου δεν πραγματοποιείται σε άπειρα βήματα με συνέπεια να μην ‘εξαντλούνται’ αληθινά τα μεγέθη, σε αντίθεση με την σύγχρονη αντίληψη του ορίου, γ) ότι η μέθοδος της εξάντλησης αντιστοιχεί σε μια διαισθητική έννοια περιγράφοντας όρους με νοητικές εικόνες από τον κόσμο της αισθητηριακής αντίληψης σε αντίθεση με τους σαφείς όρους, σύμβολα και διατυπώσεις, ανεξάρτητα από την νοητική οπτικοποίηση, με τα οποία περιγράφεται η σύγχρονη έννοια του ορίου, δ) ότι δεν ισοδυναμεί με έναν συνοπτικό καλά εδραιωμένο αλγόριθμο του λογισμού αφού είναι σχετικά δύσχρηστός και χωρίς γενική εφαρμογή.

Κάποιες από τις παρατηρήσεις του Boyer πράγματι χαρακτηρίζουν την μέθοδο της εξάντλησης αλλά η οπτική της κριτικής γίνεται με βάση τα κριτήρια του 20^{ου} αιώνα. Όσο αφελές ή μυστικιστικό είναι να διαβλέπουμε τις πηγές και τα χαρακτηριστικά σύγχρονων εννοιών σε κατάλληλα τροποποιημένες έννοιες αρχαίων πολιτισμών άλλο τόσο ανώφελο και αντιϊστορικό είναι να κριτικάρουμε τα αποτελέσματα των πολιτισμών αυτών εκτός του εννοιολογικού, ιστορικού–πολιτιστικού πλαισίου στο οποίο αναπτύχθηκαν και κυρίως με μια σύγχρονη οπτική γωνία. Σ’ αυτού του τύπου την κριτική πολλές φορές υποβόσκει η άποψη μιας από τα πριν προδιαγεγραμμένης και μονοσήμαντης κατεύθυνσης της ανθρώπινης γνώσης. Το σημείο κατάληξης αυτής της πορείας είναι είτε το παρόν εννοιολογικό πλαίσιο της γνώσης είτε μια από τα πριν και ανεξάρτητη σχηματοποιημένη αλήθεια η οποία πρέπει να ανακαλυφθεί.

Σε αντίστοιχη κατεύθυνση αυτή των επιστημολογικών εμποδίων τάσσεται και ο Κ. Α. Δρόσος (1987) ο οποίος σε μια φιλοσοφική διερεύνηση των αιτιών για την μη ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού από τους Έλληνες αναφέρει:

«(i) Η μεγάλη για την εποχή εκείνη, αυστηρότητα στα μαθηματικά και η καθαρή θεωρητική και φιλοσοφική σκέψη τους έκανε σχεδόν αδύνατη την θεωρητικοφιλοσοφική και τεχνική υπέρβαση των εμποδίων που έθεταν τα απειροστά και η αυστηρή θεμελίωση των αριθμών.

(ii) Η σκέψη και ιδιαίτερα τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων ήταν στατικά και αντι-Ηρακλειτικά, γι’ αυτό εξάλλου υπάρχει πλήρης απουσία της έννοιας της συνάρτησης.

Χρειάστηκαν να περάσουν αιώνες, ώστε ο κόσμος να αποστασιοποιηθεί από την Ελληνική αυστηρότητα και στατικότητα και να αρχίσει να μεταχειρίζεται τα απειροστά, με μεγαλύτερη άνεση και χωρίς αυστηρότητα στους υπολογισμούς. Φθάνουμε έτσι σε μια σειρά διανοητών μαθηματικών όπως οι: Nicholas of Cuse, Kepler, Cavalieri, Fermat, Descartes, Wallis, Barrow και Leibniz στους οποίους οφείλεται η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Αυτό που συνήθως είναι γνωστό ως 'μεσαιωνικό αμάλγαμα' αποτελείται κύρια:

(i) από τα προβλήματα με τα οποία ασχολείτο ο Αρχιμήδης,

(ii) από την ανάπτυξη σοβαρών υπολογιστικών τεχνικών και ικανοτήτων και,

(iii) από την ελεύθερη και διαισθητική χρήση του απείρου και των απειροστών.

Είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς ότι το 'αμάλγαμα' αυτό ήταν υπεύθυνο για τις τόσες ανακαλύψεις, στον ύστερο μεσαίωνα, ενώ η Ελληνική αυστηρότητα κατάληξε, συνδυαζόμενη και με άλλες αιτίες, να είναι ένα σοβαρό εμπόδιο για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών.

Το συμπέρασμα που βγαίνει από τα παραπάνω είναι: η μαθηματική αυστηρότητα, όταν δεν συνδυάζεται και εναρμονίζεται με μια ισχυρή και αυθεντική διαίσθηση, ενόραση και φαντασία, καταντάει φραγμός για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών».

1.6 ΟΙ ΑΠΟΨΕΙΣ ΤΟΥ LEIBNIZ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ

Τα απειροστά στο έργο του Leibniz

Κεντρικό ρόλο στο μέρος του έργου του Leibniz που ενδιαφέρει τα μαθηματικά έχουν τα απειροστά, για τα οποία ο Leibniz έχει μια διαισθητική περισσότερο αντίληψη. Τα παρακάτω αποσπάσματα είναι χαρακτηριστικά σε μια προσπάθεια κατάνόησης της σκέψης του σε σχέση με τα απειροστά.

Στην προσπάθεια του ο Leibniz να αντικρούσει έναν από τους νόμους κίνησης του Descartes αναφέρει:

«Η ανισότητα των δύο σωμάτων μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμούμε και η διαφορά ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις… μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη διαφορά.»

Και σε άλλο σημείο για την ισότητα αναφέρει:

«Μπορεί να θεωρηθεί σαν άπειρα μικρή ανισότητα, και η ανισότητα μπορεί να προσεγγίσει την ισότητα όσο πιο κοντά επιθυμούμε.»

Ο Leibniz μπορεί να έχει μια κατά βάση διαισθητική αντίληψη για τα απειροστά όμως πολύ αργότερα (1951) ο A. Robinson θεμελιώνει πλήρως την έννοια των απειροστών.

Ο Leibniz γράφει σ' ένα γράμμα του στον Varignon:

«Νομίζω ότι έχω σοβαρούς λόγους να πιστεύω ότι όλες οι διαφορετικές κλάσεις όντων των οποίων η ολότητα αποτελεί το σύμπαν, υπάρχουν στις ιδέες του Θεού, ο οποίος γνωρίζει να διακρίνει τις ουσιώδεις διαβαθμίσεις τους…οι άνθρωποι επομένως σχετίζονται με τα ζώα, αυτά με τα φυτά με τα απολιθώματα τα οποία, με τη σειρά τους είναι συνδεδεμένα με τα σώματα εκείνα που οι αισθήσεις και η φαντασία μας αναπαριστάνουν σε μας σαν νεκρά και άμορφα. Τώρα η αρχή της συνέχειας απαιτεί, όταν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά ενός όντος προσεγγίζουν αυτά ενός άλλου, όλες οι ιδιότητες του πρώτου να προσεγγίζουν βαθμιαία αυτές του δεύτερου. …Τόσο μεγάλη είναι η δύναμη της αρχής της συνέχειας στη φιλοσοφία μου, ώστε δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη αν μάθαινα ότι ανακαλύφθηκαν όντα τα οποία, σε σχέση με διάφορες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα διατροφή και αναπαραγωγή, θα μπορούσαν να θεωρηθούν είτε σαν φυτά, είτε σαν ζώα. …Λέω ότι δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη, η αλήθεια είναι ότι είμαι πεπεισμένος ότι οφείλουν να υπάρχουν τέτοια όντα, τα οποία θα ανακαλύψει μια μέρα η Φυσική Ιστορία όταν θα έχει μελετήσει περισσότερους από άπειρους ζωντανούς οργανισμούς των οποίων το μικρό μέγεθος δεν επιτρέπει τη συνηθισμένη παρατήρηση και τα οποία είναι θαμμένα στα έγκατα της γης και στην άβυσσο των υδάτων.»[1]

Από το παραπάνω απόσπασμα, σύμφωνα με τον Δ. Α. Αναπολιτάνο υπάρχει σε πρωτόλεια μορφή το ένα από τα δύο βασικά χαρακτηριστικά της έννοιας της συνέχειας στα μαθηματικά. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι η έννοια της *πληρότητας* το οποίο το αναγνωρίζουμε στον Leibniz όταν θεωρεί πως αν δύο ακολουθίες όντων ή φυτών προσεγγίζει κατάλληλα η μια την άλλη από αντίθετες κατευθύνσεις τότε θα πρέπει να υπάρχει το κοινό τους όριο. Υπενθυμίζουμε ότι στα μαθηματικά ένα σύνολο χαρακτηρίζεται πλήρες όταν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του συνόλου έχει όριο εντός του συνόλου. Το δεύτερο χαρακτηριστικό αυτό της πυκνότητας, εκφράζεται από την πρόταση «μεταξύ δύο οποιονδήποτε όντων υπάρχει κάποιο ενδιάμεσο».

Στα σύγχρονα μαθηματικά η έννοια της συνέχειας της ευθείας των πραγματικών αριθμών θεμελιώνεται είτε με την ύπαρξη ορίων βασικών ακολου-

[1] Δ. Α. Αναπολιτάνος (1985), σ. 117

θιών[1], είτε με την ύπαρξη των τομών Dedekind. Διαισθητικές προσεγγίσεις και των δύο ιδιοτήτων του συνεχούς διαφαίνονται στη σκέψη του Leibniz όπως προκύπτει από τα παραπάνω αποσπάσματα.

Η κεντρική ιδέα στο φιλοσοφικό έργο του Leibniz είναι η έννοια της «μονάδας». Σε διάφορα σημεία του περιγράφεται ως «πλήρης απλή ουσία», ως «τέλια ουσία», ως «αμερής ουσία». Για τον Leibniz ο κόσμος έχει διακριτή υφή αφού αποτελείτε από τελικά αμερείς οντότητες, όμως το χωροχρονικό σύμπαν είναι άπειρα διαιρετό. Προκύπτουν όμως τα εξής ερωτήματα: Αν ο κόσμος αποτελείται από αμερείς μονάδες πού υπάρχουν αυτές ώστε να διατηρείται η χωροχρονικά άπειρη διαιρετότητα; Αν οι ‘μονάδες’ καταλαμβάνουν κάποια έκταση τότε είναι διαιρετές και συνεπώς όχι αμερείς. Αν δεν καταλαμβάνουν κάποια έκταση, τότε πως γίνεται σύνολα ‘μονάδων’ να εμφανίζονται εκτεταμένα;

Ο Leibniz προσπαθώντας να ξεπεράσει τα παραπάνω προβλήματα θεώρησε ότι οι ‘μονάδες’ του δεν ανήκουν στο χωροχρονικό σύμπαν και πιο συγκεκριμένα οι ‘μονάδες’ δεν συγκροτούν τον κόσμο τοποθετημένες σ’ ένα προϋπάρχον χωροχρονικό πλαίσιο. Το μαθηματικό συνεχές στη φιλοσοφική θεώρηση του Leibniz είναι ένα αναπαραστατικό σχήμα, μια λογική νοητή οντότητα ανεξάρτητη από τα επιμέρους φαινόμενα. Σαν τέτοιο προϋπάρχει των σημείων του τα οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά ανοικτές δυνατότητες τομής. Το όλο θεωρείται πρότερο του μέρους και η άπειρη διαιρετότητα είναι έκφραση δυνατότητας, που δεν σημαίνει την προΰπαρξη των σημείων του. Στο σημείο αυτό είναι φανερή η αριστοτελική επίδραση της δυνητικότητας της έννοιας του μαθηματικού συνεχούς. Έτσι τα σημεία προκύπτουν μόνο ως πράξεις τομής και το μαθηματικό συνεχές δεν είναι ένα σύνολο τέτοιων οντοτήτων. Έτσι ενώ τα εκτεταμένα αντικείμενα είναι απείρως διαιρετά, το χωροχρονικό συνεχές, σαν αναπαραστατικό σχήμα ανεξάρτητο από τα αντικείμενα που το γεμίζουν και μεταβάλλονται μέσα του είναι μόνο δυνητικά απείρως διαιρετό με χαρακτηριστικά όπως του μαθηματικού συνεχούς.

Η θέση του Leibniz για το άπειρο

Ο Leibniz εμφανίζεται να αποδέχεται και το δυνητικό άπειρο, με την έννοια της ατέρμονης άπειρης διαιρετότητας εκτεταμένων αντικειμένων και το πραγματικό. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα:

[1] Μια ακολουθία ρητών αριθμών α_0, α_1, α_2, …α_ν,… λέγεται βασική αν για κάθε ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός k, ώστε για κάθε $m, n > k$ να ισχύει $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon$.

«Είμαι τόσο υπέρ του πραγματικού απείρου ώστε, αντί να δεχθώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης, είναι δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων.»

Σε άλλα σημεία του έργου του ισχυρίζεται ότι έχει δείξει τον αντιφατικό χαρακτήρα ενός άπειρου αριθμού τον οποίο εξομοιώνει με το με το άθροισμα όλων των υπαρχόντων πεπερασμένων αριθμών. Επίσης εμφανίζεται σκεπτικός για την ύπαρξη ευθειών με άπειρο μήκος αλλά ισχυρίζεται ότι ο χρόνος μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρο. Σε κάποιο σημείο του έργο του λέει: «Τα άπειρα αποτελούνται από πεπερασμένα με τον ίδιο τρόπο που τα πεπερασμένα αποτελούνται από απειροστά.»

Επίσης σ' ένα γράμμα του αναφέρει: «Υπάρχει το συγκατηγορηματικό άπειρο … συγκεκριμένα η δυνατότητα για παραπέρα συνέχιση διαιρετότητας, πολλαπλασιασιμότητας, αφαιρεσιμότητας και προσθεσιμότητας. Υπάρχει επίσης το υπερκατηγορηματικό άπειρο … αυτό το άπειρο είναι ο Θεός ο ίδιος. Δεν υπάρχει όμως το κατηγορηματικό άπειρο, δηλαδή κάποιο που πραγματικά να διαθέτει άπειρα μέρη.

Για την φαινομενική αντίφαση της τελευταίας πρότασης του Leibniz «δεν υπάρχει κάποιο που πραγματικά διαθέτει άπειρα μέρη» με την θεώρηση του που λέει ότι «και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από απειρία όντων» ο Δ. Α. Αναπολιτάνος (1985) προτείνει την εξής ερμηνεία. Ο Leibniz χρησιμοποιεί τον όρο «κατηγορηματικό άπειρο» όταν αναφέρεται σε νοητά και όχι φυσικά μορφώματα. Έτσι αρνείται την πραγματική απειρία του μαθηματικού συνεχούς το οποίο θεωρεί νοητικό κατασκεύασμα και σαν τέτοιο δεν μπορεί να είναι πρότερο των σημείων του – όντας μόνο δυνητικά διαιρετό και όχι πραγματικά διαιρεμένο – ενώ από την άλλη μεριά δέχεται την πραγματική απειρία χωροχρονικά εκτεταμένων φυσικών αντικειμένων. Τα κατασκευάσματα του νου δεν μπορούν να απότελούνται από άπειρα μέρη γιατί ο πεπερασμένος ανθρώπινος νους δεν έχει δυνατότητα πραγματικής αλλά μόνο δυνητικής αποδόμησής τους. Αντίθετα τα χωροχρονικά εκτεταμένα φυσικά αντικείμενα, μη εξαρτώμενα από τον ανθρώπινο νου μπορούν να αποτελούνται από άπειρες το πλήθος μη εκτατές μονάδες, γιατί έτσι απόφασισε ο Δημιουργός να πλάσει τον κόσμο.

1.7 ΑΛΛΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟ

Το άπειρο στη σκέψη του Berkeley

Ο Berkeley δεν υιοθετεί την έννοια του πραγματικού απείρου γιατί αποδοχή ύπαρξης ενός τέτοιου νοητού αντικειμένου θα σήμαινε αποδοχή μιας απειρίας ιδεών (μια για κάθε φυσικό αριθμό) συναρθρωμένων σε μια ολότητα στον πεπερασμένο ανθρώπινο νου. Επίσης αρνείται την άπειρη διαιρετότητα πεπερασμένα εκτατών αντικειμένων. Είναι χαρακτηριστικό το παρακάτω εδάφιο για να κατανοήσουμε την σκέψη του.

«Κάθε συγκεκριμένο, πεπερασμένο, εκτατό αντικείμενο που μπορεί να είναι το αντικείμενο της σκέψης μας είναι μια ιδέα που υπάρχει αποκλειστικά στο νου μας και επομένως κάθε μέρος της πρέπει να γίνεται αντιληπτό. Κατά συνέπεια, το ότι δεν μπορώ να αντιληφθώ άπειρα μέρη σε μια πεπερασμένη έκταση σημαίνει για μένα με βεβαιότητα ότι τα άπειρα αυτά μέρη δεν υπάρχουν, είναι προφανές ότι δεν μπορώ να διακρίνω άπειρα μέρη σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη γραμμή, ή επιφάνεια, ή σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο στερεό, που είτε αντιλαμβάνομαι με τις αισθήσεις μου είτε αναπαριστάνω μέσα μου: έτσι συμπεραίνω πως δεν υπάρχουν άπειρα μέρη. Τίποτε δεν μου είναι καθαρότερο από την αντίληψη πως οι πεπερασμένες εκτάσεις που επιθεωρώ δεν είναι τίποτε άλλο παρά δικές μου ιδέες, και δεν μου είναι λιγότερο καθαρό ότι δεν μπορώ να αναλύσω οποιαδήποτε από τις ιδέες μου σε άπειρα πολλές άλλες ιδέες, πράγμα που σημαίνει πως δεν είναι άπειρα διαιρετές» (στο Αναπολιτάνος 1985).

Έτσι ο Berkeley εμφανίζεται να προσδίδει στο χωρόχρονο ένα διακριτό χαρακτήρα. Ο χώρος και ο χρόνος θεωρούνται διακριτά και όχι συνεχιστικά δομημένοι. Ως εμπειριστής θεωρεί πως οι ελάχιστες (μη περαιτέρω διαιρετές) μονάδες μέτρησης του χώρου και του χρόνου συμπίπτουν με το χωρικά ή χρονικά αντιληπτικό ελάχιστο του ανθρώπινου νου.

Το άπειρο στο έργο του Kant

Για τον Kant η έννοια του πραγματικού απείρου δεν είναι κατασκευάσιμη στα πλαίσια του χωρόχρονου δεν πρέπει όμως να εξοβελιστεί από εννοιολογικό μας σύμπαν. Μπορεί δηλαδή να θεωρηθεί αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας και ως τέτοια λέγεται αναλύσιμη. Στο σημείο αυτό ο Kant έρχεται σε αντίθεση με την αριστοτελική σκέψη σύμφωνα με την οποία, επειδή άπειρα αντικείμενα δεν υπάρχουν στη φύση δεν μπορούν να αποτελούν αντικείμενα ενασχόλησης του νου.

Ο Kant όμως συμφωνεί με τον Αριστοτέλη στη διάκριση δυνητικού και πραγματικού απείρου. Έτσι ο Kant δεν δέχεται την ακολουθία ως τελειωμένο αντικείμενο γιατί χωροχρονικά είναι αδύνατη η ολοκλήρωσή της. Αντίθετα είναι δυνατή η ύπαρξη κατασκευαστικού αλγορίθμου της ακολουθίας.

Για τον Kant ο χωρόχρονος έχει συνεχή υφή, με την έννοια ότι είναι άπειρα διαιρετός. Η διαιρετότητα αυτή έχει δυνητικό χαρακτήρα. Επειδή για τον Kant κάθε πεπερασμένο γεωμετρικό σχήμα είναι κατασκευάσιμο (σε πεπερασμένου πλήθους βήματα) φαίνεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να θεωρηθεί ως άπειρο σύνολο πραγματικών σημείων γιατί τότε καθένα απ' αυτά θα έπρεπε να μπορούσε να κατάσκευαστεί και η όλη διαδικασία θα απαιτούσε άπειρο πλήθος βημάτων.

Ο Cauchy για το άπειρο και το απειροστό

Ο Γάλλος Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) στο 'Cours d' analyse' το 1821 δίνει έναν ορισμό για τη μεταβλητή: "Μια ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους, καλείται μεταβλητή". Τον ορισμό αυτόν τον χρησιμοποιεί για να δώσει έναν ορισμό για τη συνάρτηση (ο οποίος δεν ταυτίζεται με τον σύγχρονο) και ακολουθεί ο ορισμός του ορίου: "Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια σταθερή τιμή από την οποία διαφέρουν τόσο λίγο, οσοδήποτε θα επιθυμούσε κανείς, αυτή η σταθερή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων".

Αξίζει να σημειωθεί η συνέχεια του παραπάνω ορισμού όπως δίνεται από τον Cauchy για να γίνει κατανοητή η διαισθητική βάση του ορισμού για το όριο. Συνεχίζοντας λοιπόν ο Cauchy τον ορισμό του ορίου αναφέρει: "Έτσι, λόγου χάρη, ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο των διαφόρων κλασμάτων που μας δίνουν τιμές που τον προσεγγίζουν όλο και περισσότερο. Στη γεωμετρία η επιφάνεια ενός κύκλου είναι το όριο στο οποίο συγκλίνουν οι επιφάνειες των εγγεγραμμένων πολυγώνων καθώς ο αριθμός των πλευρών τους ολοένα αυξάνει".

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του Cauchy για το όριο έχει ως διαισθητική βάση τη γεωμετρική εποπτεία.

Επίσης ο Cauchy αναφέρει: "Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική τιμή της - δηλαδή η απόλυτη τιμή της - μειώνεται ασταμάτητα έτσι ώστε να έχει όριο το 0".

Όπως φαίνεται από τον προηγούμενο ορισμό και σημειώνει ο Edwards (1979) τα απειροστά του Cauchy δεν είναι πλέον οι άπειρα μικροί σταθεροί αριθμοί που είχαν προκαλέσει στο παρελθόν σύγχυση και αμφισβήτηση. Οι άπειρα μικρές ποσότητες κατά τον Cauchy νοούνται ως εξαρτημένες μεταβλητές ποσότητες a(h) που τείνουν στο μηδέν καθώς το h τείνει στο μηδέν. Ο Boyer (1949) αναφέρεται στην αριθμητική βάση του ορισμού του ορίου από τον Cauchy που αποτελεί τη βάση για το απειροστό επισημαίνοντας "Αυτή η έννοια ήταν δεμένη με τη γεωμετρική διαίσθηση των ιδιοτήτων του χώρου και είχε θεωρηθεί λίγο ή πολύ ως μια σταθερή ελάχιστη επέκταση. Η ανάπτυξη τον 18ο αιώνα της έννοιας της συνάρτησης οδήγησε τον Cauchy να κάνει το απειροστό απλά μια μεταβλητή".

Αντίστοιχα ο Cauchy ονομάζει άπειρο: "μια μεταβλητή ποσότητα τις οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο".

Ο Boyer (1949) αναφερόμενος στον ορισμό του απείρου από τον Cauchy επισημαίνει τη μεταβλητότητα θεωρώντας ότι παραδέχθηκε μόνο το δυνητικό άπειρο του Αριστοτέλη και αντιδιαστέλλει με τον Bolzano ο οποίος σκεπτόμενος με όρους συσσώρευσης είχε συμπεράνει την πιθανότητα πραγματικού απείρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας περιλαμβάνει τρία μέρη. Στο πρώτο παρουσιάζουμε γνωστικές θεωρίες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε ως εργαλεία κατανόησης των ρητών αριθμών με διπλή αναπαράσταση. Στο δεύτερο εξετάζουμε το ρόλο των ορισμών στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και στο τρίτο κάνουμε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια που εξετάζουμε.

Οι γνωστικές θεωρίες που αναφέρουμε θα μπορούσαν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες. Οι πρώτες οι οποίες είναι αρκετά γενικές και οι δεύτερες οι οποίες αφορούν περισσότερο την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, τις επιλέξαμε γιατί θεωρούμε ότι θα μας βοηθήσουν περισσότερο στη κατανόηση του θέματος που εξετάζουμε.

Στις γενικές θεωρίες συμπεριλάβαμε την σημειωτική προσέγγιση η οποία δεν προέρχεται από τα μαθηματικά ούτε χρησιμοποιείται μόνο σ' αυτά. Όμως ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει στοιχεία της που μπορούν να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε το ρόλο των συμβόλων, τον τρόπο ερμηνείας τους και χειρισμού τους στα μαθηματικά, που αναγνωρισμένα θεωρείται πολύ σημαντικός σ' αυτά. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε γενικές θεωρίες που προέρχονται και αναφέρονται στο χώρο των μαθηματικών εννοιών. Παρουσιάζουμε τη θεωρία του Tall για τους τρεις κόσμους των μαθηματικών καθώς και τη θεωρία των Lakoff & Núñez για την ενσαρκωμένη γνώση (embodied cognitive). Οι Gray & Tall επηρεάζονται από την θεωρία των Lakoff & Núñez και αναπτύσσουν μια θεωρία για τα μαθηματικά αντικείμενα η οποία διαφοροποιείται σε βασικά σημεία απ' αυτήν της ενσαρκωμένης γνώσης.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις θεωρίες για την νοητική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών που σχετίζονται για τον τρόπο μετατροπής μιας μαθηματικής διαδικασίας σ' ένα μαθηματικό αντικείμενο. Οι θεωρίες αυτές είναι η πρώτη της Sfard για την μετατροπή μιας μαθηματικής διαδικασίας σε αντικείμενο, η δεύτερη του

Dubinsky που είναι γνωστή με το ακρωνύμιο A.P.O.S (Action, Process, Object, Schema), (Δράση, Διεργασία, Αντικείμενο, Σχήμα) και η τρίτη του Tall που είναι γνωστή με τον όρο ‘Procept’ ο οποίος συγκροτείται από τους όρους **Pro**cess (διεργασία) και Con**cept** (έννοια).

Για την καλύτερη κατανόηση των θεωριών αυτών αλλά και για να εξετάσουμε την δυνατότητα ερμηνείας μαθηματικών φαινομένων έχουμε χρησιμοποιήσει παραδείγματα συγκεκριμένων εννοιών και όπου ήταν δυνατό της έννοιας που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία.

2.2 ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

2.2.1 Σημειωτική προσέγγιση

Σημαίνον και Σημαινόμενο (F. Saussure)

Από τον Ferdinand de Saussure (1857-1913) στο ‘Μαθήματα γενικής γλωσσολογίας’ (γράφτηκαν τα έτη 1906-1911) εισάγεται ο όρος *σημείο.* Στη σημειωτική, ‘*σημεία*’ είναι μονάδες σημασίας που παίρνουν τη μορφή λέξεων, εικόνων, ήχων, ενεργειών, ή αντικειμένων. Αυτά δεν έχουν εγγενή σημασία από μόνα τους και γίνονται *σημεία* μόνο όταν τους αποδώσουμε νόημα (σημασία)[1]. Ο Graeme Turner σημειώνει ότι για να μπορεί κάτι να χαρακτηρισθεί ως *σημείο* «πρέπει να έχει φυσική μορφή, πρέπει να αναφέρεται σε κάτι άλλο από τον εαυτό του, και πρέπει να αναγνωρίζεται από τους άλλους χρήστες του σημειακού συστήματος» (Turner 1992, σ.17).

Σύμφωνα με τον Saussure ένα *σημείο* θεωρείται ότι αποτελείται ένα *σημαίνον (signifier)* που είναι η μορφή που παίρνει το σήμα και ένα *σημαινόμενο (signified)* που είναι η έννοια που αναπαριστά.

Συνήθως, το *σημαίνον* ερμηνεύεται κοινώς ως η υλική (ή φυσική) μορφή του σημείου ως κάτι που μπορούμε να δούμε, να ακούσουμε, να αγγίξουμε, να μυρίσουμε ή να γευτούμε. Το *σημαινόμενο*, από την άλλη πλευρά, είναι μια νοητική κατασκευή δεν είναι υλικό αντικείμενο.

Ένα γλωσσολογικό παράδειγμα είναι το εξής: Η έννοια ‘δένδρο’ θεωρείται το *σημαινόμενο* ενώ η λέξη ‘δένδρο’ είτε στη φωνητική της εκδοχή είτε στην γραπτή της μορφή θεωρείται το *σημαίνον*. Έτσι το ‘δένδρο’ ως *σημείο* θεωρείται ότι έχει μια μορφή που γίνεται με κάποιο τρόπο αντιληπτή από τις αισθήσεις (το *σημαίνον*) και

[1] http://www.mcm.aueb.gr/ment/semiotics/semiotic.html

μια μορφή που γίνεται αντιληπτή ως νοητικό αντικείμενο (*σημαινόμενο*).

Για τον Saussure τόσο το σημαίνον όσο και το σημαινόμενο αποτελούσαν μορφή και όχι ουσία (Innis 1986, σ. 25).

"Το (προφορικό) γλωσσικό σημείο ενώνει, όχι ένα αντικείμενο και ένα όνομα, αλλά μιαν έννοια και μιαν ηχητική εικόνα. Η τελευταία δεν είναι φυσικός ήχος, δηλαδή υλικό αντικείμενο, αλλά η ψυχολογική αποτύπωση του ήχου, η εντύπωση που κάνει στις αισθήσεις μας. Η ηχητική εικόνα είναι θέμα αισθήσεων, κι αν την ονομάζω υλική το κάνω με αυτό το νόημα μόνο, και για να την αντιπαραθέσω προς τον άλλο όρο της δυάδας, την έννοια, η οποία είναι γενικά περισσότερο αφηρημένη." (Saussure, στο Innis 1986, 36)

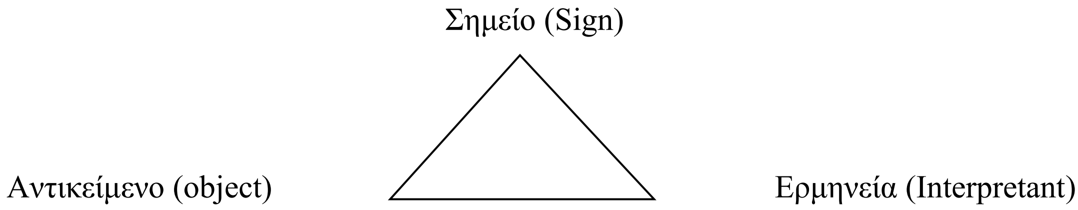
Ο Saussure τόνισε ότι το σημαίνον και το σημαινόμενο ήταν αδιαχώριστα όπως οι δύο όψεις του χαρτιού. Δεν υπάρχει σημείο ή σημασία χωρίς και ένα *σημαίνον* και ένα *σημαινόμενο*.

Σημειώστε ότι σε αντίθεση προς το *σημείο* του Peirce (που αναπτύσσεται παρακάτω), το *σημείο κατά* τον Saussure αποκλείει την αναφορά σε κάποιο υλικό αντικείμενο (αναφορά γίνεται μόνο σε κάποια νοητή έννοια και σε 'ηχητική εικόνα'). Η σημασία κατά τον Saussure είναι κατά βάση σχέση μεταξύ των σημείων ενός πλαισίου υποβαθμίζοντας το ρόλο της αναφοράς σε κάποια αντικείμενα.

Ο Saussure υποστήριζε ότι δεν υπάρχει κάποια εγγενής σχέση μεταξύ του *σημαίνοντος* και του *σημαινόμενου*. Δηλαδή θεωρούσε ότι η σχέση αυτή είναι κατά βάση αυθαίρετη και αποτέλεσμα συμβάσεων που εξαρτώνται από ιστορικούς και πολιτιστικούς παράγοντες.

Σημείο- Αντικείμενο – Ερμηνεία (Peirce)

Ο Charles Sanders Peirce (1839 -1914) σε αντίθεση με τη σημειωτική δυάδα *σημαίνον* και *σημαινόμενο* του Saussure εισάγει την σημειωτική τριάδα: *Σημείο* (σήμα ή αναπαράσταση) (*sign ή Representamen*), *αντικείμενο* (object) και *ερμηνεία (Interpretant)* η οποία συγκροτεί το παρακάτω σημειωτικό τρίγωνο.



Σημειωτικό τρίγωνο του Pierce.

Κατά τον Peirce ένα *σημείο* είναι αυτό που αντικαθιστά κάτι άλλο για κάποιον άνθρωπο μέσω κάποιας σχέσης ή ικανότητας. Απευθύνεται σε κάποιον, δημιουργεί στο νου αυτού ένα ισοδύναμο σημείο ή ίσως ένα πιο ανεπτυγμένο σημείο. Αυτό το σημείο που δημιουργεί το ονομάζει *ερμηνεία* του πρώτου σημείου. Το σημείο παίρνει τη θέση κάποιου, του *αντικειμένου*[1].

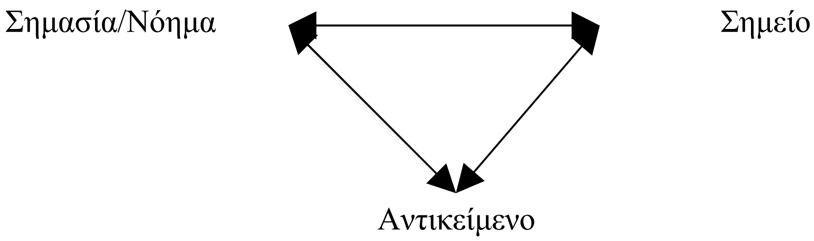
Έτσι ο Peirce α) αναδεικνύει την σύνδεση των αντικειμένων του υλικού κόσμου και των σημείων που τα αναπαριστούν, β) επισημαίνει την εξάρτηση ενός σημείου από τη γνώση που έχει ο ερμηνευτής για τον κόσμο και από την ικανότητά του να ερμηνεύει νέα σημεία

Μια ερμηνεία μπορεί να παίξει το ρόλο σημείου σε μια δευτερογενή σημασιοδότηση. Έτσι κατά τον North (1990, 43) θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε δυνητικά σε μια νέα διαδικασία ερμηνείας.

Ο Peirce[2] ενώ ισχυρίζεται ότι η φύση των μαθηματικών είναι εννοιολογική, θεωρώντας ότι τα αντικείμενα του μαθηματικού συλλογισμού είναι υποθετικά, ταυτόχρονα σημειώνει ότι τα αρχικά αντικείμενα του συλλογισμού είναι διαγραμματικά και οι διαδικασίες που εμπλέκονται σ' αυτόν, καθοδηγούνται από τους χειρισμούς αυτής της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Έτσι η φύση των μαθηματικών κατά τον Peirce είναι τόσο αντιληπτική όσο και εννοιολογική.

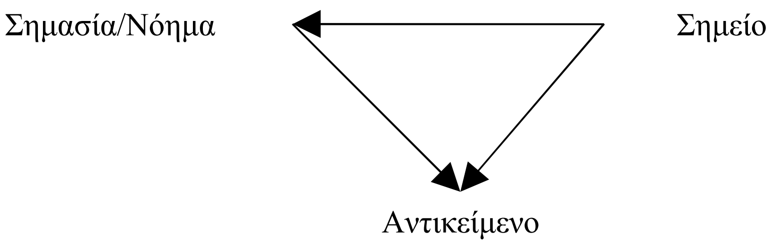
Ο Peirce θεωρεί ότι 'όλη η σκέψη πραγματοποιείται με σημεία' και η *διαδικασία σημείωσης (signing process)* συνίσταται στην τριαδική συσχέτιση μεταξύ των (συγκεκριμένων) *αντικειμένων* που εμπλέκονται στο πρόβλημα, των *σημείων* που αναπαριστούν αυτά τα αντικείμενα και της απόδοσης *νοήματος* ή *σημασίας* στα σημεία. Κατά την Langer, (1955) δεν υπάρχει κάποιος επιβεβλημένος γραμμικός τρόπος μετάβασης από ένα στοιχείο της *διαδικασίας σημείωσης* σε άλλο. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα στοιχεία συνυπάρχουν: τα σημεία χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη αναπαράσταση του προβλήματος για να 'αιχμαλωτίσουν' τις σημαντικές αμοιβαίες σχέσεις. Δηλαδή η διαδικασία σημείωσης κατά την Langer αναπαρίσταται από το παρακάτω τρίγωνο.

[1] Peirce (1955).
[2] Eisele, C. (1964)



Διαδικασία σημείωσης (Chaffe – Stengel & Noddings, 1982).

Οι Huttenlocher & Higgins (1978, στο Chaffe – Stengel & Noddings, 1982) υποστηρίζουν ότι παρά το ότι δεν υπάρχει κάποιος επιβεβλημένος γραμμικός τρόπος μετάβασης από ένα στοιχείο της *διαδικασίας σημείωσης* σε άλλο, ωστόσο υπάρχει μια σειρά η οποία έχει καθιερωθεί από συνήθεια και έχει μεγαλύτερες πιθανότητες από κάθε άλλη να ενεργοποιήσει τα στοιχεία της *διαδικασίας σημείωσης*. Έτσι υιοθετείται το παρακάτω σχήμα.



Διαδικασία σημείωσης (Chaffe – Stengel & Noddings, 1982).

Η τριχοτομία εικόνα (Icon) - δείκτη (Index) - σύμβολο (symbol)

Ο Peirce (1995) διακρίνει τρεις τύπους σημείων με βάση τη σχέση σημείου – αντικειμένου[1]. Το *ομοίωμα* ή *εικόνα (Icon)*, τον *δείκτη (Index)* και το *σύμβολο (symbol).*

Το *ομοίωμα (Icon)* μοιάζει φυσικά ή μιμείται αυτό που αναπαριστά. Οι αισθήσεις έχουν σημαντικό ρόλο στην αντίληψή του. Έχει κοινές ιδιότητες με το αντικείμενο που αναπαριστά. Μετέχει στο χαρακτήρα του σημείου. Μπορεί να είναι ένα σχέδιο, μια μακέτα, μια χειρονομία ή ένας ήχος[2].

Ο *δείκτης (Index)* συνδέεται άμεσα, υπαρξιακά κατά κάποιο τρόπο με το αντικείμενο που αναπαριστά. Ο σύνδεσμος μπορεί να παρατηρηθεί ή να συναχθεί[3]. Έτσι για παράδειγμα ο καπνός είναι *δείκτης* της φωτιάς. Η ένδειξη από ένα αλφάδι είναι δείκτης της κλίσης μιας επιφάνειας, το ίχνος της πατημασιάς είναι *δείκτης* του πέλματος. Η σχέση του δείκτη και του αντικειμένου καθορίζεται από την επιρροή που ασκεί το

[1] http://www.mcm.aueb.gr/ment/semiotics/semiotic.html
[2] Ο.π.
[3] Ο.π.

αντικείμενο στο πλαίσιο που διαμορφώνεται, δηλαδή η σημασία της σχέσης εξαρτάται από τα συν-κείμενα (context) Έτσι ο ήχος ενός κουδουνιού στο πλαίσιο του σχολείου είναι δείκτης για την προσέλευση ή την αποχώρηση από την τάξη.

Το *σύμβολο (symbol)* συνδέεται συμβατικά με το αντικείμενο. Για παράδειγμα το σύμβολο - αριθμός '5'. Ο όρος *σύμβολο (symbol)* στη σημειωτική είναι επιφορτισμένος με δυο βασικά χαρακτηριστικά. Το πρώτο είναι ότι σε αντίθεση με τους δείκτες και τα ομοιώματα (εικόνες), τα σύμβολα δεν μπορούν να γίνουν κατανοητά ως μεμονωμένα αντικείμενα αλλά μόνο στα πλαίσια ενός συνεκτικού συστήματος συμβόλων. Τα σύμβολα οργανώνουν τους δείκτες σ' ένα ανώτερο επίπεδο. Έτσι ένα σύστημα συμβόλων μπορεί να γίνει κατανοητό ως όλο.

Το δεύτερο είναι ότι τα σύμβολα δεν μπορούν να γίνουν κατανοητά μέσω της μνήμης και της εμπειρίας όπως οι δείκτες και οι εικόνες. Η μνήμη δρα ενεργά στην πληροφορία συμπυκνώνοντας τη σε πακέτα έτοιμα για χρήση. Σ' ένα σύμβολο περικλείονται διαφορετικού τύπου συσχετίσεις, από πολλαπλά πεδία αναφοράς, έχοντας αφαιρεθεί οι λεπτομέρειες[1].

Για τους Davis & McGowen (2001) η διάκριση του Peirce σε *Icon, Index, Symbol* δεν είναι διάκριση τριών τύπων σημείων αλλά διάκριση ερμηνειών.

Ο Deacon (1997) έχει ένα απλό αλλά περιγραφικό παράδειγμα της διαφοράς σχετικά με το πώς κάθε πρόσωπο βλέπει τις εικονικές, βάση δεικτών ή συμβόλων σχέσεις:

«…οι διαφορές μεταξύ *εικονικών (Iconic)*, *ενδεικτικών (Indexical)* και *συμβολικών (symbolic)* σχέσεων, πηγάζουν από τη θεώρηση των πραγμάτων είτε με βάση τη μορφή τους, είτε με τη συσχέτισή τους με άλλα πράγματα , ή την συμμετοχή τους σε συστήματα συμβατικών σχέσεων.»

«…η μετάβαση από συσχετισμένες προβλέψεις στις συμβολικές προβλέψεις είναι καταρχήν μια αλλαγή στη στρατηγική της μνήμης, μια καταγραφή. Είναι ένας τρόπος ελάφρυνσης περιττών λεπτομερειών από την τρέχουσα μνήμη, μέσω της αναγνώρισης ενός υψηλού επιπέδου κανονικότητας μέσα στο χάος των συσχετίσεων, ένα κόλπο που μπορεί να πετύχει το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς να απαιτείται να συγκρατήσει όλες τις λεπτομέρειες στη μνήμη.»

Οι Davis & McGowen (2001) με βάση την άποψή τους ότι η τριχοτομία Icon, Index, Symbol αφορά τις ερμηνείες των σημείων και όχι αυτά καθ' αυτά τα σημεία, θεωρούν αυτή η τριχοτομία συνιστά μια ιεραρχία.. Οι δείκτες (Index) οργανώνουν τις

[1] Mc Gowen, M. A & Davis, G. E (2001)

εικόνες (Icons) και τα σύμβολα (symbols) οργανώνουν τους δείκτες. Έτσι η ερμηνεία ενός σήματος πχ του '$\Re$' θεωρείται πρώτου επιπέδου (Icon) όταν γίνεται με βάση την εικόνα του ως κάποιο γράμμα του αγγλικού αλφαβήτου, αν θεωρηθεί ως σήμα ενός συνόλου αριθμών μπορούμε να πούμε ότι είναι μια δεύτερου επιπέδου ερμηνεία (index), ενώ αν ερμηνευθεί ως σήμα της ολότητας των πραγματικών αριθμών (αριθμοί, δομή σχέσεις, ιδιότητες) αποτελεί ένα symbol.

Ο Noth (1990) χρησιμοποιώντας ως κριτήριο ταξινόμησης τη σειρά συμβατικότητας, καταλήγει ότι με σειρά μειούμενης συμβατικότητας έχουμε την κατάταξη symbol, Icon, Index. Χαρακτηριστικά αναφέρει: «Η αποκωδικοποίηση της ομοιότητας μιας εικόνας ή μιας αναπαράστασης με το αντικείμενό της προϋποθέτει υψηλότερο βαθμό σύμβασης από την αποκωδικοποίηση σημείων που κατευθύνουν υποχρεωτικά την προσοχή στα αντικείμενά τους» όπως ορίζει ο Peirce τον *δείκτη* (Noth 1990, 246). Μέσα σε κάθε μορφή τα σημεία ποικίλλουν επίσης όσον αφορά το βαθμό της αυθαιρεσίας/σύμβασης.

Η γνωστική μονάδα

Η παραπάνω προσέγγιση με βάση τις λειτουργίες της μνήμης θυμίζει τον όρο *γνωστική μονάδα* (cognitive unit) που εισήγαγαν οι Barnard & Tall (1997) για να περιγράψουν 'ένα κομμάτι της γνωστικής δομής που μπορεί να συγκρατηθεί στο επίκεντρο της προσοχής ολόκληρο με μιας'. Εξελίσσοντας την έννοια της *γνωστικής μονάδας* (cognitive unit) οι Crowley & Tall (1999) επισημαίνουν: 'Αυτό που είναι σημαντικό για να μπορεί να συμπιεστεί μια συλλογή σχετικών ιδεών σε μια γνωστική μονάδα είναι ότι η όλη οντότητα μπορεί να συλληφθεί σαν μια μονάδα που είναι «αρκούντως μικρή» ώστε να θεωρείται συνειδητά, όλη σε μια στιγμή. Ο δρόμος που το ανθρώπινο μυαλό συνήθως το αντιμετωπίζει αυτό είναι να του δίνει ένα όνομα ή ένα σύμβολο. Το όνομα ή το σύμβολο (θεωρώντας ότι είναι «αρκούντως μικρό») μπορεί να κρατηθεί στην εστίαση της προσοχής και να το διαχειριστεί. Μια τέτοια αντίληψη έχει πλούσια εσωτερικότητα που μεταφέρει μέσα της πολλές δυναμικές συνδέσεις που της επιτρέπουν να είναι διαχειριζόμενη και να την επικαλούμαστε στην επίλυση προβλημάτων'.

Ο McGowen (1998) βασιζόμενος στην έννοια της γνωστικής μονάδας των Barnard & Tall προσπαθεί να την εμπλουτίσει με βάση την σημειωτική θεωρώντας τη ως «εκείνα κομματάκια και τμήματα γνώσης που τοποθετημένα μαζί μπορούν να κρατηθούν στην εστίαση της προσοχής (δηλαδή να κρατηθούν στην εργαζόμενη μνήμη), τα οποία δρουν σαν το έναυσμα για ανάκτηση και συλλογή του γνωστικού σχήματος που προσδιορίζει μεταγενέστερες ενέργειες ή εκείνες τις όψεις από την εικόνα της έννοιας που απαιτούνται για να εκτελεστεί η εργασία. Αυτή η διατύπωση της γνωστικής μονάδας δίνει έμφαση όχι μόνο στην συγκεντρωμένη –συμπιεσμένη φύση της γνωστικής μονάδας και στον συνακόλουθο ρόλο στην προβολής της στην εργαζόμενη μνήμη αλλά επίσης στην τροφοδοτούσα φύση της, αυτό που την τοποθετεί σαν σημείο στην μνήμη.

Οι Davis & McGowen (2001) επισημαίνουν το ρόλο που παίζει στη συγκρότηση της γνωστικής μονάδας η ενεργός συμμετοχή του υποκειμένου στην προσπάθειά του να οργανώσει σε ανώτερο επίπεδο την πληροφορία. Συγκεκριμένα αναφέρουν ότι:

«Ένα σημαντικό σημείο για ένα σύμβολο είναι ότι αυτό όχι μόνο μπορεί 'κρατηθεί στο κέντρο της προσοχής και να χειριστεί' αλλά ότι συνδέεται, μέσω μιας διαδικασίας που δίνει προσοχή σε υψηλότερου επιπέδου συσχετίσεις με άλλα σύμβολα» και παραπέμπουν στον (Deacon 1997, σελ.93) ο οποίος αναφέρει ότι:

«Παρόλο που προγενέστερες σχέσεις οι οποίες τελικά θα μετατραπούν σε ένα συμβολικό σύστημα μπορεί να πάρουν σημαντικό χρόνο και προσπάθεια για να τις μάθουμε, η συμβολική μετατροπή αυτών των σχέσεων δεν μαθαίνεται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει αντίθετα να ανακαλυφθεί ή να γίνει αντιληπτή σε κάποια έννοια, βασιζόμενη σε κάτι που είναι ήδη γνωστό. Με άλλα λόγια είναι ένα υποκρυπτόμενο υπόδειγμα που πρέπει να αναγνωριστεί ανάμεσα στις *ενδεικτικές (Indexical)* σχέσεις.»

Οι Davis & McGowen (2001) αναφέρονται εδώ στη δουλειά τους με μελλοντικούς καθηγητές, στην οποία η σχετικά μακρά διαδικασία επίλυσης προβλημάτων έθεσε τις βάσεις για την κατανόηση των συντελεστών του διωνυμικού αναπτύγματος. Τους απασχολεί μια πρόταση όπου η σημειολογική προσέγγιση μπορεί να παίξει κάποιον ιδιαίτερο ρόλο στην κατανόηση των ομοιωμάτων και των δεικτών ως σύμβολα. Υποστηρίζουν την ιδέα της γνωστικής μονάδας του Tall μ' έναν διευρυμένο τρόπο. Όχι μόνο με την συμπιεσμένη μορφή της γνωστικής πληροφορίας αλλά, της ικανότητας της να τροφοδοτήσει μεταγενέστερες ενέργειες, καθώς επίσης και του ενεργού ρόλου του υποκειμένου στην διαδικασία αυτή.

Παράγοντες που επηρεάζουν τις ερμηνείες των σημάτων

Ο χαρακτηρισμός ενός σημείου ως *ομοίωμα (εικόνα), δείκτης* ή *σύμβολο* δεν εξαρτάται αποκλειστικά από το ίδιο το σημείο αλλά από παράγοντες που σχετίζονται α) με το πλαίσιο αναφοράς του σημείου, β) με το γνωστικό επίπεδο και το σύνολο εμπειριών του υποκειμένου στον οποίο απευθύνεται το σημείο, γ) με στοιχεία που αφορούν το ιστορικό, πολιτιστικό, επιστημολογικό περιβάλλον που εμφανίζεται το σημείο δ) με το μέρος του σήματος στο οποίο καλούμαστε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας.

Ένα σχέδιο ενός θερμομέτρου μπορεί να θεωρηθεί *ομοίωμα (Icon)* αν το δούμε μαζί με άλλα σχέδια οργάνων ενός φαρμακείου (πιεσόμετρο, ζυγαριά), μπορεί να θεωρηθεί *δείκτης (Index)* αν το δούμε σ' ένα βιβλίο φυσικής, όπου μας παραπέμπει στο ρόλο του πραγματικού θερμομέτρου ως όργανο μέτρησης της θερμοκρασίας, αλλά και ως *σύμβολο (symbol)* αν το δούμε σ' ένα σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών όπου πιθανόν να παριστάνει τον άξονα των αριθμών.

Αντίστοιχα στο ίδιο σχέδιο του θερμομέτρου αποδίδεται διαφορετική σημασία ανάλογα με το υποκείμενο το οποίο το παρατηρεί.

Για κάποιον άνθρωπο που το θερμόμετρο δεν είναι αντικείμενο του πολιτισμού του ίσως το σχέδιο αυτό να παριστάνει ένα ξυλάκι μη δίνοντας καμία σημασία, στο ύψος του υδράργυρου, στις διαγραμμίσεις και στους αριθμούς. Για έναν φυσικό ή έναν γιατρό παριστάνει ένα όργανο μέτρησης της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος ή ενός ανθρώπου αντίστοιχα. Ένας χημικός ίσως επικεντρώσει στις ιδιότητες του υδραργύρου και ένας μαθηματικός στο ρόλο των διαγραμμίσεων και της συσχέτισής του με τους αριθμούς.

Για τον μαθηματικό το σχέδιο του θερμομέτρου είναι φορτισμένο με αρκετές συμβάσεις. Ορίζουμε μια θέση για το Ο για το 0 και μια θέση Α για το 1 και οι υπόλοιποι ακέραιοι τοποθετούνται σε αντίστοιχες αποστάσεις. Σε μια ημιευθεία τοποθετούνται οι θετικοί στην αντικείμενή της οι αρνητικοί. Οι αριθμοί αυξάνουν προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$. Οι ρητοί μπορούν να τοποθετηθούν σε θέσεις που ορίζουν υποδιαιρέσεις των αποστάσεων που ορίζουν οι ακέραιοι. Πολλές φορές οι μαθητές δεν είναι συμμέτοχοι αυτών των συμβάσεων. Τοποθετούν τους αριθμούς πάνω από μια ευθεία χωρίς να σημειώνουν τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν, αδιαφορούν για την διατήρηση των αποστάσεων κ.ά. Άλλοι πάλι μπορούν να τοποθετήσουν τους ακέραιους αλλά δεν μπορούν να τοποθετήσουν τους ρητούς αδυνατώντας στις μεταξύ τους συσχετίσεις.

Έτσι για τον καθηγητή ο άξονας των αριθμών είναι σύμβολο με την έννοια ότι περικλείει ένα σύνολο συμβάσεων, για κάποιους μαθητές είναι δείκτης με την έννοια ότι είναι τρόπος συσχέτισης των αριθμών και για κάποιους άλλους είναι ένα ομοίωμα, μια εικόνα.

Επίσης όταν παρατηρούμε ένα θερμόμετρο διαφορετική απάντηση θα δώσουμε στην ερώτηση ‘τι αντικείμενο είναι αυτό;’ (όταν μας το δείχνει κάποιος), και διαφορετική στην ερώτηση ‘ποια η ένδειξη του θερμομέτρου;’. Δηλαδή το που θα εστιάσουμε την προσοχή μας κάθε φορά εξαρτάται από τι μας ενδιαφέρει την δεδομένη στιγμή.

Αν λοιπόν ο ρόλος ενός σήματος επηρεάζεται από τόσο πολλούς παράγοντες ποια η αξία της σημειωτικής προσέγγισης;

Οι Davis & McGowen (2001) τοποθετούν το ζήτημα επιχειρώντας μια απάντηση:

«Ένα ουσιαστικό χαρακτηριστικό των ανθρώπινων σημείων και συμβόλων είναι το ότι δεν είναι εγγενώς εικονιστικά, ενδεικτικά ή συμβολικά. Δηλαδή το σημειωτικό επίπεδο δεν βρίσκεται απλά μέσα στο ίδιο το σύμβολο: απαιτεί τη δράση της ερμηνείας από έναν άνθρωπο του οποίου η προσοχή στρέφεται προς το σύμβολο. Μπορούμε, λοιπόν, να μιλήσουμε για σύμβολα που είναι εικονιστικά, ενδεικτικά ή συμβολικά, για κάποιο συγκεκριμένο άνθρωπο, κάποια συγκεκριμένη στιγμή, σε ένα δεδομένο πλαίσιο. Αυτές οι αβεβαιότητες μπορεί να φαίνεται ότι καθιστούν το σημειωτικό επίπεδο ενός συμβόλου άχρηστο: σε τι επωφελούμαστε μελετώντας κάτι το οποίο εξαρτάται σε τέτοιο βαθμό από το πλαίσιο; Αυτή είναι μια καλή ερώτηση και η απάντηση μας έγκειται στη φύση της μαθησιακής εξέλιξης των μαθητών στα μαθηματικά. Μας ενδιαφέρει η ανάπτυξη της σημειωτικής συνθετότητας των μαθητών στην ερμηνεία των σημείων και των συμβόλων στα μαθηματικά. Θέλουμε να γνωρίζουμε εάν, και πώς, οι μαθητές προοδεύουν από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο επόμενο”.

Πράγματι η κατηγοριοποίηση των σημάτων σε *Icon, Index, Symbol* αφορά σε μεγάλο βαθμό τις ερμηνείες που τους αποδίδει ένας άνθρωπος. Οι ερμηνείες αυτές με τη σειρά τους εξαρτώνται από το πλαίσιο που αναφέρονται τα σήματα, το γνωστικό ή πολιτιστικό υπόβαθρο του ερμηνευτή ή από το μέρος του σήματος που μας ενδιαφέρει να επικεντρώσουμε. Όμως τότε για την σημειωτική προσέγγιση απομένει η ονοματοδοσία των επιπέδων της γνωστικής εξέλιξης. Ποιος ο ρόλος των σημάτων καθ’ αυτών σ’ αυτή την γνωστική εξέλιξη; Αν δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος διακριτός ρόλος τότε η σημειωτική προσέγγιση δεν έχει να μας προσφέρει κάτι νέο.

Η διάκριση των ίδιων των σημάτων

Θεωρούμε ότι η τριχοτομία *Icon, Index, Symbol* εκτός από τις ερμηνείες των σημείων μπορεί να εφαρμοστεί και για τα ίδια τα σημεία με σκοπό την κατανόηση της στάσης των ανθρώπων απέναντι σ’ αυτά.

Θεωρούμε για παράδειγμα ότι το σχέδιο ή η φωτογραφία μιας αγελάδας το οποίο χαρακτηρίζεται *Icon* έχει εγγενώς ποιοτικά διαφορετικά χαρακτηριστικά από τη λέξη 'αγελάδα' παρόλο που και τα δυο αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο. Οι συμβάσεις που απαιτούνται για να κατανοήσει κάποιος σε ποιο αντικείμενο αναφέρεται η λέξη αγελάδα είναι πολύ περισσότερες από ένα σχέδιο της. Επίσης κάποιος που δεν έχει δει ποτέ μια πραγματική αγελάδα θα αποκτήσει πολύ περισσότερες πληροφορίες γι' αυτή από ένα σχέδιο της παρά να του πούμε ότι υπάρχει κάποιο αντικείμενο που λέγεται 'αγελάδα'. Στη συγκεκριμένη περίπτωση βλέπουμε ότι παρόλο που το σήμα 'αγελάδα' θεωρούμε ότι έχει συμπυκνωμένη περισσότερη πληροφορία απ' ότι ένα σχέδιό της, αδυνατεί να το 'μεταδώσει' σε κάποιον που δεν έχει το απαραίτητο υπόβαθρο.

Η συγκεκριμένη παρατήρηση ίσως μας φανεί χρήσιμη για να κατανοήσουμε γιατί ενώ πολλές φορές εκθέτουμε τους μαθητές μας σε σύμβολα που έχουν συμπυκνώσει μεγάλα ποσά πληροφορίας αυτοί τα αντιμετωπίζουν ως κενό πληροφορίας.

Επίσης το σήμα ΙΙΙ για τον αριθμό τρία, το οποίο θα μπορούσαμε να το χαρακτηρίσουμε ως *Index*,έχει επίσης ποιοτικά διαφορετικά χαρακτηριστικά από το σήμα 3. Στο σήμα ΙΙΙ δεν σχηματοποιούνται τα ίδια τα αντικείμενα που θέλουμε να μετρήσουμε αλλά αντιστοιχίζονται με μια ένα προς ένα απεικόνιση με τις τρεις γραμμές. Το σήμα ΙΙΙ έχει τόσες γραμμές όσα και τα αντικείμενα το πλήθος των οποίων παριστάνει. Δεν μας ενδιαφέρει καν το είδος των αντικειμένων που θέλουμε να μετρήσουμε. Αντίθετα το σημείο 3 είναι κατά βάση ένα συμβατικό σύμβολο. Στο σχεδιασμό του δεν υπάρχει κάτι εμφανές που να μας παραπέμπει στο πλήθος των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται.

Κάποια σημεία στα μαθηματικά είναι επιφορτισμένα μ' έναν διπλό ρόλο. Αυτόν της εκτέλεσης μιας διαδικασίας αλλά και του αποτελέσματος - αντικειμένου της διαδικασίας αυτής. Για παράδειγμα το σημείο ΙΙΙ μπορεί να παριστάνει και τη διαδικασία της μέτρησης τριών αντικειμένων αλλά και τον αριθμό τρία. Το σημείο ΙΙΙ έχει λιγότερες συμβάσεις από τη λέξη 'τρία' ή το σύμβολο '3'. Δεν είναι τυχαίο ότι αντίστοιχα με αυτό σημεία αποτέλεσαν έναν τρόπο αναπαράστασης τριών αντικειμένων από την αρχαιότητα, όπως και ότι οι μαθητές σε διαδικασίες καταμέτρησης (μαθητικές εκλογές) χρησιμοποιούν αντίστοιχα σημεία.

Η αναπαράσταση της συνάρτησης ως μια μηχανή που κάποια δεδομένα εισέρχονται σε μια είσοδο υπόκεινται σε κάποια επεξεργασία από την οποία προκύπτουν στην έξοδο κάποια αποτελέσματα παραπέμπει σε μια διαδικαστική μορφή για την έννοια της συνάρτησης. Πολλές φορές μάλιστα οι μαθητές ικανοποιούνται από τέτοιες διαδικαστικές αναπαραστάσεις. Όμως ίσως τέτοιες αναπαραστάσεις να ευθύνονται σε κάποιο βαθμό για την δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης ως ολότητα όπως αυτή εμφανίζεται για παράδειγμα στη γραφική της παράσταση ή ως αντικείμενο στη σχέση της με άλλες συναρτήσεις.

Ο διπλός ρόλος των συμβόλων

Οι Gray & Tall (1994) επισημαίνουν το εξής παράδοξο. Ο μαθηματικός συμβολισμός από την μια είναι βασική πτυχή επιτυχίας των μαθηματικών και ταυτόχρονα κύρια πηγή δυσκολίας της μάθησης των μαθηματικών. Προσπαθώντας να δώσουν μια διέξοδο στο φαινομενικό παράδοξο αναφέρονται στο διπλό ρόλο των συμβόλων στη διχοτομία διαδικασία και έννοια.

Μας θυμίζουν για παράδειγμα ότι το σύμβολο 5 + 4 παριστάνει και μια διαδικασία πρόσθεσης δυο αριθμών αλλά και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Το κλάσμα 3/4 παριστάνει και τη διαδικασία της διαίρεσης δυο αριθμών αλλά και έναν ρητό αριθμό. Η άπειρη δεκαδική αναπαράσταση π = 3,14159… παριστάνει και την διαδικασία προσέγγισης του π με τον υπολογισμό ολοένα και περισσότερων δεκαδικών ψηφίων, αλλά και το συγκεκριμένο αριθμητικό όριο της διαδικασίας αυτής. Το σήμα $\lim_{x \to a} f(x)$ παριστάνει και τη διαδικασία τάσης σ' ένα όριο αλλά και την έννοια του ορίου αυτού.

Έτσι ενώ ο ρόλος των συμβόλων στα μαθηματικά θεωρείται εξαιρετικά σημαντικός φαίνεται να δικαιώνεται ο Cockcroft (1982) όταν δήλωνε ότι ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ταυτόχρονα ή δύναμη και η αδυναμία της μαθηματικής επικοινωνίας.

Οι Davis & McGowen (2001) υποστηρίζουν ότι: 'η *διαδικασιοεννοιολογική διαίρεση (proceptual division)* - το σημείο διακλάδωσης στο οποίο ορισμένοι μαθητές λειτουργούν ευέλικτα με τους μαθηματικούς συμβολισμούς ως αναφορά τόσο για τις διαδικασίες όσο και για τα αντικείμενα και άλλοι όχι - είναι μια ένδειξη σε ένα μαθηματικό πλαίσιο της δεικτικής-συμβολικής ιεραρχίας. Αυτό, βέβαια, δεν "ερμηνεύει" την διαδικασιοεννοιολογική διαίρεση, απλώς την ονομάζει ως τέτοια. Αυτό που κάνει, ωστόσο, είναι να τονίζει ότι η η διαδικασιοεννοιολογική διαίρεση είναι μια πτυχή του γενικότερου προβλήματος αναφοράς – της διαφοράς μεταξύ των δεικτικών και συμβολικών σχέσεων.

Τα σύμβολα μέσα από τη συνήθη χρήση τους

Μια άλλη πτυχή που δεν πρέπει να ξεχνάμε είναι ότι τα σημεία στα μαθηματικά συχνά φορτίζονται με το νόημα της συνήθους ή αρχικής χρήσης τους. Για παράδειγμα το σημείο + χρησιμοποιείται αρχικά από τους μαθητές ως το σύμβολο της πρόσθεσης φυσικών αριθμών. Στο πλαίσιο αυτό το σημείο + συνδέεται με την αύξηση της ποσότητας. Το νόημα αυτό πολλές φορές ακολουθεί το σημείο στα μάτια των μαθητών ακόμη και στην περίπτωση που το πλαίσιο αναφοράς αλλάζει, γίνεται για παράδειγμα το σύνολο των ακεραίων. Το σημείο + δεν έχει κάτι στο σχεδιασμό του που να παραπέμπει σε αύξηση της ποσότητας, θεωρείται ένα συμβατικό σύμβολο, όμως η δύναμη της αρχικής συνήθους χρήσης του δεν το εγκαταλείπει εύκολα, τουλάχιστον για κάποιους μαθητές.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο συμβολισμός με x της ανεξάρτητης μεταβλητής μιας συνάρτησης και με y της εξαρτημένης. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα σύμβασης. Όμως η εξαιρετικά συχνή χρήση των συγκεκριμένων συμβόλων για τους συγκεκριμένους ρόλους τα κάνει να ταυτίζονται με τους ρόλους αυτούς. Έτσι πολλοί μαθητές (και όχι μόνο) δυσκολεύονται να θεωρήσουν συνάρτηση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι το x. Ταυτίζουν κατά κάποιο τρόπο τις έννοιες με τα ονόματά τους.

Έτσι ενώ για κάποιους ενήλικες θεωρείται αυτονόητο ότι οι λέξεις είναι διακριτές από αυτό που αναπαριστούν τα παιδιά κάποιες φορές τα ταυτίζουν. Ο παρακάτω διάλογος του Piaget με ένα παιδί ενάμιση ετών είναι χαρακτηριστικός:

«Θα μπορούσε ο ήλιος να ονομάζεται σελήνη κι η σελήνη ήλιος; - «Όχι». «Γιατί όχι;» «Επειδή ο ήλιος λάμπει περισσότερο από τη σελήνη…» «Αλλά αν ο καθένας ονόμαζε τον ήλιο σελήνη και τη σελήνη ήλιο, θα ξέραμε ότι είναι λάθος;» - «Ναι, γιατι ο ήλιος είναι πάντα μεγαλύτερος, μένει πάντα όπως είναι και το ίδιο κάνει και η σελήνη.» – «Ναι, αλλά ο ήλιος δεν αλλάζει, μόνο το όνομά του. Θα μπορούσε να ονομάζεται κ.λπ;» - «Όχι…Γιατί η σελήνη ανατέλλει το βράδυ και ο ήλιος το πρωί.» (Piaget 1929: 81-2.)

Θα υποψιαζόταν ίσως κάποιος ότι αυτό είναι ένα πρόβλημα που στη διδασκαλία των μαθηματικών τουλάχιστον θα μπορούσαμε να το λύσουμε σχετικά εύκολα. Θα μπορούσαμε δηλαδή να ονομάζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή μιας συνάρτησης κάθε φορά και με διαφορετικό σύμβολο. Αλήθεια γιατί ‘συμφωνούμε’ να χρησιμοποιούμε συγκεκριμένα σύμβολα για συγκεκριμένους ρόλους και δεν χρησιμοποιεί ο καθένας το δικό του και κάθε φορά διαφορετικό; Για παράδειγμα γιατί χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε τα σημεία και πεζά για τις γωνίες; Γιατί χρησιμοποιούμε τα γράμματα x, y, z για τις συνεχείς μεταβλητές και τα γράμματα κ, ν για τις διακριτές; Θα άλλαζε έστω και στο ελάχιστο το νόημα αν δεν χρησιμοποιούσαμε τα συγκεκριμένα σύμβολα στους συγκεκριμένους ρόλους; Σ' ένα θεωρητικό επίπεδο η απάντηση είναι σαφέστατα αρνητική. Όμως παρόλα αυτά επιλέγουμε το δρόμο που έχουμε συνηθίσει.

Θεωρούμε ότι η συχνή, επανειλημμένη χρήση των ίδιων συμβόλων σε συγκεκριμένους ρόλους νοηματοδοτεί τα ίδια τα σύμβολα παρέχοντας ένα πλαίσιο αναφοράς τους. Ταυτόχρονα αυτή η διαδικασία μας βοηθάει να αναγνωρίζουμε με ταχύτητα τις έννοιες στις οποίες τα σύμβολα αναφέρονται. Για παράδειγμα θα δυσκολευόμασταν πολύ περισσότερο να καταλάβουμε ότι η εξίσωση $E \cdot Z = 1$ παριστάνει μια υπερβολή από ότι αν την βλέπαμε στην μορφή: $y \cdot x = 1$.

Το πρόβλημα για τους μαθητές δημιουργείται όταν αγκυστρώνουν τα σύμβολα σε συγκεκριμένα πλαίσια αναφοράς χωρίς να καταφέρνουν στοιχειώδη ευελιξία. Δεν θα βοηθούσε τους μαθητές η χρήση κάθε φορά και διαφορετικών συμβόλων για την περιγραφή ενός συγκεκριμένου αντικειμένου. Θα τους αφαιρούσε ένα δίχτυ ασφάλειας που αισθάνονται όταν χρησιμοποιούν τα ίδια περίπου σύμβολα για το ίδιο αντικείμενο. Αυτό που επιτυγχάνει ο ικανός στα μαθηματικά είναι η ευέλικτη χρήση των συμβόλων σε διαφορετικά πλαίσια αναφοράς και σ' αυτό θα πρέπει να επικεντρώσουμε τις προσπάθειες μας για όσους δεν τα καταφέρνουν.

Ο ρόλος της ιστορικής εξέλιξης των συμβόλων στη διδασκαλία

Ένα άλλο σημείο που θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης και χρήσης των μαθηματικών συμβόλων είναι ότι η υψηλή περιεκτικότητα τους σε πληροφορία, η ακρίβεια του αντικειμένου που προσδιορίζουν, η κομψότητά τους είναι αποτέλεσμα μακρόχρονης ιστορικής εξέλιξης. Αυτή τους η εξέλιξη τα έχει απομακρύνει από το να προσομοιάζουν με αυτό που αναπαριστούν καθιστώντας τα δύσκολα στην κατανόησή τους από τους μαθητές. Αυτή η ίδια η αποξένωση από το αντικείμενο που παριστάνουν τους προσδίδει έναν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των ίδιων των μαθηματικών. Όμως οι μαθητές πολλές φορές καλούνται μ' ένα βίαιο τρόπο να ενσωματώσουν το αποτέλεσμα αυτής της τεράστιας ιστορικής πορείας.

Τα παιδιά δεν έχουν εγγενή αδυναμία να κατανοήσουν αφηρημένα συμβατικά σήματα σε πολύ μικρή ηλικία. Η κατάκτηση της μητρικής γλώσσας απ' αυτά μας δείχνει την ικανότητά τους. Όμως με την περίπτωση των μαθηματικών σημάτων οι εμπειρίες είναι σαφώς λιγότερες συγκρινόμενες με την μητρική γλώσσα. Η μητρική γλώσσα κατακτάται σε μια προσπάθεια επικοινωνίας για την εκπλήρωση ζωτικών αναγκών ενός παιδιού. Τα μαθηματικά έρχονται να ικανοποιήσουν μια δευτερογενή ανάγκη του ανθρώπου. Αυτή της κατανόησης του κόσμου με σκοπό την αλλαγή του. Πολλές φορές η διδασκαλία μαθηματικών δεν ικανοποιεί κάποια ανάγκη των μαθητών, ή έστω οι μαθητές δεν την κατανοούν ως τέτοια, έτσι δεν γίνεται αποδεκτό γιατί θα πρέπει να επικοινωνούμε σε μια ειδική γλώσσα όπως αυτή των μαθηματικών συμβόλων.

Οι μαθητές σπάνια αφήνονται ελεύθεροι να πειραματιστούν με κάποιο δικό τους συμβολισμό, να κατανοήσουν τις πιθανές αδυναμίες του, θα συλλάβουν τα πλεονεκτήματα του συμβολισμού που χρησιμοποιούμε.

Κάποιοι από τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό είναι:

α) Τα σήματα είναι εργαλεία επικοινωνίας. Η επικοινωνία επιτυγχάνεται σε μεγαλύτερο βαθμό ,όσο τα σήματα και οι κώδικες επικοινωνίας είναι κατά το δυνατόν κοινοί. Έτσι απαιτείται να γίνουν γνώστες και χρήστες του συμβολισμού που επικρατεί.

β) Η ιστορική εξέλιξη των σημάτων και η χρήση τους στην επικοινωνία είναι τέτοια ώστε να τα έχει εμπλουτίσει με τρία βασικά πλεονεκτήματα. Την ευκολία καταγραφής τους, την ένταξή τους σ' ένα σύστημα σημάτων, την υψηλή περιεκτικότητά τους σε πληροφορία.

Παράγοντες όπως οι παραπάνω έχουν οδηγήσει τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών να καλούν τους μαθητές να υιοθετήσουν ένα σύστημα σημάτων, το οποίο δεν είναι αποτέλεσμα της δικής τους εμπειρίας, στο οποίο δεν συμμετείχαν στην εξέλιξή του ή έστω δεν τους δόθηκε καμία δυνατότητα κριτικής αποτίμησής του. Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι οι μαθητές να καλούνται να χρησιμοποιήσουν ένα σύστημα σημάτων για το οποίο εμφανίζουν σοβαρά προβλήματα κατανόησης.

Δεν υποστηρίζουμε φυσικά, ότι είναι δυνατό οι μαθητές να περάσουν, έστω και σε γρήγορο ρυθμό όλα τα στάδια της ιστορικής εξέλιξης των συμβόλων. Θα μας έκανε φτωχότερους αν κάθε γενιά αποποιούνταν όλο το φορτίο που περικλείουν τα σύμβολα με την εξαιρετική λεπτότητα που απέκτησαν μέσα στην ιστορική τους πορεία.

Θα μπορούσαμε όμως αντί απλά να διορθώνουμε ένα μαθητή που έχει χρησιμοποιήσει ένα σύμβολο διαφορετικό από τα αποδεκτά στην επιστημονική κοινότητα να προσπαθήσουμε να το κατανοήσουμε, να συζητήσουμε μαζί του τα πιθανά μειονεκτήματά του σε σχέση με το καθιερωμένο ίσως και σε κάποια 'απίθανη' περίπτωση να το υιοθετήσουμε.

Οι μαθητές θα είχαν να διδαχθούν αρκετά από την εμπλοκή τους σε μια προσπάθεια κατανόησης και χρήσης συμβόλων παλαιότερων εποχών. Η αποδοχή των σημερινών καθιερωμένων συμβόλων θα γινόταν κατανοητή ως αποτέλεσμα μιας ιστορικής μακρόχρονης ανθρώπινης προσπάθειας. Η υιοθέτηση, η εγκατάλειψη ή η εξέλιξη κάποιων συμβόλων μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από συγκεκριμένους ιστορικούς, οικονομικούς πολιτιστικούς ή άλλους λόγους. Όλα αυτά μπορούν να συμβάλλουν σε μια προσπάθεια κατανόησης των μαθηματικών ως ανθρώπινου εργαλείου για την κατανόηση την ερμηνεία και την αλλαγή τους κόσμου.

Αλλά μια τέτοια προσπάθεια έχει να προσφέρει σημαντικά και στην κατανόηση του ίδιου του μαθηματικού νοήματος των συμβόλων από τους μαθητές. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα αναφέρουμε την περίπτωση της εξέλιξης των αριθμητικών συστημάτων. Ίσως βοηθούσε τους μαθητές η κατανόηση της αξίας θέσης ενός ψηφίου στο αριθμητικό μας σύστημα αν έρχονταν σε επαφή και με μη θεσιακά αριθμητικά συστήματα

2.2.2 Γενικές θεωρίες για τα μαθηματικά

Οι τρεις κόσμοι των μαθηματικών

Ο Tall (2002, 2004) στην προσπάθειά του να αναπτύξει μια θεωρία για την γνωστική ανάπτυξη των παιδιών στα μαθηματικά διακρίνει τρεις κόσμους στα μαθηματικά. Στους τρεις αυτούς κόσμους επικρατούν διαφορετικοί τρόποι λειτουργίας και υπάρχουν διαφορετικά δεδομένα εγκυρότητας και αλήθειας.

Οι τρεις αυτοί κόσμοι προσέγγισης των μαθηματικών είναι:

Ο ενσαρκωμένος κόσμος (embodied world).

Ο συμβολικός κόσμος των διαδικασιών εννοιών (proceptual world of symbols)

Ο αξιωματικός κόσμος (formal axiomatic world).

Ο ενσαρκωμένος κόσμος (embodied world) βασίζεται σε ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στα πλαίσια του πραγματικού κόσμου. Ο κόσμος αυτός δεν περιορίζεται μόνο στο πραγματικό αλλά επεκτείνεται στις αντίστοιχες νοητικές κατασκευές που προκύπτουν από αφαίρεση, πάντα όμως παραμένει συνδεδεμένος με τη δράση και τα αποτελέσματα των αισθήσεων από τα οποία προέρχεται.

Ο συμβολικός κόσμος των διαδικασιών-εννοιών (proceptual world of symbols) αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων στην αριθμητική, στην άλγεβρα και στην ανάλυση, συνδυάζοντας την διπλή τους υπόσταση, ως διαδικασία και ως έννοια (procept). Πρόκειται για τον κόσμο της επεξεργασίας και της διαχείρισης συμβόλων.

Ο αξιωματικός κόσμος (formal axiomatic world) είναι εκείνος που αντιμετωπίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό τρόπο. Ξεκινάει από πρωταρχικές έννοιες, ορισμούς και με λογικούς συμπερασμούς αποδεικνύονται θεωρήματα.

Οι τρεις αυτοί κόσμοι δεν θα πρέπει να θεωρούνται διακριτοί μεταξύ τους. Οι δράσεις στον ενσαρκωμένο κόσμο, δημιουργούν εμπειρίες οι οποίες είναι απαραίτητες για την λειτουργία στον κόσμο των διαδικασιών –εννοιών. Οι δράσεις στον ενσαρκωμένο κόσμο απαιτούν την χρήση εργαλείων για την κατανόηση και την αλλαγή του. Με τον όρο εργαλεία εννοούμε είτε χειροπιαστά (π.χ χαρτί, μολύβι) είτε νοητικά. Η γλώσσα είναι απαραίτητο νοητικό εργαλείο επικοινωνίας της κοινωνίας των ανθρώπων. Η διαδικασία της απαρίθμησης διακριτών αντικειμένων καθώς και η διαδικασία της μέτρησης είναι ενέργειες που λαμβάνουν χώρα στα πλαίσια του ενσαρκωμένου κόσμου.

Οι διαδικασίες της απαρίθμησης και της μέτρησης απαιτούν την ανάπτυξη ειδικών συμβόλων για την περιγραφή των ενεργειών και των αποτελεσμάτων τους. Η διευκόλυνση και η επέκταση τέτοιων ενεργειών επιβάλλει την ανάπτυξη ενός αριθμητικού συστήματος με συγκεκριμένη δομή. Η φάση αυτή θα λέγαμε ότι ανήκει στο συμβολικό κόσμο των διαδικασιών και των εννοιών.

Ο ορισμός σαφών κανόνων σ' ένα σύνολο αριθμητικών συμβόλων που θα διέπεται από σχετική συνέπεια, πληρότητα και δομή είναι μια διαδικασία που ανήκει στον αξιωματικό κόσμο.

Η προηγούμενη περιγραφή θα μπορούσε να αποτελέσει ένα γενικό πλαίσιο αναφοράς για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών αλλά και την γνωστική εξέλιξη των ανθρώπων.

Στο σημείο αυτό όμως θα οφείλουμε μια σημαντική σημείωση.

Δεν θεωρούμε ότι υπάρχει μια σαφής, ξεκάθαρη, γραμμική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών κατά το πέρασμα των αιώνων. Ιδέες που εμφανίστηκαν κάποια στιγμή της ιστορίας που δεν υπήρχε το απαραίτητο υπόβαθρο για την εξέλιξή τους εγκαταλείφθηκαν ή εκδιώχθηκαν. Αιώνες αργότερα αποτέλεσαν την απαρχή μιας διαφορετικής θεμελίωσης από την επικρατούσα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η έννοια του απειροστού που εμφανίστηκε στα προευκλείδεια μαθηματικά με την κερατοειδή γωνία, υποστηρίχθηκε αιώνες αργότερα από τον Leibniz και ενσωματώθηκε τον 20^{ο} αιώνα από τον Robinson (1951) σε μια θεμελίωση του απειροστικού λογισμού.

Στο πεδίο της γνωστικής ανάπτυξης η εξέλιξη είναι επίσης εξαιρετικά πολύπλοκη. Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία απαριθμούν διακριτά αντικείμενα, χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς καθένας από τους οποίους έχει κάποιον επόμενο. Έρχονται σε επαφή με ρητούς αριθμούς ως αποτελέσματα μέτρησης (παρατηρεί το ψηφιακό ταχύμετρο αυτοκινήτου, ακούει τον γονιό του να αγοράζει 1/4 του κιλού τυρί) προσπαθώντας να τους αποδώσουν κάποιο νόημα.

Με την είσοδό τους στο σχολείο τα παιδιά καλούνται υιοθετήσουν τυπικές περιγραφές για τις γνωστικές τους εμπειρίες. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η εξέλιξη δεν γίνεται μ' έναν ομαλό τρόπο. Δημιουργείται αδυναμία σύνδεσης των δυο κόσμων. Η προσπάθεια ενσωμάτωσης των γνωστικών εμπειριών στο νέο τυπικό φορμαλιστικό πλαίσιο δημιουργεί συνθετικά μοντέλα σύμφωνα με τα οποία ο μαθητής προσπαθεί να αποδώσει νόημα στις έννοιες. Όσο το επίπεδο αφαίρεσης μιας έννοιας γίνεται υψηλότερο, όσο η απόσταση από κάποιο εμπειρικό, διαισθητικό περιεχόμενο μεγαλώνει τόσο δυσκολότερο είναι για κάποιο μαθητή να οριοθετήσει ένα επαρκές πλαίσιο κατανόησης της έννοιας συμβατό με την γνωστικές του διαισθήσεις και την τυπική μορφή της έννοιας.

Ενσώματη γνώση (Embodied Cognitive)

Σε μια προσπάθεια αναζήτησης της προέλευσης και της φύσης της μαθηματικής γνώσης στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης αναπτύχθηκε η θεωρία της ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognition). Σταθμός σ' αυτή την προσπάθεια αποτέλεσε το βιβλίο με τίτλο 'Where mathematics comes from' των Lakoff & Núñez, (2000). Εκεί αναφέρονται τρία δεδομένα , σχετικά με το πώς δομούνται οι αφηρημένες έννοιες και πιο συγκεκριμένα αυτές των μαθηματικών εκ των οποίων μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα το τρίτο. Αυτά είναι:

α) *Η ενσωμάτωση του μυαλού (the embodied of mind).* Δηλαδή ότι η φύση του σώματος, του νου, και των ανθρώπινων λειτουργιών του ανθρώπου, σε σχέση με τον κόσμο που τον περιβάλλει, δομεί και καθορίζει τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική.

β) *Το γνωστικό ασυνείδητο (the cognitive unconsioius).* Δηλαδή το ασυνείδητο των σκέψεων με την έννοια της αδυναμίας πρόσβασης σ' αυτές με την άμεση ενδοσκόπηση. Ο άνθρωπος αδυνατεί να ελέγξει άμεσα τα γνωστικά του συστήματα καθώς και τις διαδικαστικές του σκέψεις που βρίσκονται σε χαμηλό επίπεδο.

γ) *Η μεταφορική σκέψη (metaphorical thought).* Ο άνθρωπος σε σημαντικό βαθμό εννοιολογικοποιεί αφηρημένες έννοιες με συγκεκριμένους όρους χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους επιχειρηματολογίας στηριγμένους σε ένα αισθησιοκινητικό σύστημα. Ο μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο γίνεται κατανοητό με συγκεκριμένους όρους καλείται *εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor)*.

Η *εννοιολογική μεταφορά* είναι ένας βασικός *νευρολογικά σωματοποιημένος γνωστικός μηχανισμός (neurally embodied fundamental cognitive mechanism)* που μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τις γνωστικές δομές ενός πεδίου για να επιχειρηματολογούμε για άλλο.

Η *εννοιολογική μεταφορά* δεν νοείται μόνο ως αντιστοίχηση μαθηματικών εννοιών σε οπτικοποιημένες καταστάσεις που είναι πιο προσιτές στην εμπειρία ή πιο σωματοποιημένες. Αλλά γενικεύεται και στην περίπτωση της μεταφοράς και αξιοποίησης της συμπερασματικής δομής ενός πλαισίου σ' ένα άλλο. Περιγράφεται δηλαδή ως μηχανισμός συνάρτησης μεταξύ εννοιολογικών πεδίων. (π.χ Φυσικές ενέργειες, Αριθμητική, Γεωμετρία). Έτσι χαρακτηρίζεται ως '*εγκαθιδρυμένη, με διατήρηση του συμπερασμού, αντιστοίχηση μεταξύ των πεδίων' (grounded, inference-preserving cross - domain mapping)*.

Στην εννοιολογική μεταφορά διακρίνονται το *πηγαίο πεδίο (source domain)* και το *πεδίο στόχος (target domain)*. Στην περίπτωση της αριθμητικής οι Lacoff & Núñez εντοπίζουν τέσσερις βασικές μεταφορές.

α) Την αριθμητική ως *μεταφορά συλλογής αντικειμένων* όπου οι αριθμοί αντιστοιχούν ως πληθικός αριθμός σε συλλογές από ομοειδή αντικείμενα. Έτσι ο αριθμός 3 εκφράζει το πλήθος μιας συλλογής τριών π.χ. μήλων.

β) Η *αριθμητική ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων* όπου οι αριθμοί αντιστοιχούν σε αντικείμενα που αποτελούνται από ξεχωριστά τμήματα μοναδιαίου μεγέθους. Έτσι ο αριθμός 3 κατασκευάζεται ως άθροισμα τριών μονάδων ή αποτελείται από τρεις μονάδες.

Η αριθμητική *ως μεταφορά μανάδων μέτρησης* όπου οι αριθμοί είναι τμήματα που αποτελούνται από την συνεχή τοποθέτηση διακριτών τμημάτων μοναδιαίου μήκους. Έτσι ένα τμήμα με μήκος 3 έχει προκύψει από την τοποθέτηση σε μια ευθεία χωρίς κενά τριών μοναδιαίων τμημάτων.

Η αριθμητική, ως *μεταφορά κίνησης κατά μήκος μονοπατιού* όπου οι αριθμητικές πράξεις είναι κινήσεις κατά μήκος του μονοπατιού αυτού. Το 3 είναι 'κατά τρία μακρύτερα' από την αρχή του μονοπατιού που είναι το 0.

Το *μίγμα (blending)* και η *επέκταση (stretching)* αυτών των μεταφορών μπορεί να δώσει τις κατάλληλες μεταφορές για όλους τους αριθμούς.

Θα προσπαθήσουμε να δούμε με ποιο τρόπο το βασικό αντικείμενο της έρευνας μας, ο αριθμός 0,3999… μπορεί να θεωρηθεί ως μεταφορά

Το 0,3999... δεν μπορεί να εκληφθεί ως μεταφορά συλλογής αντικειμένων αφού δεν είναι πληθικός αριθμός μιας συλλογής αντικειμένων.

Ο 0,3999... ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων μπορεί να εκληφθεί ως ένα αντικείμενο που αποτελείται από πολλαπλάσια μοναδιαίου μεγέθους με την έννοια που φαίνεται στην παράσταση $0{,}3999... = 3\frac{1}{10} + 9\frac{1}{100} + 9\frac{1}{1000} + ...$

Ο 0,3999... ως μεταφορά μονάδων μέτρησης μπορεί να εκληφθεί με την αντίστροφη μορφή της προηγούμενης διαδικασίας. Δηλαδή με την έκφραση 0,3 + 0,09 + 0,009 + ... = 0,4 και την αντιστοίχηση της έκφρασης αυτής σε μια ευθεία.

Ο 0,399... μπορεί να εκληφθεί ως μεταφορά κίνησης κατά μήκος ενός μονοπατιού σαν το τέρμα μιας πορείας με στάσεις στα σημεία-αριθμούς 0,3, 0,39, 0,399, ...

Υπάρχει όμως ένας παράγοντας ο οποίος επηρεάζει σημαντικά την απόδοση νοήματος στις προηγούμενες διαδικασίες και στην εγκαθίδρυσή του 0,3999... από το πεδίο των φυσικών ενεργειών στο πεδίο των αριθμών. Ο παράγοντας αυτός είναι η δυσκολία σύλληψης της ιδέας της άπειρης εκτέλεσης μιας φυσικής διαδικασίας. Έτσι είτε η σύλληψή του ως αριθμό είναι αδύνατη είτε παραμένει μετέωρη θεωρώντας πότε αριθμό, πότε διαδικασία ή επιφορτίζοντας τον αριθμό με φυσικά σωματοποιημένα χαρακτηριστικά θεωρώντας τον μεταβλητό ικανό να τείνει σε κάποιον άλλο.

Ενσαρκωμένα αντικείμενα

Σύμφωνα με τις απόψεις των Lacoff & Núñez το σύνολο σχεδόν των μαθηματικών, στοιχειώδη και προχωρημένα θεωρούνται ενσώματα (embodied). Στο σημείο αυτό υπήρξε διαφωνία από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών οι οποίοι όμως χρησιμοποίησαν τις ιδέες της ενσώματης γνώσης. Έτσι ο όρος *ενσαρκωμένη* θεώρησαν ότι δεν αναφέρεται σ' όλη τη μαθηματική σκέψη αλλά ότι στηρίζεται στην αντίληψη μέσω των αισθήσεων και διακρίνεται από τη συμβολική και λογική μαθηματική σκέψη. (Gray & Tall, 2001, Tall 2002). Οι ερευνητές αυτοί χρησιμοποίησαν τις ιδέες της ενσαρκωμένης σκέψης προκειμένου να ερμηνεύσουν τον τρόπο που αναπτύσσεται η μαθηματική ικανότητα.

Έτσι οι Gray & Tall εισήγαγαν τον όρο *ενσαρκωμένο αντικείμενο (embodied object)* για τα αντικείμενα αυτά των οποίων η αντίληψη εξαρτάται άμεσα από την αισθητηριακή αντίληψη του κόσμου. Οι πρωτογενείς αντιλήψεις υπόκεινται σε επεξεργασία και με διαδοχικές αφαιρέσεις αποκτούν μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή. Η μορφή αυτή μπορεί να έχει μια σχετική απόσπαση από τις αρχικές αντιλήψεις από τις οποίες προέρχεται, να μην γίνεται δηλαδή άμεσα συνειδητή αναφορά στα φυσικά, υλικά αντικείμενα από τα οποία προέρχεται.

Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της ευθείας γραμμής όπου τα παιδιά αρχικά έχουν αισθητηριακή αντίληψη, παρατηρώντας το περιβάλλον, σχεδιάζουν κάποιες γραμμές και εκπλήσσονται όταν αρχίζουν να κατανοούν ή πληροφορούνται ότι οι ευθείες γραμμές στα μαθηματικά είναι νοητικά κατασκευάσματα, χωρίς πάχος και χωρίς άκρα.

Γίνεται όμως διάκριση μεταξύ των *ενσαρκωμένων αντικειμένων* όπως τα σχέδια και τα γραφήματα και των συμβόλων ή καλύτερα των σημείων που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα. Δηλαδή ο αριθμός ‘πέντε’ δεν θεωρείται ενσαρκωμένο αντικείμενο ενώ η νοητή εικόνα των ‘πέντε δακτύλων’ είναι. Έτσι οι Gray & Tall θεωρούν ότι οι αριθμοί μέσω των συμβόλων τους δεν είναι ενσαρκωμένα αντικείμενα ενώ οι Lakoff & Núñez θεωρούν ότι όπως όλα τα μαθηματικά έτσι και οι αριθμοί είναι ενσαρκωμένα αντικείμενα.

Οι Lakoff & Núñez καθώς και οι Gray & Tall χρησιμοποιούν τον ίδιο αγγλικό όρο embodied αναφερόμενοι σε γνώσεις ή ιδέες αλλά δεν τον χρησιμοποιούν με τον ίδιο τρόπο. Υπενθυμίζουμε ότι σε γενικές γραμμές οι Lakoff & Núñez θεωρούν σχεδόν το σύνολο των μαθηματικών ως embodied ενώ οι Gray & Tall διακρίνουν τα embodied από τα αφηρημένα νοητικά αντικείμενα. Στην ελληνική βιβλιογραφία ο αντίστοιχος όρος μεταφράζεται είτε ως ενσάρκωση είτε ως ενσωμάτωση. Επειδή στα Ελληνικά χρησιμοποιούμε τον όρο ενσάρκωση για την υλική υπόσταση μιας ιδέας, θεωρώντας ότι αυτή η ιδέα μπορεί να έχει και άλλη υπόσταση, υιοθετούμε τον όρο ενσάρκωση για τον αγγλικό όρο embodied όπως αυτός χρησιμοποιείται από τον Tall. Επίσης θεωρούμε ότι ο ελληνικός όρος ενσώματο αντικείμενο, ή ενσώματη γνώση αποδίδει καλύτερα τον αγγλικό όρο embodied όπως χρησιμοποιείται από τους Lakoff & Núñez επειδή οι συγκεκριμένοι ερευνητές επισημαίνουν την ιδιαίτερη βαρύτητα του ανθρώπινου σώματος στη δημιουργία της γνώσης και των νοητικών αντικειμένων.

Οι Gray & Tall (2001) έχουν κάνει την παρακάτω διάκριση για τους τύπους των μαθηματικών εννοιών.

Ενσαρκωμένα αντικείμενα: όπως τα αναλύσαμε παραπάνω.

Συμβολικές έννοιες όπως οι συμβολοποιημένοι αριθμοί.

Αξιωματικές έννοιες που συναντώνται στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη όπου αξιώματα και συστήματα συμβόλων χρησιμοποιούνται για τη συγκρότηση μιας λογικά δομημένης θεωρίας.

Ενθυλακωμένες διεργασίες ως αυτόνομες οντότητες διακριτές από τα ενσαρκωμένα αντικείμενα. Η ενθυλάκωση περιλαμβάνει ένα ευρύτερο φάσμα νοητικών δομών οι οποίες συμπεριλαμβάνουν οπτικές εικόνες, ιδιότητες, σχέσεις, αντιληπτικά δεδομένα, δράσεις και συναισθήματα που είναι παρόντα στο ανθρώπινο μυαλό. (Tall, McGowen DeMarois 2000.)

Στην περίπτωση του αριθμού τα ενσαρκωμένα αντικείμενα είναι οι διαδικασίες απαρίθμησης φυσικών αντικειμένων ή η αναπαράσταση του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων με σύμβολα όπως το ΙΙΙ ή ακόμα και το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός φυσικού αντικειμένου. Ενθυλακωμένες θεωρούνται οι έννοιες που αναπαριστώνται από αριθμητικά σύμβολα όπως το ‘3’ και έχουν προέλθει από την πολύπλοκη εξέλιξη των αντίστοιχων ενσαρκωμένων εννοιών.

Έτσι η έννοια των φυσικών αριθμών κατακτιέται σταδιακά μέσω της ενσαρκωμένης διαδικασίας της απαρίθμησης. Οι ρητοί αριθμοί κατανοούνται αρχικά ως αποτελέσματα μετρήσεων. Όμως κάποιοι αριθμοί όμως όπως οι απειροψήφιοι δεκαδικοί (επικεντρώνουμε στη μορφή τους και όχι στο αν είναι ρητοί ή άρρητοι) υφίστανται μόνο ως ενθυλακωμένες έννοιες, τουλάχιστον όσο παραμένουν στη μορφή αυτή. Αυτό γιατί από κανένα αποτέλεσμα μέτρησης δεν μπορεί να προκύψει ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός.

Αυτό θεωρούμε ότι αποτελεί ένα επιπλέον πρόβλημα στην κατανόησή τους αφού πρέπει να αντιμετωπιστούν εξ’ αρχής ως νοητικά αντικείμενα.

2.2.3 Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών

Τα στάδια ανάπτυξης μιας έννοιας

Τα στάδια αυτά κατά τη Sfard (1991) είναι τα εξής τρία: Η *Εσωτερίκευση (Interiozation), η συμπύκνωση (Condensation)* και η *Εκπραγμάτωση (Reification).*

Στο στάδιο της εσωτερίκευσης βρίσκεται ένας μαθητής όταν εκτελεί πράξεις, διαδικασίες με αντικείμενα που του είναι ήδη γνωστά. Καθώς το άτομο αποκτά οικειότητα με τέτοιες διαδικασίες φθάνει σ’ ένα σημείο όπου μπορεί να προβλέψει τι θα συμβεί, χωρίς να του είναι απαραίτητο να κάνει την πράξη. Στην περίπτωση αυτή έχει ‘εσωτερικεύσει’ μια συγκεκριμένη διαδικασία.

Στο στάδιο της Συμπύκνωσης βρίσκεται κάποιος όταν σύνθετες διαδικασίες συμπυκνώνονται σε μια απλή μορφή η οποία είναι εύκολο να την απομνημονεύσει. Στο στάδιο της συμπύκνωσης η ‘νέα’ έννοια είναι συνδεδεμένη με μια αλγοριθμική διαδικασία. Σημαντική πλευρά της συμπύκνωσης είναι η αυξανόμενη ικανότητα του ατόμου να κάνει συγκρίσεις, να γενικεύει, να αναγνωρίζει και να μεταβαίνει μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας.

Στο στάδιο της εκπραγμάτωσης μια μαθηματική έννοια εκλαμβάνεται ως πλήρες μαθηματικό αντικείμενο. Μια έννοια που έχει εκπραγματωθεί μπορεί να συσχετιστεί με αντίστοιχα αντικείμενα στα πλαίσια στα οποία αυτή συμμετέχει, συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά αυτών των πλαισίων.

APOS (Action-Process-Object-Schema)

Σε γενικές γραμμές η θεωρία APOS (Dubinsky, Ed. & Macdonald, M. 2006) υποστηρίζει ότι οι *δράσεις (actions)* σε φυσικά ή νοητά αντικείμενα *εσωτερικεύονται (interiorized)* σε *διεργασίες (processes)* οι οποίες στη συνέχεια *ενθυλακώνονται (ecapsulated)* σε *αντικείμενα (objects)*. Το τελικό στάδιο είναι η οργάνωση των διεργασιών και των αντικειμένων σε *σχήματα (schemas)*.

Δράση: Αντίδραση του υποκειμένου σε κάποιο γνωστικό ερέθισμα.

Διεργασία Ο στοχασμός και η εσωτερίκευση της δράσης.

Αντικείμενο: Ο στοχασμός πάνω στις λειτουργίες που εφαρμόζονται στη συγκεκριμένη διεργασία.

Σχήμα: Η σύνδεση των διεργασιών και των αντικειμένων.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε από ένα μαθητή του Δημοτικού να κάνει τη διαίρεση 1:3 και μας απαντάει ότι το πηλίκο είναι 0,3 με προσέγγιση δεκάτου, 0,33 με προσέγγιση εκατοστού, 0,333 με προσέγγιση χιλιοστού κ.ο.κ.

Όταν κάνει αρκετές παρόμοιες διαιρέσεις αποδέχεται πλέον χωρίς να πραγματοποιήσει τον αλγόριθμο της διαίρεσης ότι 1:3 = 0,333… δηλαδή ότι κάθε νέο δεκαδικό ψηφίο είναι 3 όσο και αν συνεχίσω την διαίρεση. Στη φάση αυτή ο μαθητής έχει εσωτερικεύσει την δράση της διαίρεσης και δεν χρειάζεται πλέον να την εκτελεί.

Αν σ’ έναν μαθητή του Λυκείου ρωτήσουμε σε ποιόν αριθμό πλησιάζουν οι όροι της ακολουθίας ($0,4-1/10^{\nu}$) καθώς ο φυσικός ν μεγαλώνει αυτός βρίσκεται στο στάδιο της δράσης όταν δίνει τιμές στο ν = 1, 2, 3, και παίρνει αποτελέσματα 0,3, 0,39, 0,399, και μας απαντάει ότι η όροι της ακολουθίας πλησιάζουν τον αριθμό 0,4.

Όταν ο μαθητής είναι ικανός να απαντήσει ότι οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν τον 0,4 χωρίς να βρει έναν έναν κάποιους όρους λέμε ότι εσωτερικεύσει τη δράση.

Όμοια αν σ' έναν φοιτητή του 1ου έτους ζητηθεί να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς 0,3+ 0,09+0,009+… γνωρίζοντας ότι από τον ορισμό ότι το άθροισμα της σειράς είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων αρχικά θα δράσει περίπου ως εξής:

$$0{,}3+0{,}09 = 0{,}3+\frac{9}{100} \qquad \text{ή } 0{,}3 + 0{,}09 = 0{,}39$$

$$0{,}3 + 0{,}09 + 0{,}009= 0{,}3 + \frac{9}{100}+\frac{9}{10^3} \qquad \text{ή } 0{,}3 + 0{,}09 + 0{,}009 = 0{,}399$$

Ο φοιτητής μετά από μερικά βήματα εσωτερικεύοντας τη δράση του, θα υιοθετήσει ότι το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 + … + 0,00…09 αν έχει n + 1 προσθετέους προκύπτει αποτέλεσμα 0,3999…9 με n εννιάρια.

Αν μπορεί να βλέπει το αποτέλεσμα χωρίς να χρειάζεται την αναλυτική εφαρμογή του αλγόριθμού τότε έχει εσωτερικεύσει τη δράση.

Όταν ο πρώτος μαθητής κατανοεί το σύμβολο 0,333… ως ολότητα και χωρίς ιδιαίτερες επεξηγήσεις, όταν γνωρίζει ότι εκφράζει έναν ρητό αριθμό μέλος ενός αριθμητικού συνόλου με συγκεκριμένη δομή και ιδιότητες, οποίος γράφεται και στην κλασματική μορφή 1/3, όταν μπορεί να μεταφερθεί από τη μια μορφή στην άλλη, όταν μπορεί να κάνει πράξεις με άλλους αριθμούς, όταν μπορεί να επιλέγει την κατάλληλη μορφή για την επίλυση ενός προβλήματος μπορούμε να πούμε ότι ο μαθητής έχει κατακτήσει το 0,3333… ως αντικείμενο.

Όταν ο δεύτερος μαθητής θεωρήσει τον αριθμό 0,3999… ως το όριο της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, 0,3999, … το οποίο ταυτίζεται με το 0,4 κατανοεί τον 0,3999… ως αντικείμενο στο πλαίσιο του ορίου ακολουθίας.

Όταν ο φοιτητής βλέπει ότι το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 + … = 0,3999… =

$$0{,}3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{9}{10^n} = 0{,}3+9\lim\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...+\frac{1}{10^n}\right) = 0{,}3+9\lim\frac{1}{10^2}\frac{\frac{1}{10^n}-1}{\frac{1}{10}-1} = 0{,}3+9\frac{1}{90} = 0{,}4$$

ως το αριθμητικό αποτέλεσμα των άπειρων προσθετέων τότε θεωρούμε ότι βλέπει το 0,3999… ως αντικείμενο στο πλαίσιο των σειρών.

Όταν κάποιος μπορεί να κινείται ευέλικτα από την μια θεώρηση στην άλλη χωρίς αντιφάσεις θεωρούμε ότι έχει ένα *σχήμα* για τον 0,3999… .

Procept (Process – concept)

Οι Gray & Tall (1994) διακρίνουν τον όρο *διαδικασία (procedure)* από τον όρο *διεργασία (process)*. Με τον όρο *διαδικασία (procedure)* περιγράφουν μια συγκεκριμένη ακολουθία βημάτων όπου πραγματοποιείται ένα βήμα κάθε φορά. Με τον όρο *διεργασία (process)* περιγράφουν έναν αριθμό *διαδικασιών (procedures)* που έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι στον όρο *διεργασία (process)* αποδίδεται ένας γενικότερο ρόλος. Για παράδειγμα υπάρχουν διαφορετικές *διαδικασίες (procedures)* για να βρούμε το άθροισμα 2 + 7 και όλες αυτές οι *διαδικασίες* συγκροτούν την *διεργασία (process)* της πρόσθεσης. Αντίστοιχα μπορούμε να μιλάμε για διαδικασίες εύρεσης ενός γινομένου και την διεργασία του πολλαπλασιασμού ή για τις διαδικασίες λύσης μιας εξίσωσης και την διεργασία επίλυσης εξισώσεων.

Οι Gray & Tall διακρίνουν επίσης στα μαθηματικά τις *διεργασίες (process)* που αναφέρονται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα, από τις *έννοιες (concepts)* που αφορούν στα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Πολλές φορές ένα σύμβολο εκφράζει άλλοτε μια *διεργασία* και άλλοτε μια *έννοια*. Όμως ενώ η χρησιμοποίηση του ίδιου συμβόλου αποτελεί ισχυρό εργαλείο για τα μαθηματικά αφού επιτυγχάνει να περικλείει στην ίδια έκφραση διαφορετικά νοήματα, από την άλλη αποτελεί πηγή δυσκολιών στην κατανόηση αυτή ακριβώς η δυνατότητα.

Έτσι οι Gray & Tall (1994) προτείνουν το όρο *διαδικασιοέννοια (procept)* για να περιγράψουν το δυϊσμό *διεργασιών (process)* και *εννοιών (concepts)* σε ένα όλο, με ένα κοινό συμβολισμό. Μια *διαδικασιοέννοια (procept)* αποτελείται από τρία συστατικά. Τις διεργασίες που παράγουν ένα μαθηματικό αντικείμενο, το ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο και το αντίστοιχο σύμβολο.

Έτσι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει είτε έναν ρητό αριθμό που είναι ίσος με τον 0,4, ο οποίος με τη σειρά του μπορεί να θεωρηθεί το αποτέλεσμα της διαιρετικής διαδικασίας. 4:10. είτε την διαδικασία υπολογισμού του ορίου της ακολουθία 0,3, 0,39, 0,399, …, είτε τη διαδικασία εύρεσης του αθροίσματος 0,3 + 0,09 + 0,009 + …

Αντίστοιχα ορίστηκε, η *διαδικασιοεννοιλογική σκέψη (proceptual thinking)* με την οποία περιγράφεται η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί ευέλικτα τον συμβολισμό είτε σαν διαδικασία είτε σαν έννοια, αλλάζοντας συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο και η *διαδικαστική σκέψη (procedural thinking)* που αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα και στον περιορισμό της εστίασης στο συσχετισμό δεδομένων και ζητούμενων σε μια διαδικασία.

Η διαφορά μεταξύ της διαδικασίας (procedure) και διαδικασιοέννοιας (procept) χαρακτηρίστηκε από τους Gray & Tall (1994) ως *διαδικασιοεννοιολογική διαίρεση (proceptual divide)* και θεωρήθηκε ως σημείο διακλάδωσης μεταξύ της ευέλικτης και της διαδικαστικής σκέψης που διακρίνει τους περισσότερο από τους λιγότερο επιτυχημένους μαθητές.

Φάσμα μαθηματικής απόδοσης

Οι Gray, E., Pitta, D., Pinto, M. and Tall D. (1999), πρότειναν ένα φάσμα απόδοσης των ατόμων όταν κάνουν μαθηματικά, διακρίνοντας τα εξής τρία επίπεδα: α) των *διαδικασιών (procedures)*, β) των *διεργασιών (process)* και γ) των *διαδικασιοεννοιών (*procepts).

Στο πρώτο επίπεδο των *διαδικασιών* εντάσσονται εκείνοι που εκτελούν συγκεκριμένες γνωστές αλγοριθμικές διαδικασίες μ' έναν συγκεκριμένο σκοπό. Κάποια άτομα αναπτύσσουν μια μεγαλύτερη ικανότητα καταφέρνοντας να χρησιμοποιούν εναλλακτικές διαδικασίες για την ίδια διεργασία. Μπορούν και επιλέγουν περισσότερο αποτελεσματικές διαδικασίες για να εκτελέσουν κάποια έργα γρήγορα και αποτελεσματικά. Αυτοί θεωρείται ότι ανήκουν στο επίπεδο των *διεργασιών*.

Για παράδειγμα για την εύρεση του αθροίσματος 2 + 7 στο επίπεδο των διαδικασιών ανήκουν τα παιδιά που μετράνε από το 1 προσθέτοντας 2 και 7 μονάδες ενώ στο επίπεδο των διεργασιών ανήκουν τα παιδιά που μπορούν να βρουν το άθροισμα προσθέτοντας 2 μονάδες στο 7 (που είναι ο μεγαλύτερος).

Στο τρίτο επίπεδο *(procept)* θεωρείται ότι βρίσκονται άτομα που μπορούν να χρησιμοποιούν τα σύμβολα για τον ευέλικτο χειρισμό διαδικασιών και εννοιών σ' ένα ανώτερο επίπεδο. Στο παράδειγμά μας στο επίπεδο αυτό ανήκουν τα παιδιά που έχουν την ικανότητα να βλέπουν το 2 + 7 σαν ένα αντικείμενο –σύμβολο, την ισότητα του με το 9 και κατανοούν την ισοδυναμία των πολλαπλών των διαδικασιών, διεργασιών που μπορεί να βρεθεί το άθροισμα αυτό.

Ανακεφαλαιώνοντας στο στάδιο των *διαδικασιών (procedural)* θεωρούνται αυτοί που μπορούν να κάνουν συγκεκριμένες αλγοριθμικές διαδικασίες, στο στάδιο των *διεργασιών (process)* είναι αυτοί που εκτελούν μαθηματικά με ευελιξία και αποτελεσματικότητα και στο *διαδικασιοεννοιολογικό (procept)* στάδιο είναι αυτοί που χρησιμοποιούν τα σύμβολα για τον ευέλικτο χειρισμό διεργασιών και εννοιών σ' ένα ανώτερο επίπεδο.

Οι Gray & Tall (2001) επεκτείνουν το προηγούμενο φάσμα απόδοσης στα μαθηματικά διασπώντας το πρώτο στάδιο των *διαδικασιών (procedures)* σε *προδιαδικασιών (pre-procedures)* και *διαδικασιών (procedures).* Διακρίνουν δηλαδή όσους προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα για το οποίο απαιτείται μόνο μια διαδικαστική προσέγγιση, σε αυτούς που τα καταφέρνουν και σε αυτούς που αποτυγχάνουν ή δίνουν μόνο ένα μέρος της λύσης. Οι πρώτοι θεωρούνται ότι ανήκουν στο *διαδικαστικό* στάδιο ενώ οι δεύτεροι στο *προδιαδικαστικό*.

Επισημαίνουν ότι η γνώση μιας συγκεκριμένης διαδικασίας επιτρέπει στον καθένα να κάνει έναν συγκεκριμένο υπολογισμό ή χειρισμό. Στο επίπεδο των *διεργασιών (process)* έχοντας μια ή περισσότερες εναλλακτικές διαθέσιμες διαδικασίες επιτρέπεται μεγαλύτερη ευελιξία και αποτελεσματικότητα για την επιλογή της κατάλληλης διαδρομής για έναν σκοπό. Επιτρέπεται επίσης η δυνατότητα ελέγχου μιας διαδικασίας κάθε φορά που έστω και ασυνείδητα επισημαίνεται ότι κάποιο λάθος έχει γίνει.

Ο Tall (2007) παρεμβάλλει ένα ακόμα επίπεδο στο φάσμα απόδοσης στα μαθηματικά ή αλλιώς του φάσματος αποτελεσμάτων αυξημένης συμπύκνωσης του συμβολισμού όπως χαρακτηριστικά το αναφέρει., μεταξύ του διαδικαστικού (procedural) και του *διεργασιακού (process)* το οποίο ονομάζει *πολυδιαδικαστικό (multiprocedure).* Επισημαίνει ότι κάποιοι μαθητές που θα βρουν δυσκολίες με τις διαδικασίες θα περιχαρακωθούν στο διαδικαστικό επίπεδο. Κάποιοι οι οποίοι θα χρησιμοποιήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις πιθανόν να οδηγηθούν σε αυξημένη αποτελεσματικότητα. Αυτοί θεωρείται ότι ανήκουν στο *πολυδιαδικαστικό (multiprocedure)* στάδιο. Η μετακίνηση από την διαδικασία στη διεργασία περικλείει τη μετάβαση της προσοχής από τα βήματα της διαδικασίας στο αποτέλεσμά της. Όσοι λοιπόν επικεντρώνουν στις διαδικασίες ως συνολικές διεργασίες μπορούν να οδηγηθούν σ' ένα επίπεδο πιο εκλεπτυσμένο απ' αυτό των διαδικαστικών λειτουργιών.

Ανακεφαλαιώνοντας το φάσμα της απόδοσης στα μαθηματικά περιλαμβάνει τα παρακάτω επίπεδα.

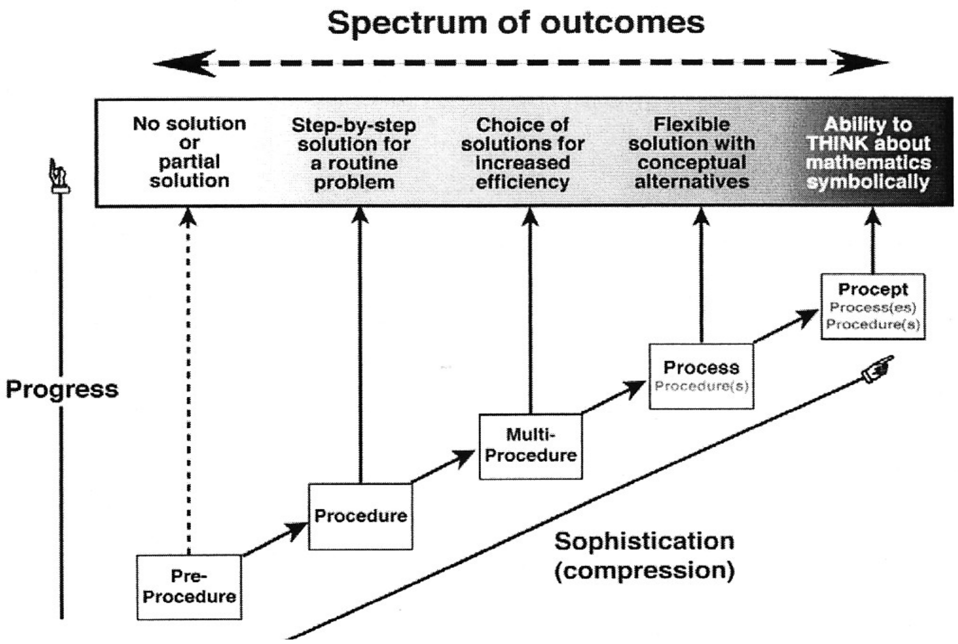
α) Προδιαδικαστικό (Pre-Procedure) στο οποίο ανήκουν όσοι αποτυγχάνουν να δώσουν μια λύση ή δίνουν μόνο ένα μέρος της λύσης.

β) Διαδικαστικό (Procedure) που περιλαμβάνει αυτούς που έχουν μια αλγοριθμική, βήμα προς βήμα σχετικά επιτυχημένη προσέγγιση.

γ) Πολυδιαδικαστικό (Multiprocedure) στο οποίο περιλαμβάνονται αυτοί που έχουν περισσότερο αποδοτικές προσεγγίσεις.

δ) Διεργασιακό (Process) όπου ανήκει κάποιος όταν έχει τη δυνατότητα εναλλακτικών προσεγγίσεων, ελέγχου πιθανών λαθών, σύγκρισης μεθόδων και επιλογή της βέλτιστης.

ε) Διαδικασιοεννοιολογικό (Procept) το οποίο περιλαμβάνει εκείνους που κατάφέρνουν ευέλικτο χειρισμός συμβόλων, για να εκφράσουν διεργασίες ή έννοιες ως όλο σε ανώτερη μορφή.



Φάσμα αποτελεσμάτων για την αυξανόμενη συμπίεση του συμβολισμού (Tall 2007).

2.3 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ

Οι ορισμοί μπορούν να διακριθούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες, στους *ονοματικούς ορισμούς (nominal definition)* και τους *ορισμούς περιεχομένου (real definition)*[1]

Ονοματικοί χαρακτηρίζονται οι ορισμοί οι οποίοι δεν προσδιορίζουν κατευθείαν το αντικείμενο που πρόκειται να ορίσουν αλλά ένα σύνολο ιδιοτήτων που αυτό

[1] R.Gorski (1981).

ικανοποιεί. Ορίζουν δηλαδή ένα αντικείμενο ορίζοντας μαζί και το πλαίσιο στο οποίο αυτό συμμετέχει και όχι το αντικείμενο καθ' αυτό.

Στους ορισμούς περιεχομένου ορίζεται το περιεχόμενο που αποδίδεται στο αντικείμενο που πρόκειται να οριστεί.

Για παράδειγμα στα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη έχουμε αρχικά ορισμούς α΄ και β΄ στο βιβλίο Ι που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ορισμοί περιεχομένου. 'Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν', 'Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές'. Στην αντίστοιχη όμως θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Hilbert το σημείο και η ευθεία δεν ορίζονται άμεσα αλλά μέσω των ομάδων αξιωμάτων τα πρέπει να ικανοποιούν.

Ακόμα και στα Στοιχεία από τον ορισμό γ΄ στο βιβλίο V: 'Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις', που είναι ένας ορισμός περιεχομένου περνάμε στον ορισμό δ΄: 'Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.', όπου δεν ορίζεται τι είναι λόγος αλλά πότε δυο μεγέθη έχουν λόγο. (Τ. Πατρώνης – Δ. Σπανός, 1996, σ. 259.)

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου V δεν χρησιμοποιούν τον ορισμό γ΄ αλλά τον ορισμό δ΄.

Αρκετά χρόνια αργότερα ο Newton ορίζει την παράγωγο ως 'έσχατο λόγο' ('ultimate ratio') μεταξύ δυο μεταβλητών ποσοτήτων που τείνουν στο μηδέν. Συγκεκριμένα αναφέρει: «Αυτοί οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι των εσχάτων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία πάντα τείνουν ποσότητες, που μειώνονται απεριόριστα, και προς τα οποία προσεγγίζουν πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, χωρίς ποτέ να τα ξεπερνούν, ούτε στην πραγματικότητα τα φτάνουν, αφού οι ποσότητες, μειώνονται επ' άπειρον». (Γιαννακούλιας, 2007, σ. 261.)

Έναν αιώνα περίπου αργότερα ο Cauchy δίνει τον εξής γενικό ορισμό του ορίου: «Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια σταθερή τιμή, από την οποία διαφέρουν τόσο λίγο, οσοδήποτε θα επιθυμούσε κανείς, αυτή η σταθερή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.» (Γιαννακούλιας, 2007, σ. 350.)

Στους δυο προηγούμενους ορισμούς διαφαίνεται μια προσπάθεια διαισθητικής και άμεσης περιγραφής των οριζόμενων αντικειμένων.

Σε αντίθεση με τους προηγούμενους ο Weierstrass (1815 – 1897) δίνει ένα 'στατικό' ορισμό για την συνεχή μεταβλητή σε αντίθεση με τον 'κινηματικό' ορισμό του Cauchy όπου η μεταβλητή 'πλησιάζει διαρκώς μια σταθερή τιμή': «Αν για κάθε τιμή

x_0 από ένα σύνολο και για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, οσοδήποτε μικρών, υπάρχουν στα διαστήματα $(x_0 - \delta_i , x_0 + \delta_i)$ και άλλοι αριθμοί από το σύνολο, τότε αυτή η τιμή x_0 λέγεται συνεχής.» (C. Boyer, 1949, σ. 286.)

Έτσι περάσαμε από τους ορισμούς περιεχομένου των Newton και Cauchy στους ονοματικούς ορισμούς του Weierstrass. Αντίστοιχα οι φοιτητές περνάνε από ένα μίγμα διαισθητικής και αλγοριθμικής προσέγγισης που καλλιεργείται στο σχολείο σε μια καθαρά θεωρητική που απαιτείται στο πανεπιστήμιο.

Αυτή την ανυπαρξία νοήματος στους ονοματικούς ορισμούς, για τους φοιτητές, καταδεικνύει η J. Grabiner (1980) με τον παρακάτω διάλογο που τοποθετεί στην προμετωπίδα του άρθρου της.

Φοιτητής: Το αυτοκίνητο τρέχει 50 μίλια την ώρα. Μου εξηγείτε τι σημαίνει αυτό;

Καθηγητής: Δοθέντος οιουδήποτε ε > 0 υπάρχει δ > 0 τοιούτον ώστε, εάν

$|t_1 - t_2| < \delta$ τότε $\left|\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\right| < \varepsilon$.

Φοιτητής: Πώς στο καλό βρέθηκαν άνθρωποι να σκεφτούν μια τέτοια απάντηση;

Ο Dedekind (1963) αναφέρεται σ' αυτή τη σχέση διαίσθησης και θεωρητικής θεμελίωσης στον πρόλογο του άρθρου του ‘Continuity and Irrational numbers’ για την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα αναφέρει:

«Κατά τη συζήτηση της έννοιας της προσέγγισης μιας μεταβλητής ποσότητας προς μια οριακή τιμή, και ιδιαιτέρως κατά την απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε μέγεθος / ποσότητα που αυξάνεται συνεχώς, αλλά όχι πέρα κάποιου ορίου, πρέπει κατ' ανάγκη να προσεγγίζει μια οριακή τιμή, κατέφυγα στη γεωμετρική μαρτυρία. Ακόμη και τώρα θεωρώ ότι η προσφυγή στη γεωμετρική εποπτεία κατά την πρώτη παρουσίαση του διαφορικού λογισμού είναι εξαιρετικά χρήσιμη από διδακτική σκοπιά, και ουσιαστικά αναγκαία, αν δεν θέλει να χάσει κανείς πολύ χρόνο. Αλλά κανείς δεν θα μπορούσε να αρνηθεί ότι αυτός ο τρόπος εισαγωγής στο διαφορικό λογισμό δεν είναι επιστημονικός. Προσωπικά αισθανόμουνα αυτή τη δυσφορία τόσο έντονα ώστε υποσχέθηκα στον εαυτό μου να συνεχίσω να σκέφτομαι πάνω στο ζήτημα μέχρι να μπορέσω να βρω ένα καθαρά αριθμητικό και εντελώς αυστηρό θεμέλιο των αρχών του απειροστικού λογισμού» (στο Ρουσόπουλος, 1991, σ. 215).

Ο Dedekind στο σημείο αυτό διαπιστώνει ότι μια βασική πρόταση του λογισμού είχε κυρίως διαισθητική βάση που προερχόταν από την γεωμετρική εποπτεία. Αναγνωρίζει την αναγκαιότητα της διαισθητικής βάσης μιας έννοιας όπως επίσης και την ταυτόχρονη άρνηση της διαισθητικής αυτής βάσης με σκοπό μια περισσότερο αναλυτική, αριθμητική θεμελίωση.

Οι ρητοί αριθμοί κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Ως μέρος ενός όλου, ως λόγος ομοειδών μεγεθών, ως πηλίκο μιας διαίρεσης ακεραίων, ως τελεστής και ως αποτέλεσμα μέτρησης. Οι μορφές αυτές του ρητού αριθμού θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελούν ορισμούς περιεχομένου.

Από την άλλη οι ρητοί αριθμοί ορίζονται και ως μέλη ενός συνόλου που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες. Δηλαδή ενός συνόλου με συγκεκριμένη δομή θεωρητικά θεμελιωμένη. Αυτή η θεμελίωση αποτελεί τον ονοματικό ορισμό τους.

2.4 ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Οι μαθητές διδάσκονται τους ρητούς αριθμούς που συμβολίζονται στην κλασματική τους μορφή α/β, ως το πηλίκο της διαίρεσης α:β όπου α, β ακέραιοι και β διαφορετικός του 0. Έτσι ο ρητός αριθμός ορίζεται ως το αποτέλεσμα μιας διαιρετικής διαδικασίας. Όταν εκτελεστεί μια τέτοια διαίρεση, το πηλίκο εμφανίζεται στη μορφή δεκαδικού αριθμού στις εξής δυο εκδοχές. Είτε έχει πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία είτε έχει άπειρα μη μηδενικά τα οποία όμως επαναλαμβάνονται περιοδικά.

Για την πρώτη περίπτωση όπως για παράδειγμα ο 0,4 εκτός από την 'στεγνή'[1] γλωσσική έκφραση 'μηδέν κόμμα τέσσερα' υπάρχει και η έκφραση 'τέσσερα δέκατα' με την οποία αποδίδεται και το ετυμολογικό νόημα των ρητών αριθμών, που είναι αυτοί οι οποίοι μπορούν να ειπωθούν. Εκτός αυτού φαίνεται και η άμεση αντιστοιχία με την κλασματική αναπαράσταση του αριθμού.

Οι ίδιοι αυτοί αριθμοί όμως που στη δεκαδική τους μορφή έχουν πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία, έχουν και μια άλλη αναπαράσταση με άπειρα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία. Έτσι ο αριθμός 0,4 έχει και την αναπαράσταση 0,3999… η οποία δεν έχει αντίστοιχη λεκτική έκφραση.

Το πιο γνωστό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης είναι ο αριθμός 1 στη μορφή 0,999… (άπειρα 9). Αντίστροφα οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διδάσκονται, τεχνικές μετατροπής των δεκαδικών μορφών των ρητών αριθμών στις αντίστοιχες κλασματικές, σε μια προσπάθεια να κατανοήσουν ότι έχουμε διαφορετικές μορ-

[1] Πατρώνης, Τ. - Σπανός, Δ. (1996), σ. 271.

φές (κλασματική και δεκαδική) μιας έννοιας, αυτής του ρητού αριθμού. Παρά τη διδασκαλία τα αποτελέσματα δεν είναι και τόσο ενθαρρυντικά.

Αρκετοί μαθητές αλλά και φοιτητές παιδαγωγικών σχολών δεν κατανοούν πλήρως την σχέση ανάμεσα σε έναν επαναλαμβανόμενο δεκαδικό και το κλάσμα ή τον ακέραιο αριθμό στον οποίο αντιστοιχεί. Για παράδειγμα, πολλοί βλέπουν τον επαναλαμβανόμενο δεκαδικό ως μία αλληλουχία ψηφίων χωρίς τέλος που προκύπτει από τη μακρά διαίρεση ορισμένων τύπων κλασμάτων. (Edwards & Ward, 2004).

Αν και είναι η ορθή η σύλληψη αυτή, είναι περιορισμένη. Δεν οδηγεί στην κατανόηση ότι ένα κλάσμα και ο αντίστοιχος δεκαδικός είναι δύο εκφράσεις του ίδιου αριθμού. Αν κάνεις πράξεις με αυτούς, οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα. Όταν τους συγκρίνεις με άλλους αριθμούς, συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Και στον άξονα των αριθμών καταλαμβάνουν την ίδια στατική θέση.

Σε μία μελέτη του τρόπου που χρησιμοποιούν τους ορισμούς οι μαθητές, οι Edwards και Ward (2004) περιγράφουν μία συνέντευξη με έναν φοιτητή πραγματικής ανάλυσης ο οποίος, παρόλο ότι του δόθηκε ο ορισμός ενός δεκαδικού με άπειρα ψηφία, ισχυρίζεται ότι το 0,999… δεν ισούται με το 1 επειδή το 0,999… δεν μπορεί να προκύψει από το πρόβλημα διαίρεσης 1/1. Από την άλλη, ο μαθητής πιστεύει ότι 1/3=0,333… ακριβώς επειδή το 0,333… προκύπτει από το 1/3 αν διαιρέσουμε το 1 με το 3. Μία ερμηνεία, αυτής της πεποίθησης, είναι ότι οι μαθητές αποδέχονται πιο εύκολα την ισότητα 1/3 = 0,333… επειδή βλέπουν τόσο το 1/3 όσο και το 0,333… ως διαδικασίες. Το 1/3 ως τη διαδικασία της διαίρεσης 1:3 και το 0,333… ως τη διαδικασία συνεχούς προσθήκης του αριθμού 3. Στην περίπτωση του 0,999… και του 1, βλέπουν το πρώτο ως διαδικασία και το δεύτερο ως αντικείμενο.

Σε έρευνα για τη συλλογιστική των φοιτητών παιδαγωγικών σχολών, ο de Castro (2004) βρήκε ότι η μετατροπή επαναλαμβανόμενων δεκαδικών σε κλάσματα, αποδείχτηκε ότι ήταν η πιο δύσκολη.

Οι Giannakoulias, Souyoul, Zachariades (2005) βρίσκουν ότι η σύγκριση των αριθμών 2.999… και 3 αντιμετωπίζεται ως η δυσκολότερη ερώτηση ενός ερωτηματολογίου που απευθύνεται σε 215 φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Το 29% των φοιτητών αυτών θεωρεί ότι ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρα ψηφία είναι άρρητος ανεξάρτητα από το αν αυτά επαναλαμβάνονται περιοδικά ή όχι. Και σε αυτή την έρευνα ρητός θεωρείται, από το 1/3 των φοιτητών, ο δεκαδικός που έχει πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών μη μηδενικών ψηφίων, ενώ από κάποιους άλλους μαθητές μόνο ένας τέτοιος δεκαδικός θεωρείται πραγματικός αριθμός.

Οι Fischbein, E., Jehiam, R. & D. Cohen, (1995) σε έρευνά τους ανάμεσα σε μαθητές και μελλοντικούς δασκάλους, που διδάσκονταν Μαθηματικά, διαπίστωσαν ότι το συχνότερο λάθος, ανάμεσα σε αυτούς που έδωσαν λανθασμένο ορισμό του ρητού αριθμού όταν τους ζητήθηκε, ήταν «ο δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων». Οι μαθητές μάλιστα στην έρευνα αυτή εστίαζαν στον χαρακτηρισμό του ρητού ως «θετικό», συνέδεαν τους άρρητους με τους αρνητικούς και τους απειροψήφιους δεκαδικούς με τους άρρητους.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών φαίνονται να απότελούν πηγή παρανοήσεων για τους μαθητές, ακόμα και για φοιτητές μαθηματικών τμημάτων. Επίσης, η χρήση των δεκαδικών αριθμών, ως άλλη μορφή αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών, σε κάποιους μαθητές παρουσιάζει προβλήματα (Giannakoulias et al (2005)).

Ο Moseley (2005), μετά από έρευνα, συμπεραίνει ότι οι μαθητές που εκπαιδεύονται σε μία μόνο οπτική των ρητών (συνήθως στο σχήμα του ρητού ως μέρος – όλου) και περνούν σε άλλη οπτική, αφού αποκτήσουν ένα επίπεδο ικανότητας, οικοδομούν γνώσεις που φαίνονται να παραμένουν ασύνδετες. Η πολλαπλότητα των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών, σε αντίθεση με την εμμονή στο σχήμα του ρητού ως μέρος – όλου, ενδεχομένως διευκολύνει τους μαθητές να σχηματίσουν μια πιο δομημένη εικόνα της περιοχής των ρητών.

Σχετικά με την ευθεία των αριθμών η Κολέζα (2000) σημειώνει ότι η αριθμογραμμή απαιτεί τον συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης: οπτικής και συμβολικής (διότι ένα σημείο έχει αριθμητικό νόημα από τη στιγμή που θα καθορισθεί το νόημα δύο τουλάχιστον άλλων σημείων αναφοράς π.χ. αυτού που αντιστοιχεί στο 0 και αυτού που αντιστοιχεί στο 1) και ότι η δυσκολία χρήσης της οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας που περιέχεται σε αυτές τις δύο μορφές αναπαράστασης (και Γαγάτσης κ.ά. 2004). Οι Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007) βρίσκει ότι για κάποιους μαθητές το ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα σύνολο διακεκριμένων σημείων και αναφερόμενοι σε συγκεκριμένες έρευνες σημειώνουν ότι η επίμονη ιδέα της διακριτότητας και η αρχή του επόμενου που διέπει τους φυσικούς αριθμούς, είναι εμπόδιο στην κατανόηση της πυκνότητας (και Γαγάτσης κ.ά. 2004). Επίσης, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών είναι για κάποιους μαθητές διαφορετικοί αριθμοί, γεγονός που τους οδηγεί να θεωρούν τους ρητούς ως ένα σύνολο διαφορετικών μη συσχετιζόμενων αριθμών (ακεραίων, δεκαδικών, κλασμάτων). Επιχειρηματολογεί ότι η αριθμογραμμή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι για παράδειγμα, 0.5 και 1/2 είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού από την στιγμή που αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο. Η έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών, ιδιαίτερα επειδή δεν εμπλέκεται σε αυτήν κανένας συμβολισμός, μπορεί να γίνει περισσότερο αποδεκτή από τους μαθητές ως πυκνότητα σημείων, αφού, σύμφωνα με έρευνες, τεκμηριώνει ότι οι μαθητές δέχονται πιο εύκολα ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει άπειρα σημεία παρά ότι ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών έχει άπειρους αριθμούς. Επίσης παρουσιάζει αποτελέσματα ερευνών σύμφωνα με τα οποία οι δύο όψεις της πυκνότητας, δηλαδή η απειρία των ενδιάμεσων (αριθμών ή σημείων) και η μη ύπαρξη άμεσα επόμενου (αριθμού ή σημείου), μπορεί να μην είναι ισοδύναμες για τους μαθητές. Ευρήματα ερευνών που παραθέτουν δείχνουν ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ευθείας βοηθούν και σε αυτήν την κατεύθυνση, αφού οι μαθητές φαίνεται να δέχονται σε μεγαλύτερο ποσοστό την απειρία των σημείων παρά των αριθμών.

Η Artigue (2000), θεωρεί ότι ακόμα και αν οι μαθητές αναγνωρίζουν την διάταξη των πραγματικών αριθμών ως μία πυκνή διάταξη, ανάλογα με το πλαίσιο, μπορούν να συμβιβάσουν αυτή την ιδιότητα με την ύπαρξη αριθμών ακριβώς πριν ή ακριβώς μετά από έναν δεδομένο αριθμό, π.χ. ο αριθμός 0,999… συχνά χαρακτηρίζεται ως ο αριθμός ακριβώς πριν το 1.

Μπορεί κανείς να αντιτείνει ότι οι επαναλαμβανόμενοι δεκαδικοί θα γίνουν πιο ουσιαστικά κατανοητοί αν εφαρμοστεί η μαθηματική σύλληψη του ορίου. Όντως, ένας επαναλαμβανόμενος δεκαδικός όπως ο 1,646464… είναι το όριο της ακολουθίας 1,64, 1,6464, 1,646464, ... Διαφορετικά θα μπορούσε να εκφραστεί ως το άθροισμα 1,64 + 0,0064 + 0,000064,… .Ωστόσο, πολλές αναφορές και μελέτες (Artigue, 2000, Sierpinska, 1985) τεκμηριώνουν ότι οι σπουδαστές πανεπιστημίων, ακόμη κι αυτοί που έχουν ολοκληρώσει μαθήματα απειροστικού λογισμού, δυσκολεύονται με τη σύλληψη του ορίου και της σειράς.

Αρκετές μελέτες καταγράφουν τις δυσκολίες των μαθητών ως προς την σχέση του 0,9 με το 1. Οι Tall και Schwarzenberger (1978) ρώτησαν πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικών σχολών αν το 0.999… ισούται με το 1. Η πλειονότητα των φοιτητών πίστευαν ότι το 0,999… είναι μικρότερο του 1. Οι Tall και Schwarzenberger πρότειναν διάφορες πιθανές ερμηνείες: α) έλλειψη κατανόησης της έννοιας του ορίου, β) παρανόηση του συμβόλου 0,999… ως μία μεγάλη αλλά πεπερασμένη σειρά από εννιάρια, γ) ότι σκέφτονται με όρους απειροελαχίστων και δ) σύγχυση ως προς το γεγονός ότι δύο διαφορετικοί δεκαδικοί μπορεί να ανταποκρίνονται στον ίδιο ρητό αριθμό.

Αυτά τα ευρήματα συμπίπτουν με τις θεωρητικές αναλύσεις που προσφέρουν οι Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M. A. & Brown, A. (2005 a, b). Οι συγγραφείς απαντώντας σε ιστορικά επιχειρήματα σχετικά με το δυνητικό και το καθ' αυτό άπειρο θεωρούν ότι εκφράζουν δύο διαφορετικές συλλήψεις που συνδέονται με τον νοητικό μηχανισμό της *ενθυλάκωσης (encapsulation)*. Το ενδεχόμενο άπειρο, η έννοια του απείρου όπως παρουσιάζεται με το πέρασμα του χρόνου, είναι η έννοια του απείρου ως διαδικασία. Επειδή μία άπειρη διαδικασία δεν έχει τελικό στάδιο, και επομένως δεν προσφέρει εμφανείς ενδείξεις ολοκλήρωσης, η ικανότητα να σκεφτεί κάποιος μία άπειρη διαδικασία ως νοητώς ολοκληρωμένη είναι κρίσιμο βήμα προκειμένου να προχωρήσει πέρα από το σημείο του καθαρού ενδεχόμενου. Όταν το άτομο σκέφτεται μία άπειρη διαδικασία ως ολοκληρωμένη, μπορεί να την αντιληφθεί ως μία ολότητα, μία και μόνη διαδικασία αποδεσμευμένη από χρονικούς περιορισμούς. Στο σημείο αυτό, το άτομο μπορεί να εφαρμόσει τον μηχανισμό της *ενθυλάκωσης* για να μετασχηματίσει τη διαδικασία σε νοητικό αντικείμενο. Έτσι έχουμε ένα παράδειγμα καθ' αυτού απείρου.

Οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τις ιδέες αυτές για να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες των ατόμων με το 0,999… και το 1. Ένα άτομο μπορεί να σκεφτεί το 0,999… ως μία διαδικασία, μία δυναμική άποψη της συνεχούς προσθήκης εννιαριών, ενώ αντιλαμβάνεται τον αριθμό 1 ως ένα νοητικό αντικείμενο, μία στατική μονάδα που μπορεί να μετασχηματιστεί. Με δεδομένο ότι δεν είναι εύκολο, τουλάχιστον σε νοητικό επίπεδο, να συγκριθεί μία δυναμική διαδικασία με ένα στατικό αντικείμενο, το άτομο αυτό που σκέφτεται το 0,999… ως διαδικασία και το 1 ως ένα νοητικό αντικείμενο, δεν μπορεί να τα θεωρήσει ίσα. Εναλλακτικά, ένα άτομο μπορεί να θεωρεί έναν δεκαδικό με άπειρα ψηφία ως ατελή διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή, ο επαναλαμβανόμενος δεκαδικός είναι μία πεπερασμένη σειρά ψηφίων με ακαθόριστο μήκος. Με μία τέτοια θεώρηση, θα θεωρούσε κανείς ότι το 0,999… έχει μία απειροελάχιστη διαφορά με το 1 αλλά έχει διαφορά.

Στο 4^{ο} συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε) η Γ. Μαμωνά (1987-88) παρουσιάζει κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις Άγγλων μαθητών που παρακολουθούσαν μαθήματα στο 2^{ο} έτος του προπαρασκευαστικού κολεγίου A Level στην ερώτηση 'Είναι η ισότητα 0,999… = 1 σωστή ή λάθος και γιατί;' Μερικές από τις απαντήσεις ήταν:

1. 'Ναι η διαφορά του 0,999… από τον 1 είναι $\frac{1}{\infty}$, που είναι 0.

2. 'Όχι, 0,999… είναι ο πλησιέστερος στον 1 αλλά δεν είναι ακριβώς 1'.
3. 'Ο αριθμός 0,999… θα πλησιάζει τον αριθμό 1 όλο και πιο κοντά όσο περισσότερα 9 έχουμε, έτσι όταν έχουμε ένα άπειρο πλήθος από 9 τότε ο 0,999… θα εξισωθεί με τον 1'.
4. 'Η διαφορά τους θα είναι εξαιρετικά μικρή, αλλά υπάρχει ακόμη μια διαφορά που θα μπορούσε κανείς να γράψει'.
5. '0,999… =1 είναι λάθος, αφού ο 0,999… είναι άρρητος ενώ ο 1 είναι ρητός αριθμός'.
6. '0,999… =1 είναι σωστό γιατί στρογγυλεύουμε τον 0,999…'.
7. 'Η ισότητα είναι λάθος, αν και οριακά μπορεί να πει κανείς ότι είναι σωστή, ωστόσο ο αριθμός 0,999… ποτέ δεν θα φτάσει ακριβώς τον 1, αλλά θα είναι πάντα κατά μια πολύ μικρή ποσότητα μικρότερος από τον 1'.
8. 'Η ισότητα 0,999… = 1 είναι λάθος … θα υπάρχει πάντα το 0,000…1 που πρέπει να προστεθεί για να γίνει το 0,999… ίσο με 1'.

Η ίδια ερώτηση δόθηκε ως πρώτη και σε Έλληνες μαθητές της Γ' Λυκείου που είχαν επιλέξει την 1η Δέσμη. Ως δεύτερη δόθηκε η εξής ερώτηση: 'Είναι η ισότητα 0,333… = 1/3 σωστή ή λάθος και γιατί;'. Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις ήταν οι εξής:

1. 'Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί το πηλίκο 1/3 εκφράζεται σαν 0,333… στη δεκαδική του μορφή. Από την άλλη μεριά όμως δε νομίζω ότι η ισότητα 0,999… είναι αληθής, αν και μπορεί κανείς να παραδεχθεί ότι 0,999… τείνει στο 1 χωρίς όμως να γίνεται 1'.

2. 'Η δεύτερη ισότητα 0,333… = 1/3 ισχύει γιατί ο αριθμός 0,333… είναι το πηλίκο της διαίρεσης 1:3. Αλλά το γινόμενο 0,333…·3 = 0,999… ≠ 0. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αριθμός 0,333… και το γινόμενό του με οποιονδήποτε ρητό, π.χ. τον 3 θα δώσει έναν άρρητο αριθμό σαν αποτέλεσμα. Παρόλα αυτά ο 0,999… είναι πολύ καλή προσέγγιση του 1, ιδιαίτερα για ασκήσεις που δεν χρειάζεται να είμαστε απόλυτα ακριβείς'.

3. 'Οι δυο ισότητες δεν είναι σωστές. Οι αριθμοί 0,999… και 0,333… πλησιάζουν τους αριθμούς 1 και 1/3 άπειρα κοντά, αλλά δεν μπορούν να τους φτάσουν και να πάρουν αυτές τις συγκεκριμένες τιμές, δηλ. οι 1 και 1/3 έχουν μια ορισμένη τιμή αλλά οι 0,333… και 0,999… δεν είναι ορισμένοι'.

4. '1:3, έτσι 0,333… = 1/3. Παίρνω α = 0,999… $\Rightarrow$ 10 α = 9,999… $\Rightarrow$ 10 α – α = 9 $\Rightarrow$ 9 α = 9 $\Rightarrow$ α = 1 δηλ. 0,999… = 1'.

5. 'Η ισότητα 0,333… = 1/3 ισχύει γιατί καθώς ο αριθμός 3 επαναλαμβάνεται άπειρες φορές το 0,333… τείνει να είναι λίγο πολύ ίσο με το 1/3. Το ίδιο για τον αριθμό 0,999… γιατί 0,999… = $\frac{999...}{1000...}$ τείνει να εξισωθεί με τον αριθμό $\frac{1000...}{1000...}$ γιατί η διαφορά του 0,999… από τον 1,000… δηλ. 0,000…1 είναι απειροελάχιστη και τείνει στο μηδέν'.

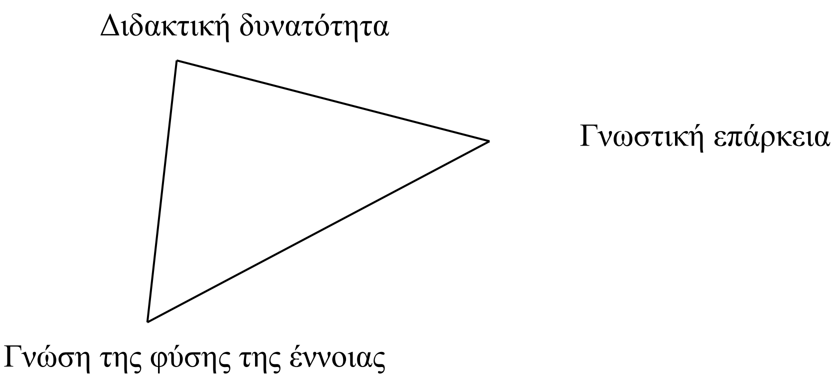
6. Οι δυο ισότητες ισχύουν, γιατί εάν ήταν 0,333… $\neq$ 1/3 και 0,999… $\neq$ 1 θα είχαμε άλλους αριθμούς α, β $\in \Re$ τέτοιους ώστε α = 1/3 – 0,333… και β = 1 – 0,999… . Αν όμως προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τους α και β θα διαπιστώσουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν, μιας και πάντα θα υπάρχει ένας άλλος αριθμός που θα φέρνει τον 0,333… πιο κοντά στον 1/3 απ' ότι ο α και τον 0,999… πιο κοντά στον 1 απ' ότι ο β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Η ΕΡΕΥΝΑ

3.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ως έναν από τους γενικούς σκοπούς των ερευνών για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, θεωρούμε την διερεύνηση για το πώς ανταποκρίνονται οι συμμετέχοντες στην έρευνα, (με στόχο να βγάλουμε γενικότερα συμπεράσματα) σε σχέση με μια μαθηματική έννοια, ως προς το τρίπτυχο που σχηματικά παριστάνουμε με το παρακάτω τρίγωνο.



Θεωρούμε ότι οι τρεις αυτοί παράγοντες δεν είναι διακριτοί μεταξύ τους, ούτε και ταυτίζονται αλλά αλληλοεπηρεάζονται. Θα κάνουμε μια πρώτη προσπάθεια περιγραφής των βασικών χαρακτηριστικών αυτών των τριών παραγόντων προσπαθώντας να εξετάσουμε τα κοινά και μη κοινά τους χαρακτηριστικά καθώς και τους τρόπους που επηρεάζει ο ένας τον άλλο.

Θεωρούμε ότι ο παράγοντας που ονομάζουμε ‘γνώση της φύσης της έννοιας’ περιλαμβάνει χαρακτηριστικά όπως τα παρακάτω:

α) Γνώση των διαισθητικών αναφορών της μαθηματικής έννοιας. Δηλαδή εκείνων των χαρακτηριστικών τη έννοιας που υπάρχουν στον embodied κόσμο των μαθηματικών, όπως διαγράμματα, σχέδια, εικόνες ή περιγραφές που αναφέρονται στον πραγματικό κόσμο και γίνονται κατανοητές δια μέσου των αισθήσεων.

β) Φιλοσοφική προσέγγιση της έννοιας. Δηλαδή θεμάτων που σχετίζονται με τον κόσμο στον οποίο εντάσσεται η μαθηματική έννοια (πραγματικό ή νοητικό) ή την σχέση εξάρτησής της με αυτόν που προσπαθεί να την κατανοήσει.

γ) Ιστορική γνώση της εξέλιξης της έννοιας. Δηλαδή γνώση εκείνων των χαρακτηριστικών της έννοιας που αναπτύχθηκαν και άλλων που υπαναχώρησαν κατά την ιστορική πορεία ανάπτυξης της έννοιας, καθώς και των βασικών αιτιών που συνέβη αυτό.

δ) Γνώση του ρόλου των συμβόλων στην αναπαράσταση της έννοιας και του τρόπου που επιδρούν στην ερμηνεία της.

ε) Η συσχέτισή της με άλλες έννοιες που ενυπάρχουν σ' αυτή που εξετάζουμε ή σχετίζονται μαζί της.

Ο παράγοντας που ονομάζουμε 'γνωστική επάρκεια' καθορίζεται από χαρακτηριστικά όπως τα παρακάτω:

α) Γνώση των διαφορετικών περιοχών στις οποίες εντάσσεται η έννοια και του τρόπου ένταξής της σ' αυτές τις περιοχές.

β) Γνώση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας, αντίστοιχη χρησιμοποίηση των συμβόλων και τρόπων μετάβασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Επιλογή της κατάλληλης αναπαράστασης κατά την διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Ο όρος 'διδακτική δυνατότητα της έννοιας' θεωρούμε ότι συγκροτείται από χαρακτηριστικά όπως:

α) Γνώση όσων έχουν διδαχθεί και όσων θα διδαχθούν οι μαθητές σχετικά με την έννοια.

β) Κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών, αναγνώρισης των θετικών σημείων της άποψής τους και δυνατότητα επέκτασή τους.

γ) Αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών και δυνατότητα εκπόνησης διδακτικών καταστάσεων με την ενεργή συμμετοχή των μαθητών, για την υπέρβασή των διαπιστωμένων παρανοήσεών τους.

δ) Δυνατότητα εύρεσης παραδειγμάτων για την επεξήγηση μιας πρότασης ή αντιπαραδειγμάτων για αναίρεσή της.

Θα επισημάνουμε μια ακόμα φορά την αλληλοτροφοδότητση των τριών αυτών παραγόντων. Έτσι η γνώση της φύσης μιας έννοιας θα μας επιτρέψει να προτείνουμε παραδείγματα διαισθητικά κατανοητά στους μαθητές και η γνώση της έννοιας θα μας δώσει την δυνατότητα για την ανάδειξη των περιορισμών της διαίσθησης, προβάλλοντας την αναγκαιότητα υπέρβασης της.

Επίσης πρέπει να σημειώσουμε και τη σχετική διάκριση των τριών αυτών παραγόντων σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης του μύθου που λέει πως ‘όταν γνωρίζεις μια έννοια μπορείς και να τη διδάξεις’. Φυσικά και είναι απαραίτητη προϋπόθεση η γνώση μιας έννοιας για να μπορεί κάποιος να την διδάξει αλλά η διδασκαλία μιας έννοιας περιλαμβάνει και κάποιους ιδιαίτερους παράγοντες. Ένα μέρος αυτών αναφέραμε παραπάνω και θεωρούμε ότι δεν προκύπτουν απαραίτητα με τη γνώση μιας έννοιας. Θεωρούμε επίσης ότι η ενασχόληση με τη συγκρότηση μιας διδακτικής πρότασης για κάποια έννοια συμβάλλει ουσιαστικά στην καλύτερη κατανόηση της ίδιας της έννοιας.

Για κάποιες έννοιες όπως αυτή που εξετάσαμε στην έρευνά μας θεωρούμε ότι οι τρεις παράγοντες του τρίπτυχου που αναπτύξαμε παρουσιάζουν υψηλό βαθμό συσχέτισης.

Στην κατεύθυνση της διερεύνησης του τρόπου ανταπόκρισης στο τρίπτυχο που αναπτύξαμε προηγουμένως, εξετάσαμε στην παρούσα εμπειρική έρευνα, τους φοιτητές του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών, σχετικά με την έννοια των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Αντιμετωπίσαμε τους φοιτητές ως εν δυνάμει καθηγητές μαθηματικών επειδή ένα σημαντικό μέρος των φοιτητών του μαθηματικού τμήματος ασχολούνται επαγγελματικά ως εκπαιδευτικοί αλλά και επειδή η επιλογή του δείγματος έγινε από τους φοιτητές που είχαν επιλέξει ένα μάθημα Διδακτικής των μαθηματικών.

Συγκεκριμένα, στόχοι της παρούσας ερευνητικής μελέτης είναι η καταγραφή, η κατανόηση και η ερμηνεία των απόψεων των φοιτητών σχετικά, με τη φύση ρητών αριθμών, που έχουν διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Θέλαμε να διερευνήσουμε κατά πόσο η αναπαράσταση ενός τέτοιου αριθμού επηρεάζει την τοποθέτηση των φοιτητών σχετικά με η φύση του μαθηματικού αντικειμένου.

Επιθυμία μας ήταν οι φοιτητές να τοποθετηθούν σχετικά με το αν θεωρούν μια δεκαδική αναπαράσταση ρητού αριθμού με άπειρα εννέα ως αριθμό ή διαδικασία και πως συσχετίζουν αυτή τη δεκαδική αναπαράσταση με την ισοδύναμή της που έχει πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία.. Επίσης κατά πόσο συσχετίζουν την αναπαράσταση αυτή με οριακές διαδικασίες.

Εξετάσαμε επίσης την ικανότητα των φοιτητών θεωρώντας τους ως μελλοντικούς καθηγητές. ελέγχοντας:

α) την δυνατότητα τους να ανιχνεύσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών του σεναρίου, καθώς και την δυνατότητα διάκρισης θετικών σημείων και παρανοήσεων στις απόψεις των μαθητών αυτών,

β) την δυνατότητα των φοιτητών να κάνουν κάποιες διδακτικές προτάσεις στους μαθητές του σεναρίου με βάση τις παρανοήσεις που έχουν αναφέρει.

Στην εργασία επίσης επιδιώξαμε τον έλεγχο της γνωστικής ικανότητας των συμμετεχόντων στην έρευνα και την ταξινόμησή τους στο φάσμα των μαθηματικών ικανοτήτων του Tall. Ο έλεγχος αυτός δεν έγινε όπως συνήθως, καλώντας τους φοιτητές να λύσουν κάποιο τυπικό μαθηματικό πρόβλημα αλλά μέσα από την δυνατότητα κριτικής τοποθέτησης για τις γνώμες των μαθητών ενός σεναρίου. Χωρίς να θέλουμε να υποβαθμίσουμε τον ιδιαίτερα σημαντικό για τα μαθηματικά ρόλο της επίλυσης προβλήματος, θεωρούμε ότι η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας για γνώμες που αφορούν συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα και τη διδακτική τους συνεισφέρει ουσιαστικά στη μαθηματική κατανόηση και στην αντιμετώπιση διδακτικών προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό πρέπει να δηλώσουμε τις επιφυλάξεις μας σχετικά με τα συμπεράσματα που θα προκύψουν για την δυνατότητα ανταπόκρισης των φοιτητών στους προαναφερόμενους παράγοντες με βάση τις απαντήσεις τους σ’ ένα ερωτηματολόγιο. Θεωρούμε δηλαδή ότι απαιτούνται περισσότερα ερευνητικά δεδομένα για να έχουμε πλήρη εικόνα για το βαθμό ανταπόκρισης των συμμετεχόντων στους παράγοντες που αναφέραμε.

Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι για να γνωρίζουμε με μεγαλύτερη ασφάλεια την γνωστική ικανότητα των συμμετεχόντων σε μια έρευνα θα βοηθούσε ο βαθμός ανταπόκρισής τους και σε κάποια ‘τυπικά’ μαθηματικά ερωτήματα. Επίσης η διδακτική δυνατότητα μιας έννοιας δεν μπορεί να ελεγχθεί με ασφάλεια μόνο από τις απαντήσεις σε κάποια ερωτήματα. Πόσο μάλλον όταν η υπό διαπραγμάτευση έννοια δεν ήταν από τα πριν γνωστή στους συμμετέχοντες στην έρευνα, και φυσικά δεν είχαν προετοιμαστεί γι’ αυτή, κάτι το οποίο σπάνια συμβαίνει στα πλαίσια πραγματικών συνθηκών διδασκαλίας. Η διδακτική δυνατότητα μιας έννοιας είναι πολύπλοκη διαδικασία, για την οποία κάποιος πρέπει να είναι προετοιμασμένος και ουσιαστικά κρίνεται όχι μόνο στο επίπεδο των διδακτικών προτάσεων αλλά και στο επίπεδο της διδακτικής πράξης. Σε σχέση με το βαθμό γνώσης της φύσης της έννοιας από τους συμμετέχοντες θεωρούμε ότι θα βοηθούσε ιδιαίτερα να επανέλθουμε τουλάχιστον σε κάποιους απ’ αυτούς με μια συνέντευξη, για να έχουμε σαφέστερη εικόνα της αρχικής τους τοποθέτησης.

Αναγνωρίζουμε λοιπόν τους περιορισμούς των δυνατοτήτων για απόλυτα ασφαλή συμπεράσματα με βάση τα δεδομένα της έρευνά μας, θεωρούμε όμως ότι μας δίνει την δυνατότητα για την συγκρότηση μιας σχετικά ασφαλούς βάσης σ' ένα ευρύ πεδίο στόχων καθώς και την δυνατότητα να επανέλθουμε για την ασφαλέστερη εξαγωγή συμπερασμάτων χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που αναφέραμε παραπάνω (συνεντεύξεις, τυπικά ερωτήματα, διδακτική πράξη).

Κάποιες από τις αδυναμίες που αναφέραμε προηγουμένως όπως αυτή της μη ύπαρξης τυπικών μαθηματικών ερωτημάτων προς τους φοιτητές θεωρούμε ότι μας προσέφερε από την άλλη, τη δυνατότητα καλύτερης διερεύνησης του βαθμού αντίληψης της φύσης της έννοιας. Αυτό γιατί σε παραπλήσιες έρευνες ζητείται από τους συμμετέχοντες να συγκρίνουν για παράδειγμα τους αριθμούς 0,999… και 1. Έτσι δηλώνεται από την ερώτηση ότι έχουμε να συγκρίνουμε δυο αριθμούς. Στην παρούσα έρευνα αφήσαμε ανοικτό το αν η παράσταση 0,3999… εκφράζει αριθμό ή διαδικασία καλώντας τους φοιτητές να τοποθετηθούν.

Άλλη μια διαφοροποίηση της έρευνάς μας σχετικά με άλλες που αναφέρονται σε παρόμοια θέματα, ήταν η δυνατότητα που έδινε στους συμμετέχοντες να εκφράσουν μ' έναν σχετικά ανοικτό τρόπο τη γνώμη τους. Καλούνταν να ερμηνεύσουν και να κριτικάρουν τις γνώμες των μαθητών ενός σεναρίου, καθώς και να προτείνουν διδακτικές παρεμβάσεις όπου θεωρούσαν ότι απαιτείται κάτι τέτοιο. Έτσι είχαμε την δυνατότητα να διαμορφώσουμε σχετικά συνολική εικόνα για τις αντιλήψεις των φοιτητών και την δυνατότητα να ανταπεξέλθουν σε πιθανές παρανοήσεις των υποτιθέμενων μαθητών τους.

3.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα υποκείμενα της έρευνας ήταν 114 φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών. Τους συμμετέχοντες στη έρευνα θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε εν δυνάμει καθηγητές μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, είτε επειδή ένα μεγάλο μέρος των αποφοίτων του τμήματος ασχολείται επαγγελματικά ως εκπαιδευτικοί, είτε επειδή οι φοιτητές κατέγραψαν τις απόψεις τους, στα πλαίσια της τελικής εξέτασης του μαθήματος με τίτλο: 'Διδακτική του Απειροστικού λογισμού'. Δηλαδή επέλεξαν ένα μάθημα που σαφώς σχετίζεται με την διδασκαλία των μαθηματικών και κατά κάποιο τρόπο δηλώνεται μια πρώτη πρόθεση για μελλοντική ενασχόληση τους με την εκπαιδευτική διαδικασία.

Οι φοιτητές απάντησαν σε τέσσερις ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της τελικής εξέτασης του προαναφερόμενου μαθήματος η οποία ήταν τρεις ώρες. Οι απαντήσεις με τις οποίες ασχοληθήκαμε, αφορούσαν στην πρώτη ερώτηση. Να σημειώσουμε ότι σχεδόν το σύνολο των φοιτητών έχει έρθει σε επαφή με ένα τουλάχιστον μάθημα απειροστικού λογισμού κατά την φοίτηση του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

3.2.1 Περιγραφή του ερωτήματος προς τους φοιτητές

Οι συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας κλήθηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα ενός σεναρίου όπως αυτά παρουσιάζονται παρακάτω:

«Σε μια σχολική τάξη Γ’ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών θετικής κατεύθυνσης ο καθηγητής ρωτάει τους μαθητές.

‘Τι εκφράζει η παράσταση 0,3999… όταν τα 9 είναι άπειρα;’.

Τέσσερις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:

Μαθητής Α: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία που τείνει στο 0,4.

Μαθητής Β: Το 0,3999… είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4.

Μαθητής Γ: Ο 0,3999… είναι ο αμέσως πριν τον 0,4 αριθμός.

Μαθητής Δ: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 +… αλλά επειδή συνεχώς αυξάνεται δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό.

α) Ποιος πιστεύεται ότι μπορεί να ήταν ο στόχος της ερώτησης του καθηγητή;

β) Αναφέρατε για κάθε έναν από τους τέσσερις μαθητές:

i) πως νομίζεται ότι σκέφτηκε και έδωσε την παραπάνω απάντηση.

ii) ποια θεωρείται θετικά σημεία της άποψής του (αν υπάρχουν), και

iii) ποιες είναι οι πιθανές παρανοήσεις του αν υπάρχουν.

γ) Αν είσασταν ο καθηγητής της παραπάνω τάξης πως θα βοηθούσατε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις στις οποίες αναφερθήκατε στην απάντηση του ερωτήματος β;»

Στο παραπάνω σενάριο έγινε προσπάθεια να συμπεριληφθούν οι γνώμες μαθητών σχετικά με το θέμα που εξετάζουμε όπως μας έχουν γίνει γνωστές από αντίστοιχες έρευνες. Καμία από τις γνώμες των μαθητών του σεναρίου δεν είναι πλήρως ορθή. Όμως σε καθεμία υπάρχουν κάποια θετικά στοιχεία και κάποια άλλα που δείχνουν παρανοήσεις. Στη συνέχεια περιγράφουμε το σκεπτικό με το οποίο έχουμε θέσει το κάθε ερώτημα.

Ο στόχος του καθηγητή:

Θεωρήσαμε το ερώτημα για το στόχο του καθηγητή ως απαραίτητο για την πληρότητα του διδακτικού σεναρίου. Οι διδακτικές ενέργειες ενός καθηγητή θα πρέπει να είναι συνειδητές, να στοχεύουν στην ανάδειξη αδυναμιών των μαθητών που έχουν εντοπιστεί, είτε από την βιβλιογραφία, είτε από την εμπειρία του καθηγητή. Επίσης η τοποθέτηση των φοιτητών για το στόχο του καθηγητή, μας προσφέρει τη δυνατότητα να σχηματίσουμε μια πρώτη εικόνα, για το τι θεωρούν οι φοιτητές ότι εκφράζει η παράσταση 0,3999… με μια πρώτη ματιά.

Αναγνώριση του τρόπου σκέψης των μαθητών του σεναρίου.

Εξετάζουμε την ικανότητα των φοιτητών να διακρίνουν στοιχειωδώς τον τρόπο σκέψης των μαθητών γιατί θεωρούμε ότι αυτή η ικανότητα αποτελεί ένα πρώτο στάδιο στην προσπάθεια κατανόησης των ιδεών των μαθητών και ως τέτοιο απαραίτητο διδακτικό εφόδιο του δασκάλου. Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν μια έννοια χρησιμοποιούν συνειδητούς και μη τρόπους, κάνουν ανάμειξη διδαγμένων και μη μεθόδων, συνθέτουν στοιχεία που βρίσκονται στη μνήμη τους από διαφορετικές περιοχές με νέα δεδομένα με σκοπό να επαναπροσδιορίσουν το νόημα που έχει γι' αυτούς μια έννοια. Ένας δάσκαλος στην προσπάθειά του να βοηθήσει τους μαθητές του, πρέπει να μπορεί όσο αυτό είναι δυνατό να κατανοεί όχι μόνο αυτά που λέει ένας μαθητής αλλά και αυτά που εννοεί. Πρέπει να μπορεί να αντιλαμβάνεται αν αυτά που λέει ένας μαθητής βασίζονται στη διαισθητική αντίληψη της έννοιας από τον μαθητή ή αν αυτός σκέφτεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή των μαθηματικών πιθανόν διαφορετική απ' αυτή που αναμένετε από τον δάσκαλο.

Αναγνώριση θετικών σημείων στη σκέψη των μαθητών του σεναρίου

Εξετάζουμε την συγκεκριμένη ικανότητα των φοιτητών γιατί πολύ συχνά οι τοποθετήσεις των μαθητών για μια έννοια δεν είναι εντελώς σωστές ή εντελώς λάθος. Ακόμα και αν η άποψη ενός μαθητή συνολικά αξιολογείται ως λανθασμένη έχει μεγάλη σημασία να μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα θετικά σημεία στη σκέψη του. Οι λόγοι για κάτι τέτοιο δεν παραμένουν μόνο σ' ένα συναισθηματικό επίπεδο ενίσχυσης των προσπαθειών του μαθητή χωρίς κάτι τέτοιο να θεωρείται αμελητέο. Είναι εξαιρετικά σημαντικό να μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα θετικά σημεία της σκέψης των μαθητών, επειδή η διδασκαλία πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών για την έννοια που έχουμε σκοπό να διδάξουμε. Λαμβάνοντας υπόψη τις γνώσεις αυτές των μαθητών, καλούμαστε να διαμορφώσουμε εκείνες τις διδακτικές προτάσεις που θα επεκτείνουν τις γνώσεις αυτές και σε άλλα πεδία, θα τις στηρίξουν θεωρητικά ή διαισθητικά, θα τις εντάξουν σε κάποιες μαθηματικές περιοχές επισημαίνοντας τις αντίστοιχες δομές.

Ίσως σ’ αυτή την ικανότητα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα αφού κατά την παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία είναι αυτή που κυρίως εφαρμόζεται, βασικός στόχος είναι η αναγνώριση των λαθών του μαθητή με συνέπεια την αντίστοιχη βαθμολογική τιμωρία του, παρά η αναγνώριση των θετικών σημείων της άποψής του. Στις αξιολογήσεις των μαθητών, γραπτές ή προφορικές, που σπάνια είναι ανατροφοδοτικές, κύριος στόχος είναι ο εντοπισμός αυτών που δεν ξέρει ένας μαθητής παρά αυτών που ξέρει.

Εύρεση παρανοήσεων

Όπως είδαμε στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας η γνωστική εξέλιξη των εννοιών στο νου των μαθητών είναι μια πολύπλοκή διαδικασία που επηρεάζεται από πλήθος παραγόντων. Έτσι οι μαθητές σχηματίζουν δικές τους αντιλήψεις για τις μαθηματικές έννοιες οι οποίες αρκετές φορές είναι διαφορετικές απ’ αυτές που θεωρούμε αποδεκτές στην μαθηματική κοινότητα. Τις αντιλήψεις αυτές περιγράφουμε με τον όρο παρανοήσεις. Θεωρούμε εξαιρετικά σημαντικό ο καθηγητής των μαθηματικών όχι μόνο να μπορεί να εντοπίζει τις παρανοήσεις των μαθητών του αλλά και τις βαθύτερες αιτίες που τους έχουν οδηγήσει σ’ αυτές. Με τον τρόπο αυτό ικανοποιείται μια από τις βασικές προϋποθέσεις για την συμβολή του καθηγητή στο ξεπέρασμα των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών του.

Διατύπωση διδακτικών προτάσεων

Στο συγκεκριμένο ερώτημα προς τους φοιτητές δεν αναζητούμε μια συνολική διδακτική πρόταση για την διδασκαλία γενικών εννοιών που σχετίζονται με το θέμα που εξετάζουμε όπως την έννοια του ορίου ή των δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Όπως φαίνεται και στο ερώτημα ζητάμε συγκεκριμένες προτάσεις που θα βοηθήσουν τους φοιτητές να ξεπεράσουν τις εντοπισμένες από τον καθηγητή-φοιτητή παρανοήσεις. Τέτοιες προτάσεις μπορεί να περιλαμβάνουν απλούστερα παραδείγματα, αλλά σχετικά με την εξεταζόμενη έννοια, που θα φέρουν τον μαθητή σε γνωστική σύγκρουση. Μπορεί επίσης να περιλαμβάνονται διαισθητικές περιγραφές ή αντίστοιχα αναπαραστατικά πλαίσια. Αν κάποια έννοια όπως αυτή που εξετάζουμε εμφανίζεται σε διαφορετικά πλαίσια θα πρέπει να συζητηθεί με τους μαθητές ποια είναι τα πλαίσια αυτά, ποιες οι συσχετίσεις των αντικειμένων του κάθε πλαισίου, με ποιο τρόπο και με ποιους περιορισμούς η έννοια μετασχηματίζεται από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Φυσικά πρέπει να περιέχονται και τυπικές μαθηματικές αποδείξεις αλλά δεν πρέπει να θεωρούμε ότι αυτές αρκούν για να κατανοήσουν οι μαθητές την αντίστοιχη έννοια. Πολλές φορές οι μαθητές πείθονται από τέτοιες αποδείξεις επειδή τις παρουσιάζει ο καθηγητής χωρίς να αποκτούν κάποια βαθύτερη κατανόηση.

3.2.2 Ποσοτικές προσεγγίσεις - Περιγραφή των όρων τους

Επιδιώξαμε την ποσοτική καταγραφή των απόψεων των φοιτητών α) σε σχέση την ίδια την μαθηματική τους ικανότητα σε σχέση με το συγκεκριμένο θέμα, και β) ως μελλοντικών καθηγητών σε σχέση με τους ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Θεωρούμε ότι αυτά τα δυο επίπεδα σχετίζονται αλλά δεν ταυτίζονται.

Αξιολόγηση των γνωστικών αντιλήψεων των φοιτητών

Διακρίναμε τους φοιτητές σε αυτούς που θεωρούν τον 0,3999… αριθμό και σε αυτούς που τον θεωρούν διαδικασία. Με τον όρο διαδικασία αναμέναμε να τον εκλάβουν όσοι φοιτητές αναγνωρίσουν στο σύμβολο 0,3999… την ακολουθία 0,3, 0,39, 0,399, … .

Στη συνέχεια διακρίναμε όσους θεώρησαν τον 0,3999… ως διαδικασία, σ' αυτούς που θεωρούν ότι η διαδικασία αυτή τείνει στο 0,4 και σ' αυτούς που δεν ανέφεραν ότι τείνει σε κάποιον αριθμό.

Τους φοιτητές που θεώρησαν τον 0,3999… αριθμό τους διακρίναμε σ' αυτούς που τον θεωρούν σταθερό και σ' αυτούς που τον θεωρούν μεταβλητό. Για όσους τον θεώρησαν μεταβλητό μας ενδιέφερε να τους διακρίνουμε σ' αυτούς που θεωρούν ότι μπορεί να τείνει σε κάποιον αριθμό και σ' αυτούς που δεν θεωρούν κάτι τέτοιο.

Περιγραφή των όρων τοποθέτησης στο φάσμα των μαθηματικών ικανοτήτων

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο προσπαθήσαμε να κατατάξουμε τους φοιτητές στο Φάσμα μαθηματικών ικανοτήτων του Tall (2007), όπως το αναπτύξαμε στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, και με τη βοήθεια της προηγούμενης ποσοτικής προσέγγισης προχωρήσαμε στην κατάταξη των φοιτητών στο πλαίσιο αυτό. Στη συνέχεια αναφέρουμε τα επίπεδα του φάσματος και τα κριτήρια κατάταξης των φοιτητών στα αντίστοιχα επίπεδα.

Προδιαδικαστικό (Pre-Procedure): Όταν οι φοιτητές αναφέρουν ότι η παράσταση 0,3999… σχετίζεται, είτε με άσχετα μαθηματικά αντικείμενα (παραγώγους – ολοκληρώματα), είτε όταν εκδηλώνεται αδυναμία οποιασδήποτε αναφοράς, είτε όταν έχουμε παράθεση γενικών αναφορών για οριακές διαδικασίες χωρίς περαιτέρω επεξηγήσεις.

Διαδικαστικό (Procedure): Όταν οι φοιτητές θεωρούν κάποιο από τα παρακάτω:

α) το 0,399… εκφράζει την συνεχή τοποθέτηση 9 σε θέση με υποδεκαπλάσια αξία ή μια διαδικασία που τείνει στο 0,4 ή όταν δεν αναφέρεται αν τείνει ή όχι στο 0,4.

β) το 0,3999… = 0,3 + 0,09 + 0,009 +… αλλά υπάρχει αδυναμία αποδοχής ή απόδειξης της ισότητας 0,3 + 0,09 + 0,009 +… = 0,4.

γ) το 0,3999… εκφράζει την ακολουθία των αριθμών 0,3, 0,39, 0,399, … η οποία τείνει στο 0,4 ή δεν αναφέρεται αν τείνει ή όχι στο 0,4.

δ) το 0,3999… εκφράζει έναν μεταβλητό αριθμό (ρητό ή άρρητο) ο οποίος τείνει στο 0,4.

Πολυδιαδικαστικό (Multiprocedure): Όταν α) υπάρχει κάποια απόδειξη για το ότι 0,3999… = 0,4, β) όταν κάποιος φοιτητής θεωρεί τον 0,3999… σταθερό αριθμό και όχι διαδικασία. Να σημειώσουμε ότι αποδεχθήκαμε την ύπαρξη αντιφάσεων κατά την τοποθέτηση των φοιτητών και σ’ αυτό το στάδιο.

Διεργασιακό (Process): Θεωρήσαμε ότι υπάρχει διεργασιακή προσέγγιση όταν υπάρχει κάποιες από τις παρακάτω δυνατότητες: α) εντοπισμός δυσλειτουργιών β) έλεγχος πιθανών λαθών, γ) δυνατότητα εναλλακτικών προσεγγίσεων, δ) σύγκριση μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα στην προσέγγιση αυτή κατατάξαμε τους φοιτητές που είχαν την δυνατότητα:

Εύρεσης των παρανοήσεων των μαθητών

Μη ύπαρξη αντιφάσεων στις τοποθετήσεις τους.

Γνώση περισσότερων από μια εκ των παρακάτω προσεγγίσεων:

Το 0,3999… ως σταθερός αριθμός ίσος με το 0,4.

Το 0,3999… ως το όριο της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, …

Το 0,3999… ως το άθροισμα της σειράς 0,3 + 0,09 + 0,009 +… με χρήση του αντίστοιχου συμβολισμού.

Το 0,3999… ως άλλη δεκαδική αναπαράσταση του ρητού 0,4.

Δεν εμφανίζονται αντιφατικές τοποθετήσεις σ’ αυτό το στάδιο αλλά υπάρχουν ίσως αδυναμία τοποθέτησης για την γνώμη κάποιων μαθητών, αδυναμία μεταφοράς από τη μια προσέγγιση στην άλλη ή αδυναμία να ειδωθούν διαφορετικές προσεγγίσεις ως εναλλακτικές του ίδιου αντικειμένου.

Διαδικασιοεννοιολογική (Procept): Ευέλικτος χειρισμός συμβόλων, πότε σαν διαδικασίες και πότε σαν αντικείμενα, ανεξάρτητα από την φύση της προσέγγισης.

Η γνώση ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει ταυτόχρονα όλα τα προηγούμενα. Η δυνατότητα μεταφοράς από τη μια διεργασία στην άλλη.

Διδακτικές δυνατότητες των μελλοντικών καθηγητών

Κάναμε ποσοτική καταγραφή των απόψεων των φοιτητών με βάση την τοποθέτηση τους για α) το ποιος είναι ο στόχος του καθηγητή του σεναρίου β) την γνώμη των υποτιθέμενων μαθητών Α, Β, Γ, Δ του σεναρίου γ) τις προτάσεις τους προς τους μαθητές. Η ποσοτική καταγραφή των απόψεων των φοιτητών έγινε με βάση κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις που κατά προσέγγιση θεωρήσαμε ως ‘ορθές’ και είναι οι εξής:

Ο στόχος του καθηγητή:

Θεωρήσαμε ότι ενδέχεται να είναι η συζήτηση με την τάξη της φύσης του συμβόλου 0,3999… . Αν είναι αριθμός, το είδος του αριθμού αυτού καθώς και το αν υπάρχει άλλη ισοδύναμη μ’ αυτήν έκφραση δηλαδή η ανάδειξη του ζητήματος της διπλής αναπαράστασης των ρητών αριθμών. Στόχος του καθηγητή μπορεί να είναι η διάκριση της έννοιας της συγκλίνουσας ακολουθίας με αυτήν του ορίου της

Για τον Μαθητή Α θεωρήσαμε ότι:

α) σκέφτηκε ότι αν στον 0,3 βάλω 9 στη θέση του εκατοστού έχουμε τον 0,39 που είναι μεγαλύτερος του 0,3 και πιο κοντά στον 0,4. Το ίδιο μπορεί να συνεχιστεί όσο επιθυμούμε. Έτσι έχουμε μια διαδικασία που τείνει στο 0,4.

β) το θετικό σημείο της άποψής του, είναι ότι η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, παράγει την ακολουθία των αριθμών 0,3. 0,39, 0,399, …, η οποία πράγματι τείνει στο 0,4.

γ) η παρανόηση του είναι, ότι θεωρεί την παράσταση 0,3999… ως διαδικασία, ως μεταβλητό μέγεθος και όχι ως αριθμό.

Για τον μαθητή Β θεωρήσαμε ότι:

α) σκέφτηκε όπως και ο Α αλλά θεωρεί ότι το 0,3999… είναι αριθμός. Εκλαμβάνει το 0,3999… σαν αριθμό και ακολουθία (την 0,3. 0,39, 0,399, …) συνάμα. Όπως για παράδειγμα ο 0,333… είναι και αριθμός και το αποτέλεσμα μιας ατέρμονης διαιρετικής διαδικασίας (της 1:3).

β) θετικό σημείο της άποψης του είναι ότι το 0,399… είναι αριθμός

γ) παρανόηση του είναι ότι ένας αριθμός μπορεί να τείνει σε έναν άλλο.

Για τον μαθητή Γ θεωρήσαμε ότι:

α) εξέλαβε τον 0,399... ως διαφορετικό του 0,4 επειδή έχει διαφορετική αναπαράσταση. Στη συνέχεια θεώρησε ότι υπάρχει ο προηγούμενος του 0,4, όπως στους φυσικούς. Αν επέλεγε τον 0,399…9 με ν εννιάρια θα υπήρχε άλλος πιο κοντά στον 0,4 (ο 0,399..9 με ν+1 εννιάρια), οπότε θεώρησε για τον 0,3999… που έχει άπειρα 9 είναι ο αριθμός που είναι πιο κοντά στον 0,4.

β) θετικό σημείο της άποψης του είναι ότι θεωρεί τον 0,3999… αριθμό.

γ) η παρανόησή του είναι ότι θεωρεί ότι υπάρχει κάποιος προηγούμενος πραγματικός (ή ρητός) του 0,4 και ότι αυτός είναι ο 0,3999… .

Για τον μαθητή Δ θεωρήσαμε ότι:

α) σκέφτηκε πως επειδή τα μερικά αθροίσματα πεπερασμένου πλήθους προσθετέων αυξάνονται, το άθροισμα άπειρου πλήθους προσθετέων θα αυξάνεται επίσης και συνεπώς δεν θα ισούται με αριθμό. Έχουμε κατά κάποιο τρόπο μια μεταφορά ιδιοτήτων των πεπερασμένων αθροισμάτων στα άπειρα αθροίσματα. Ο Δ θεωρεί επίσης την παράσταση 0,3999… ως διαδικασία ή ως μεταβλητό αριθμό που αυξάνεται συνεχώς.

β) θετικό σημείο της άποψης του είναι η ισότητα: 0,3999…= 0,3+0,09+0,009+…

γ) η παρανόησή του είναι ότι θεωρεί πως το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών δεν μπορεί να είναι αριθμός.

Οι προτάσεις των φοιτητών για τις παρανοήσεις των μαθητών

Για τους μαθητές Α, Δ που δεν θεωρούν τον 0,3999… αριθμό αναμέναμε από τους φοιτητές να προτείνουν ένα απλούστερο παράδειγμα όπως τον 0,333… =1/3. Θεωρούμε ότι περισσότεροι μαθητές θα υιοθετούσαν την ισότητα και θα αναγνώριζαν το 1/3 ως αριθμό. Θα πρέπει βέβαια να επισημανθεί ότι ενώ ο 0,333… προκύπτει ως το πηλίκο της ατελούς διαίρεσης 1:3, ο αριθμός 0,3999… δεν μπορεί να προκύψει ως το πηλίκο της διαίρεσης κάποιων ακεραίων παρά μόνο αν ειδωθεί με τη μορφή 0,4.

Για τον μαθητή Γ πρέπει να διευκρινιστούν δυο παρανοήσεις του. Η πρώτη είναι ότι θεωρεί τον 0,3999… διαφορετικό του 0,4. Οπότε θα πρέπει να δείξουμε την ισότητα των δυο αριθμών. Η δεύτερη είναι ότι δείχνει να πιστεύει ότι υπάρχει προηγούμενος κάθε πραγματικού αριθμού. Έτσι αναμέναμε να επισημανθεί ότι προηγούμενος ενός αριθμού υπάρχει στους φυσικούς (εκτός του μηδενός) και στους ακέραιους αλλά όχι στους ρητούς ή στους πραγματικούς. Πράγματι αν α, β δυο διαφορετικοί ρητοί ή πραγματικοί αριθμοί τότε ο ρητός (α+β)/2 είναι μεταξύ τους.

Για τον μαθητή Δ που θεωρεί ότι το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών επειδή αυξάνεται συνεχώς δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό μπορούμε να προτείνουμε ένα διαισθητικό παράδειγμα. Ένα τμήμα ή ένα τετράγωνο μπορεί να γραφεί ως το άπειρο άθροισμα των άπειρων μερών του όπως $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ με αντίστοιχη σχηματική αναπαράσταση.

Για όλους τους μαθητές αναμέναμε να αιτιολογηθεί ότι 0,3999…= 0,4. Μια τέτοια αιτιολόγηση η οποία είναι η εξής: Αν Α = 0,399… τότε 100 Α = 39,999 και 10 Α = 3,999…άρα 100 Α – 10 Α = 36 οπότε 90 Α = 36 δηλαδή Α = 4/10 = 0,4. Ένα αντίστοιχο παράδειγμα μετατροπής του απειροψήφιου δεκαδικού 1,646464… στην αντίστοιχη κλασματική μορφή υπάρχει στη σελίδα 136 του σχολικού βιβλίου της Α' γυμνασίου.

Εναλλακτικά θα μπορούσε να προταθεί μια απόδειξη με βάση την αθροιστική έκφραση του μαθητή Δ η οποία έχει ως εξής: 0,3999… = 0,3+ 0,09+0,009+… = 0,3+ $\frac{0,09}{1-\frac{1}{10}}$ =0,3+0,1 =0,4 (Το 0,3+ 0,09+0,009+… = 0,3 + $\frac{0,09}{1-\frac{1}{10}}$ = 0,3 + 0,1 = 0,4) χρησιμοποιώντας ότι έχουμε άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 0,09 και λόγο 1/10. Το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου υπάρχει στο βιβλίο της Β' λυκείου στη σελίδα 114, αλλά είναι εκτός διδακτέας ύλης.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία καταγράψαμε αν κάποιος φοιτητής υιοθετεί την γνώμη κάποιου μαθητή ή όχι. Δηλαδή αν κάποιος φοιτητής βρίσκει μόνο θετικά σημεία στη γνώμη κάποιου μαθητή και δεν βρίσκει καμία παρανόηση ή δηλώνει ότι κάποιος μαθητής δεν έχει καμία παρανόηση ή όλη η τοποθέτηση του ταιριάζει περισσότερο με την γνώμη κάποιου μαθητή θεωρήσαμε ότι υιοθετεί την γνώμη του μαθητή αυτού. Για όσους φοιτητές απέφυγαν να τοποθετηθούν συγκεκριμένα για κάποιον μαθητή δεν θεωρήσαμε ότι υιοθετούν την γνώμη του, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μπορούν και αντιπαρατεθούν σ' αυτή.

Έτσι αν κάποιος φοιτητής υιοθετεί τη γνώμη του μαθητή:

α) Α ή του Δ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν θεωρεί τον 0,3999… αριθμό.

β) Γ συμπεραίνουμε ότι θεωρεί τον 0,3999… αριθμό αλλά διαφορετικό του 0,4. καθώς και ότι θεωρεί ότι υπάρχει προηγούμενος ρητός ενός ρητού.

γ) Β προκύπτει ότι ο φοιτητής αυτός θεωρεί ότι ο 0,3999… είναι αριθμός αλλά του αποδίδει χαρακτηριστικά συγκλίνουσας ακολουθίας.

δ) Δ προκύπτει ότι πιστεύει ότι άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών δεν μπορεί να είναι θετικός αριθμός.

3.2.3 Ποιοτική προσέγγιση

Στην ποιοτική προσέγγιση, επιλέξαμε τις χαρακτηριστικές εκείνες εκφράσεις των φοιτητών, που δείχνουν τη γνώμη του κάθε φοιτητή σε σχέση με τον τρόπο που αυτός θεωρεί ότι σκέφτηκε ο κάθε μαθητής καθώς και με τα ενδεχόμενα θετικά σημεία ή τις παρανοήσεις που θεωρεί αυτός ότι υπάρχουν στη γνώμη του κάθε μαθητή. Έτσι είχαμε τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν κάποιος φοιτητής είχε την ικανότητα να διακρίνει θετικά σημεία, αλλά κυρίως τις παρανοήσεις στις απόψεις των μαθητών, επίσης αν ο φοιτητής υιοθετεί ή όχι την άποψη κάποιου μαθητή.

Εξετάσαμε επίσης μέσα από τις γραπτές απόψεις των φοιτητών κατά πόσο εμφανίζουν αντιφάσεις κατά την τοποθέτησή τους, πως αντιμετωπίζουν το άπειρο και το απειροστό, την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών καθώς και το ρόλο της διαίσθησης κατά την τοποθέτησής τους.

3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.3.1 Ποσοτικές προσεγγίσεις

Αξιολόγηση των γνωστικών αντιλήψεων των φοιτητών

Από την εξέταση των 114 γραπτών δοκιμίων προέκυψαν τα αποτελέσματα που παραθέτουμε στον παρακάτω πίνακα σε σχέση με τις γνωστικές αντιλήψεις των φοιτητών.

Διαδικασία 20		Αριθμός 57				Διαδικασία και αριθμός	Αδυναμία καταχώρησης
Τείνει	Δεν αναφέρεται αν τείνει	Σταθερός 25		Μεταβλητός 32			
		Άρρητος		Τείνει	Δεν αναφέρεται αν τείνει		
10	10	4	21	27	5	29	8
9%	9%	4%	18%	24%	4%	25%	7%

Πίνακας 1. *Το 0,3999… ως διαδικασία – αριθμός.*

Το σύμβολο 0,3999… το αναγνωρίζουν: 20 φοιτητές (18%) ως διαδικασία και όχι αριθμό, 57 φοιτητές (50 %) ως αριθμό και όχι ως διαδικασία, ενώ 29 φοιτητές (25 %) σε κάποια σημεία της τοποθέτησής τους ως αριθμό και σε κάποια άλλα ως διαδικασία. Υπήρχαν και 8 φοιτητές (7 %) που λόγω ελλιπούς τοποθέτησής τους δεν ήταν δυνατή η ταξινόμησή τους σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες.

Οι φοιτητές που θεωρούσαν το σύμβολο 0,3999… ως διαδικασία που τείνει στο 0,4 υιοθετούν την γνώμη του μαθητή Α ενώ όσοι το θεωρούν ως διαδικασία χωρίς να της αποδίδουν χαρακτηριστικά σύγκλισης, είτε θεωρούν θετική τη γνώμη του μαθητή Δ, είτε δηλώνουν ότι είναι διαδικασία χωρίς να αναφέρονται σε οριακές διαδικασίες.

Από τους 57 φοιτητές που θεώρησαν το 0,3999… αριθμό οι περισσότεροι (32) το θεώρησαν μεταβλητό και οι λιγότεροι (25) το θεώρησαν σταθερό.

Από αυτούς που θεώρησαν το 0,3999… μεταβλητό αριθμό οι 27 (24 %) συμφωνούν με τον μαθητή Β ενώ 5 (4 %) δεν αναφέρονταν σε όρια.

Ακόμα και οι φοιτητές που εκλαμβάνουν το 0,3999… ως σταθερό αριθμό κάποιοι (4) τον θεωρούν άρρητο ενώ 21 (18 %) δεν αναφέρονται για το αν τον θεωρούν ρητό.

Το φάσμα των μαθηματικών ικανοτήτων

Πριν την παράθεση του πίνακα στον οποία φαίνονται τα ποσοστά των φοιτητών όπως αυτοί ταξινομούνται στο φάσμα μαθηματικών ικανοτήτων του Tall θεωρούμε απαραίτητες δυο επισημάνσεις.

Η πρώτη σχετίζεται με την σχετική υποκειμενικότητα των στοιχείων που εμφανίζονται στον πίνακα. Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία αυτά προέκυψαν με βάση τους αντίστοιχους όρους όπως αυτοί περιγράφονται στη μεθοδολογία. Η διατύπωση, η ευρύτητα και η σαφήνεια των κριτηρίων αυτών ως έναν βαθμό επαφίεται στην υποκειμενικότητα του ερευνητή. Ο Tall ουσιαστικά προτείνει μια γενική θεωρία της οποίας η συγκεκριμενοποίηση σε μια έννοια απαιτεί αντίστοιχη διατύπωση κριτηρίων.

Η δεύτερη παρατήρηση η οποία σχετίζεται με την πρώτη έχει να κάνει με την επισήμανση ότι όπως διατυπώνεται από τον Tall έχουμε να κάνουμε με ένα φάσμα και όχι με σαφώς διακριτά επίπεδα Να σημειώσουμε πάντως ότι ενώ ο Tall χαρακτηρίζει την ταξινόμησή του ως φάσμα η αντίστοιχη σχηματική του αναπαράσταση γίνεται με σαφώς διακεκριμένα επίπεδα – παραλληλόγραμμα όπου το καθένα βρίσκεται σε ανώτερο ύψος από το προηγούμενο. Η σχηματική αναπαράσταση του φάσματος απομένει για τις ερμηνείες των επιπέδων. Θεωρούμε ότι η ιδέα του συνεχούς φάσματος θα μας βοηθήσει περισσότερο στην κατανόηση των αποτελεσμάτων. Οι λόγοι για την υιοθέτηση αυτής της επιλογής σχετίζονται με την ασάφεια με την οποία διατυπώνουν πολλές φορές τα υποκείμενα μιας έρευνας τις απόψεις τους, ώστε η τοποθέτηση τους στο αντίστοιχο επίπεδο να καθίσταται σχετικά υποκειμενική. Σημειώνουμε ότι σε κάποιες περιπτώσεις η επανεξέταση των απόψεων κάποιων φοιτητών με συνεντεύξεις, κρίθηκε αναγκαία αλλά δεν πραγματοποιήθηκε λόγω χρονικών κυρίως περιορισμών. Ο δεύτερος λόγος έχει να κάνει με την υποκειμενικότητα των κριτηρίων όπως αυτά διατυπώνονται από τον ερευνητή και σημειώσαμε και προηγουμένως.

Με βάση τις προηγούμενες παραδοχές προέκυψαν τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα..

Προδιαδικαστικό	Διαδικαστικό	Πολυδιαδικαστικό	Διεργασιακό	Διεργασιοεννοιλογικό
22	62	18	8	4
19%	54%	16%	7%	4%

Πίνακας 2. *Το φάσμα των μαθηματικών ικανοτήτων*

Οι φοιτητές έχουν έρθει σε επαφή με απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Έχουν διδαχθεί την μετατροπή τέτοιων αριθμών στο αντίστοιχο κλάσμα στην πρώτη τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και έχουν αντιμετωπίσει οριακές διαδικασίες στην τελευταία. Έχουν διδαχθεί σε θεωρητικό επίπεδο την έννοια του ορίου ακολουθίας. Έχουν επιτύχει σε πολλαπλές εξετάσεις σε αντίστοιχα μαθηματικά θέματα. Παρόλα αυτά περίπου το 1/5 των φοιτητών αδυνατεί να τοποθετηθεί στοιχειωδώς σχετικά με το θέμα.

Περισσότεροι από τους μισούς φοιτητές αντιμετωπίζουν καθαρά εποπτικά, διαισθητικά το ζήτημα. Δεν διστάζουν να υιοθετήσουν ιδέες που ποτέ δεν έχουν διδαχθεί (μεταβλητός αριθμός, το 0,3999… διαδικασία ή άρρητος αριθμός) προκειμένου να αποδώσουν κάποιο νόημα στην έννοια.

Το 1/6 περίπου των φοιτητών φαίνεται να αποδέχεται ότι το 0,3999… είναι ένας σταθερός αριθμός, αλλά δεν λείπουν οι αντιφάσεις στις τοποθετήσεις τους ανάλογα με το πλαίσιο τοποθέτησης.

Λιγότερο από το 1/10 περίπου των φοιτητών εμφανίζεται να γνωρίζει και να μπορεί να τεκμηριώσει την ισότητα 0,3999… = 0,4. Ακόμα και από αυτούς που την γνωρίζουν κάποιοι αποφεύγουν να τοποθετηθούν σε κάποιες από τις απόψεις των μαθητών του σεναρίου.

Ένα πολύ μικρό ποσοστό (1/25) εμφανίζει δυνατότητα ευέλικτης χρήσης των συμβόλων για την αναπαράσταση των εναλλακτικών προσεγγίσεων και της θεώρησής τους ως ισοδύναμες.

Αξιολόγηση των αντιλήψεων των μελλοντικών καθηγητών

Στην συγκεκριμένη παράγραφο αναφέρουμε τα ποσοστά των φοιτητών στις αντίστοιχες τοποθετήσεις τους ως προς το στόχο του καθηγητή και ως προς την τοποθέτηση του κάθε μαθητή. Εξετάσαμε δηλαδή τα ποσοστά των φοιτητών που βρίσκουν: α) στοιχεία του τρόπου σκέψης των μαθητών, β) θετικά σημεία στη σκέψη του κάθε μαθητή, γ) παρανοήσεις στους μαθητές του σεναρίου και δ) διδακτικές προτάσεις προς τους μαθητές σε σχέση με τις παρανοήσεις που έχουν εντοπίσει. Θεωρήσαμε ως κριτήριο για το αν ένας φοιτητής έχει βρει ή όχι κάποιο από τα προηγούμενα χαρακτηριστικά συγκρίνοντας τις τοποθετήσεις των φοιτητών με όσα αναφέρονται στη μεθοδολογία. Η σύγκριση των τοποθετήσεων των φοιτητών με τα αντίστοιχα σημεία της μεθοδολογίας έχει γίνει όχι μ’ έναν τυπικό τρόπο αλλά με μια σχετική ευρύτητα.

Ως προς το στόχο του καθηγητή στο σενάριο

Σε σχέση με την ερώτηση που αφορούσε στον στόχο του καθηγητή, το 46 % των φοιτητών θεώρησαν ότι αυτός σχετίζεται με οριακές διαδικασίες. Το ποσοστό εκτιμούμε ότι είναι αρκετά μεγάλο και μας προδιαθέτει ότι μεγάλο ποσοστό των φοιτητών θεωρεί το 0,3999… ως όριο, με μια πρώτη ματιά. Ίσως ένα μέρος των φοιτητών αυτών απάντησε με τον συγκεκριμένο τρόπο επηρεασμένο από τις παραδόσεις του μαθήματος, όπου διαπραγματεύονταν ιδιαίτερα θέματα που αφορούσαν οριακές διαδικασίες.

Μόνο το 15 % των φοιτητών θεωρεί ότι ο στόχος του καθηγητή αφορά στις δεκαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών.

Ένα σχετικά μεγάλο μέρος των φοιτητών καθορίζει την απάντησή του για το στόχο του καθηγητή με βάση τις απαντήσεις των μαθητών που ακολούθησαν. Έτσι θεώρησαν ότι ο στόχος σχετίζεται με τη διάταξη και την πυκνότητα των αριθμών ή την έννοια του επόμενου ενός αριθμού. Επίσης πολλοί φοιτητές προσπαθούν να τοποθετηθούν από την πρώτη στιγμή σχετικά με το θέμα που αναδεικνύουν ως κυρίαρχο.

Άλλοι φοιτητές θεώρησαν ότι η ερώτηση του καθηγητή αφορούσε την κατανόηση του απείρου και άλλοι τη δομή των πραγματικών αριθμών ή τους άρρητους αριθμούς.

Ένα μέρος των φοιτητών αδυνατεί να αναφερθεί συγκεκριμένα στο στόχο του καθηγητή ή αναφέρεται με εξαιρετικά γενικό τρόπο.

Κάποιοι φοιτητές βρίσκουν την ερώτηση ασαφή και άλλοι τη θεωρούν ενδιαφέρουσα για τους μαθητές. Ελάχιστοι πάντως προσπαθούν να την κριτικάρουν.

Κάποιοι φοιτητές αποδίδουν στη λέξη ‘παράσταση’ που χρησιμοποιήθηκε για να χαρακτηριστεί το 0,3999… εννοιολογικά χαρακτηριστικά.

Οι απόψεις των φοιτητών για τις γνώμες των μαθητών

Σε σχέση με το μαθητή Α

Το 46 % των φοιτητών θεωρεί ότι ο μαθητής Α σκέφτηκε παραπλήσια με τον τρόπο που αναφέραμε στη μεθοδολογία. Να σημειώσουμε ότι το ποσοστό αυτό είναι ακριβώς ίδιο με το ποσοστό αυτών που αναγνωρίζουν ως στόχο του καθηγητή τις οριακές διαδικασίες.

Κάποιοι φοιτητές διαβλέπουν μια διαδικασία στρογγυλοποίησης στη σκέψη του μαθητή Α.

Ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό αδυνατώντας να αναφερθεί σε κάποιο τρόπο σκέψης για τον μαθητής Α (και όχι μόνο γι’ αυτόν) επαναλαμβάνει την γνώμη του μαθητή Α όπως έχει δοθεί ή με παραπλήσιο τρόπο.

Θετικά σημεία στη σκέψη του μαθητή Α, με την έννοια που αναφέραμε στη μεθοδολογία, βρήκε το 18 % των φοιτητών.

Παρανοήσεις στη σκέψη του μαθητή Α, όπως περίπου αναφέρθηκαν στην μεθοδολογία βρίσκει το 31 % των φοιτητών.

Προτάσεις για την παρανόηση του Α καταθέτει μόνο των 14 % των συμμετεχόντων.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία αλλά και την γενικότερη τοποθέτηση των φοιτητών σε σχέση με τη γνώμη του μαθητή Α προέκυψε ότι το 37 % των φοιτητών υιοθετεί την γνώμη του μαθητή Α. Να σημειώσουμε ότι το 69 % των φοιτητών δεν βρίσκει κάποια παρανόηση στη σκέψη του μαθητή Α.

Συνοπτικά τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τρόπος σκέψης	Θετικά σημεία	Παρανοήσεις	Προτάσεις	Συμφωνία
53	21	35	16	42
46%	18%	31%	14%	37%

Πίνακας 3: *Ποσοτική προσέγγιση των τοποθετήσεων των φοιτητών σε σχέση με το μαθητή Α.*

Σε σχέση με το μαθητή Β

Το 36 % των φοιτητών θεωρεί ότι ο μαθητής Β σκέφτηκε παραπλήσια με τον τρόπο που αναφέραμε στη μεθοδολογία.

Όπως και στην περίπτωση του μαθητή Α ένα μέρος των φοιτητών αδυνατώντας να αναφερθεί σε κάποιο τρόπο σκέψης για τον μαθητής Β επαναλαμβάνει την γνώμη του μαθητή Β όπως έχει δοθεί ή με παραπλήσιο τρόπο.

Θετικά σημεία στη σκέψη του μαθητή Β, με την έννοια που αναφέραμε στη μεθοδολογία, βρήκε το 19 % των φοιτητών.

Παρανοήσεις στη σκέψη του μαθητή Β, όπως περίπου αναφέρθηκαν στην μεθοδολογία βρίσκει το 31 % των φοιτητών.

Προτάσεις για την παρανόηση του Β καταθέτει μόνο των 16 % των συμμετεχόντων.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία αλλά και την γενικότερη τοποθέτηση των φοιτητών σε σχέση με τη γνώμη του μαθητή Β προέκυψε ότι το 48 % των φοιτητών υιοθετεί την γνώμη του μαθητή Β

Συνοπτικά τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τρόπος σκέψης	Θετικά σημεία	Παρανοήσεις	Προτάσεις	Συμφωνία
41	22	35	18	48
36%	19%	31%	16%	42%

Πίνακας 4: *Ποσοτική προσέγγιση των τοποθετήσεων των φοιτητών σε σχέση με το μαθητή Β.*

Σε σχέση με το μαθητή Γ

Το 36 % των φοιτητών θεωρεί ότι ο μαθητής Γ σκέφτηκε παραπλήσια με τον τρόπο που αναφέραμε στη μεθοδολογία.

Από αρκετούς φοιτητές επαναλαμβάνεται ως τρόπος σκέψης όσα αναφέρονται στην εκφώνηση του θέματος.

Δεν βρίσκουν θετικά σημεία στη σκέψη του μαθητή Γ, ή θεωρούν ως μόνο θετικό σημείο ότι ο μαθητής Γ εκλαμβάνει τον 0,3999… αριθμό το 25 % των φοιτητών.

Το ότι δεν υπάρχει ο προηγούμενος ρητός ενός ρητού ή πραγματικού αριθμού αναφέρεται ως παρανόηση του μαθητή Γ, από το 29 % των φοιτητών.

Προτάσεις για την παρανόηση του Γ συμβατές με όσα αναφέρθηκαν στη μεθοδολογία καταθέτει μόνο των 22 % των συμμετεχόντων.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία αλλά και την γενικότερη τοποθέτηση των φοιτητών σε σχέση με τη γνώμη του μαθητή Γ προέκυψε ότι μόνο το 6 % υιοθετεί τη γνώμη του μαθητή Γ.

Συνοπτικά τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τρόπος σκέψης	Θετικά σημεία	Παρανοήσεις	Προτάσεις	Συμφωνία
41	28	33	25	8
36%	25%	29%	22%	7%

Πίνακας 5: *Ποσοτική προσέγγιση των τοποθετήσεων των φοιτητών σε σχέση με το μαθητή Γ.*

Σε σχέση με το μαθητή Δ

Το 25 % των φοιτητών θεωρεί ότι ο μαθητής Δ σκέφτηκε παραπλήσια με τον τρόπο που αναφέραμε στη μεθοδολογία.

Κάποιοι φοιτητές και πάλι αδυνατούν να διακρίνουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή Δ από αυτά που αναφέρονται στην εκφώνηση του θέματος.

Θετικά σημεία στη σκέψη του μαθητή Δ, με την έννοια που αναφέραμε στη μεθοδολογία, βρήκε το 40 % των φοιτητών.

Παρανοήσεις στη σκέψη του μαθητή Δ, όπως περίπου αναφέρθηκαν στη μεθοδολογία βρίσκει το 24 % των φοιτητών.

Προτάσεις για την παρανόηση του Δ καταθέτει μόνο των 18 % των συμμετεχόντων.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία αλλά και την γενικότερη τοποθέτηση των φοιτητών σε σχέση με τη γνώμη του μαθητή Δ, προέκυψε ότι το 22 % των φοιτητών υιοθετεί την γνώμη του μαθητή Δ.

Συνοπτικά τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τρόπος σκέψης	Θετικά σημεία	Παρανοήσεις	Προτάσεις	Συμφωνία
29	46	27	20	25
25%	40%	24%	18%	22%

Πίνακας 6: *Ποσοτική προσέγγιση των τοποθετήσεων των φοιτητών σε σχέση με το μαθητή Δ.*

Συγκεντρωτικά ποσοστά για τη διδακτική δυνατότητα

Συγκεντρώσαμε τα στοιχεία των πινάκων 3,4,5,6 στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα.

	Τρόπος σκέψης	Θετικά σημεία	Παρανοήσεις	Προτάσεις	Συμφωνία
Για το μαθητή Α	46	18	31	14	37
Για το μαθητή Β	36	19	31	16	42
Για το μαθητή Γ	36	25	29	22	7
Για το μαθητή Δ	25	40	24	18	22

Οφείλουμε δυο βασικές επεξηγήσεις για την κατανόηση των στοιχείων του παραπάνω πίνακα. α) Το άθροισμα των ποσοστών συμφωνίας με τους μαθητές υπερβαίνει το 100% γιατί κάποιοι φοιτητές υιοθετούν την γνώμη περισσότερων του ενός μαθητή. β) Τα ποσοστά των φοιτητών που δεν βρίσκουν παρανόηση στη γνώμη κάποιου μαθητή τις περισσότερες φορές έχουν μεγάλες διαφορές με τα ποσοστά συμφωνίας με τον αντίστοιχο μαθητή. Επειδή πιθανόν θα αναμενόταν το αντίθετο προσπαθούμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο ως αποτέλεσμα των εξής δυο λόγων. Ο πρώτος σχετίζεται με το ότι αρκετοί φοιτητές βρίσκουν λανθασμένες παρανοήσεις στους μαθητές, με την έννοια ότι δεν σχετίζονται με αυτές που αναφέραμε στη μεθοδολογία. Έτσι δεν καταχωρήσαμε ότι βρήκαν κάποια παρανόηση για την γνώμη του αντίστοιχου μαθητή. Πιστεύοντας όμως οι φοιτητές αυτοί ότι έχουν βρει παρανόηση για κάποιο μαθητή δεν υιοθετούν την άποψη του μαθητή αυτού. Ο δεύτερος σχετίζεται με το ότι πολλοί φοιτητές έχουν πολλοί αδύναμες τοποθετήσεις. Είτε αναφέρονται πολύ γενικά για τις γνώμες των μαθητών είτε δεν αναφέρονται καθόλου. Έτσι θεωρήσαμε ότι δεν εντοπίζουν παρανόηση στον αντίστοιχο μαθητή και ταυτόχρονα ότι δεν συμφωνούν μαζί του.

3.3.2 Ποιοτική προσέγγιση

Σε σχέση με το μαθητή Α

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποιες χαρακτηριστικές εκφράσεις μερικών φοιτητών, που αναφέρονται στον μαθητή Α, για να κατανοήσουμε, πως εκλαμβάνουν οι φοιτητές αυτοί, τη φύση του 0,3999… .

Το 0,3999… ως συγκλίνουσα ακολουθία

i) ‘Όντως αυτή ή παράσταση από τη στιγμή που όλο και αυξάνονται τα 9 και οι αριθμοί μετά την υποδιαστολή τόσο μικραίνει η απόσταση από το 0,4 άρα σωστά αναφέρει ότι τείνει στο 0,4’. Ο ίδιος φοιτητής θεωρεί ότι δεν υπάρχει κάποια παρανόηση στη γνώμη του μαθητή Α.

ii) ‘Ότι κατάλαβε πως η ποσότητα αυτή πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο 0,4’. Και αυτός ο φοιτητής δηλώνει ότι δεν υπάρχουν παρανοήσεις στη γνώμη του μαθητή Α.

iii) Αναφέρεται ως παρανόηση του μαθητή Α: ‘Ότι συνδέει τον αριθμό με μια διαδικασία , το οποίο δεν είναι τελείως λάθος αφού lim0,399.. = 0,399…’.

iv) ‘Η σκέψη του Α ότι πρόκειται για μια συνάρτηση που τείνει στο 0,4 είναι εν πολλοίς σωστή’.

v) ‘Είναι θετικό ότι θεωρεί την παράσταση σαν μια διαδικασία που συνεχίζεται χωρίς να παίρνει την τιμή κάποιου αριθμού αλλά πλησιάζει το 0,4’.

Οι παραπάνω φοιτητές θεωρούν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει μια συγκλίνουσα ακολουθία (μάλλον την 0,3, 0,39, 0,399, …) και δεν εκφράζει αριθμό. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η τοποθέτησή τους σχετικά με το όριο ακολουθίας (όπως θεωρούν το 0,3999…). Έτσι χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως ‘πλησιάζει οσοδήποτε κοντά’, ‘διαδικασία που συνεχίζεται χωρίς να παίρνει την τιμή κάποιου αριθμού αλλά πλησιάζει το 0,4’,

Ο ρόλος του απείρου

i) “Η λέξεις ‘τείνει’ και ‘διαδικασία’ εκφράζουν συνεχή κίνηση, όχι κάτι στατικό, μένοντας στη λογική του απείρου”. Ο φοιτητής αυτός δηλώνει ότι ο μαθητής Α δεν έχει κάποια παρανόηση.

ii) ‘Έχει ορθή αντίληψη της έννοιας του απείρου, ότι μια διαδικασία γίνεται χωρίς να σταματήσει. Η παρανόηση είναι ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} \to 0,1$ ενώ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,1$ και άρα η παράσταση 0,3999… =0,4’. Ενώ η τυπική γνώση υπάρχει στον φοιτητή αυτόν, η προσπάθεια διαισθητικής περιγραφής του απείρου περιλαμβάνει μόνο τα δυνητικά του χαρακτηριστικά’.

iii) ‘Ότι αφού το 9 δεν εμφανίζεται πεπερασμένες φορές το 0,3999... δεν είναι κάποιος αριθμός αλλά μια παράσταση ή μια διαδικασία’.

Οι τρεις προηγούμενοι φοιτητές συσχετίζουν την πεποίθηση ότι ο 0,3999… εκφράζει διαδικασία με το ότι τα 9 είναι άπειρα. Το άπειρο εκλαμβάνεται μόνο με τον δυνητικό του χαρακτήρα. Δηλώνεται λοιπόν αδυναμία να θεωρηθεί το άπειρο ως όλο, ως εν ενεργεία άπειρο. Αξιοσημείωτη είναι η σκέψη του (ii) όπου ενώ του είναι γνωστό ότι 0,3999… = 0,4 αποδίδει στον 0,3999… χαρακτηριστικά συνεχιζόμενης διαδικασίας.

Το 0,3999… ως μεταβλητή

i) ‘Σκέφτηκε την παράσταση ως όριο μιας τελικά σταθερής ακολουθίας’.

ii) ‘Είναι θετικό ότι θεωρεί την παράσταση σαν μια διαδικασία που συνεχίζεται χωρίς να παίρνει την τιμή κάποιου αριθμού αλλά πλησιάζει το 0,4’

iii) Στα θετικά σημεία του Α αναφέρεται: ‘Ότι θεώρησε τον 0,399... μια διαδικασία και όχι έναν απλό αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία.’.

iv) ‘Αντιλαμβάνεται την εν δυνάμει πορεία του 0,399... .’.

Οι τέσσερις προηγούμενοι φοιτητές αποδίδουν στο 0,3999… χαρακτηριστικά μεταβλητής ποσότητας η οποία πλησιάζει το 0,4, και συνεπώς δεν έχει στατικά χαρακτηριστικά. Ο (i) προσπαθεί να συμβιβάσει τον στατικό και τον δυναμικό χαρακτήρα που αποδίδει στον 0,3999…, ενώ ο (iii) θεωρεί κατά κάποιο τρόπο το 0,3999… δισυπόστατο και ως αριθμό και ως διαδικασία, θεωρώντας το δεύτερο κυρίαρχο.

Οι παρανοήσεις

Η κύρια παρανόηση που εντοπίζεται στον μαθητή Α είναι ότι θεωρεί την παράσταση 0,3999… διαδικασία. Από αρκετούς μάλιστα αναφέρεται ότι δεν είναι διαδικασία αλλά αριθμός. Όμως ένα μεγάλο μέρος των φοιτητών, εντοπίζει την συγκεκριμένη παρανόηση στον μαθητή Α επειδή υιοθετεί την γνώμη του μαθητή Β. Οι φοιτητές αυτοί ‘επιτρέπουν’ σ’ έναν αριθμό να τείνει σ’ έναν άλλο. Εκλαμβάνουν την έννοια του αριθμού με χαρακτηριστικά μεταβλητότητας και όχι ως συγκεκριμένη σταθερή ποσότητα.

Ένα μέρος των φοιτητών θεωρούν ως παρανόηση του μαθητή Α ότι δεν τον θεώρησε άρρητο αριθμό. Έτσι προσπάθησαν να συμβιβάσουν την πεποίθησή τους, για το ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει διαδικασία και αριθμό, θεωρώντας ότι ο 'περίεργος' αυτός αριθμός είναι άρρητος. Είναι επίσης γνωστό από τη βιβλιογραφία ότι οι αριθμοί που στη δεκαδική τους μορφή έχουν άπειρα μη μηδενικά ψηφία θεωρούνται από τους μαθητές άρρητοι.

Προτάσεις των φοιτητών για τον μαθητή Α

Στις προτάσεις για την παρανόηση του μαθητή Α ξεχωρίζουμε έναν φοιτητή που αναφέρει ότι:

'Το 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία που «τείνει» στο 0,4 αλλά επίσης <u>είναι</u> το 0,4' (η υπογράμμιση δική του).

Κάποιοι φοιτητές αποδεικνύουν ότι 0,3999… = 0,4 αφήνοντας να εννοηθεί ότι ο 0,4 είναι αριθμός και συνεπώς δεν μπορεί να είναι διαδικασία. Την ισότητα 0,3999… = 0,4 βέβαια δεν την απευθύνουν μόνο στον μαθητή Α αλλά και στους υπόλοιπους.

Ένας άλλος αναφέρει: 'Πρέπει να αποφευχθεί η ταύτιση του τείνει στο 0,4 και του είναι το 0,4. Ο αριθμός μπορεί να φθάσει απείρως κοντά στον 0,4 αλλά δεν θα τον φτάσει, επειδή ο 0,399.. μπορεί να πάρει άπειρα 9 είναι δύσκολο να συγκρίνει κάτι άπειρο με κάτι πεπερασμένο'.

Στην ίδια κατεύθυνση κάποιος άλλος γράφει:

'Όσο και αν πλησιάσω το 0,4 το 0,399… είναι ένας αριθμός που απλώς δεν μπορώ να πω με ακρίβεια ποιος είναι.

Ένας άλλος φοιτητής μπαίνοντας στη θέση του καθηγητή θέτει στον μαθητή Α το ερώτημα. Αν θέλουμε να διανύσουμε μια απόσταση ΑΒ ξεκινώντας από το Α και κάθε λεπτό διανύουμε το μισό της απόστασης που μας απομένει πότε θα τερματίσουμε; Ο φοιτητής απευθυνόμενος στο μαθητή Α αναφέρει: 'σύμφωνα με την απάντηση σου δεν θα φτάσεις ποτέ στο Β, που μπορεί γεωμετρικά σκεπτόμενος να είναι δυνατό αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι εφικτό.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο φοιτητής έχει αποδεχθεί το 'παράδοξο' του Ζήνωνα ως πραγματικό παράδοξο. Έχει αποδεχθεί ότι σε θεωρητικό επίπεδο (γεωμετρικά) μπορεί να ισχύει κάτι το οποίο όμως μπορεί να μην ισχύει στην πραγματικότητα.

Ένας φοιτητής που στα θετικά σημεία της γνώμης του μαθητή Α αναφέρει: 'Ότι η λέξη διαδικασία μοιάζει με την έννοια της ακολουθίας και ότι αποκαλεί το 0,3999... παράσταση και όχι αριθμό', ο οποίος δεν βρίσκει παρανόηση στον μαθητή Α, γράφει στις προτάσεις αναφερόμενος στους μαθητές ότι: ‘Κανείς δεν είπε ότι 0,399.. =0,4. (είναι σαν την απόδειξη ότι 0,999…=1)’.

Ο φοιτητής θυμάται ότι 0,999...= 1 και μάλιστα χρησιμοποιεί τον όρο ‘απόδειξη’. Από την υπόλοιπη απάντησή του όμως φαίνεται ότι δεν το πιστεύει, δεν επηρεάζει καν την τοποθέτησή του ή την σκέψη του. Η απόδειξη αυτή τη θεωρεί σαν μαγικό τρυκ. Είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που μας υπενθυμίζει να είμαστε επιφυλακτικοί για την επάρκεια της τυπικής γνώσης για την ουσιαστική κατανόηση μιας έννοιας.

Σε σχέση με το μαθητή Β

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι με διαφορετικές προσεγγίσεις αρκετοί φοιτητές αποδίδουν στο 0,3999… χαρακτηριστικά μεταβλητού αριθμού:

Ο ρόλος του απείρου

i) Ως παρανόηση του μαθητή Β αναφέρεται: ‘Ότι το 0,399… είναι αριθμός. Δεν σκέφτηκε ότι το 0,399... εκφράζει διάφορους αριθμούς ανάλογα με το πλήθος των φορών που εμφανίζεται το 9’ . Ο φοιτητής αυτός αποδίδει στο άπειρο την έννοια του οσοδήποτε πολλά. Έχουμε πάλι την θεώρηση του απείρου ως δυνητικό και αδυναμία θεώρησής του ως όλο.

ii) Ως παρανόηση του μαθητή Β αναφέρεται ότι: ‘Ο Β δεν παρατηρεί ότι η παράσταση που μας απασχολεί είναι μεταβλητή όσο απειρίζονται τα ψηφία. Ο συγκεκριμένος φοιτητής εκλαμβάνει το άπειρο μόνο ως διαδικασία.

iii) Στα θετικά σημεία της άποψης του μαθητή Β αναφέρεται: ‘Ο μαθητής Β είπε το πιο προφανές, γνωρίζει ότι το 0,3999… όσα 9 και να έχει είναι αριθμός και πλησιάζει τον 0,4 χωρίς να γίνει ποτέ 0,4’. Ενώ ο ίδιος φοιτητής ως παρανόηση του μαθητή Β αναφέρει: ‘ότι χρησιμοποιεί την λέξη αριθμό και όχι παράσταση’. Ο συγκεκριμένος φοιτητής παρουσιάζει έντονα αντιφατικά χαρακτηριστικά στην τοποθέτησή του, ενδεικτικό του ότι ο ίδιος δεν έχει καταλήξει σχετικά με το αν θεωρεί το 0,3999… αριθμό ή διαδικασία. Στην ίδια κατεύθυνση αρκετοί φοιτητές δεν βρίσκουν διαφορές στις τοποθετήσεις των μαθητών Α και Β και τις αποδέχονται και τις δυο. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την παρακάτω τοποθέτηση ενός φοιτητή που αναφέρει ως παρανόηση του μαθητή Β: ‘Είδε τον 0,3999... μόνο σαν αριθμό και όχι σαν ακολουθία’.

0,3999… και 0,4 – Ίδιοι και διαφορετικοί

Ένας φοιτητής για τον μαθητή Β αναφέρει ότι: ‘σκέφτεται σωστά, δέχεται την παράσταση σαν ένα αριθμό ο οποίος βρίσκεται πολύ κοντά στο 0,4, τείνει σ’ αυτό. Καταλαβαίνει ότι ο 0,3999… είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο 0,4, τον πλησιάζει, σχεδόν είναι ίδιος με αυτόν αλλά είναι διαφορετικοί και δεν ισούνται’. Ο φοιτητής παρουσιάζει πολλές αντιφάσεις στην άποψή του. Θεωρεί το 0,3999… και ως αριθμό και ότι τείνει στο 0,4, και ότι είναι πολύ κοντά και ότι τον πλησιάζει και ότι διαφορετικοί και ότι είναι σχεδόν ίσοι.

Ένας άλλος φοιτητής ως παρανόηση του μαθητή Β αναφέρει: ‘Ότι ο Β λέει ότι ‘τείνει’ στο 0,4 και αυτό σημαίνει ότι δεν έχει καταλάβει την έννοια του ορίου συνάρτησης. Δεν λέει αν το φτάνει ποτέ ή όχι.’ Ο φοιτητής αποδέχεται ότι το 0,3999… τείνει στο 0,4 και ‘νομιμοποιεί’ το ερώτημα για το αν η συνάρτηση φτάνει κάποτε το όριό της.

Η στρογγυλοποίηση

Ένας φοιτητής συσχετίζει το 0,3999… με τον όρο ‘τείνει’ και την στρογγυλοποίηση. Χαρακτηριστικά αναφέρει: ‘Παρανοεί το γεγονός ότι ο 0,399.. θα μπορούσε να τείνει και σε άλλους αριθμούς εκτός του 0,4 όπως στον 0,39, ή ακόμα και στον 0 αν στρογγυλοποιούσε στη μονάδα για παράδειγμα’.

Η προσέγγιση των απειροστών

Ένας φοιτητής που υιοθετεί την γνώμη του μαθητή Α, ως θετικό στη σκέψη του μαθητή Β αναφέρει: ‘Έχει κατανοήσει την έννοια του απείρου και μπορεί να δει ότι ο αριθμός αυτός είναι απειροελάχιστα κοντά στο 0,4’.

Καταφεύγοντας στους άρρητους

i) Ένας φοιτητής για τον τρόπο σκέψης του μαθητή Β αναφέρει: ‘Λογικά σκέφτηκε ότι αφού έχουμε έναν άρρητο αριθμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτός τείνει σε ρητό’ ενώ ως παρανόηση του μαθητή Β θεωρεί ότι: ‘Έχει μεταφέρει την έννοια του ορίου από τις ακολουθίες και τις συναρτήσεις στους σταθερούς αριθμούς. Θεώρησε ότι αν $α \notin \mathbb{Q}$ τότε $\lim α = β$, $β \in \mathbb{Q}$ το οποίο είναι λανθασμένο’. Ο φοιτητής αυτός βλέπουμε ότι θεωρεί τον 0,3999… άρρητο αριθμό, δεν διευκρινίζει αν θεωρεί ότι το πρόβλημα είναι ένας αριθμός να τείνει σ’ έναν άλλο ή μια ακολουθία αρρήτων να τείνει σ’ έναν ρητό αριθμό.

ii) Ένας φοιτητής στα θετικά σημεία του Β αναφέρει: ‘Έχει συλλάβει την εικόνα ενός αριθμού που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια αλλά γνωρίζουμε με βεβαιότητα ότι είναι μικρότερος του 0,4. Ενώ ως παρανόηση του μαθητή Β αναφέρεται ότι: ‘ο αριθμός 0,3999... είναι ένας αριθμός πραγματικός και έχει μια συγκεκριμένη θέση πάνω στον άξονα. Δεν μπορώ να τον μετακινώ και να τον φέρνω όλο και πιο κοντά στο 0,4. Είναι ένας αριθμός άρρητος . Δεν είναι ένα σύνολο αριθμών’ Φαίνεται πως ο φοιτητής βρίσκεται σε γνωστική σύγκρουση και γι’ αυτό η γνώμη του παρουσιάζει κάποια αντιφατικά χαρακτηριστικά. Από τη μια θεωρεί ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τον 0,3999… ενώ από την άλλη είναι σταθερός αριθμός. Προσπαθώντας να συμβιβάσει αυτή την αντίφαση θεωρεί τον 0,3999… άρρητο.

Σε σχέση με το μαθητή Γ

Πως συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς;

Ένας φοιτητής για τον τρόπο που σκέφτηκε ο μαθητής Γ αναφέρει ‘Απαντάει έτσι μη μπορώντας να βρει κάποιον ανάμεσα. Εφαρμόζει τους κανόνες σύγκρισης δεκαδικών’. Πράγματι αν εφαρμοστούν οι κανόνες σύγκρισης δεκαδικών αριθμών για τους 0,3999… και 0,4 θα προκύψει ότι 0.3999… < 0,4. Τα σχολικά βιβλία δεν ξεκαθαρίζουν αν οι δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών, με άπειρα μη μηδενικά ψηφία, θεωρούνται δεκαδικοί αριθμοί. Χαρακτηρίζονται ως περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη αναφορά για τον τρόπο σύγκρισης τους. Επίσης στα σχολικά βιβλία δεν αναφέρεται ότι δεν υπάρχει ο προηγούμενος ρητός ενός ρητού αριθμού. Με βάση και το ότι δεν μπορεί να βρεθεί αριθμός μεταξύ των 0,3999… και 0,4 (δεν υπάρχει άλλωστε), ένας μαθητής ‘νομιμοποιείται’ να έχει τη θεώρηση του συγκεκριμένου φοιτητή. Ο ίδιος φοιτητής αναφέρει σωστά στις παρανοήσεις του μαθητή Γ ότι: ‘Μεταφέρει την έννοια του προηγούμενου από τους φυσικούς αριθμούς’.

Η αδυναμία εφαρμογής της τυπικής γνώσης

Ένας φοιτητής αναφέρει στις παρανοήσεις τους μαθητή Γ ότι: ‘μεταξύ δυο αριθμών υπάρχουν άπειροι άλλοι, οπότε δεν μπορούμε να πούμε ότι μετά τον 0,3999… είναι ο 0,4’. Ο συγκεκριμένος φοιτητής θεωρεί ότι μεταξύ δυο αριθμών (πρέπει να εννοεί ρητοί ή πραγματικοί) υπάρχουν άπειροι άλλοι, αλλά ‘ξεχνά’ ότι αυτό συμβαίνει μόνο όταν οι δυο αριθμοί αυτοί είναι διαφορετικοί. Αυτό είναι ενδεικτικό για το ότι δεν περνάει από το μυαλό του ότι μπορεί οι 0,3999… και 0,4 να είναι ίσοι. Επίσης παρά το ότι ο φοιτητής αποφαίνεται ότι πρέπει να υπάρχουν άπειροι μεταξύ του 0,3999… και του 0,4 δεν βρίσκει ούτε έναν. Έτσι σε πολλούς φοιτητές εμφανίζεται το φαινόμενο να γνωρίζουν ότι δεν υπάρχει ο προηγούμενος ρητός ενός ρητού αριθμού και ταυτόχρονα να θεωρούν τον 0,3999… μικρότερο του 0,4 χωρίς φυσικά να μπορούν να βρουν άλλο ανάμεσά τους. Έτσι έχουμε χαρακτηριστική περίπτωση της ύπαρξης μιας τυπικής γνώσης η οποία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ερμηνεύσει τα φαινόμενα ή να επιλύσει αντιφάσεις..

Η θεώρηση του 0,3999… ως μεταβλητός μη ρητός αριθμός. Η προσφυγή στον embodied κόσμο

Ένας φοιτητής στις παρανοήσεις του φοιτητή Γ αναφέρει: ‘Ο Γ αφήνει να εννοηθεί ότι είναι και αυτός ρητός. Ο 0,399.. δεν μπορεί να έχει ορισμένη (συγκεκριμένη) σταθερή θέση πάνω στον άξονα των πραγματικών και αφού δεν έχει σταθερή θέση δεν μπορούμε να ορίσουμε τον αμέσως προηγούμενο του 0,4’. Έτσι το συμπέρασμα της ανυπαρξίας προηγούμενου αιτιολογείται με βάση την ιδέα του μεταβλητού αριθμού. Είναι χαρακτηριστική επίσης η προσφυγή του φοιτητή στον embodied κόσμο των εικονικών αναπαραστάσεων στην προσπάθειά του να αιτιολογήσει τη θέση του για τη μεταβλητότητα του 0,3999… .

Ο 0,3999… ως προηγούμενος του 0,4 και η σχετικότητα του απείρου

Κάποιος φοιτητής στις παρανοήσεις του μαθητή Γ αναφέρει ότι: ‘Αν και σκέφτηκε τον 0,3999... σαν τον προηγούμενο του 0,4 δεν σκέφτηκε ότι ο όρος άπειρα είναι σχετικός, επομένως πάντα θα υπάρχει ένας άλλος ανάμεσα σ’ αυτούς τους δυο’.

Ο φοιτητής από τη μια θεωρεί τον 0,3999... τον προηγούμενο του 0,4 από την άλλη θεωρεί ότι υπάρχει κάποιος ανάμεσά τους. Μια ερμηνεία για την θεώρηση του απείρου ως σχετική έννοια, είναι ότι το άπειρο εκλαμβάνεται με την έννοια του ‘οσοδήποτε πολλά’. Έτσι ο φοιτητής βρίσκεται σε έναν υποτιθέμενο διάλογο με κάποιον που του λέει έναν αριθμό και αυτός μπορεί πάντα να βρει κάποιον πλησιέστερα στο 0,4 ‘σχετικά’ με τον αριθμό που του είπαν. Έτσι ο φοιτητής ‘επιλύει’ την αντίφαση της θεώρησης του 0,3999… ως προηγούμενου του 0,4 και ταυτόχρονα της ύπαρξης κάποιου ανάμεσά τους.

Η αδυναμία μετάβασης από τις ανισότητες στις ισότητες

Ένας φοιτητής στις παρανοήσεις του μαθητή Γ αναφέρει: ‘Ο Γ θεωρεί ότι ο 03999…είναι ο αμέσως προηγούμενος του 0,4 αλλά αυτό δεν μπορούμε να καταλάβουμε αφού αυτός είναι όσο πιο κοντά γίνεται' (πρέπει να εννοεί στο 0,4). Ο φοιτητής φαίνεται ότι δεν αποδέχεται ότι αν ένας πραγματικός αριθμός β βρίσκεται σε κάθε διάστημα που περιέχει τον πραγματικό αριθμό α τότε ταυτίζεται με τον α. Δηλαδή ότι αν για παράδειγμα $\alpha, \beta \in \Re$ με $\alpha - \varepsilon < \beta \leq \alpha$ για κάθε $\varepsilon > 0$ τότε $\beta = \alpha$. Εμφανίζεται λοιπόν, ένα από τα γνωστά πρόβλημα κατανόησης του απειροστικού λογισμού, της αδυναμίας μετάβασης από τις ανισότητες στις ισότητες.

Το σήμα 0,3999…ως εικόνα ερμηνεύεται ως άπειρο μέγεθος

Στις παρανοήσεις του μαθητή Γ ένας φοιτητής αναφέρει: 'Επειδή ο 0,3999... μπορεί να πάρει άπειρα 9 είναι δύσκολο να συγκρίνει κάτι άπειρο με κάτι πεπερασμένο.' Ο φοιτητής φαίνεται ότι θεωρεί τον 0,3999... άπειρο και γι' αυτό δεν μπορεί να συγκριθεί με τον 0,4 τον οποίο θεωρεί πεπερασμένο. Να σημειώσουμε ότι ο ίδιος φοιτητής δεν καταγράφει κάποια παρανόηση στον μαθητή Δ. Έχουμε λοιπόν μια χαρακτηριστική περίπτωση όπου το ίδιο το σήμα 0,3999… ως εικόνα επηρεάζει τόσο ισχυρά την ερμηνεία του φοιτητή ώστε να θεωρήσει ότι εκφράσει κάτι άπειρο.

Η επίκληση της εξουσίας μιας αρχής ως μέθοδος αιτιολόγησης

Ένας φοιτητής στις παρανοήσεις του μαθητή Γ αναφέρει: 'Δεν κατέχει την αρχή του ελαχίστου' και ότι λόγω της πληρότητας υπάρχει πάντα κάποιος ανάμεσα σε δυο αριθμούς'. Ο φοιτητής δεν διευκρινίζει ότι η αρχή του ελαχίστου δεν ισχύει στο σύνολο των ρητών και η μη ύπαρξη επόμενου ρητού δεν οφείλεται στην ιδιότητα της πληρότητας (που άλλωστε δεν ισχύει στους ρητούς) αλλά σ' αυτήν της πυκνότητας.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο φοιτητής επικαλείται την ισχύ μιας αρχής, αυτής του ελαχίστου, την οποία φαίνεται ότι δεν γνωρίζει και η οποία δεν ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, προκειμένου να δικαιολογήσει την πεποίθησή του. Είναι αρκετά συχνό το φαινόμενο να βασίζεται μια αιτιολόγηση σε κάποια εξουσία, αυτή του καθηγητή ή του σχολικού βιβλίου χωρίς να εξετάζεται πρωτογενώς η ορθότητα της πρότασης της οποίας γίνεται επίκληση ή η λογική ισχύ μιας τέτοιας μεταφοράς.

Ο ίδιος φοιτητής στις προτάσεις προς τους μαθητές αναφέρει: 'Η αδυναμία εύρεσης αριθμού μεταξύ των 0,3999… και του 0,4 θα οδηγήσει τους μαθητές στο ότι είναι ίσοι' Εδώ πρέπει να επισημάνουμε την λεπτή διάκριση, μεταξύ της μη ύπαρξης ρητού μεταξύ δυο ρητών που πράγματι συνεπάγεται την ισότητα των ρητών αυτών και της αδυναμίας εύρεσης που φυσικά δεν συνεπάγεται τίποτα.

Η δημιουργία συμβόλων κατά τη διάρκεια γνωστικών συγκρούσεων

Ένας φοιτητής για τη σκέψη του μαθητή Γ αναφέρει: 'Σκέφτηκε ότι για να φτάσω από τον 0,3999… στο 0,4 πρέπει να προσθέσω 0,00…1, δηλαδή το μικρότερο θετικό αριθμό'. Επειδή στην διατύπωση του θέματος δεν έγινε καμία αναφορά για τον μικρότερο θετικό αριθμό, αλλά και επειδή ο φοιτητής δεν αναφέρει ότι η ιδέα αυτή αποτελεί μια παρανόηση του μαθητή, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο φοιτητής είναι δυνατόν να πιστεύει ότι υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός τον οποίο συμβολίζει με 0,000…1. Παρατηρούμε λοιπόν ότι κατά την διαδικασία γνωστικών συγκρούσεων ή ερμηνείας μαθηματικών φαινομένων, δημιουργείται η ανάγκη ταυτόχρονης 'συμβολοποίησής' τους. Η διαδικασία αυτή μπορεί να μην έχει προηγούμενο στην τυπική διδακτική εμπειρία του υποκειμένου. Αντίθετα ο φοιτητής τυπικά πρέπει να γνωρίζει ότι δεν υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός. Όμως χρησιμοποιούνται υλικά αυτής της εμπειρίας μ' έναν διευρυμένο τρόπο από τη ματιά του υποκειμένου. Να σημειώσουμε επίσης ότι η διαδικασία αυτή συμβαίνει ακόμα και σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος οι οποίοι έχουν εκτεθεί σε μια προσπάθεια ανάδειξης της ακριβολογίας και του τυπικού χειρισμού των μαθηματικών συμβόλων. Έτσι στη συγκεκριμένη περίπτωση τα άπειρα 0 θεωρούνται είτε ως 'πάρα πολλά' είτε ως 'οσοδήποτε πολλά' δίνοντας την δυνατότητα να τοποθετηθεί το 1 στο 'τέλος'.

Ένας άλλος φοιτητής με ξεκάθαρο τρόπο στις παρανοήσεις του μαθητή Γ αναφέρει: 'Έχει στο μυαλό του το 0,399… ως ένα σταθερό σημείο δεν σκέφτεται δηλαδή καθόλου ότι τα 9 είναι άπειρα'. Ο φοιτητής αυτός μεταφέρει την εικόνα του 0,3999… σ' έναν άξονα, όπου τον θεωρεί ως μη σταθερό σημείο και αυτή την θεώρηση την αποδίδει στο άπειρο, το οποίο προσδίδει χαρακτηριστικά μεταβλητότητας στα σύμβολα που συμμετέχει.

Αντιφατικές τοποθετήσεις κατά τη διάρκεια γνωστικών συγκρούσεων

Χαρακτηριστικό των αντιφάσεων στη σκέψη κάποιων φοιτητών ακόμη και στην ίδια παράγραφο είναι η παρακάτω περίπτωση όπου ένας φοιτητής για τον μαθητή Γ αναφέρει: 'Οι παρανοήσεις που έχει είναι ότι η παράσταση είναι ατέρμονη δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι αριθμός, ότι είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός. Ο μαθητής συγκεκριμενοποιεί το αποτέλεσμα της παράστασης λέγοντας ότι είναι ο αμέσως πριν το 0,4 αριθμός, χωρίς να έχει πει βέβαια ποιος αριθμός είναι καθότι δεν δύναται.

Η παράσταση αν και είναι αριθμός δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί εφόσον συνεχίζεται στο άπειρο.

Το 0,3999… ως ‘ροή’ προς το 0,4

Ένας φοιτητής χρησιμοποιεί την λέξη ‘ροή’ που χρησιμοποιούσε και ο Newton για τις οριακές διαδικασίες. Συγκεκριμένα αναφέρει: ‘Ο Γ θα δυσκολευτεί να κατάλάβει την ‘ροή’ που έχει ο 0,399.. προς το 0,4’.

Το 0,3999… ως ‘όχι απλός αριθμός’

Κάποιοι φοιτητές ακροβατώντας ανάμεσα στο να θεωρήσουν το 0,3999… αριθμό, μεταβλητή ή διαδικασία, τον χαρακτηρίζουν όχι απλό αριθμό. Ένας απ’ αυτούς χαρακτηριστικά αναφέρει για κάποιον μαθητή: ‘Δεν έχει καταλάβει ότι μπορεί να είναι κάτι άλλο εκτός από ένας απλός αριθμός. Επίσης ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί που πλησιάζουν το 0,4 και είναι αμέσως πριν’.

Ίσως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποιοι φοιτητές διακρίνουν στο σήμα 0,3999… μια διαδικασία και έναν αριθμό ταυτόχρονα.

Προτάσεις των φοιτητών για τις παρανοήσεις του μαθητή Γ

i) Ένας φοιτητής προτείνει: ‘Στον Γ να μην βλέπει το 0,3999... ως έναν αριθμό αλλά ως μια συνάρτηση που όλο αυξάνει’. Ενώ ένας άλλος αναφέρει: ‘Ο αριθμός 0,3999… είναι διαφορετικός από την έκφραση 0,3999. Είναι μια μη σταθερή μαθηματική οντότητα όπως ο αριθμός $\pi \approx 3,14\ldots$. Αν ο αριθμός 0,399.. είναι συγκεκριμένος θα μπορούσαμε να τον δούμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στον 0,39 και στον 0,4’.

Στους φοιτητές αυτούς βλέπουμε ότι οι δεκαδικές μορφές με άπειρα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία εκλαμβάνονται ως μη σταθερές μαθηματικές οντότητες και μάλιστα χωρίς συγκεκριμένη θέση στον άξονα. Ένας άλλος φοιτητής ακόμα πιο ξεκάθαρα αναφέρει στις προτάσεις του προς τον μαθητή Γ: ‘Τοποθέτηση στον άξονα του 0,3 και του 0,4 και ένα x μεταξύ τους με κατεύθυνση προς το 0,4’.

ii) ‘Για τον Γ θα του έδινα το παράδειγμα του $\gamma = \dfrac{0,3999...+0,4}{2}$ για τον οποίο ισχύει $0,399... < \gamma < 0,4$’.

Πράγματι το ημιάθροισμα δυο διαφορετικών ρητών είναι ένας ρητός μεταξύ αυτών. Εδώ ο φοιτητής θεωρεί αυτονόητο ότι οι 0,3999… και 0.4 δεν είναι ίσοι λόγω της διαφορετικής τους αναπαράστασης, βρίσκοντας τον αριθμητικό μέσο δυο αριθμών χωρίς να εξετάσει αν το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ταυτίζεται με κάποιον από τους αριθμούς.

iii) Ένας φοιτητής προτείνει προς τους μαθητές προκειμένου να κατανοήσουν το πεπερασμένο και το άπειρο, αλλά και την πυκνότητα των δεκαδικών αριθμών όπως λέει, το παρακάτω παράδειγμα. Σχεδιάζει μια ευθεία, τοποθετεί σ' αυτή δυο σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς 3/8 και 4/8 και καλεί τους μαθητές να απαντήσουν πόσα στοιχεία υπάρχουν ανάμεσά τους. Σημειώνει επίσης ότι 'Οι μαθητές γνωρίζουν από τη γεωμετρία ότι το ευθύγραμμο τμήμα έχει άπειρα στοιχεία, άρα μεταξύ του 3/8 και του 4/8 βρίσκονται άπειρα στοιχεία. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι κάθε αναπαράσταση έχει εγγενείς περιορισμούς τους οποίους πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη όταν προτείνουμε μια αντίστοιχη προσέγγιση. Έτσι όταν τοποθετούμε αριθμούς σ' έναν άξονα του οποίου η μονάδα απέχει από το 0 περίπου ένα εκατοστό του μέτρου (όπως συνήθως κάνουμε) είναι εξαιρετικά αμφίβολο για το αν οι μαθητές θα θεωρήσουν ότι μεταξύ 3/8 και του 4/8 υπάρχουν άπειρα σημεία επειδή τα σημεία που αντιστοιχούν στους 3/8, 4/8 θα είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Ακόμα πιο δύσκολα θα θεωρούσαν ότι μεταξύ του 0.39999 και του 0,4 υπάρχουν άπειρα σημεία.

Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η μεταφορά σε άλλο αναπαραστατικό πλαίσιο δεν απαντάει σ' όλα τα προβλήματα. Δηλαδή γιατί αν ένας μαθητής δεν θεωρεί ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών να θεωρήσει ότι υπάρχουν άπειρα σημεία μεταξύ των σημείων που αντιστοιχούν αυτοί σ' έναν άξονα; Πόσο μάλλον όταν τα σημεία είναι τόσο κοντά, που δεν φαίνεται κανένα κενό μεταξύ τους.

Ένα στοιχείο ακόμα που έχουμε να επισημάνουμε με αφορμή την τοποθέτηση του φοιτητή αυτού είναι ότι η μεταφορά ενός ερωτήματος σ' άλλο αναπαραστατικό πλαίσιο θα πρέπει να γίνεται με όλες τις δεσμεύσεις του ερωτήματος αυτού ή τουλάχιστον με επισήμανση των προτεινόμενων απλοποιήσεων. Δηλαδή αν το αρχικό ερώτημα είναι αν υπάρχουν αριθμοί ή όχι μεταξύ του 0,3999… και του 0,4 αυτό δεν είναι ισοδύναμο με το αν υπάρχουν ή όχι σημεία του άξονα μεταξύ των σημείων που αντιστοιχούν στους αριθμούς 3/8 και του 4/8. Η πρώτη διαφορά είναι ότι ενώ οι αριθμοί 0,3999… και 0,4 είναι σε δεκαδική μορφή οι αριθμοί 3/8 και 4/8 είναι σε κλασματική μορφή. Η δεύτερη διαφορά είναι η απόσταση των αριθμών στις δυο περιπτώσεις. Να σημειώσουμε και πάλι ότι ο συγκεκριμένος φοιτητής γνώριζε ότι 0,3999… =0,4. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλοί φοιτητές που επιχείρησαν να μεταφέρουν τον 0,3999… στον άξονα του μετέφεραν και όλα τα χαρακτηριστικά που του απέδιδαν στην αλγεβρική – συμβολική του μορφή. Ένας απ' αυτούς στις προτάσεις του προς τους μαθητές χαρακτηριστικά αναφέρει: 'Ότι μια παράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία βρίσκεται σε διαρκή κίνηση προς ένα προορισμό τον οποίο δεν φτάνει ποτέ'. Ένας άλλος φοιτητής προτείνει: 'Για τον Γ γραφικά θα έδειχνα ότι όσο κοντά στο 0,4 και αν πάρει ένα σημείο σίγουρα θα μπορώ να βρω το μέσο του διαστήματος κ. ο. κ'. Αυτό όμως μετά από μερικά βήματα δεν φαίνεται γραφικά.

iv) Ένας φοιτητής στις προτάσεις του προς τον μαθητή Γ αναφέρει: 'Ο καθηγητής λοιπόν θα εξηγήσει ότι ανάμεσα σε δυο πραγματικούς ή ρητούς υπάρχουν άπειροι λόγω της πληρότητας. Δεν υπάρχει δηλαδή διάταξη. Για παράδειγμα ανάμεσα στον 0,3999 (με 10^6 9 άρια) και στον 0,4 υπάρχουν άπειροι. Όμως ανάμεσα στον 0,399… (άπειρα ψηφία) και στον 0,4 δεν υπάρχει κάποιος αριθμός οπότε αυτοί οι αριθμοί ταυτίζονται'. Το επιχείρημα αυτού του φοιτητή μπορεί να μας οδηγήσει στην ισότητα 0,3999… = 0,4 αρκεί να δείξουμε ότι πράγματι δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 0,3999… και του 0,4. Πράγματι αν α = 0,3999…, β = 0,4 και υποθέσουμε ότι α < β τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι α < $\frac{\alpha+\beta}{2}$ < β. Όμως $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{0,3999...+0,4}{2} =$

$\frac{0,7999...}{2} = 0.3999... = \alpha$ (άτοπο). Όμοια σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι α > β. Οπότε α = β.

Ο φοιτητής αυτός αναφέρει ότι στο σύνολο των ρητών και των πραγματικών αριθμών δεν υπάρχει διάταξη. Αυτό που ισχύει είναι ότι αυτά δεν είναι καλώς διατεταγμένα σύνολα όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών αλλά μόνο ολικά διατεταγμένα σύνολα. Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε δυο ρητούς ή πραγματικούς αριθμούς αλλά δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά τους ρητούς ή τους πραγματικούς αριθμούς. Δεν υπάρχει δηλαδή η έννοια του επόμενου στοιχείου σ' ένα μη καλώς διατεταγμένο σύνολο, όπως δεν υπάρχει και η έννοια του πρώτου ή του τελευταίου στοιχείου.

Ο φοιτητής επίσης αναφέρει ότι η ύπαρξη άπειρων αριθμών μεταξύ δυο ρητών ή πραγματικών αριθμών οφείλεται στην ιδιότητα της πληρότητας. Βέβαια αρκεί η πυκνότητα ενός συνόλου για να ισχύει η προηγούμενη πρόταση. Όμως κάθε πλήρες σύνολο έχει και την ιδιότητα της πυκνότητας.

v) Κάποιος φοιτητής στις προτάσεις του προς τους μαθητές αναφέρει: 'Οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί ότι οι πραγματικοί είναι άπειροι οπότε μεταξύ του 0,3999...

και του 0,4 υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Είναι χαρακτηριστικό ότι παρόλο που ο φοιτητής υποστηρίζει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ του 0,3999… και του 0,4 δεν διαφαίνεται ότι προσπαθεί να βρει έστω έναν.

Ο φοιτητής αποδίδει το ότι ο 0,3999.. δεν είναι ο προηγούμενος του 0,4 στο ότι οι πραγματικοί είναι άπειροι. Δεν αναφέρει ότι είναι άπειροι σε οποιοδήποτε διάστημα και δεν αναρωτιέται ότι και οι φυσικοί είναι άπειροι (όχι όμως σε οποιοδήποτε διάστημα) αλλά έχουν προηγούμενο. Αντίστοιχες εκφράσεις χρησιμοποιούν αρκετοί φοιτητές, δείχνοντας μικρό ενδιαφέρον για την ακρίβεια των λεγομένων τους.

vi) Στις προτάσεις ενός φοιτητή για τον μαθητή Γ αναφέρεται: ‘Για τον Γ θα έθετα το ερώτημα. ‘Ο 0,399.. είναι ρητός όπως και ο 0,4 αυτό δεν σημαίνει ότι ανάμεσά τους πρέπει να υπάρχει ένας άρρητος ; Πως γίνεται τότε να είναι ο 0,399.. αμέσως προηγούμενος του 0,4. Το επιχείρημα θα ευσταθούσε αν οι αριθμοί 0,3999…και 0,4 ήταν διαφορετικοί. Βέβαια δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι οι μαθητές αποδέχονται με ευκολία, ότι μεταξύ δυο ρητών υπάρχει ένας άρρητος. Ο φοιτητής καταφεύγει στους άρρητους για βρει αριθμό μεταξύ δυο ρητών. Το επιχείρημα αυτό δεν απαντάει στο αν υπάρχει ρητός μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών.

vii) Ένας φοιτητής χρησιμοποιεί τις ανισότητες και τον καθολικό ποσοδείκτη για κάθε για να δείξει μια ισότητα. Συγκεκριμένα αναφέρει: ‘Ότι η διαφορά 0,4 – 0,3999.. είναι 0 αφού είναι μικρότερη από οποιοδήποτε αριθμό, άρα οι αριθμοί ταυτίζονται’.

Σε σχέση με το μαθητή Δ

Το 0,3999… ως άπειρη ποσότητα

i) Ένας φοιτητής στα θετικά σημεία του μαθητή Δ αναφέρει: ‘Σκέφτεται σωστά προσπαθώντας να εκφράσει την παράσταση 0,3999… με άθροισμα, βλέπει πως είναι μια διαδικασία η οποία απειρίζεται’. Ο φοιτητής χαρακτηρίζει το 0,3999… άπειρη διαδικασία επηρεασμένος από το άπειρα 9 που εννοούνται στο σύμβολό του.

ii) Ένας άλλος φοιτητής θεωρεί στα θετικά σημεία του μαθητή Δ ότι: ‘Ξέρει να αναλύει έναν αριθμό και πως αν έχει πρόσθεση άπειρων στοιχείων δεν υπάρχει αριθμητικό αποτέλεσμα’. Ο φοιτητής παρόλο που έχει διδαχθεί σειρές αδυνατεί να εφαρμόσει τη γνώση αυτή για να κατανοήσει τη φύση ενός άπειρου αθροίσματος.

iii) Κάποιος φοιτητής αναφέρει στα θετικά σημεία του μαθητή Δ: 'Είναι σωστό ότι ο αριθμός 0,3999… αυξάνεται συνεχώς'. Έτσι το 0,3999… θεωρείται και αριθμός αλλά και μεταβλητή ποσότητα που αυξάνεται συνεχώς.

Το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 + … συγκλίνει στο 0,4 δεν ισούται με 0,4

Κάποιος φοιτητής στις παρανοήσεις του μαθητή Δ αναφέρει: 'Δεν έχει κατανοήσει ότι το άθροισμα αυτό συγκλίνει σε αριθμό. Το άθροισμα του Δ δεν ισούται φυσικά με το 0,4 αλλά συγκλίνει στο 0,4'.

Είναι εμφανής η αδυναμία του φοιτητή να δει το άπειρο άθροισμα ως όλο. Αντιμετωπίζει το άπειρο άθροισμα ως αέναη διαδικασία προσθήκης ενός ακόμα προσθετέου επιμένοντας στην δυνητική θεώρηση του απείρου και στην διαισθητική προσέγγιση αυτού παρά την περί του αντιθέτου διδασκαλία.

Το 0,3999… ως μη ρητός αριθμός

Στις παρανοήσεις του μαθητή Δ ένας φοιτητής αναφέρει ότι: 'Δεν μπορεί ο αριθμός αυτός να ισούται με κάποιο αριθμό. Έπρεπε να ορισθεί πως ο αριθμός 0,3999... δεν μπορεί να ισούται με κάποιο ρητό αριθμό'. Έτσι η προσπάθεια να αποδοθεί αριθμητική σημασία σ' ένα άθροισμα άπειρων προσθετέων και η γνωστική σύγκρουση που προκαλεί μια τέτοια προσπάθεια, οδηγεί τον φοιτητή στο να θεωρήσει τον 0,3999… μη ρητό αριθμό. Έτσι οι μη ρητοί αριθμοί θεωρούνται οι αριθμοί που έχουν τις 'περίεργες' εκείνες ιδιότητες που δεν ισχύουν στους ρητούς. Είναι πιθανό ο φοιτητής να θεωρεί ως μη ρητό κάθε αριθμό που έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα μη μηδενικά ψηφία.

Λεκτική περιγραφή του κριτηρίου σύγκλισης σειρών

Ένας φοιτητής περιγράφει ένα κριτήριο για το πότε μια σειρά συγκλίνει. Σχετικά αναφέρει: 'Το ότι δεν μπορεί να είναι αριθμός είναι λάθος. Δεν έχει προσέξει ότι αυτό που προστίθεται κάθε φορά τείνει να μηδενιστεί'. Δεν είναι όμως σίγουρο ότι οι μαθητές αποδέχονται ότι ένα άθροισμα άπειρων θετικών προσθετέων που τείνουν στο 0, είναι αριθμός.

Το 0,3999… απειροελάχιστα κοντά στο 0,4

Ένας φοιτητής αναφερόμενος στις παρανοήσεις του μαθητή Δ γράφει: 'Του διαφεύγει ότι η παράσταση αυτή είναι απειροελάχιστα κοντά στο 0,4'. Ο συγκεκριμένος φοιτητής υιοθετεί την έννοια του απειροστού, αντιστεκόμενος στην εκδίωξη των απειροστών που επιφέρει η επικρατούσα θεμελίωση του απειροστικού λογισμού που έχει διδαχθεί.

Αντιφάσεις κατά την προσπάθεια απόδοσης νοήματος

Ένας φοιτητής για τον μαθητή Δ αναφέρει: ‘Ο Δ μετέτρεψε τον αριθμό 0,3999… σε άθροισμα άπειρων αριθμών άρα δεν υπάρχει ακριβές αποτέλεσμα’. Ο φοιτητής από τη μια αποκαλεί τον 0,399.. αριθμό από την άλλη θεωρεί ότι δεν είναι ακριβές αποτέλεσμα ενώ παράλληλα επισημαίνει σαν παρανόηση του Β ότι ένας αριθμός τείνει σε κάποιον άλλο. Οι αντιφάσεις στη σκέψη των φοιτητών είναι χαρακτηριστικές της γνωστικής σύγκρουσης που τους προκαλεί η προσπάθεια απόδοσης νοήματος στο σύμβολο 0,3999… .

Το 0,3999... και το παράδοξο του Ζήνωνα

i) Ένας φοιτητής για τον μαθητή Δ αναφέρει: ‘Θεωρητικά και φιλοσοφικά έχει δίκιο όμως πρακτικά έχει άδικο. Θυμίζει τον γρίφο του Αχιλλέα και της χελώνας που θεωρητικά αποδεικνύεται ότι η χελώνα θα φτάσει στην άκρη γρηγορότερα απ’ τον Αχιλλέα ενώ βέβαια πρακτικά όλοι αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό δεν είναι σωστό’. Ο φοιτητής αντιδιαστέλλει ένα θεωρητικό επίπεδο (που συμβαίνουν περίεργα πράγματα) και ένα πρακτικό επίπεδο. Το παράδοξο του Αχιλλέα παραμένει γι’ αυτόν παράδοξο. Έχει αποδεχτεί ότι στα μαθηματικά μπορούμε να ισχυριζόμαστε και να αποδεικνύουμε προτάσεις οι οποίες είναι αντίθετες με την πραγματικότητα.

Η σχετική απόσπαση του απειροστικού λογισμού από τον embodied κόσμο

Ένας φοιτητής στην τοποθέτησή του για τον μαθητή Δ αναφέρει: ‘Ο Δ μάλλον έχει έρθει κοντά σε μια μαθηματική έννοια αυτή της σειράς. Πράγματι η 0,3999… μπορεί να εκφραστεί ως το 0,3 + $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}$. Ωστόσο με εργαλεία ανώτερου απειροστικού λογισμού, έχουμε αποδείξει ότι το $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ συγκλίνει στο 0,1, δηλαδή $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} =$ 0,1, δηλ. ισούται με αριθμό. Είναι ύλη που διδάσκεται στο λύκειο, ωστόσο θα προσπαθούσα να του εξηγήσω το παράδοξο με απλούς και κατανοητούς όρους’.

Σημειώσαμε το παραπάνω απόσπασμα γιατί ενώ ο φοιτητής γνωρίζει ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} =$ 0,1 στο τέλος το χαρακτηρίζει ως παράδοξο. Οι φοιτητές επισημαίνουν μια παραδοξότητα μεταξύ της διαισθητικής προσέγγισης και της μαθηματικής προσέγγισης. Αναδεικνύεται έτσι το ζήτημα της σχετικής απόσπασης του απειροστικού λογισμού από τον embodied κόσμο, με συνέπεια την ανάδειξη δυσκολιών των μαθητών μπροστά στην αδυναμία διαισθητικής προσέγγισης.

3.3.3 Επισκόπηση των αντιλήψεων των φοιτητών

Οι αρχάριοι

Ένα μέρος των φοιτητών τοποθετείται στο θέμα μ' έναν πολύ γενικό τρόπο. Δηλαδή αποφεύγουν να τοποθετηθούν συγκεκριμένα στα ερωτήματα μ' έναν αυθεντικό τρόπο αλλά προσπαθούν να συσχετίσουν ότι έχουν διαβάσει σχετικά με το εξεταζόμενο μάθημα και να το προσαρμόσουν στις απαντήσεις τους.

Για παράδειγμα ένας φοιτητής αναφέρει ότι θα εξηγούσε στους μαθητές πως δυο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα παρόλο που έχουν άπειρα στοιχεία. Έτσι και δυο αριθμοί που έχουν άπειρα στοιχεία μπορεί να είναι ίσοι.

Το εντυπωσιακό είναι πως ο φοιτητής έχει σχεδιάσει δυο εμφανώς άνισα ευθύγραμμα τμήματα. Προσπαθεί με κάθε τρόπο να χρησιμοποιήσει ένα παράδειγμα που είχε διατυπωθεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος σύμφωνα με το οποίο άνισα ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο πλήθος σημείων.

Άλλοι φοιτητές στην προσπάθειά τους να δηλώσουν ότι κάτι γνωρίζουν σχετικά με το μάθημα θεωρούν ότι η ερώτηση του καθηγητή σχετίζεται με διάφορες έννοιες του απειροστικού λογισμού όπως η παράγωγος, το ολοκλήρωμα, ο κανόνας De l' Hospital ίσως επειδή το εξεταζόμενο μάθημα σχετίζεται με αντίστοιχα ζητήματα.

Οι αντιφάσεις και η ανεπάρκεια της τυπικής γνώσης

Σε πολλούς φοιτητές παρουσιάζονται αντιφάσεις στην τοποθέτησή τους, ανάλογα με το πλαίσιο (μαθητή) στο οποίο τοποθετούνται.

i) Ένας φοιτητής ενώ αποδεικνύει σωστά ότι 0,399… = 0,4, θεωρεί θετικό σημείο του μαθητή Γ ότι ο 0,3999… είναι πριν το 0,4.Επίσης ως παρανόηση του μαθητή Γ αναφέρει: 'Δεν έχει κατανοήσει ότι επειδή οι αριθμοί είναι άπειροι θα υπάρχει πάντα προηγούμενος αριθμός'. Επίσης θεωρεί ότι ο αριθμός 0,3999… μέσω κάποιας διαδικασίας φτάνει τον 0,4.

Έτσι ενώ ο φοιτητής έχει την τυπική γνώση της ισότητας 0,3999… = 0,4 αυτή δεν υπερισχύει της διαίσθησής του, που του επιβάλλει να θεωρεί τον 0,3999… από την μια μικρότερο του 0,4 από την άλλη ότι πλησιάζει τον 0,4.

Ένας άλλος φοιτητής θεωρεί ως παρανόηση του μαθητή Δ: 'ότι απέκλεισε το γεγονός ότι πλησιάζει το 0,4, γιατί αυτό ισχύει τελικά' αναφέρει ότι 'ο καθηγητής ήθελε να δει αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι ανάμεσα στο 0,3999… και το 0,4 υπάρχουν άπειροι το πλήθος αριθμοί και δεν ισχύει ότι ο 0,3999… είναι ο προηγούμενος του 0,4. Ο φοιτητής αυτός στο τέλος της τοποθέτησής του αναφέρει: 'Κανείς δεν είπε ότι 0,3999… = 0,4. (Είναι σαν την απόδειξη ότι 0,999…=1)'.

Έτσι ενώ ο φοιτητής έχει την τυπική γνώση για το ότι 0,3999…= 0,4 είναι τόσο αποξενωμένη που δεν τον εμποδίζει να εκφράσει τις διαισθητικές του πεποιθήσεις για σύμβολο 0,3999… .

Κάποιος άλλος φοιτητής στους στόχους του καθηγητή αναφέρει: 'Οι αριθμοί δεν είναι απαραίτητο να είναι συγκεκριμένοι ή να έχουν τη μορφή που έχουν συνηθίσει όλα τα προηγούμενα χρόνια στο σχολείο. Άλλωστε, τις περισσότερες φορές στα μαθηματικά μιλούμε και αναφερόμαστε με αφηρημένες έννοιες… . Ακόμη, ήθελε να σκεφτούν οι μαθητές του ότι ακριβώς λόγω της φύσης των Μαθηματικών δεν είναι πάντα εύκολο να οριστούν με απόλυτο και ξεκάθαρο τρόπο ορισμένες έννοιες και παραστάσεις. (…) Τέλος ο καθηγητής ήθελε να δείξει στους μαθητές ότι είναι δυνατό να υπάρξει ένας αριθμός που να πλησιάζει σε κάποιον αριθμό αλλά να μην ταυτίζεται με έναν αριθμό'. Στις απόψεις του φοιτητή αυτού παρατηρούμε ότι τα μαθηματικά θεωρούνται ασαφή παρά την περί του αντιθέτου κοινά αποδεκτή πεποίθηση. Θα λέγαμε ότι η θεώρηση αυτή είναι αποτέλεσμα της δυσκολίας που αντιμετώπισε ο φοιτητής με την συγκεκριμένη παράσταση. Όμως ο ίδιος φοιτητής, αναφερόμενος στον μαθητή Δ γράφει: 'Είναι όμως λάθος ότι δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό. Ισούται με έναν αριθμό με άπειρα ψηφία' ενώ αναφερόμενος στον μαθητή Β αναφέρει: 'δεν είναι τόσο σωστή ορολογία ότι ένας αριθμός τείνει σ' έναν άλλο'. Φαίνεται λοιπόν ότι ενώ ο φοιτητής έχει σχετικά καλή εικόνα του θέματος που διαπραγματευόμαστε αυτή παραμένει σ' ένα διαισθητικό επίπεδο και επηρεάζει την αντίληψή του για την φύση των μαθηματικών γενικότερα.

ii) Ένας φοιτητής που δηλώνει πως ο μαθητής Α δεν έχει καμία παρανόηση, για τις παρανοήσεις του Β αναφέρει ότι: 'Θεωρεί ότι ένας αριθμός μπορεί να τείνει σε κάποιον άλλο' για τον μαθητή Γ γράφει: 'Ο μαθητής Γ έχει πάρει το αποτέλεσμα μόνο της παράστασης που είναι ο αριθμός 0,3999… που όντως είναι ο αμέσως προηγούμενος του 0,4 και ας είναι άπειρα τα 9'. Τέλος στα θετικά σημεία του μαθητή Δ γράφει: 'Ξέρει να αναλύει έναν αριθμό και πως αν έχει πρόσθεση άπειρων στοιχείων δεν υπάρχει αριθμητικό αποτέλεσμα'.

Παρατηρούμε ότι ο φοιτητής όταν τοποθετείται για τους μαθητές Α, Β, αντιμετωπίζει το 0,3999… ως διαδικασία, όταν τοποθετείται για τον μαθητή Δ αντιμετωπίζει το 0,3999… και ως διαδικασία και ως αριθμό, ενώ όταν τοποθετείται για τον μαθητή Γ τον αντιμετωπίζει ως αριθμό. Να σημειώσουμε ότι οι μαθητές Α, Β, Δ συσχετίζουν το 0,3999… στα πλαίσια οριακών διαδικασιών ενώ στην περίπτωση του μαθητή Γ έχουμε την αντιμετώπιση μιας ιδιότητας των πραγματικών αριθμών. Έτσι το νόημα που δίνεται κάθε φορά στο 0,3999… εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο γίνεται η τοποθέτηση.

iii) Ένας φοιτητής οποίος έχει πολύ καλή γνώση του θέματος καταλήγει στις προτάσεις του προς τους μαθητές ως εξής:

1. 'Το 0,399… εκφράζει μια διαδικασία που «τείνει» στο 0,4 αλλά επίσης <u>είναι</u> το 0,4'
2. Δεν υπάρχει η έννοια του τείνει για αριθμούς.
3. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα συνεχές. Δεν έχουν προηγούμενους και επόμενους.
4. Ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει περισσότερες από μια δεκαδικές αναπαραστάσεις (εκτός από το 0).
5. Όσα ισχύουν για πεπερασμένα αθροίσματα και διαδικασίες δεν ισχύουν απαραίτητα για άπειρα.

Να σημειώσουμε ότι η πρώτη παρατήρηση του φοιτητή είναι σχετικά αμφιλεγόμενη. Στην τρίτη παρατήρηση θεωρεί ότι η μη ύπαρξη επόμενου ή προηγούμενου οφείλεται στο συνεχές των πραγματικών αριθμών, παρόλο που η ανυπαρξία επόμενου ή προηγούμενου ισχύει και στους ρητούς αριθμούς που δεν είναι συνεχές σύνολο. Στην τέταρτη 'ξεχνάει' ότι οι άρρητοι δεν έχουν δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις. Σε γενικές γραμμές όμως θα λέγαμε ότι έχει προσεγγίσει με τυπικά ορθό τρόπο όλες τις πτυχές του θέματος. Όμως οι διδακτικές του προτάσεις ακολουθούν περίπου τον κανόνα ότι αν πούμε στους μαθητές τον κανόνα σωστά τα μαθηματικά αυτοί θα τα μάθουν. Έτσι δεν χρησιμοποιεί κανένα επιχείρημα για να δείξει ότι 0,3999… = 0,4. Επίσης μπορεί να είναι σωστό ότι ο 0,3999… δεν είναι ο προηγούμενος του 0,4 αφού είναι ίσος μ' αυτόν αλλά δεν απαντάει γιατί δεν υπάρχει ο προηγούμενος ρητός ενός ρητού αριθμού.

Θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι κατά τη διδασκαλία δεν αρκεί να απαντήσουμε με ορθό τρόπο στο ερώτημα που εκφράζει ένας μαθητής αλλά να ερμηνεύσουμε την πηγή της πιθανής παρανόησής του, να επεκτείνουμε το ερώτημά του και να το προσεγγίσουμε από διαφορετικές πλευρές.

iii) Ένας φοιτητής στις προτάσεις του προς τους φοιτητές αναφέρει: ‘Θα τους εξηγούσα ότι ο αριθμός 0,3999… εκτείνεται άπειρα, αφού έχει άπειρα 9 και αυτή η διαδικασία συνεχίζεται παντοτινά. Όσο και να αυξάνεται ο αριθμός 0,3999… δεν θα πάρει ποτέ την τιμή 0,4.

Με αφορμή την παραπάνω τοποθέτηση του φοιτητή έχουμε δυο παρατηρήσεις:

α) Ο φοιτητής τοποθετεί την εξέλιξη (κατ’ αυτόν) του 0,3999… χρησιμοποιώντας χρονικούς προσδιορισμούς (παντοτινά). Αυτός και άλλοι φοιτητές στην προσπάθεια απόδοσης διαισθητικού νοήματος στο 0,3999… το χαρακτηρίζουν με εκφράσεις που αντιστοιχούν είτε σε κάποιο χωροχρονικό πλαίσιο είτε του προσδίδουν ‘βιωματικά’ χαρακτηριστικά.

β) Η δεύτερη παρατήρηση σχετίζεται με την νομιμοποίηση του ερωτήματος του κατά πόσο μια συγκλίνουσα ακολουθία φτάνει ή όχι το όριό της. Παρατηρούμε λοιπόν ότι παρά την προσπάθεια της θεωρητικής θεμελίωσης του απειροστικού λογισμού να εξοβελίσει τέτοιου είδους ερωτήματα πολλοί φοιτητές (τουλάχιστον όσοι υιοθετούν τις γνώμες των μαθητών Α και Β) τα επαναφέρουν ως κυρίαρχα. Έτσι η έκθεση των φοιτητών στην τυπική θεμελίωση δείχνει να επηρεάζει ελάχιστα τη σκέψη τους όταν προσπαθούν να αποδώσουν νόημα σε οριακές διαδικασίες.

iv) Ένας φοιτητής στην τοποθέτησή του για τον μαθητή Γ αναφέρει. ‘Στο σχολείο οι μαθητές μαθαίνουν αρχικά τους φυσικούς αριθμούς, όπου ισχύει ότι μετά το 2 είναι το 3, στη συνέχεια μαθαίνουν τους ρητούς που ισχύει το ίδιο και έπειτα τους άρρητους όπου δεν ισχύει το ίδιο με τους παραπάνω’. Ο ίδιος φοιτητής στις προτάσεις του προς τους μαθητές αποδεικνύει 0,3999… = 0,4.

Ο φοιτητής αυτός δεν διστάζει να αποδώσει την ‘περίεργη’ ιδιότητα της μη ύπαρξης επόμενου αριθμού στους άρρητους (θεωρώντας τον 0,3999… άρρητο) παρόλο που γνωρίζει ότι 0,3999… = 0,4.

v) Ένας φοιτητής στους στόχους του καθηγητή αναφέρει: ‘Έστω x = 0,3999… με άπειρα 9. Ο καθηγητής θέλει να κάνει τα παιδιά να κατανοήσουν ότι $\forall\, \varepsilon > 0$ ισχύει ότι $|0,4 - x| < \varepsilon$ (ή και 0,4 – x <ε αφού 0,4 > x). Δηλ. ότι για οποιοδήποτε αριθμό ε > 0, οσοσδήποτε μικρός και αν είναι $\exists$ αριθμός κ (=πλήθος ενσιαριών) τέτοιος ώστε αν βάλω τόσα ή περισσότερα εννιάρια στον 0,3999… τότε $|0,4 - x| < \varepsilon$ δηλ. ότι από ένα πλήθος εννιαριών και πάνω με τον 0,3999… μπορώ να προσεγγίσω άριστα το 0,4. Προσπαθεί λοιπόν ο καθηγητής να δώσει στους μαθητές του να καταλάβουν την έννοια του απειροστού, και ότι τελικά οι δυο αριθμοί είναι ίσοι’. Αμέσως παρακάτω για τον μαθητή Α αναφέρει: ‘Ο 0,3999… είναι ένας αριθμός και όχι μια διαδικασία. Ο μαθητής νομίζει ότι αναφερόμαστε σε μια ακολουθία αριθμών 0,399, 0,3999, 0,39999 πράγμα που δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα (παρανόηση)’.

Ο φοιτητής αυτός χρησιμοποιεί στην πρώτη παράγραφο: α) το 0,3999… ως την ακολουθία 0,3, 0,39, 0,399, … β) τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για να δείξει ότι αυτή τείνει στο 0,4, γ) το ότι το 0,3999… προσεγγίζει άριστα το 0,4, δ) την έννοια του απειροστού. Στην παράγραφο που αναφέρεται στο μαθητή Α επισημαίνει ως παρανόηση του μαθητή, το ότι θεώρησε το 0,3999… ως ακολουθία. Το ίδιο που έκανε και αυτός στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο.

Η προσέγγιση των απειροστών

Ένας φοιτητής στην προσπάθειά του να βοηθήσει τον μαθητή Δ αναφέρει: ‘Μέσω της ευθείας των αριθμών θα βοηθούσα τον μαθητή Δ να παρατηρήσει πως μέσω της διαδικασίας την οποία ο ίδιος πολύ σωστά προσέγγισε, η παράσταση 0,3999… μπορεί να μην ισούται με κάποιον συγκεκριμένο αριθμό αλλά είναι απειροελάχιστα κοντά στο 0,4’.

Κάποιοι φοιτητές χρησιμοποιούν κάποιες όχι και τόσο συνηθισμένες ιδέες. Για παράδειγμα αναφέρεται ότι επειδή το $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} < 1$ αυτό σημαίνει ότι το 2x πλησιάζει πιο αργά στο άπειρο από το 3x.

Βρίσκουμε μια πιο τυπική περιγραφή της ιδέας της ταχύτητας σύγκλισης σε συσχέτιση με τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού με βάση τα απειροστά, στο ‘Εισαγωγή στη μαθηματική σκέψη του Κ. Δρόσου.

Εκεί ορίζεται ο ασυμπτωτικός παράγοντας σύγκλισης μιας συγκλίνουσας στο α ακολουθίας α_n ως το όριο $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - \alpha_{n+1}}{\alpha - \alpha_n}$. Αποδεικνύεται ότι $|\rho| \le 1$. Όσο πιο κοντά στο μηδέν βρίσκεται το ρ τόσο η ακολουθία α_n συγκλίνει ταχύτερα στο α. Όσο πιο κοντά στο 1 βρίσκεται το ρ τόσο πιο αργά συγκλίνει η ακολουθία στο α.

Η φιλοσοφική προσέγγιση

Ένας άλλος φοιτητής στις προτάσεις του προς τους μαθητές αναφέρει: 'Θα έδινα ιδιαίτερη σημασία στην σταθερή του απόσταση έστω και απειροστή από το 0,4 και στην μεταβαλλόμενη απόσταση των προσεγγίσεών μας από τους δυο αριθμούς'. Ο ίδιος φοιτητής θεωρεί ότι ο μαθητής Γ: 'Σκέφτηκε τον αριθμό 0,3999… εκτασιακά . Θεώρησε τον αριθμό ως τελειωμένη διαδικασία παρόλο που είναι άπειρη', ενώ στις παρανοήσεις του μαθητή Γ αναφέρει: 'Δεν μπορούμε να σκεφτούμε τον 0,3999… ως τελειωμένο όπως κάνει ο μαθητής'.

Αρκετοί φοιτητές συσχετίζουν το θέμα με το παράδοξο του Ζήνωνα. Ένας απ' αυτούς το αναφέρει ως εξής: 'Μια επίσης ωραία αναπαράσταση θα ήταν να αναφέρουμε το παράδοξο με τον Αχιλλέα και την χελώνα. Έστω ότι και οι δυο ξεκινάνε από ένα σημείο Α και θέλουν να διανύσουν μια διαδρομή ΑΒ. Ποιος θα φτάσει πρώτος. Απάντηση: Κανένας !! γιατί για να διανύσει το ΑΒ πρέπει να φτάσει στη μέση ΑΒ/2, για να φτάσει στη μέση πρέπει να φτάσει στο ΑΒ/4 κ.οκ. άπειρα μέσα άρα άπειρα σημεία πρέπει να διανύσουμε.

Παρατηρούμε ότι ο φοιτητής υιοθετεί το παράδοξο του Ζήνωνα ως παράδοξο, αδυνατώντας να το ερμηνεύσει τουλάχιστον στο μαθηματικό του μέρος.

Ένας άλλος φοιτητής θέτει προς τον μαθητή Α το εξής ερώτημα: 'Αν θέλουμε να διανύσουμε μια απόσταση ΑΒ και κάθε λεπτό διανύουμε το μισό της απόστασης που μας απομένει πότε θα τερματίσουμε. Ο φοιτητής θεωρεί ότι 'σύμφωνα με την απάντηση του Α δεν θα φτάσουμε στο τέλος που μπορεί γεωμετρικά να είναι δυνατό αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι εφικτό'.

Ένας τρίτος φοιτητής αναφέρει: 'Έστω ότι πρέπει να διανύσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κάθε μέρα διανύουμε τη μισή απόσταση. $AA_1 = 1/2\ AB$, $A_1A_2 = 1/2\ A_1B$, … . Μετά από n ημέρες όπου $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε διανύσει το AA_n. Το σημείο A_n δεν ταυτίζεται με το Β και ποτέ δεν θα ταυτιστεί μ' αυτό διότι πάντα θα υπάρχει η μισή απόσταση. Άρα θα πάμε όσο κοντά θέλουμε ποτέ όμως δεν φτάνουμε στο Β'

Ένας ακόμα φοιτητής όταν τοποθετείται για τον μαθητή Δ γράφει: 'Ο συγκεκριμένος μαθητής με προβληματίζει γιατί η σκέψη που κάνει είναι πολύ έξυπνη. Θεωρητικά και φιλοσοφικά έχει δίκιο, όμως πρακτικά έχει άδικο. Θυμίζει το γρίφο με τον βηματισμό της χελώνας και του Αχιλλέα, που θεωρητικά αποδεικνύεται ότι η χελώνα θα φτάσει στην άκρη του σταδίου γρηγορότερα απ' τον Αχιλλέα, ενώ βέβαια πρακτικά όλοι αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό δεν είναι δυνατό'.

Ο 'γρίφος' λοιπόν του Αχιλλέα και της χελώνας παραμένει άλυτος για τους φοιτητές που αναφέρονται σ' αυτόν.

Καταφεύγοντας στους άρρητους

Κάποιοι φοιτητές προσπαθώντας να προσδώσουν νόημα στον 0,3999… τον χαρακτηρίζουν ως άρρητο.

Ένας απ' αυτούς αναφέρει: 'Οι μαθητές δεν έχουν καταλάβει ότι μεταξύ του 0,3999... και του 0,4 υπάρχουν και άλλοι αριθμοί'. 'Οι άρρητοι δεν είναι διαδικασία που δίνει ένα αποτέλεσμα αλλά ένας αριθμός με άπειρα δεκαδικά'. Θεωρούμε ότι η αναποτελεσματική προσπάθεια του φοιτητή να βρει αριθμό μεταξύ του 0,3999… και του 0,4 τον οδηγεί να καταφύγει στους άρρητους, είτε θεωρώντας ότι υπάρχει τέτοιος ανάμεσά τους, είτε θεωρώντας τον 0,3999… άρρητο.

Ένας άλλος αναφέρει: 'Έστω ότι παίρνουμε δυο διαδοχικούς ρητούς. Μεταξύ αυτών υπάρχει μια απόσταση. Γεμίζουμε το κενό με άρρητους' Τους άρρητους δεν μπορούμε να τους ορίσουμε ως σημεία μεμονωμένα και σταθερά.

Ο φοιτητής εμφανίζει να έχει την εικόνα ότι οι αριθμοί διατάσσονται σύμφωνα με το σχήμα: «ρητός – άρρητος – ρητός- άρρητος…'. Επίσης θεωρεί ότι οι άρρητοι αντιστοιχούν σε μεταβλητά σημεία.

Οι προβληματισμοί για το άπειρο

Αρκετοί φοιτητές θεωρούν το άπειρο με την έννοια του οσοδήποτε πολλά

Ένας απ' αυτούς χαρακτηριστικά αναφέρει απευθυνόμενους στους μαθητές: 'Αν έχω έναν αριθμό με άπειρα ψηφία πάντα μπορώ να βρω έναν με περισσότερα ψηφία και μεγαλύτερο απ' αυτόν, αλλά και μικρότερο του 0,4'.

Κάποιοι άλλοι του αποδίδουν αποκλειστικά το δυνητικό του χαρακτήρα.

Ένας απ' αυτούς στις προτάσεις του προς τους μαθητές αναφέρει: 'Επειδή όλες οι παρανοήσεις που θεώρησα πως έγιναν από τους μαθητές σχετίζονται με αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως άπειρο και πως συχνά του δίνουμε εσφαλμένα τη μορφή πραγματικού αριθμού, θα εστίαζα στο να διασαφηνίσω τη φύση του απείρου και το γιατί δεν το αντιμετωπίζουμε ως ένα ακόμα φυσικό αριθμό. … Γενικά μέσω των εικόνων θα προσπαθούσα να δώσω την αίσθηση πως μια παράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία βρίσκεται σε διαρκή κίνηση προς μια κατεύθυνση και έναν προορισμό στο οποίο όμως δεν φτάνει ποτέ'.

Εικόνες καθημερινότητας

Κάποιοι φοιτητές προσπαθούν να συνδέσουν το θέμα που διαπραγματευόμαστε με την καθημερινότητα. Ένας απ' αυτούς χαρακτηριστικά αναφέρει: 'Εικόνα από την καθημερινή ζωή. Δυο παιδιά παίζουν κυνηγητό και το ένα φτάνει όλο και πιο κοντά στο άλλο χωρίς ποτέ να το φτάσει'.

Ένας άλλος αναφέρει: 'Σύνδεση με την καθημερινότητα μέσα από το όριο ταχύτητας στα σήματα οδικής ασφάλειας'.

Η απόδοση νοήματος σε μια μαθηματική έννοια μέσω διαισθητικά κατανοητών παραδειγμάτων πράγματι βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών αυτών. Όμως πολλές φορές, η εύρεση τέτοιων παραδειγμάτων, δεν είναι εύκολη και υπάρχει ο κίνδυνος, να χρησιμοποιούμε παραδείγματα, τα οποία είναι το λιγότερο αποπροσανατολιστικά.

Αναπαραστατικές ιδιαιτερότητες

Ένα από τα προβλήματα κατανόησης του 0,3999… είναι ότι παρόλο που είναι ρητός η αναπαράστασή του εμφανίζει ορισμένες ιδιαιτερότητες.

Για παράδειγμα ένας φοιτητής αναφέρει: 'Ο 0,3999... είναι ρητός εφόσον προκύπτει από μια ατελής διαίρεση δυο αριθμών. Π.χ ο 0,333… =1/3 =1:3 είναι ρητός αποτέλεσμα μιας ατελούς διαίρεσης'.

Όμως το πρόβλημα είναι ότι η μορφή 0,399.. δεν προκύπτει ως αποτέλεσμα καμιάς ατελούς διαίρεσης. Η διαίρεση 4:10 βγάζει πηλίκο 0,4 και όχι 0,3999… .Γι' αυτό άλλωστε και ο φοιτητής επιλέγει ως παράδειγμα τον 0,333… και όχι τον 0,3999...

Μια άλλη δυσκολία κατανόησης των απειροψήφιων δεκαδικών (με άπειρα μη μηδενικά ψηφία) σχετίζεται με την αδυναμία λεκτικής αντιστοίχησης στη μορφή αυτή. Ενώ για παράδειγμα ο αριθμός 0,39 διαβάζεται και τριανταεννέα εκατοστά ο αριθμός 0,3999… δεν έχει αντίστοιχη λεκτική απόδοση παρά μόνο αν μετασχηματιστεί στον 0,4.

Διδακτική και μαθηματική προσέγγιση

Κάποιοι φοιτητές που γνωρίζουν ότι 0,3999… = 0,4 θεωρούν ότι αυτό αρκεί να ειπωθεί στους μαθητές και αυτοί θα το κατανοήσουν. Ένας απ' αυτούς χαρακτηριστικά αναφέρει: α) Ως στόχο του καθηγητή 'να ελέγξει αν γνωρίζουν οι μαθητές ότι το

0,3999… = 0,4 και ότι στους πραγματικούς δεν υπάρχει διάταξη. β) Για τους μαθητές Α και Β ‘ότι δεν καταλαβαίνουν ότι υπάρχει ταύτιση του 0,3999… με το 0,4’. γ) Για τον μαθητή Γ ότι ‘θεωρεί ότι στους πραγματικούς υπάρχει διάταξη όπως συμβαίνει στους φυσικούς’. δ) Για τον μαθητή Δ ‘μην έχοντας διδαχθεί προόδους θεωρεί ότι το άπειρο άθροισμα δεν ισούται με αριθμό’. ε) Ως πρόταση αναφέρει την αντίστοιχη απόδειξη του βιβλίου της πρώτης Γυμνασίου για το ότι 0,3999… = 0,4.

Όπως όμως, πολλές έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών έχουν δείξει και η δική μας το επιβεβαιώνει δεν αρκεί κάποιος να έχει διδαχθεί μια έννοια για να θεωρούμε ότι την έχει κατανοήσει.

3.4 ΣΥΖΗΤΗΣΗ

3.4.1 Γνώση της φύσης της έννοιας

Ποσοτική προσέγγιση

Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα 1 των αποτελεσμάτων , διαπιστώνουμε ότι οι 20 (από τους 114) φοιτητές θεωρούν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία και όχι έναν αριθμό. Ως διαδικασία εννοείτε άλλες φορές η εποπτική, αέναη τοποθέτηση του αριθμού 9 σε θέσεις του αριθμητικού συστήματος με υποδεκαπλάσια αξία, είτε η ακολουθία 0,3, 0,39, 0,399,… η οποία συγκλίνει στο 0,3999…, είτε το πηλίκο κάποιας διαίρεσης που δεν αναφέρεται. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι φοιτητές ενώ δηλώνουν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει διαδικασία και όχι αριθμό, δεν αναφέρουν με σαφήνεια ποια διαδικασία εννοούν. Οι μισοί από τους φοιτητές αυτούς θεωρούν ότι η διαδικασία που εκφράζει το σύμβολο 0,3999… τείνει ή πλησιάζει στο 0,4.

Οι 20 αυτοί φοιτητές αδυνατούν να διακρίνουν στο σύμβολο το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας από την εκτέλεση της διαδικασίας αυτής. Εντοπίζεται αδυναμία διάκρισης του ορίου μιας συγκλίνουσας ακολουθίας από την έννοια της ακολουθίας καθ’ αυτής ή της διαδικασίας που προκύπτουν οι όροι της. Ή καλύτερα δεν αντιστοιχίζεται στο σύμβολο 0,3999… το όριο της ακολουθίας αλλά η ίδια η ακολουθία. Αντίστοιχα αδυναμία αντιστοίχισης στο σύμβολο 0,3999… του αποτελέσματος - πηλίκου μιας διαίρεσης και της ίδιας της διαιρετικής διαδικασίας.

Από τον πίνακα 1 παρατηρούμε ότι μόνο οι μισοί φοιτητές αναγνωρίζουν στο σύμβολο 0,3999… έναν αριθμό. Όμως στην έννοια του αριθμού αποδίδονται και διαδικαστικά χαρακτηριστικά. Έτσι οι περισσότεροι από τους μισούς όσων θεωρούν το 0,3999… αριθμό, εμφανίζονται να τον θεωρούν μεταβλητό. Παρατηρούμε μια αδυναμία διάκρισης της έννοιας της μεταβλητής από την έννοια του αριθμού όταν πρόκειται για το σύμβολο 0,3999… . Οι φοιτητές δεν διστάζουν να υιοθετήσουν την έννοια του ‘μεταβλητού αριθμού’, μια έννοια που ποτέ δεν έχουν διδαχθεί, προκειμένου να αποδώσουν κάποιο νόημα στο σύμβολο 0,3999… .Η μεγάλη πλειονότητα των φοιτητών που υιοθετούν την έννοια του μεταβλητού αριθμού θεωρούν ότι αυτός τείνει στο 0,4. Αρκετοί φοιτητές φαίνεται να θεωρούν ότι μπορεί ένας αριθμός να είναι οσοδήποτε κοντά σε έναν άλλο χωρίς να ταυτίζεται μ’ αυτόν. Πιο συγκεκριμένα ότι ο 0,3999… ανήκει σε οποιοδήποτε διάστημα με κέντρο το 0,4 χωρίς να ταυτίζεται με τον 0,4.

Οι φοιτητές που αναγνωρίζουν στο σύμβολο 0,3999… ένα σταθερό αριθμό είναι μόνο 25 (στους 114). Αλλά και από αυτούς οι 4 θεωρούν ότι ο αριθμός αυτός είναι άρρητος. Να σημειώσουμε ότι δεν υπήρχε στο ερώτημα που δόθηκε στους φοιτητές καμία αναφορά σε άρρητους αριθμούς, ούτε ζητούνταν απ’ αυτούς να χαρακτηριστεί ο 0,3999… ως ρητός ή άρρητος. Αυτή τους η θεώρηση γίνεται είτε επειδή εκλαμβάνουν κάθε απειροψήφιο δεκαδικό (με άπειρα τα μη μηδενικά ψηφία) ως άρρητο είτε προσπαθώντας να ξεπεράσουν την γνωστική σύγκρουση που βρίσκονται κατά την τοποθέτησή τους. Πιο συγκεκριμένα φοιτητές που θεωρούν τον 0,3999… αριθμό μικρότερο του 0,4 και γνωρίζουν ότι μεταξύ δυο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών υπάρχει και άλλος ρητός, ενώ αδυνατούν να βρουν έναν τέτοιο ρητό καταφεύγουν στη θεώρηση του 0,3999… ως άρρητο.

Οι υπόλοιποι 21 φοιτητές θεωρούν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει ένα σταθερό αριθμό χωρίς να τοποθετούνται για το αν τον θεωρούν ρητό ή άρρητο. Κάνουμε αυτή την επισήμανση γιατί ενδέχεται κάποιοι φοιτητές να μην θεωρούν τον 0,3999… ρητό αριθμό αλλά επειδή δεν τους ζητήθηκε να τοποθετηθούν στο συγκεκριμένο ζήτημα δεν το αναφέρουν. Να σημειώσουμε, ότι οι 21 αυτοί φοιτητές, δεν είχαν απαραίτητα και εννοιολογική κατανόηση του θέματος, αφού κάποιοι εξ’ αυτών δεν τοποθετούνταν για όλους τους μαθητές και γενικά είχαν σχετικά φτωχές απαντήσεις.

Μεγάλο μέρος των φοιτητών (29 στους 114) σε κάποια σημεία της τοποθέτησής τους θεωρούν το 0,3999… ως αριθμό και σε κάποια άλλα ως διαδικασία. Οι φοιτητές αυτοί φαίνεται να επηρεάζονται έντονα από το πλαίσιο στο οποίο τοποθετούνται. Δηλαδή όταν τοποθετούνται για την γνώμη του μαθητή Α φαίνεται να υιοθετούν την άποψη ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία ενώ όταν τοποθετούνται για την γνώμη του μαθητή Γ αντιμετωπίζουν το 0,3999… ως αριθμό. Στην κατηγορία αυτή των φοιτητών ανήκουν κατά κανόνα φτωχές απαντήσεις με έντονα αντιφατικά χαρακτηριστικά. Δεν λείπουν όμως και περιπτώσεις φοιτητών που γνωρίζουν για παράδειγμα ότι 0,3999… = 0,4 αλλά αδυνατούν να αντιμετωπίζουν το 0,3999… με σταθερότητα στο σύνολο της τοποθέτησής τους ως συγκεκριμένο, σταθερό, ρητό αριθμό.

Τέλος υπάρχουν και 8 φοιτητές που δεν έχουν τοποθετηθεί με επάρκεια στα ερωτήματα ώστε να μπορέσουμε να τους κατατάξουμε σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες. Δεν θεωρούμε ότι οι φοιτητές αυτοί είναι λίγοι αν θεωρήσουμε ως κριτήριο ότι τους ζητήθηκε να διατυπώσουν την γνώμη τους (ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι σωστή ή όχι) για ένα σύμβολο που το έχουν δει από τη φοίτησή τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Να σημειώσουμε ότι οι φοιτητές αυτοί δεν έχουν αρνηθεί να δώσουν κάποιες απαντήσεις αλλά οι απαντήσεις είναι είτε πολύ ρηχές, είτε εξαιρετικά γενικές, είτε τέλος εμφανώς άσχετες με το ερώτημα.

Ερμηνεία των αποτελεσμάτων του πίνακα 1 με βάση τη σημειωτική προσέγγιση

Οι τρεις τελείες είναι ένα συμβατικό σημείο. Θεωρήσαμε ότι είναι *δείκτης (Index)* και αποκτά νόημα κατά τη συσχέτισή του με άλλα στοιχεία ενός πλαισίου αναφοράς. Όμως οι τρεις τελείες είναι ένα σημείο που δεν χρησιμοποιείται μόνο στα μαθηματικά, αφού έτσι σημειώνονται και τα αποσιωπητικά ως σημείο στίξης της γλώσσας. Στη γλώσσα λοιπόν τα αποσιωπητικά σημειώνονται όταν δεν τελειώνουμε μια φράση. Επίσης όταν σε παράθεμα από συγγραφέα παραλείπομε ένα τμήμα φράσης ή και φράσεις ολόκληρες. Στις περιπτώσεις αυτές τα αποσιωπητικά τοποθετούνται μέσα σε αγκύλες: Με τα αποσιωπητικά δηλώνεται επίσης θαυμασμός, ειρωνεία, συγκίνηση, φόβος, δισταγμός, ντροπή, περιφρόνηση, απειλή κτλ., για όσα θα σημειωθούν αμέσως κατόπιν, π.χ.: «Μην ξανάρθεις αδιάβαστος, γιατί...», «Κι έπειτα... έπειτα όλα τέλειωσαν.»

Παρατηρούμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι τα αποσιωπητικά δεν χρησιμοποιούνται παντού με τον ίδιο τρόπο. Σε πολλές περιπτώσεις αφήνουν την δυνατότητα στον αναγνώστη να δώσει ένα δικό του νόημα στη συνέχιση μιας φράσης μέσα στο πλαίσιο που ορίζουν τα συμφραζόμενα.

Στα μαθηματικά το σημείο 0,3999…μας παραπέμπει στα εξής τρία πλαίσια αναφοράς; α) σε απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς, β) σε ακολουθίες και γ) σε αθροίσματα άπειρων όρων (σειρές).

Και στα τρία αυτά πλαίσια σύμβολα παρόμοια με το 0,3999… μπορεί να θεωρηθεί και ως διαδικασία αλλά και ως αντικείμενο. Έτσι η εκτέλεση μιας ατελούς διαιρετικής διαδικασίας ακεραίων μπορεί να μας οδηγήσει σ' έναν απειροψήφιο περιοδικό δεκαδικό αριθμό (με άπειρα τα μη μηδενικά ψηφία). Αντίστοιχα η ακολουθία 0,3, 0,39, 0399, … προκύπτει από τη διαδικασία τοποθέτησης σε κάθε βήμα του ψηφίου 9 σε θέση με υποδεκαπλάσια αξία. Η διαδικασία αυτή έχει σαν όριο τον αριθμό 0,3999… . Επίσης ο αριθμός 0,3999… μπορεί να θεωρηθεί ως το άπειρο άθροισμα 0,3 + 0,39 + 0,399 + … .

Κατά την ανάπτυξη της σημειωτικής προσέγγισης θεωρήσαμε το σήμα 0,3999… μπορεί να θεωρηθεί ως *δείκτης (Index)* είτε το ίδιο είτε με βάση της ερμηνείες που του αποδίδονται. Η παρατήρηση ενός τέτοιου σήματος υποχρεώνει τους φοιτητές να το εντάξουν σε κάποιο πλαίσιο αναφοράς στην προσπάθειά τους να του αποδώσουν κάποιο νόημα. Τα βασικά πλαίσια αναφοράς που τους προτάθηκαν ήταν αυτό των αριθμών και των διαδικασιών και σε αυτά τοποθετήθηκαν και οι φοιτητές. Σε κάθε ένα απ' αυτά τα πλαίσια αναφοράς υπάρχουν κάποιες συσχετίσεις τις οποίες θεωρούμε 'νόμιμες' με βάση την τυπική γνώση. Έτσι στο πλαίσιο των αριθμών ο 0,3999… θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος του 0,4. Επίσης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ρητός ή άρρητος. Στο πλαίσιο των διαδικασιών θεωρούμε ότι οι φοιτητές αντιστοιχούν τα μαθηματικά αντικείμενα της ακολουθίας και της σειράς. Η βασική 'νόμιμη' σχέση ως προς την οποία καλούνταν οι φοιτητές να τοποθετηθούν για τα αντικείμενα του πλαισίου αυτού είναι η έννοια της σύγκλισης.

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα 1 εμφανίζονται τα εξής ενδιαφέροντα φαινόμενα

α) Εξαιρετικά λίγοι φοιτητές (25/114) ερμηνεύουν το σήμα 0,3999… ως σταθερό αριθμό. Οι υπόλοιποι θεωρούν με διάφορες προσεγγίσεις ότι εκφράζει κάτι μεταβλητό (διαδικασία, αριθμό ή και τα δυο).

β) Ενώ οι μισοί απ' τους φοιτητές (57/114) θεωρούν ότι το σήμα 0,3999… εκφράζει αριθμό και όχι διαδικασία χρησιμοποιούν συσχετίσεις μη νόμιμες στο συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς. Μάλιστα οι περισσότεροι (32/57) αποδέχονται τέτοιες μη νόμιμες συσχετίσεις στην προσπάθεια απόδοσης νοήματος στο σήμα 0,3999… . Οι φοιτητές αυτοί δεν διστάζουν θεωρήσουν ότι ένας αριθμός που παριστάνεται από το σήμα 0,3999… είναι 'μεταβλητός αριθμός' ή ότι 'τείνει' σε κάποιον άλλο παρά την μακρόχρονη περί του αντιθέτου διδασκαλία. Δηλαδή ενώ οι φοιτητές αυτοί ερμηνεύουν το σήμα 0,3999… στο πλαίσιο των αριθμών υιοθετούν γι' αυτό συσχετίσεις ενός άλλου πλαισίου, αυτού των ακολουθιών ή των σειρών.

Θεωρούμε ότι οι τρεις τελείες στο σήμα του 0,3999… επηρεάζουν με έντονο τρόπο τους φοιτητές, ώστε να το ερμηνεύουν ως κάτι μεταβλητό ή διαδικαστικό.

Ποιοτική προσέγγιση

Το 0,3999… στους τρεις κόσμους των μαθηματικών

Με βάση το θεωρητικό μας πλαίσιο οι φυσικοί αριθμοί εμφανίζονται στα πλαίσια του ενσαρκωμένου κόσμου στην προσπάθεια απαρίθμησης διακριτών αντικειμένων. Οι ρητοί αριθμοί εμφανίζονται ως αποτελέσματα κατά τη διαδικασία της μέτρησης. Όμως δεν έχει νόημα ένα αποτέλεσμα μέτρησης να είναι ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία. Έτσι η προσπάθεια απόδοσης εμπειρικού, διαισθητικού νοήματος σε απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

Στο συμβολικό κόσμο των διεργασιών – εννοιών οι ρητοί αριθμοί ορίζονται ως το πηλίκο δυο ακεραίων (με τον διαιρέτη διάφορο του μηδενός). Από την εκτέλεση της διαίρεσης προκύπτει η αντίστοιχη δεκαδική αναπαράσταση του ρητού αριθμού. Έτσι από την εκτέλεση της διαίρεσης 1:3 προκύπτει 0,333… . Όμως το σύμβολο 0,3999… δεν μπορεί να προκύψει ως το πηλίκο κάποιας διαίρεσης ακεραίων. Ισχύει ότι 0,3999… = 4:10 αλλά αν κάνουμε τη διαίρεση 4:10 θα προκύψει 0,4 και όχι 0,3999… . Έτσι το σύμβολο- αριθμός ‘0,3999…’ έχει ένα επιπλέον πρόβλημα να αποκτήσει νόημα στο πλαίσιο συσχέτισης των συμβόλων των ρητών αριθμών.

Έτσι φοιτητές που αποδίδουν νόημα στο 0,3999… στον ενσαρκωμένο κόσμο εμφανίζουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

i) Εμπλέκουν χρονικούς προσδιορισμούς κατά την λεκτική περιγραφή του συμβόλου 0,3999… .

ii) Αναπαριστούν το 0,3999… ως μεταβλητό σημείο στον άξονα.

iii) Εκλαμβάνουν τον 0,3999… ως μια αέναη διαδικασία τοποθέτησης 9 στον 0,3.

iv) Προσδίδουν στο άπειρο αποκλειστικά τον δυνητικό του χαρακτήρα.

Στον κόσμο των διεργασιών- εννοιών το 0,3999… εμφανίζεται:

i) Ως ρητός αριθμός ίσος με τον 0,4.

ii) Ως το όριο της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399… .

iii) Ως το άθροισμα της σειράς 0,3 + 0,09 + 0,009 + … .

iv) Είναι μια από τις δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις του ρητού αριθμού 4/10.

Η πολλαπλότητα των προσεγγίσεων του 0,3999… φαίνεται ότι δημιουργεί ιδιαίτερο πρόβλημα στους φοιτητές.

Η θεώρηση του 0,399… ως άρρητου

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή ότι ετυμολογικά ρητός είναι ο αριθμός ο οποίος μπορεί να ειπωθεί. Έτσι κάθε δεκαδικός με πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία μπορεί να ειπωθεί. Κάποιοι φοιτητές πιθανόν να έχουν το εξής σκεπτικό: Αφού ο 0,3999… δεν μπορεί να ειπωθεί, επειδή έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία θα είναι άρρητος. Άλλωστε άρρητος είναι ο μη ρητός αριθμός, και έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Σχετικά με το άπειρο

Η πεποίθηση που εμφανίζεται σε πάρα πολλούς φοιτητές σύμφωνα με την οποία το 0,3999… πλησιάζει το 0,4 αλλά δεν το φτάνει ποτέ, βασίζεται σε μια εμπειρική – εποπτική στάση απέναντι στο άπειρο σύμφωνα με την οποία μια άπειρη ακολουθία δομείται στον πραγματικό χρόνο. Έτσι η πραγματοποίηση άπειρων βημάτων σε πεπερασμένο χρόνο θεωρείται κάτι αδιανόητο με συνέπεια να θεωρείται ότι η ακολουθία δεν θα φτάσει ποτέ το όριό της.

Έχουμε λοιπόν άλλο ένα παράδειγμα όπου η έκθεση των φοιτητών στην τυπική γνώση των ορισμών του ορίου ακολουθίας, στην οποία δεν χρειάζεται κάποια περιγραφή του απείρου, δεν είναι αρκετή για να μην αποζητούν οι φοιτητές κάποιο νόημα σ’ αυτές τις διαδικασίες. Αποδίδουν λοιπόν τις περισσότερες φορές το δικό τους διαισθητικό νόημα αδιαφορώντας για την συμφωνία του με την τυπική γνώση.

Δυσκολίες που οφείλονται στην αναπαράσταση

Μια ακόμα δυσκολία σχετίζεται με την ασαφή χρήση που γίνεται στις τρεις τελείες στο τέλος του 0,3999… . Έτσι στη συγκεκριμένη περίπτωση εννοούμε ότι τα 9 συνεχίζονται αενάως Δηλαδή έχουμε επανάληψη του τελευταίου ψηφίου. Ενώ στην περίπτωση του 1,646464… επαναλαμβάνονται περιοδικά τα δυο τελευταία ψηφία Στη σελίδα 189 του σχολικού βιβλίου της Β’ Γυμνασίου γράφονται κάποια δεκαδικά ψηφία του αριθμού π και στο τέλος χρησιμοποιούνται οι τρεις τελείες. Στην περίπτωση αυτή το νόημα είναι διαφορετικό. Οι τρεις τελείες δηλώνουν ότι υπάρχουν άπειρα ακόμα ψηφία αλλά χωρίς επανάληψη των προηγουμένων με περιοδικό τρόπο.

Ίσως αυτός είναι ένας παράγοντας που συμβάλλει στη θεώρηση από κάποιους φοιτητές των απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών ως αρρήτων.

Χρησιμοποιούμε επίσης τρεις τελείες στο τέλος δεκαδικών αριθμών που έχουν πεπερασμένα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία αλλά μας ενδιαφέρει η ακρίβεια με ένα μόνο μέρος των ψηφίων αυτών (στρογγυλοποίηση).

Οι φοιτητές επίσης χρησιμοποιούν τις τρεις τελείες για να περιγράψουν τους όρους μιας ακολουθίας. Αυτή είναι μια παρατήρηση που ίσως ερμηνεύει το γιατί τόσο μεγάλα ποσοστά φοιτητών θεωρούν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία – ακολουθία.

Έτσι οι τρεις τελείες χρησιμοποιούνται με διαφορετικό νόημα στα μαθηματικά σύμβολα. Ουσιαστικά το νόημα πρέπει να αποδοθεί από το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται το σύμβολο. Όταν το πλαίσιο αυτό δεν είναι ορισμένο εκ των προτέρων διαπιστώνουμε ότι υπάρχει σοβαρή αδυναμία καθορισμού του, αυξάνοντας τον κίνδυνο παρερμηνειών.

Πολλοί φοιτητές προτείνουν προς τους υποτιθέμενους μαθητές και την αναπαράσταση του άξονα των αριθμών. Σχεδόν το σύνολο των φοιτητών αυτών απεικονίζουν στον άξονα τους αριθμούς 0,3, 0,39, 0,399, … και τον αριθμό 0,4. Σε κάθε περίπτωση υποστηρίζουν ότι από την αναπαράσταση αυτή φαίνεται όσα υποστηρίζουν λεκτικά στην υπόλοιπη τοποθέτησή τους. Συγκεκριμένα ότι: ‘το 0,3999.. πλησιάζει το 0,4 αλλά δεν θα το φτάσει ποτέ’ ‘ότι ανάμεσα σε δυο ρητούς όσο κοντά και αν είναι αυτοί υπάρχει πάντα και ένας τρίτος’.

Δυσκολία απόδοσης νοήματος

Μια από τις δυσκολίες των μαθητών που έχουν εντοπιστεί από την Διδακτική των Μαθηματικών σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων είναι η απόδοση νοήματος σ’ αυτά τα αντικείμενα και η σύνδεσή τους με πραγματικές καταστάσεις. Είναι χαρακτηριστική η αδυναμία των συμμετεχόντων στην έρευνα να προτείνουν μια τέτοια αντιστοιχία στους μαθητές του σεναρίου.

Συγκεκριμένα οι Πατρώνης και Σπανός [(1996) σ. 268] αναφέρουν: «… στη διαδικασία εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών (ή και θεωριών) υπάρχει μια τάση αποσύνδεσης των εννοιών από το αρχικό τους πλαίσιο. Απογύμνωσής τους από την ‘ουσία’ τους και βαθμιαίας αντικατάστασής τους από αφηρημένους κανόνες οι οποίοι χαρακτηρίζουν ένα ‘σύστημα’». Η τάση αυτή χαρακτηρίστηκε από τον Freundenthal (1983) με τον όρο ‘an-ontologization’ (από-οντολογιοποίηση). Και θεωρήθηκε ‘απόλυτα δικαιολογημένη', όμως επισημαίνει ότι μια τέτοια τάση 'είναι προϊόν ιστορικής και προσωπικής εξέλιξης των ατόμων και δεν μπορεί να υποτεθεί ότι είναι έμφυτη στο μυαλό του μαθητή, ακόμη περισσότερο δεν μπορεί να υποτεθεί εκ των προτέρων ότι ο μαθητής μπορεί να εκτεθεί σε από-οντολογιοποιημένα μαθηματικά'.

Ένα πρόβλημα του Ούγγρου μαθηματικού L. Kalmar (Από το βιβλίο της R. Peter, Jeux avec l' infini), μέσω του Μιχαηλίδης, Τ. και Σκιαδάς Α. (2007) όπου αποκτούν νόημα οι δυο δεκαδικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αριθμού είναι το εξής:

Μια σοκολατοβιομηχανία, για διαφημιστικούς λόγους βάζει μέσα σε κάθε σοκολάτα της ένα κουπόνι. Με δέκα κουπόνια προσφέρει δωρεάν μια σοκολάτα (που έχει κι αυτή μέσα ένα κουπόνι). Ποια η αξία του κάθε κουπονιού σε σκέτη (χωρίς κουπόνι) σοκολάτα.

Το ερώτημα αλλιώς θα μπορούσε να είναι: με πόσα κουπόνια μπορούμε να πάρουμε μια σοκολάτα χωρίς κουπόνι.

Από τη μια, η αξία του πρώτου κουπονιού είναι: 1/10 (της 1ης σκέτης σοκολάτας) + 1/10 (του κουπονιού της 2ης σοκολάτας). Το κουπόνι της 2ης σοκολάτας με τη σειρά του αξίζει το 1/100 (της 3ης σκέτης σοκολάτας) + 1/100 (του κουπονιού της 4ης σοκολάτας) και ούτω καθ' εξής. Έτσι το κάθε κουπόνι αξίζει 1/10 +1/100 +1/1000 +… = 0,1 + 0,01 + 0,001 + … = 0,111… σκέτης σοκολάτας. Πιο απλά:

10 κουπόνια = 1 σκέτη σοκολάτα + 1 κουπόνι δηλαδή

9 κουπόνια + 1 κουπόνι = 1 σκέτη σοκολάτα + 1 κουπόνι οπότε:

9 κουπόνια = 1 σκέτη σοκολάτα αλλιώς

1 κουπόνι = 1/9 σκέτης σοκολάτας.

Από τις δυο τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος προκύπτει ότι:

1/9 = 1/10 +1/100 + 1/1000 +... = 0,111…

Αλλιώς, αν πάω με 9 κουπόνια στο μπακάλη θα πάρω μια σοκολάτα με κουπόνι, θα φάω τη σκέτη σοκολάτα και θα του δώσω τα 10 κουπόνια που χρειάζεται. Έτσι με 9 κουπόνια θα πάρω μια σκέτη σοκολάτα.

Αναγκαιότητα και της διαισθητικής κατανόησης

Να σημειώσουμε ότι δεν αρκεί η παράθεση των αποδείξεων που αναφέραμε στη μεθοδολογία για πειστεί ένας μαθητής ή φοιτητής ότι 0,3999… είναι ρητός αριθμός ίσος με τον 0,4. Πολλές φορές τέτοιες αποδείξεις αναγνωρίζονται από τους μαθητές ως μαγικά κόλπα. Κάπως έτσι η λογική του επιχειρήματος του Ζήνωνα γίνεται μη αντιμετωπίσιμη από τους φοιτητές.

Έτσι οι τυπικές αιτιολογήσεις μπορεί να γίνονται δεκτές από τους μαθητές, αλλά δεν σημαίνει αυτό ότι τις χρησιμοποιούν κάθε φορά με επίγνωση των περιορισμών τους. Αν δηλαδή δεν επιδιώξουμε εκτός της τυπικής και μια διαισθητική κατανόηση οι αιτιολογήσεις αυτές θα φαντάζουν 'μαγικά κόλπα' που νομιμοποιούνται είτε επειδή τις αναφέρει ο καθηγητής είτε το διδακτικό εγχειρίδιο. Χαρακτηριστικό είναι το ιστορικό παράδειγμα που αναφέρει ο Howard Eves [(1990) σ. 178]. 'Οι μαθηματικοί του δέκατου έβδομου και δέκατου όγδοου αιώνα είχαν κατανοήσει λίγο τις άπειρες σειρές και το πεδίο αυτό της ανάλυσης έδωσε πολλά παράδοξα. Ας εξετάσουμε τη σειρά $S = 1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$. Αν ομαδοποιήσουμε τους όρους με τον πιο κάτω τρόπο, έχουμε $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots= 0+0+0+\ldots= 0$, ενώ, αν ομαδοποιήσουμε τους όρους με έναν άλλο τρόπο, έχουμε $S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-0\ldots = 1$. O Luigi Guido Grandi (1671-1742) υποστήριζε ότι, εφόσον τα αθροίσματα 0 και 1 είναι εξίσου πιθανά, το σωστό αποτέλεσμα της σειράς είναι 1/2. Η τιμή αυτή, επίσης, μπορεί να προκύψει με έναν καθαρά τυπικό τρόπο, για τον οποίο έχουμε $S = 1-(1-1+1-1+1-1+\ldots) = 1-S$, οπότε $2S = 1$ ή $S = 1/2$.'.

Το προηγούμενο ιστορικό παράδειγμα θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα προβληματισμού για μαθητές ή φοιτητές ώστε να γίνουν κατανοητοί οι λόγοι που μας οδήγησαν να αναζητήσουμε περιορισμούς και να οριοθετήσουμε κανόνες χειρισμού των συμβόλων. Έτσι μέσα από την ανάδειξη παραδόξων εμφανίζεται η αναγκαιότητα βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών συμβόλων και των τρόπων χρήσης τους.

3.4.2 Γνωστική ικανότητα

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας όπως αυτά παρουσιάζονται στον πίνακα 2 του φάσματος των μαθηματικών ικανοτήτων αλλά και την ποιοτική επεξεργασία των δεδομένων οι φοιτητές εμφανίζουν έντονα χαρακτηριστικά εγκλωβισμού τους στις διαδικασίες αδυνατώντας σε μεγάλο βαθμό να τις υπερβούν. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι το 90% των φοιτητών βρίσκεται στα τρία πρώτα διαδικαστικά επίπεδα του φάσματος του Tall και μόνο ένα 10% καταφέρνει με σταθερότητα να κινείται ευέλικτα μεταξύ των διαφορετικών πλαισίων που εμφανίζεται η έννοια.

Οι φοιτητές που βρίσκονται στα τρία πρώτα στάδια του φάσματος αντιμετωπίζουν κατά κανόνα διαισθητικά την έννοια, όπως αυτό φαίνεται είτε από τις λεκτικές τους περιγραφές είτε από τις αναπαραστάσεις που προτείνουν προς τους μαθητές οι οποίες κατά κανόνα αναφέρονται στον embodied κόσμο. Αδυνατούν να μεταπηδήσουν από τις μαθηματικές διαδικασίες στις αντίστοιχες έννοιες –αντικείμενα. Ή αντίστροφα αδυνατούν να θεωρήσουν αριθμητικά αντικείμενα όπως το 0,3999… ως ισοδύναμα με άπειρες αθροιστικές διαδικασίες όπως αυτή που διατύπωσε ο μαθητής Δ.

Παρόλο που έχουν διδαχθεί αλγεβρικές αποδείξεις για την ισότητα 0,3999… = 0,4 από τη φοίτησή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς και τις έννοιες του ορίου ακολουθίας και των συγκλινουσών σειρών ελάχιστοι τις χρησιμοποιούν.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια επισήμανση. Το συγκεκριμένο έργο που δόθηκε στους φοιτητές με βάση το οποίο συλλέξαμε τα δεδομένα της έρευνας μας δεν ζητούσε από τους φοιτητές την επίλυση κάποιου προβλήματος σχετικού με την έννοια των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Ζητούσε κατά βάση να αξιολογήσει την μεταγνωστική ικανότητα των φοιτητών με βάση το συγκεκριμένο σενάριο που τους προτάθηκε. Επίσης κατά βάση τα στοιχεία που συλλέξαμε για την γνώμη των ίδιων των φοιτητών βασίστηκαν στις προτάσεις προς τους υποτιθέμενους μαθητές του σεναρίου. Θεωρούμε δηλαδή ότι οι φοιτητές ενδέχεται να αποθαρρύνθηκαν να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του απειροστικού λογισμού που γνώριζαν, αφού αυτά δεν είναι γνωστά στους μαθητές στους οποίους απευθύνονταν. Πιστεύουμε λοιπόν ότι ενώ το συγκεκριμένο έργο που χρησιμοποιήσαμε ήταν κατάλληλο για να κατανοήσουμε πως εκλαμβάνουν οι φοιτητές τη φύση των απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών καθώς και για να ελέγξουμε το βαθμό της διδακτικής τους επάρκειας θεωρούμε ότι χρειάζονται περισσότερα στοιχεία για να κατανοήσουμε την γνωστική τους ικανότητα σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα.

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να διατηρούμε κάποια επιφύλαξη για τα συμπεράσματά μας σχετικά με την γνωστική ικανότητα των φοιτητών αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι τα θεωρούμε και αβάσιμα.

Οι φοιτητές ίσως επηρεάστηκαν από την αλλαγή του πλαισίου του έργου που τους προτάθηκε σε σχέση με τα ασκησιολογικά έργα που συνήθως καλούνται να απαντήσουν αλλά η αδυναμία ευέλικτης ανταπόκρισης στο διαφορετικό αυτό πλαίσιο θεωρούμε ότι συνιστά γνωστική αδυναμία.

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι υπήρχαν περιπτώσεις φοιτητών που ‘ήξεραν’ τυπικά την ισότητα 0,3999… = 0,4, κάποιοι μάλιστα την αποδείκνυαν αλλά αδυνατούσαν να θεωρήσουν το 0,3999… σταθερό αριθμό. Μπορούμε λοιπόν να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η κατοχή της τυπικής γνώσης δεν είναι πάντα αρκετή για να ανταποκριθεί κάποιος σε έργα σχετικά με την φύση των υπό διαπραγμάτευση μαθηματικών αντικειμένων.

Αρκετοί φοιτητές επηρεασμένοι από το πλαίσιο που τοποθετούνται υποκύπτουν σε αντιφάσεις στην προσπάθεια τους να υπερβούν την κατάσταση γνωστικής σύγκρουσης στην οποία βρίσκονται.

3.4.3 Δυνατότητα διδασκαλίας της έννοιας

Αξιολογούμε την διδακτική επάρκεια των φοιτητών που συμμετείχαν στην έρευνά μας με βάση τα εξής κριτήρια: α) την ικανότητα κατανόησης του τρόπου σκέψης των μαθητών του σεναρίου, β) την ικανότητα αναγνώρισης θετικών σημείων στη σκέψη των μαθητών, γ) την ικανότητα αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών δ) την ικανότητα διατύπωσης διδακτικών προτάσεων με στόχο την αντιμετώπιση των διαπιστωμένων παρανοήσεων των μαθητών.

Ικανότητα αναγνώρισης του τρόπου σκέψης των μαθητών του σεναρίου

Διαπιστώνουμε με βάση τα στοιχεία των πινάκων 3, 4, 5, 6 που παρουσιάζονται στα αποτελέσματα, ότι οι φοιτητές της έρευνάς μας σε μεγάλο βαθμό αδυνατούν να περιγράψουν στοιχειωδώς τον τρόπο σκέψης των μαθητών του σεναρίου. Για κανένα μαθητή του σεναρίου, το ποσοστό των φοιτητών που αναγνωρίζουν τον τρόπο σκέψης του, όπως αυτός περιγράφεται στη μεθοδολογία, δεν υπερβαίνει το 50%. Να σημειώσουμε εδώ ότι η αναγνώριση του τρόπου σκέψης ενός μαθητή έχει αξιολογηθεί με σχετική ευρύτητα ως προς όσα αναφέρουμε στη μεθοδολογία. Οι τοποθετήσεις των φοιτητών ως προς αυτό τον παράγοντα δεν κρίνονται ως σωστές ή λάθος αλλά περισσότερο ως σχετικές ή όχι με την γνώμη των μαθητών. Επίσης η κατανόησης του τρόπου σκέψης ενός μαθητή δεν σχετίζεται απαραίτητα με την ορθότητα ή μη της τοποθέτησης του μαθητή. Η λεπτή αυτή διάκριση δεν γίνεται αντιληπτή παρά από ελάχιστους φοιτητές.

Πολλοί φοιτητές εκδηλώνουν την αδυναμία αναγνώρισης κάποιου τρόπου σκέψης για τους μαθητές του σεναρίου είτε επαναλαμβάνοντας την τοποθέτηση του μαθητή όπως αυτή τους δόθηκε στο σενάριο, άλλοι κάνουν γενικές και μη σχετικές αναφορές, κάποιοι αποφεύγουν τελείως να τοποθετηθούν.

Ικανότητα αναγνώρισης θετικών σημείων στη σκέψη των μαθητών

Για τους φοιτητές της έρευνας μας η απόδοσή τους στο σχετικό ερώτημα κρίνεται μάλλον απογοητευτική. Για τους τρεις πρώτους μαθητές του σεναρίου τα ποσοστά των φοιτητών που βρίσκουν θετικά σημεία παρόμοια με όσα αναφέρουμε στη μεθοδολογία είναι της τάξης του 20%. Για τον τελευταίο μαθητή το αντίστοιχο ποσοστό γίνεται 40% επειδή οι φοιτητές αναγνωρίζουν ως ορθό το ότι η παράσταση 0,3999… μπορεί να εκφραστεί και ως 0,3 + 0,09 + 0,009 + … ανεξάρτητα από το τι σημαίνει για τον καθένα η παράσταση 0,3999… ή το αντίστοιχο άθροισμα.

Ικανότητα αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών

Η ικανότητα αναγνώρισης παρανοήσεων στις τοποθετήσεις των μαθητών θεωρείται ιδιαίτερη σημαντική σε κάθε διδασκαλία. Ακόμα και στα πλαίσια μιας παραδοσιακής διδασκαλίας τα λάθη των μαθητών πρέπει να αναγνωρίζονται και να διορθώνονται. Στην έρευνα μας όμως εμφανίζεται το εξής ενδιαφέρον φαινόμενο. Κάποιοι φοιτητές βρίσκουν παρανοήσεις στις τοποθετήσεις των μαθητών του σεναρίου όχι σε σύγκριση με την άποψη που θεωρούμε ορθή στα μαθηματικά, αλλά με βάση μια δική τους παρανόηση. Αυτό συμβαίνει γιατί πολλοί φοιτητές ενώ αναγνωρίζουν για παράδειγμα, ως παρανόηση του μαθητή Β ότι δεν μπορεί ένας αριθμός να τείνει σ’ έναν άλλο, αυτό το κάνουν επειδή θεωρούν ότι το σύμβολο 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία και όχι έναν αριθμό. Αντίστοιχα αρκετοί φοιτητές αναγνωρίζουν ως παρανόηση του μαθητή Α ότι η παράσταση 0,3999… δεν τείνει στο 0,4 επειδή το θεωρούν αριθμό που τείνει στο 0,4. Επίσης θεωρούν ως παρανόηση του μαθητή Γ ότι 0,3999… είναι ο αμέσως προηγούμενος του 0,4 επειδή θεωρούν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσά τους.

Στην έρευνά μας τα ποσοστά των φοιτητών που ανιχνεύουν τις παρανοήσεις των μαθητών, όπως αυτές διατυπώνονται στη μεθοδολογία είναι της τάξης του 30% . Αν και το ποσοστό αυτό, το θεωρούμε σχετικά μικρό, ουσιαστικά η πραγματική ικανότητα των φοιτητών στην ανίχνευση παρανοήσεων είναι ακόμα ασθενέστερη με βάση όσα αναφέρουμε παραπάνω.

Ικανότητα διατύπωσης διδακτικών προτάσεων με βάση τις παρανοήσεις

Η ιδιαίτερη σημασίας της δυνατότητας εύρεσης διδακτικών προτάσεων με βάση τις παρανοήσεις των μαθητών, στην διδακτική διαδικασία θεωρούμε ότι είναι αυτόνόητη. Στην έρευνά μας οι φοιτητές παρουσιάζουν σημαντική αδυναμία διατύπωσης τέτοιων προτάσεων. Τα αντίστοιχα ποσοστά είναι της τάξης του 18%. Δηλαδή λιγότερο από το 1/6 των φοιτητών είναι ικανό να διατυπώσει διδακτικές προτάσεις προς τους μαθητές, παρόμοιες με αυτές που αναφέρουμε στη μεθοδολογία

Η αδυναμία αυτή εκδηλώνεται είτε αναφέροντας γενικές ποτάσεις του τύπου, ‘θα εξηγήσουμε την έννοια της πυκνότητας’, ‘θα αναφέρουμε τα σύνολα των αριθμών’, ‘θα αναλύσουμε την έννοια του ορίου’, ‘θα χρησιμοποιήσουμε τον άξονα των αριθμών’. Δηλαδή δεν γίνεται αναφορά στο πως συγκεκριμένα θα υλοποιηθούν τέτοιες προτάσεις, αλλά ούτε και με πιο τρόπο σχετίζονται οι προτάσεις αυτές με τις παρανοήσεις των μαθητών.

Άλλοι φοιτητές εκδηλώνουν αυτή τους την αδυναμία προσπαθώντας να εξηγήσουν στους μαθητές με διάφορες λεκτικές, διαισθητικές περιγραφές την ίδια τη δική τους παρανόηση.

Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν και οι φοιτητές οι οποίοι ενώ δείχνουν ότι τυπικά γνωρίζουν την έννοια που διαπραγματευόμαστε θεωρούν ως διδακτική πρόταση το να απευθύνουν στους μαθητές τη σωστή μαθηματική πρόταση και αναμένουν ότι αυτοί θα την κατανοήσουν.

Αρκετοί φοιτητές επιδιώκουν προτάσεις με βάση μια διαισθητική προσέγγιση. Θα θεωρήσουμε ότι μια τέτοια προσπάθεια είναι σε θετική κατεύθυνση. Αρκετοί φοιτητές αναφέρουν τον άξονα των αριθμών ως αναπαραστατικό εργαλείο που θα βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας. Άλλοι χρησιμοποιούν ιστορικοφιλοσοφικά παραδείγματα όπως το παράδοξο του Ζήνωνα για να βοηθήσουν τους μαθητές του σεναρίου στην κατανόηση της έννοιας. Παρά το ότι θεωρούμε ότι η κατανόηση υποβοηθείται σημαντικά από την διαισθητική προσέγγιση, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς μιας τέτοιας προσέγγισης. Έτσι για παράδειγμα είναι υπό έλεγχο το ερώτημα του κατά πόσο οι μαθητές αναγνωρίζουν πιο εύκολα ότι μεταξύ δυο σημείων μιας ευθείας υπάρχουν άπειρα άλλα, από το ότι μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών υπάρχουν άπειροι άλλοι. Επίσης ο σχεδιασμός σημείων που αντιστοιχούν σε αριθμούς όπως οι 0,3, 0,39, 0,399, 0,3999 στον ίδιο άξονα, στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι έχει σοβαρούς περιορισμούς. Από κάποιο σημείο και μετά τα σημεία που αντιστοιχούν στους παραπάνω αριθμούς φαίνονται να ταυτίζονται και απαιτείται η γνώση της αντίστοιχης θεωρίας για να τα διακρίνει κάποιος.

Επίσης αρκετές φορές χρησιμοποιούνται διαισθητικές αναπαραστάσεις ως αποδεικτικά εργαλεία. Για παράδειγμα ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι επειδή μεταξύ δυο διαφορετικών σημείων του άξονα υπάρχει πάντα ένα σημείο αυτό σημαίνει ότι και μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών αριθμών θα υπάρχει ένας άλλος ρητός. Καταρχήν μεταξύ δυο διαφορετικών σημείων μιας ευθείας δεν 'φαίνεται' πάντα ότι υπάρχει και άλλο σημείο. Για να το 'δει' κάποιος απαιτείται η γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Της ίδιας ουσιαστικά θεωρίας που μας τεκμηριώνει την ύπαρξη ενός ρητού αριθμού μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών. Δηλαδή θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν είναι το αναπαραστατικό εργαλείο που μας δίνει την απόδειξη μιας πρότασης αλλά η αντίστοιχη θεωρία. Αρκετές φορές οι φοιτητές της έρευνάς μας φάνηκε να προσπερνούν αυτή τη λεπτή διαφορά.

3.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Επανερχόμενοι στο τρίπτυχο ως προς το οποίο εξετάσαμε τις απόψεις των συμμετεχόντων στην έρευνά μας, το οποίο αποτελείται: α) από την γνώση της φύσης των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση, β) την γνωστικής τους ικανότητας σχετικά με την έννοια και γ) την δυνατότητά τους για την διδασκαλία της έννοιας συμπεραίνουμε ότι εμφανίζονται σημαντικά προβλήματα και στους τρεις προαναφερόμενους παράγοντες.

Οι περισσότεροι αντιμετωπίζουν στους ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση επιστημολογικά εμπόδια αντίστοιχα με όσα καταγράφονται από την ιστορική εξέλιξη των εννοιών του ορίου και των σειρών. Έτσι ο 0,3999… θεωρείται ότι 'πλησιάζει αλλά δεν φτάνει το 0,4' ή ότι 'συνεχώς αυξάνεται' ή ότι 'βρίσκεται απειροελάχιστα κοντά στο 0,4'. Αρκετοί αντιμετωπίζουν το άπειρο μόνο με τη δυνητική του μορφή και θεωρούν ότι το άθροισμα άπειρων θετικών αριθμών δεν μπορεί να είναι αριθμός.

Η πλειονότητα των φοιτητών αντιμετωπίζει τους απειροψήφιους δεκαδικούς ως διαδικασίες ή μεταβλητές ποσότητες αδυνατώντας να τους χειριστεί ως αντικείμενα. Το σύμβολο με το οποίο εκφέρονται, φαίνεται να τους επηρεάζει δραστικά σ' αυτή την κατεύθυνση. Αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία κατά τη μετάβασή τους από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Να σημειώσουμε ότι τα πλαίσια στα οποία καλούνταν οι φοιτητές να τοποθετηθούν ήταν πολλαπλά. Από την μια δεκαδική αναπαράσταση (0,3999…) στην άλλη (0,4) ή στην αντίστοιχη κλασματική (4/10). Από το πλαίσιο των αριθμών σ' αυτό των ακολουθιών ή των σειρών. Από τη συσχέτιση των αντικειμένων του πλαισίου των αριθμών (ο 0,3999… προηγούμενος του 0,4) σ' αυτό των ακολουθιών ή των σειρών (συγκλίνουσα ή όχι). Φαίνεται ότι η τοποθέτησή τους επηρεάζεται εμφανώς από το πλαίσιο στο οποίο τοποθετούνται παρουσιάζοντας αρκετές φορές αντιφάσεις στην άποψής τους.

Με βάση τα παραπάνω υποθέτουμε ότι, τα έλλογα όντα στην προσπάθεια κατάνόησης των εννοιών, υποβάλλουν σ' αυτές εμπειρικούς και οντολογικούς περιορισμούς των ίδιων. Δηλαδή οι δυσκολίες κατανόησης κάποιων μαθηματικών – επιστημονικών εννοιών οφείλονται κατά ένα μέρος στις βιωματικές, διαισθητικές προσεγγίσεις με τις οποίες οι άνθρωποι προσπαθούν να προσεγγίσουν τις έννοιες. Για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ως επιστημονικών εννοιών, απαιτείται η συνειδητοποίηση των ενεργειών που εκτελούμε για να τις προσεγγίσουμε, καθώς και η σχετική απόσπασή τους από το διαισθητικό επίπεδο. Η απαιτήσεις αυτές είναι απαραίτητες για την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και ως ένα βαθμό εξηγούν την δυσκολία προσέγγισής τους, από τους συμμετέχοντες στην έρευνά μας.

Στο επίπεδο λοιπόν της διδακτικής επάρκειας των εν δυνάμει καθηγητών της έρευνάς μας για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας εντοπίσαμε σημαντικές αδυναμίες. Οφείλουμε βεβαίως να αναγνωρίσουμε ότι οι φοιτητές δεν ήταν προετοιμασμένοι για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας όπως και ότι η διδακτική τους δυνατότητα για τη διδασκαλία της έννοιας δεν μπορεί να ελεγχθεί με ασφάλεια μόνο από τις γραπτές απαντήσεις σε κάποια ερωτήματα.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τους περιορισμούς αυτούς εντοπίσαμε ότι οι φοιτητές της έρευνας μας, πολλές φορές απευθύνουν στους μαθητές πολύ γενικές ιδέες που δεν βασίζονται στις εντοπισμένες αδυναμίες τους. Κάποιες φορές οι ιδέες αυτές δεν φαίνεται να έχουν εμφανή σχέση με την έννοια που εξετάζουμε. Αρκετοί φοιτητές απευθύνουν στους μαθητές είτε μόνο διαισθητικές προτάσεις για την κατανόηση των οριακών διαδικασιών είτε μόνο τυπικές αλγεβρικές. Με τις πρώτες δεν καλλιεργείται στους μαθητές το αίσθημα της ανεπάρκειας των εμπειρικών μεθόδων για την αντιμετώπιση κάποιων καταστάσεων, το οποίο είναι βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη των μαθηματικών και της επιστήμης γενικότερα. Με τις δεύτερες υπονοείτε η άποψη ότι 'το σωστό αρκεί να ειπωθεί στους μαθητές και αυτοί θα το κατακτήσουν'. Στην έρευνά μας, κάποιοι από τους λίγους φοιτητές που φαίνονταν ότι είχαν τυπική γνώση των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση, αδυνατούσαν ή έδειχναν αδιαφορία για τις γνώμες των μαθητών ή για τους τρόπους που θα τους πρότειναν για να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα παρουσίασαν ιδιαίτερες αδυναμίες και στο γνωστικό επίπεδο. Υπενθυμίζουμε ότι ως μαθητές έχουν αντιμετωπίσει απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς από την φοίτησή τους στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έχουν διδαχθεί τις μετατροπές στις αντίστοιχες κλασματικές μορφές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ από την φοίτησή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση έχουν έρθει σε επαφή με τις διπλές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών, με τις έννοιες του ορίου ακολουθίας και συγκλίνουσας σειράς.

Να σημειώσουμε επίσης ότι η αξιολόγησή τους δεν έγινε με βάση κάποιο πολύπλοκο τεχνικό πρόβλημα αλλά ουσιαστικά ζητώντας την κριτική τους άποψη σε διατυπωμένες θέσεις. Δεν χρειαζόταν κάποια ειδική γνώση που θα έπρεπε να είχαν διαβάσει για να ανταποκριθούν στα συγκεκριμένα ερωτήματα, παρά μόνο γνώσεις που θεωρούνται ήδη κατακτημένες για το αντίστοιχο επίπεδο σπουδών. Παρόλα αυτά ελάχιστοι φοιτητές κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν την γνώση που έχουν διδαχθεί για να ανταποκριθούν σ’ ένα τέτοιο κριτικό έργο.

Μη ξεχνώντας ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνά μας θεωρούνται οι σχετικά επιτυχημένοι απόφοιτοι του εκπαιδευτικού μας συστήματος ο προβληματισμός για την επάρκεια του συστήματος αυτού είναι ιδιαίτερα έντονος.

Σε μια προσπάθεια περαιτέρω διερεύνησης του θέματος της παρούσας εργασίας απευθύνουμε τα παρακάτω ερωτήματα προς συγκριτική και αλληλοτροφοδοτική ερευνητική διαπραγμάτευση.

α) Πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης την έννοια των απειροψήφιων ρητών δεκαδικών αριθμών; (Αναπαραστάσεις, ως διαδικασίες ή ως αριθμούς, το ρόλος του απείρου και των συμβόλων.)

β) Πως αξιολογούνται οι εν ενεργεία καθηγητές με βάση το τρίπτυχο –γνώση της έννοιας, γνώση της φύσης της έννοιας, διδακτική επάρκεια - σχετικά με τους ρητούς απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς.

γ) Ποιες διδακτικές πρακτικές μπορούμε να αναπτύξουμε για να συμβάλλουμε στην άμβλυνση του χάσματος, μεταξύ της διαισθητικής και της θεωρητικής προσέγγισης της συγκεκριμένης έννοιας, κατά την διδασκαλία των μαθητών και των φοιτητών αλλά και την ουσιαστική επιμόρφωση των εν ενεργεία καθηγητών;

Να υπενθυμίσουμε ότι σύμφωνα με όσα αναφέραμε στους στόχους της παρούσας έρευνας για τον σχηματισμό πληρέστερης εικόνας των αντιλήψεων των συμμετεχόντων σε μια έρευνα, απαιτούνται δεδομένα που θα συλλεχθούν και με διαφορετικούς τρόπους εκτός των γραπτών απαντήσεων σ’ ένα ερωτηματολόγιο, όπως η συνέντευξη και η οπτικοακουστική καταγραφή προσχεδιασμένων διδακτικών προτάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ελληνική βιβλιογραφία

Αναπολιτάνος, Δ., (1985) *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Νεφέλη.

Βασιλείου, Φ., (1973) *Το πρόβλημα για τη φύση του συνεχούς*, Ακαδημία Αθηνών.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., & Σπύρου, Π., (2004) *Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών* (Τόμοι 1-2). Λευκωσία: Intercollege Press.

Γιαννακούλιας, Ε., (2007) *Άπειροστικός λογισμός -Η ιστορική εξέλιξη από τον 5ο π.Χ εως και τον 19ο μ.Χ αιώνα*, Συμμετρία.

Δρόσος, Κ., (1987) *Εισαγωγή στη μαθηματική σκέψη*, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Eves, H., (1990) *Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών*, Τροχαλία.

Κολέζα, Ε., (2000) *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*, Leader Books, Αθήνα.

Μαμωνά, Γ., (1987-88) Διαισθητικές προσεγγίσεις της ευθείας των αριθμών από τους μαθητές, *Πρακτικά 4ου-5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Ε.Μ.Ε.

Μιχαηλίδης, Τ. και Σκιαδάς Α., (2007) *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου,* Β΄ Τεύχος, Ελληνικά Γράμματα.

Πατρώνης, Τ. - Σπανός, Δ., (1996) *Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία*, Πνευματικός.

Peirce, C., (1955) *Logic as Semiotic: the theory of signs,* στο Κ. Παραγιώργης, *Κείμενα σημειολογίας* (1981*)*, Νεφέλη.

Ρουσόπουλος, Γ., (1991) *Επιστημολογία των μαθηματικών, αναλυτικο-αναφορικότητα και νομιμοποίηση στα νεότερα μαθηματικά*, Αθήνα, Gutenberg.

Ρούσσος, Ε., (1982) *Οι Ελεάτες*, Δευκελίων.

Συλλογικό, (2001) *Ευκλείδη Στοιχεία*, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, Τόμοι 3.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Artigue, M., (2000) *Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France*; CBMS Issues in Mathematics Education, Volume 8.

Boyer, C., (1949) *The History of the calculus and its conceptual development*, New York, Dover, 1969.

Chaffe – Stengel P. and Noddings, N., (1982) Facilitating Symbolic Understanding of Fractions, *For the Learning of Mathematics*.

Cockcroft, WH., (1982) *Mathematics Counts,* Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship, London

Deacon, T., (1997) *The Symbolic Species. The Co-Evolution of Language and the Human Brain*. London: Puguin.

Dedekind, (1963) *Continuity and Irrational numbers*, Dover

Dubinsky, Ed., (1991). Reflective Abstractions in Advanced Mathematical thinking. *In Advanced Mathematical thinking* (p. 95-123) Kluwer: Dordrecht.

Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M. A. & Brown, A., (2005 a) Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS based analysis: Part 1, *Educational Studies in Mathematics,* 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M. A. & Brown, A., (2005 b) Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS based analysis: Part 2, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253-266.

Dubinsky, E., & Macdonald, M. (2006) APOS : A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, *Springer Netherlands*.

Eduards, B. S. & Ward, M. B., (2004) Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions, *The American Mathematical Monthly*, 111 (5) 411-424.

Edwards, C., (1979) *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag,

Eisele, C., (1964) Peirce's philosophy of education in his unpublished mathematics textbooks In *E. Moore and R. Robin (eds), Studies in the philosophy of Charles Sanders Peirce, Second Series, Amherst*: The university of Massachussetts Press.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, D., (1995) The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *E.S.M. vol.29*.

Fischbein, E., (2001) 'Tacit models and infinity', *Educational Studies in Mathematics*, pp. 309-329.

Freudental, H., (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publ.

Gray, E. & Tall, D., (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.

Gray, E., Pitta, D., Pinto, M. and Tall D., (1999) Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, *Educational Studies in Mathematics*. 38 (1-3), 111-133.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., Zachariades, T., (2005) Student's thinking about fundamental real numbers properties, *Fifth Congress of the European Society for the Reaserch in Mathematics Education*, (17-21, Feb. 2005) in Larnaca, Cyprus.

Gorski, R., (1981) *Theory of the definition*, Progress Publishers, Moscow.

Grabiner, J., (1980) Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, Summer Meeting of the Math. Assocation of America in Ann Ardor, Michigan.

Huttenlocher & Higgins, E. T., (1978) *Issues in the study of symbolic development*, In W. A Collins (ed), Minnesota Symbosia on child Psychology, Voll, Laurence Erlbaum Associates.

Innis, Robert E., (Ed.) (1986) Semiotics: An Introductory Reader. London: Hutchinson.

Lakoff,G. & Núñez, R. E., (2000) *Where mathematics comes from. How the Embodied minds brings mathematics into being,* New York: Basic Books.

Langer, S., (1995) *Philosophy in a New Key*, NY: Mentor Books.

McGowen, M. A., (1998) Cognitive Units, Concept Images, and Cognitive Collages, An examination of the Process of knowledge Construction Ph. Thesis. University of Warwick, Uk.

McGowen, M. A. & Davis, G. E., (2001) What mathematical knowledge do pre-servise elementary teachers value and remember; *Proceedings of PME – NA, Snowbird, Utah. November, 2001*.

Moseley, B., (2005) Students' Early Mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving, *Educational Studies in mathematics*.

Noth, Winfried, (1990) *Handbook of Semiotics. Bloomington*, Indiana University Press.

Piaget, Jean, (1929) *The Child's Conception of the World*, New York: Humanities Press.

Robinson, A., (1951) *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

Sierpinska, A., (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathematiques.*

Sfard, A., (1991) Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function, MAA Notes, Vol. 25.

Tall, D. & Barnard, T., (1997) Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof, *Proceedings of PME 21, Finland*.

Tall, D. & Crowley, L., (1999) The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in achieving Goals in College Algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel,* 2, 225–232.

Tall, D. & Schwarzenberger, L., (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Published in Mathematics teaching*, 82, 44-49.

Tall, D., McGowen, M. and DeMarois, P., (2000) The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 247–254.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M, Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. and Yudariah Yusof, (2001) Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, 1, 81–104.

Tall, D., (2002) Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand, 91–107. *National Taiwan Normal University*, Taipei, Taiwan.

Tall, D., (2004) Introducing Three Worlds of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 23 (3). 29–33.

Tall, D., (2007) Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education, *Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Feb 22–27, 2007, San Diego, California, USA.

Turner, Graeme, (1992) British Cultural Studies: An Introduction. New York: Routledge.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S., (2007) How many numbers are there in an interval; Presuppos;itions, synthetic models and the effect of the number line. In *S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds) Reframing the conceptual* *change approach in learning and instruction* (pp. 267-283). Oxford, UK: Elsevier.

Viele, A., (1996) Peirce, the interpretand (a tripartite division of experience) and Mathematical Meaning, *Proceedings of 8th International Conference on Mathematical Education, Working Group 10: Mathematics and Languages, Seville Spain.*

Zervos, P., (1972) 'On the development of mathematical intuitions; on the genesis of geometry', further remarks, Tensor, N.S. Vol.26.

Ψηφιακά βοηθήματα

TLG (Thesaurus Linguae Graecae – Θησαυρός της Ελληνικής Γλώσσας). Βάση δεδομένων Musaios.

http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/

http://www.mcm.aueb.gr/ment/semiotics/semiotic.html