ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΙΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Φωτεινή Ζουλινάκη

Επιβλέπων Καθηγητής
Αθανάσιος Γαγάτσης

Αθήνα
Οκτώβριος 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΙΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Φωτεινή Ζουλινάκη

Επιβλέπων Καθηγητής
Αθανάσιος Γαγάτσης

Αθήνα
Οκτώβριος 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΙΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) **Αθανάσιος Γαγάτσης** (επιβλέπων Καθηγητής)	…….……	…….
2) **Θεοδόσης Ζαχαριάδης**	…….……	……..…
3) **Βασιλική Φαρμάκη**	…….……	……..…

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Θ. Ζαχαριάδη, Β Φαρμάκη και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Αθανάσιο Γαγάτση για τη βοήθεια που μου προσέφεραν στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού προγράμματος για τους άλλους δρόμους με τους οποίους με βοήθησαν να προσεγγίσω τη γνώση.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου μαθηματικούς από τη Β/θμια Εκπαίδευση: Η.Ζαραρόπουλο , Γ.Αλυγιζάκη (7^{ο} Ε. Λ. Καλλιθέας), Η.Γεωργακάκο (3^{ο} Ε.Λ. Ν.Ηρακλείου), Δ.Βάγια (6 Ε. Λ. Καλλιθέας), Σ.Τσιγώνια, Ι.Μαυρέλη (4^{ο} Ε.Λ. Καλλιθέας), Γ.Τροντή(1^{ο} Ε. Λ. Μοσχάτου), Χ. Γαλανό (1^{ο} Ε. Λ. Νέας Σμύρνης), Δ. Βρανά, Α. Κοσμίτη, Α. Διακόπουλο, Μ. Καρκάνη (Ε. Λ.Αγίου Ιωάννη Ρέντη), Θ. Σφούνη (1^{ο} Ε. Λ. Καλλιθέας),Σ.Παπαδημητρίου και Γ. Μίχα (Ε. Λ. θρακομακεδόνων), που πρόθυμα μου προσέφεραν πολύτιμες διδακτικές ώρες από τη διδασκαλία τους, για να πραγματοποιήσω τη έρευνά μου.

Οκτώβριος 2006

Φωτεινή Ζουλινάκη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Πρόλογος 3

1. Όριο συνάρτησης

1.1 Εισαγωγή 6

1.2 Ιστορικό Σημείωμα 9

1.3 Τυπικός ορισμός ορίου 14

1.4 Σχηματισμός της έννοιας 18

1.4.1 Ο ρόλος της γλώσσας στην κατανόηση της έννοιας του ορίου..... 21

1.4.2 Μοντέλα κατανόησης της έννοιας του ορίου 25

1.5 Γνωστικά εμπόδια 27

1.5.1 Επιστημολογικά εμπόδια 28

1.6 Οι πεποιθήσεις μαθητών – σπουδαστών και η σχέση τους με την κατανόηση της έννοιας του ορίου 34

1.7 Οι άτυπες αντιλήψεις μαθητών – σπουδαστών, ως εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας του ορίου 37

1.8 Το όριο σαν διαδικασία και σαν αντικείμενο 44

1.8.1 Θεωρία Dubinsky (« γενετική αποσύνθεση» της έννοιας του ορίου) Θεωρία APOS 45

1.8.2 Το όριο ως Procept 47

2. Αναπαραστάσεις

2.1 Εισαγωγή 49

2.2 Η έννοια της αναπαράστασης 51

2.2.1 Είδη αναπαραστάσεων 52

2.3 Εξωτερικές αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών..... 55

2.3.1 Συνάρτηση και αναπαραστάσεις 58

2.3.2 Χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση 59

2.3.3 Αναπαραστάσεις και όριο 65

3. Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή 71

3.2 Τι ισχύει στο ελληνικό σχολείο 71

3.3 Το Διδακτικό Συμβόλαιο 77

3.4 Στόχοι της έρευνας 79

3.4.1 Υποκείμενα της έρευνας 79

3.4.2 Παρουσίαση ερωτηματολογίου 79

3.4.3 Διαδικασία 82

3.4.4 Κριτήρια βαθμολόγησης 82

3.4.5 Ανάλυση δεδομένων 82

4. Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή 84

4.2 Γενική επίδοση των μαθητών στο ερωτηματολόγιο 84

4.3 Σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής στις απαντήσεις των μαθητών 90

4.4 Ποιοτική ανάλυση 98

5. Συμπεράσματα 101

Βιβλιογραφία 108

Παράρτημα 118

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έννοια του ορίου συνάρτησης είναι η πιο σημαντική, και ίσως η πιο δύσκολη σε ολόκληρο τον Απειροστικό Λογισμό. Οι Cottrill et al.(1996) σημειώνουν ότι υπάρχει γενική συμφωνία στη βιβλιογραφία ότι οι σπουδαστές έχουν πρόβλημα με την έννοια του ορίου, είτε αυτό εξετάζεται στο πλαίσιο των συναρτήσεων και της συνέχειας είτε των σειρών και των ακολουθιών. (Βλ., Artigue, 1991; Cornu, 1983, 1991; Davis & Vinner, 1986 ; Li & Tall, 1993; Robert, 1982q; Sierpinska, 1987; Tall, 1980d, 1992; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991).

Υπάρχει μεγάλος προβληματισμός στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα για το πώς πρέπει να διδάσκεται η έννοια του ορίου συνάρτησης, ως έννοια θεμέλιο, στον Απειροστικό Λογισμό. Ένας αριθμός μελετών επιβεβαιώνει ότι μια ουσιαστική κατανόηση των ορίων μεταξύ των σπουδαστών είναι σχετικά σπάνια (Williams, 1991). Αν και οι σπουδαστές μπορούν να υπολογίσουν όρια και να αντιμετωπίζουν προβλήματα που περιλαμβάνουν όρια, δεν διαθέτουν μια ικανοποιητική κατανόηση για τη φύση της έννοιας από μόνη της. Αναμφίβολα διαφορετικές χώρες και πανεπιστήμια χρησιμοποιούν διαφορετικές προσεγγίσεις για να διδάξουν όρια.

Εισηγήσεις για βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Λύκειο περιλαμβάνουν έμφαση σε διαθεματικά θέματα, χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και την συμμετοχή του μαθητή στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Αυτές οι γενικές αρχές αναφέρονται σε όλους τους τομείς και πεδία της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης.

Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι η χρήση αναπαραστάσεων συμβάλλει στη σε βάθος κατανόηση και στην ευέλικτη χρήση των μαθηματικών εννοιών (Hiebert, & Carpenter, 1992; Kaput, 1987a). Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics(NCTM) πρόσθεσε την αναπαράσταση στα "Principles and Standards of School Mathematics", λόγω της αυξανόμενης σημασίας της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών ενώ αρχικά, το 1989, είχε θεωρηθεί ως μέρος της επικοινωνίας.

Η έννοια του ορίου είναι μια από τις βασικές έννοιες που συνδέει συγχρόνως αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις, αφού και οι δύο είναι απαραίτητες για μια συνολική κατανόηση. Όμως μια σημαντική ερώτηση που προκύπτει είναι κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν και τους δύο τύπους των αναπαραστάσεων και μπορούν να μεταφέρουν τη γνώση τους από μια αλγεβρική αναπαράσταση σε μια γεωμετρική και αντίστροφα. Από τη διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι οι μαθητές

έχουν έλλειψη στη χρήση συστημάτων αναπαράστασης και στην εναλλαγή-μετάφραση από το ένα σύστημα στο άλλο για έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης, με συνέπεια να συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών(Dreyfus & Eisenberg, 1986,1991 ; Tall,1993)

Στην παρούσα εργασία οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου που συμμετέχουν στη έρευνα δεν γνωρίζουν τον ε-δ ορισμό για το όριο συνάρτησης. Η έννοια του ορίου όταν το x τείνει στο $x_o \varepsilon R$ εισάγεται εποπτικά μέσω παραδειγμάτων, δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε γεωμετρικά ή αριθμητικά πλαίσια. Σ' αυτό το πλαίσιο, η παρούσα εργασία χωρίς να παραβλέπει να αναφερθεί στις διαισθητικές αντιλήψεις , τις δυσκολίες και τα εμπόδια των μαθητών αυτών σε σχέση με την έννοια του ορίου όπως προκύπτουν από τη διεθνή βιβλιογραφία, επικεντρώνεται στη σημασία των αναπαραστάσεων στη κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Βέβαια ο τομέας αυτός των αναπαραστάσεων όπως παρουσιάζεται στο 2° Κεφάλαιο, της παρούσας εργασίας, είναι ευρύτατος. Έτσι μπορούν να εξεταστούν οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δηλαδή αυτά που αντιλαμβάνονται οι μαθητές νοερά για την έννοια αυτή και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις. Η νοητική αναπαράσταση αναφέρεται σε μια πρωτογενή δημιουργία , σε μια πράξη αντιληπτικής ή νοερής κατασκευής. Οι νοητικές αναπαραστάσεις παράγονται εσωτερικά και οργανώνονται, εμπλουτίζονται ή απορρίπτονται ανάλογα με το βαθμό χρήσης και εφαρμογής τους στα πλαίσια της καθημερινής εμπειρίας. Στην πραγματικότητα η μελέτη των εσωτερικών αναπαραστάσεων είναι δύσκολο έργο όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία. Επειδή «ο βασικός στόχος της χρήσης εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι η δημιουργία πλούσιων εσωτερικών δομών για τις μαθηματικές έννοιες, αφού εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε σχέση αλληλεπίδρασης» (Goldin & Kaput, 1996), στην έρευνα μας αυτή περιοριζόμαστε στην εξέταση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Με οδηγό τις παραπάνω σκέψεις, βασικοί στόχοι της παρούσας εργασίας είναι:

- Να παρουσιάσουμε μέσα από τη διεθνή βιβλιογραφία την έρευνα που αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου από τους μαθητές, τις δυσκολίες και τα εμπόδια που συναντούν σε σχέση μ' αυτή την έννοια. (Κεφάλαιο 1°).
- Παρουσίαση της σημασίας των αναπαραστάσεων στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών εννοιών, με ιδιαίτερη αναφορά στο όριο συνάρτησης (Κεφάλαιο 2°).

- Παρουσίαση της έρευνας που πραγματοποιήσαμε σε μαθητές της Γ΄τάξης του Ενιαίου Λυκείου, ώστε να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις τους για το όριο συνάρτησης, τον βαθμό στον οποίο γίνεται κατανοητή η έννοια από αυτούς και πως συσχετίζεται η κατανόηση της έννοιας με την ικανότητα να χειρίζονται διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης ορίων και να μεταβαίνουν από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο .
- Διατύπωση προτάσεων σε σχέση με την διδασκαλία της έννοιας του ορίου.

1. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι κοινή η διαπίστωση τόσο των ερευνητών της διδακτικής όσο και των δασκάλων των μαθηματικών για τις δυσκολίες που συναντά η προσπάθεια εισαγωγής των μαθητών στις θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Από τη μια πλευρά οι μαθητές συναντούν σημαντικά προβλήματα στην κατανόηση αυτών των εννοιών, από την άλλη οι συνήθεις μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας καθώς και τα προγράμματα σπουδών που κατά καιρούς εφαρμόζονται έχουν αποτύχει. Είτε αυτά επικεντρώνονται σε αλγοριθμικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς είτε σε θεωρητικά θέματα. Τα παραπάνω προκύπτουν από έρευνες που έγιναν και αφορούν στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού τα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια.

Η Artigue (1998) ταξινομεί σε τρεις κατηγορίες τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην προσπάθεια να κατανοήσουν αυτές τις έννοιες και σημειώνει ότι οι δυσκολίες αυτές, αν και έχουν διαφορετική προέλευση, συνδυάζονται στενά και ενισχύονται αμοιβαία. Οι τρεις αυτές κατηγορίες είναι:

- Δυσκολίες που συνδέονται με τη μαθηματική πολυπλοκότητα των βασικών αντικειμένων που διαπραγματεύεται ο Απειροστικός Λογισμός, όπως είναι οι πραγματικοί αριθμοί και η έννοια της συνάρτησης, αντικείμενα που είναι ακόμη σε φάση κατασκευής όταν αρχίζει η τυπική διδασκαλία της ανάλυσης.
- Δυσκολίες που συνδέονται με τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης.
- Δυσκολίες που οφείλονται στη κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Η έννοια του ορίου είναι στενά δεμένη με την έννοια των απείρων διαδικασιών, αφού η προσέγγισή του γίνεται μέσα από τέτοιες διαδικασίες. Οι μαθητές έρχονται πρώτη φορά αντιμέτωποι με την έννοια του απείρου και αυτό τους δημιουργεί προβλήματα. Ο Cornu (1983) επισημαίνει ότι η έννοια του ορίου είναι, για τους περισσότερους σπουδαστές, το πρώτο θέμα στο οποίο τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται σε ένα πεπερασμένο υπολογισμό που μας δίνει μια καθοριστική απάντηση.

Η έννοια του ορίου όμως δεν παρουσιάζει δυσκολίες μόνο στους μαθητές. Είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες που καλούνται να διδάξουν οι δάσκαλοι των μαθηματικών. Ο σωστός από μαθηματική άποψη σχεδιασμός δεν αρκεί. Η πολυπλοκότητα

της έννοιας απαιτεί προσεκτικά σχεδιασμένες δραστηριότητες που θα οδηγούν στην κατανόηση της.

Ο τυπικός ορισμός του ορίου είναι μια αυστηρά μαθηματική έκφραση δυσνόητη για τους μαθητές. Η εφαρμογή του προϋποθέτει δεξιότητες από τους μαθητές, όπως είναι ο χειρισμός των απολύτων τιμών και των ανισοτήτων. Επίσης ο χειρισμός των ποσοδεικτών τους δημιουργεί προβλήματα (Cottrill et al.1996). Ο Tall(1986) αναφέρει ότι τα στοιχεία από έρευνες όσον αφορά τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, κατέστησαν εντελώς ακατάλληλη την προσέγγιση της είτε μέσω του τυπικού ορισμού είτε μέσω της γεωμετρικής εμπειρίας μιας τέμνουσας που τείνει σε μια εφαπτομένη (όταν αναφερόμαστε στην έννοια της παραγώγου).

Οι Cottrill et al. (1996), επισημαίνουν ότι ακόμη και η χρήση της τεχνολογίας δεν μπόρεσε να υπερνικήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές στην κατανόηση της έννοιας, όπως προκύπτει από αναφορές ερευνητών (Tall, 1992; Li & Tall, 1993; Monaghan, Sun & Tall,1994),που ασχολήθηκαν με το θέμα αυτό.

Λόγω της πολυπλοκότητας του τυπικού ορισμού σε πολλά προγράμματα σπουδών (όπως συμβαίνει και στη χώρα μας) η έννοια του ορίου εισάγεται μέσω παραδειγμάτων, δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε αριθμητικά ή γεωμετρικά πλαίσια. Συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι να μη δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατανόηση της έννοιας του ορίου αλλά στις διαδικασίες υπολογισμού του ορίου. Οι μαθητές διαμορφώνουν την άδηλη πεποίθηση ότι τα όρια αφορούν τις πράξεις και δεν χρειάζεται να κατακτήσουν την έννοια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε την έρευνα που αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σ' αυτήν την κατεύθυνση.

Σύμφωνα με τον Williams (2001) η έρευνα εστιάζει κυρίως σε τρεις τομείς.

Στον πρώτο τομέα ο στόχος της έρευνας είναι η σχέση που έχουν οι άτυπες αντιλήψεις που διατηρούν οι μαθητές για την έννοια του ορίου, με αποτέλεσμα να προκαλούν χαρακτηριστικές παρανοήσεις σ' αυτούς. Για τον σχηματισμό της έννοιας του ορίου χρησιμοποιούμε τη διάκριση των Tall & Vinner (1981) και Vinner (1983) ανάμεσα στην εικόνα έννοιας που είναι η συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια και στον τυπικό ορισμό της έννοιας όπως γίνεται κατανοητός και αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Σ' αυτόν τον τομέα αναφέρεται η έρευνα του Cornu (1981,1983) για τις «αυθόρμητες αντιλήψεις» των μαθητών, του Monaghan (1991) που αναφέρεται στη χρήση και τον ρόλο της γλώσσας και της Robert (1982) που μελέτησε τα διαφορετικά μοντέλα που διατηρούν οι σπουδαστές για το όριο ακολου-

θίας. Οι παραπάνω ερευνητές αναφέρονται σε άτυπα, καλά κρυμμένα νοητικά μοντέλα ή αναπαραστάσεις του ορίου που έχουν οι σπουδαστές και προσπαθούν να τα κατανοήσουν επειδή αυτά συσχετίζονται με τους τυπικά εκφρασμένους μαθηματικούς ορισμούς.

Ο δεύτερος τομέας που συνδέεται στενά με τον πρώτο εστιάζει στα εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και στην προσπάθεια να απαντηθεί το ερώτημα γιατί ο συντονισμός της εικόνας έννοιας και του ορισμού είναι τόσο δύσκολος. Σ' αυτή την προσπάθεια στην έρευνα συχνά χρησιμοποιείται η έννοια των γνωστικών εμποδίων όπως διατυπώθηκε από τον Brousseau (1983). Όσον αφορά τα εμπόδια που οφείλονται στην ίδια την φύση των μαθηματικών και προκύπτουν από την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου, περιγράφονται από τον Cornu (1991). Τα τελευταία εμπόδια ονομάστηκαν επιστημολογικά εμπόδια από τον Bachelar(1938) και αναλύονται στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών από τον Brousseau (1983). Η Sierpinska(1987) ερεύνησε τις άτυπες αντιλήψεις των μαθητών για το όριο και το άπειρο και έχουμε μια πρώτη οργανωμένη παρουσίαση των βασικών επιστημολογικών εμποδίων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου. Η Szydlik (2000) ερεύνησε τις πεποιθήσεις των σπουδαστών για τα μαθηματικά και την επίδραση τους στη κατανόηση των ορίων. Οι Davis & Vinner (1986) μελέτησαν τις «φαινομενικά αναπόφευκτες παρανοήσεις» των σπουδαστών για το όριο και πρότειναν εξηγήσεις με βάση τα αποτελέσματα έρευνας και ο Williams (1991,2001) μελέτησε τα άτυπα μοντέλα που έχουν οι σπουδαστές για το όριο συνάρτησης και την επιμονή τους να τα διατηρούν.

Ο τρίτος τομέας έρευνας αναπτύχτηκε σύμφωνα με την Πιαζετιανή παράδοση και χαρακτηρίστηκε από την έρευνα των Dubinsky και των συναδέλφων του(1991; Cottrill et al.,1996) πάνω στην αναστοχαστική αφαίρεση. Οι ερευνητικές προσπάθειες στοχεύουν στην κατανόηση του ορίου σαν μια διαδικασία αλλά και σαν αντικείμενο που σχετίζεται με το αποτέλεσμα της άπειρης διαδικασίας.

Παραθέτουμε Ιστορικό Σημείωμα όπου αναφερόμαστε στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου. Η έννοια αυτή πέρασε πολλά στάδια και πολλές δυσκολίες από την εποχή που εμφανίζονται οι πρώτες ενδείξεις οριακών διαδικασιών μέχρι να διαμορφωθεί στη σύγχρονή της μορφή. Η επισήμανση των εμποδίων που προέκυψαν κατά την εξέλιξη της έννοιας και ο τρόπος αντιμετώπισης τους μπορεί να βοηθήσει στον προβληματισμό της μαθηματικής εκπαιδευτικής κοινότητας για το πώς πρέπει να διδάσκεται η έννοια του ορίου συνάρτησης ως έννοια θεμέλιο στο σημερινό σχολείο.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο σύγχρονος ε-δ ορισμός του ορίου συνάρτησης είναι αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης πορείας που διήρκεσε πάνω από δύο χιλιετίες.

Σύμφωνα με τον Cornu(1991) η έννοια του ορίου αναπτύχτηκε στη προσπάθεια να αντιμετωπιστούν τρεις κυρίως τύποι προβλημάτων.

- ✓ Γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμοί εμβαδών και μηκών με τη μέθοδο της «εξάντλησης»),
- ✓ υπολογισμοί απείρων αθροισμάτων (σύγκλιση σειρών),
- ✓ προβλήματα που σχετίζονται με τη διαφόριση (προερχομένων από τη σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων που τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν) .

Θα αναφερθούμε σύντομα στην εξέλιξη της έννοιας του ορίου από την εποχή που ανιχνεύονται οι πρώτες ενδείξεις οριακών διαδικασιών, μέσα από την προσπάθεια επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων. Η έννοια μιας οριακής διαδικασίας έχει σαν βασικό της χαρακτηριστικό μιας « επ' άπειρον προσέγγισης».

Οι άπειρες διαδικασίες πρωτοεμφανίζονται στην Ελληνική αρχαιότητα περί το 464 π.Χ. με τη διατύπωση από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη των παραδόξων του.

Οι άπειρες διαδικασίες συνδέονται με την ανακάλυψη των αρρήτων αριθμών και των ασύμμετρων μεγεθών από τους Πυθαγόρειους. Ασυμμετρία σημαίνει αδυναμία περάτωσης αλγορίθμου εύρεσης κοινού μέτρου δύο δεδομένων συγκρινόμενων μεγεθών. Η ανακάλυψη αυτή οδήγησε στην κατάρρευση της σχολής των Πυθαγορείων οι οποίοι πίστευαν ότι ο κόσμος δομείται κατά τρόπο ρητό (δηλαδή ότι όλες οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος είναι σχέσεις λόγων θετικών ακεραίων αριθμών), ήταν όμως ένα σημαντικό γεγονός που οδήγησε στα σημερινά Μαθηματικά, που θεμελιώνονται με τη βοήθεια της έννοιας του συνεχούς, δηλαδή της πραγματικής ευθείας και την έννοια του πραγματικού αριθμού.

Στην προσπάθεια τους να παρακάμψουν την έννοια του απείρου οι αρχαίοι Έλληνες ανακάλυψαν και εφάρμοσαν μεθόδους εξαιρετικής ευφυΐας, όπως η μέθοδος της «εξάντλησης» του Ευδόξου.

Η μέθοδος της εξάντλησης διατύπώνεται (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο Χ, Πρόταση Ι) ως εξής : *«δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από του μεγαλύτερου αφαιρεθεί μεγαλύτερο του ημίσεως και από του υπολοίπου μεγαλύτερο του ημίσεως και τούτο γίνηται πάντοτε, θα υποληφθεί μέγεθος τι, το οποίον θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.»*.

Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα η αρχή της εξάντλησης μπορεί να αποδοθεί ως εξής[1]: Αν θεωρήσουμε α, ε δύο ομοειδή μεγέθη και το α είναι μεγαλύτερο από το ε, αφαιρούμε από το α μέγεθος $α_1$ μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο μέγεθος αφαιρούμε ένα μέγεθος $α_2$ μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται. Ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο η ακολουθία $(s_n)_{n\epsilon N}$ με $s_1=α_1$, $s_2=α_1+α_2$, …, $s_n=α_1+α_2+…+α_n$. Στο νιοστό βήμα το υπόλοιπο που θα έχει απομείνει είναι το μέγεθος α- s_n. Από την αρχή της εξάντλησης θα υπάρχει για το δοσμένο ε κάποιο n_o ώστε α- s_n να γίνεται μικρότερο από το ε για κάθε $n\geq n_o$. Αυτό ισοδυναμεί προφανώς με τον ισχυρισμό

$$\lim_n s_n=α.$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί δεν θεωρούσαν ότι αυτή η διαδικασία επαναλαμβανόταν για άπειρο αριθμό βημάτων, ώστε να εξαντληθεί το αρχικό μέγεθος. Αντίθετα θεωρούσαν ότι πάντοτε υπήρχε μια υπολειπομένη ποσότητα , η οποία γίνεται όσο μικρή θέλουμε (Boyer, 1949).

Η έννοια του ορίου δεν ήταν γνωστή στην αρχαία Ελλάδα. Όμως ενδείξεις οριακών διαδικασιών μπορεί κανείς να βρει στο έργο του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ). Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης για να υπολογίσει εμβαδά επιπέδων χωρίων που περιέχονται ανάμεσα σε διάφορες καμπύλες, όπως το εμβαδόν του κύκλου ή χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής $ψ=x^2$ και κάποιων ευθειών. Στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου, δεν μιλάει για άθροισμα άπειρης γεωμετρικής προόδου αλλά αν και δεν γνωρίζει την έκφραση «άθροισμα άπειρων όρων» κατέχει την έννοια. Πράγματι , η σύγχρονη έννοια «άθροισμα άπειρων όρων» δεν σημαίνει τίποτε άλλο από το όριο ενός πεπερασμένου αθροίσματος, δηλαδή ένα μέγεθος το οποίο διαφέρει από ένα πεπερασμένο μερικό άθροισμα λιγότερο από έναν οποιοδήποτε δεδομένο θετικό αριθμό $ε$[2].

Μέχρι το 16ο αιώνα μ.Χ. εφαρμοζόταν οι μέθοδοι των αρχαίων Ελλήνων σχετικά με τις οριακές διαδικασίες χωρίς ουσιαστικές διαφοροποιήσεις. Η πρώτη προσπάθεια να αποσαφηνιστεί κάπως η έννοια του ορίου έγινε από τον Ιταλό Luca Valerio και τον Φλαμανδό Simm Stevin, οι οποίοι αποφεύγουν την χρήση της εξάντλησης και της διπλής αντίφασης.

Τον 17ο αιώνα σημειώθηκε σημαντική πρόοδος στο Απειροστικό λογισμό . Αυτή η εξέλιξη προέκυψε από την ανάγκη να αντιμετωπιστούν προβλήματα από την Μηχα-

[1] Γιαννακούλιας Ε.(2005) Σημειώσεις για τη διδακτική του Απειροστικού Λογισμού
[2] Van Der Waerden. Η Αφύπνιση της Επιστήμης (Μετάφραση Χριστιανίδης Ι.)

νική και την Αστρονομία όπως εύρεση της εφαπτομένης μιας καμπύλης, υπολογισμός μέγιστων και ελάχιστων τιμών, που απαιτούσαν μεθόδους διαφορετικές από αυτές που επικρατούσαν μέχρι τότε.

Όσον αφορά την έννοια του ορίου, το 1656 ο Walllis εξέδωσε το έργο «Arithmetical Infinitorum». στο οποίο γίνεται χρήση κάποιας «έννοιας ορίου». Το έργο αυτό έχει γεωμετρικό χαρακτήρα.

Το 1659 ο Ιταλός Piero Mengoli με το έργο του «Geometrica Spesiora» βελτίωσε την μέθοδο του Luca Valerio για υπολογισμό εμβαδών κάτω από συγκεκριμένες καμπύλες. Η εμφάνιση συγγράμματος του Cavallieri το 1635 στο οποίο κεντρική έννοια είναι το «αδιαίρετο», παρακίνησε σημαντικό αριθμό μαθηματικών , να μελετήσουν προβλήματα σχετικά με τα **απειροστά**. Απειροστό θεωρείται μια ποσότητα (γεωμετρική ή αριθμητική) που θεωρείται απειροελάχιστα μικρή και μπορεί κάποια στιγμή να παραλειφθεί ως αμελητέα. Ο P. Fermat (1634) χρησιμοποιεί την ίδια έννοια, ενώ το 1638 διατυπώνει μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων . Η βασική του ιδέα είναι η εισαγωγή μιας ελάχιστης αύξησης μιας μεταβλητής και μετά από πράξεις θεωρεί ότι αυτή η αύξησης «εξαφανίζεται». Κάτι παρόμοιο κάνει σε γεωμετρικό πλαίσιο και ο Barrow (1650).

Στις ερευνητικές προσπάθειες της εποχής εκείνης διακρίνονται δύο τάσεις: μία γεωμετρική (Cavallieri , Toricelli, Barrow) και μία αλγεβρική (Fermat , Descartes, Wallis). Η επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως είναι υπολογισμοί εμβαδών και όγκων, προσδιορισμός εφαπτομένης δοθείσας καμπύλης είναι εφικτή. Όμως λείπει το θεωρητικό υπόβαθρο. Το 1670 ο Barrow δίνει για πρώτη φορά τη γεωμετρική απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, χωρίς όμως να αντιληφθεί ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης και αυτό του εμβαδού συνδέονται μέσω μιας αντίστροφης διαδικασίας.

Τον 17^{ο} αιώνα και συγκεκριμένα τη δεκαετία 1660 – 1670 οι Newton (1642-1727) και Leibnitz (1646-1716), εργαζόμενοι ανεξάρτητα «ανακάλυψαν» τον Απειροστικό Λογισμό. Όταν λέμε «ανακάλυψαν», εννοούμε τρία πράγματα :[3]

i. Ενέταξαν όλες τις μέχρι τότε υπάρχουσες μεθόδους σε δύο γενικές έννοιες την «παράγωγο» και το «ολοκλήρωμα».

[3] Γιαννακούλιας Ε.(2005) Σημειώσεις για τη διδακτική του Απειροστικού Λογισμού

ii. Επινόησαν συμβολισμούς που κατέστησαν εύκολη τη χρήση των εννοιών αυτών, και

iii. «ανακάλυψαν» και απέδειξαν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού που φανερώνει ότι οι διαδικασίες της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης είναι ακριβώς αντίστροφες.

Κεντρικές έννοιες στις εργασίες τους είναι η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Ο Leibnitz θεωρούσε την παράγωγο ως ένα «πηλίκο απειροστών διαφορών» και το ολοκλήρωμα σαν «ένα άθροισμα απειροστών». Ο Newton θεωρούσε την παράγωγο ως ένα ρυθμό μεταβολής («fluxion» - «ροή») και το ολοκλήρωμα («fluent»-ρέον) ήταν κατά κάποιον τρόπο μια αντίστροφη έννοια. Δηλαδή η αιτιολόγηση των κανόνων διαφόρισης στηριζόταν είτε στα απειροστά (Leibnitz) είτε στις «ροές» (Newton).

Η έννοια του ορίου συνάρτησης αρχίζει να διαμορφώνεται μετά τη διαμόρφωση της έννοιας της συνάρτησης. Ο όρος «συνάρτηση» (function), εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο « Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων» (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus). Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες. Το 1718 ο Bernoulli έδωσε ένα γενικό ορισμό για την έννοιας της συνάρτησης ενώ ο Euler το 1748, με τον ορισμό που έδωσε στο έργο του «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση», ταυτίζει την έννοια της συνάρτησης με αυτήν της αναλυτικής έκφρασης. Ο Euler ήταν ο πρώτος που έθεσε σε εξέχουσα θέση την έννοια της συνάρτησης και μελέτησε συστηματικά και κατηγοριοποίησε όλες τις στοιχειώδεις συναρτήσεις μαζί με τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα τους (Boyer,1949). Προς το τέλος του 18^{ου} αιώνα οι D' Alembert, Bernoulli και Fourier οδηγήθηκαν στη ανάγκη να διευρύνουν την έννοια. Τελικά ο Fourier οδηγείται στην έννοια της συνάρτησης , όπως είναι περίπου γνωστή σήμερα. Οπότε πριν από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα δεν μιλάμε για όριο συνάρτησης.

Η έννοια του ορίου που χρησιμοποιείται όλο αυτό το διάστημα εστιάζει στην έννοια του απειροστού. Κατά τον Newton, αν θεωρήσουμε τον λόγο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, τότε καθώς το h τείνει στο μηδέν ο λόγος αυτός γίνεται «ultimate» λόγος, δηλαδή ένα όριο που η διαφορά του από τις τιμές του λόγου μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε. Κατά τον Newton, «ultimate» λόγοι είναι τα

όρια προς τα οποία συγκλίνουν πάντα λόγοι ποσοτήτων που ελαττώνονται απεριόριστα και τα οποία (όρια) πλησιάζουν όσο θέλουμε, αλλά δεν τα ξεπερνούν, ούτε ποτέ τα φτάνουν έως ότου οι ποσότητες αυτές εξανεμισθούν. Στον ορισμό αυτό δεν γίνεται χρήση της αλγεβρικής γλώσσας, όπως π.χ. των ανισοτήτων. Ένας τέτοιος ορισμός δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί με σκοπό να αποδειχθούν θεωρήματα που αφορούν όρια και δεν ικανοποιούσε τους Μαθηματικούς και τους Φιλόσοφους της εποχής εκείνης.

Στις αρχές το 19^{ου} αιώνα οι είχαν δημιουργηθεί οι προϋποθέσεις για την αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού. Αυτές ήταν :

i. Η αυστηρότητα στη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών αποτελούσε γενική απαίτηση
ii. Η ανάπτυξη της άλγεβρας και των ανισοτήτων.

Οι βασικές έννοιες της ανάλυσης όπως του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος ήταν ήδη γνωστές

Ο Augustin Louis Cauchy (1789-1867) συνέβαλε αποφασιστικά στη διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας συνάρτησης. Ο Cauchy χρησιμοποιεί ένα περιφραστικό ορισμό του ορίου που δεν φαίνεται να μοιάζει με τον σύγχρονο ε-δ ορισμό. Αυτός ο ορισμός είναι ο εξής : **« Όταν οι διαδοχικές τιμές της ίδιας μεταβλητής πλησιάζουν απεριόριστα μια σταθερή τιμή , έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή όσο λίγο θέλουμε, τότε η σταθερή αυτή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων».** Έτσι αν και οι πρώτες ε-δ αποδείξεις εμφανίζονται στα έργα του Cauchy δεν αναγνωρίζονται πάντα σαν τέτοιες .

Ο Cauchy έδωσε ένα καθαρά φραστικό ορισμό και για την παράγωγο μιας συνάρτησης, σαν το όριο του λόγου μεταβολής $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, όταν το h τείνει στο μηδέν.

Ο Cauchy χρησιμοποίησε την γλώσσα των ανισοτήτων για τον ορισμό της παραγώγου, ως εξής : «Έστω δ, ε δυο πολύ μικροί αριθμοί . Ο πρώτος επιλέγεται ώστε οι απόλυτες τιμές του h να είναι μικρότερες από δ και για κάθε τιμή του x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ο λόγος $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ θα είναι πάντα μεγαλύτερος από $f'(x)-\varepsilon$ και μικρότερος από $f'(x)+\varepsilon$».

Παρά το ότι ο Cauchy έδωσε στην έννοια του ορίου αυστηρή μαθηματική μορφή υπήρχαν αρκετές εκφράσεις στους περιφραστικούς ορισμούς του, που

περιείχαν κάποιες ασάφειες. Για παράδειγμα οι φράσεις: «πλησιάζει απεριόριστα», «τόσο μικρό όσο θέλουμε» και άλλες. Επίσης υπήρχε η ασάφεια της έννοιας του άπειρου αθροίσματος .στην οποία στηρίχτηκαν οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Επίσης ο Cauchy παρέλειψε να δώσει σαφή ορισμό της έννοιας του αριθμού, που είναι απαραίτητη για τον ορισμό του ορίου, πάνω στον οποίο στηρίζονται και οι περισσότερες βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού.

Αν και ο Cauchy έδωσε στις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού την παρούσα γενική τους μορφή, στηριγμένη στην έννοια του ορίου, ο **Weierstrass (1815 -1897)** ήταν εκείνος ο οποίος διατύπωσε τον αυστηρό τυπικό ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης και κατόπιν ο μαθητής του Heine τον τελειοποίησε ώστε τελικά να εμφανιστεί ο ορισμός αυτός με την σύγχρονη «στατική» μορφή του.

1.3 ΤΥΠΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Ο τυπικός ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης όπως διατυπώθηκε από τον Weierstrass στα μέσα του 19^{ου} αιώνα και ο οποίος είναι κατανοητός και αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα είναι:

«Λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ για $x \to α$ και συμβολίζουμε $\lim f(x) = \ell$ αν και μόνον αν: $\forall\, ε>0\ \exists\ δ(ε)$ ώστε αν $x \in A$ με $0<|x-α|<δ$ τότε $|f(x)-\ell|<ε$»

Μέσω του παραπάνω ορισμού έγινε προσπάθεια να αποσυνδεθεί η έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να ορισθεί αυτή με καθαρά αριθμητικούς όρους έτσι ώστε να γίνει αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. Μ' αυτόν τον ορισμό η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας αλλά έγινε έτσι δυνατόν να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους.

Αν και ο τυπικός ορισμός δεν έρχεται σε σύγκρουση με τη διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου οι μαθητές –σπουδαστές όταν έρχονται σε επαφή μαζί του, τον αντιμετωπίζουν με αίσθημα δέους, τους τρομάζει ή ακόμη τους προκαλεί αποστροφή. Ο φαινομενικά «στατικός» χαρακτήρας του και ο απόλυτος φορμαλισμός που υπάρχει στη διατύπωση του δείχνει να μην έχει σχέση με τον εμπειρικό τους κόσμο. Ο Khinchin (1968) αναφέρει χαρακτηριστικά : «Ο φαινομενικά στατικός χαρακτήρας της έννοιας του ορίου, όπως αυτός εμφανίζεται στα σύγχρονα μαθηματικά, συχνά δίνει

λαβή στην ένσταση ότι παγώνοντας την κίνηση στην ιδέα του ορίου, αυτό έχει σαν συνέπεια να δημιουργεί μια τάση να αποχωριστεί η μαθηματική έννοια του ορίου από την καθημερινή πραγματικότητα της οποίας την αντανάκλαση και αφαίρεση υποτίθεται ότι αντιπροσωπεύει. Αυτή η κριτική είναι ουσιαστικά λανθασμένη, επειδή ο σύγχρονος ορισμός σε κανένα σημείο δεν έρχεται σε αντίθεση με τα προηγούμενα, αλλά μόνο τα τελειοποιεί, και επομένως δεν μπορεί να έχει διαφορετικό περιεχόμενο. Σημαντικότερο για μας όμως, είναι ότι από παιδαγωγική άποψη, η αντίρρηση που προβάλλεται σε αυτήν την κριτική αξίζει κάθε προσοχή.»

Η Artique (1998) παρατηρεί ότι μεταξύ μιας διαισθητικής σύλληψης των ορίων και μιας τυπικής σύλληψης υπάρχει ένα σημαντικό ποιοτικό χάσμα, βεβαιωμένο από την ιστορική εξέλιξη.

Η Mamona-Downs (2001) μελέτησε την κατανόηση του ορίου ακολουθίας. Αναφερόμενη στους τυπικούς ορισμούς λέει ότι «αν και μπορούν να έχουν πτυχές που επιβάλλονται στη διαίσθηση, είναι επίσης και αρκετά 'δημοκρατικοί' με το μινιμαλιστικό στυλ των εκφράσεων τους, αφού κατά κάποιο τρόπο μεγιστοποιούν τους τρόπους με τους οποίους το περιεχόμενο τους μπορεί να γίνει κατανοητό .Το πρόβλημα για ένα σπουδαστή είναι διπλό. Ένα είναι το μινιμαλιστικό ύφος των εκφράσεων, που προσφέρει η γνωστική ευρύτητα αλλά συγχρόνως απαιτεί ένα αρκετά ώριμο αναστοχασμό για τη δομή. Το δεύτερο είναι το περιεχόμενο του ορισμού, που μπορεί να έχει μεταγνωστικό χαρακτήρα. Και τα δύο προβλήματα είναι εμφανή στον ορισμό του ορίου».

Η παραπάνω ερευνήτρια υποστηρίζει ότι μπορεί να διδαχθεί ο Απειροστικός Λογισμός στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο άτυπο επίπεδο. Ωστόσο, αν θέλουμε να γίνουν οι μαθητές πιο ευέλικτοι στην επίλυση προβλημάτων, πρέπει να έχουν μια σαφή και συνεπή ιδέα για τις εμπλεκόμενες έννοιες. Είναι πιθανό για πρώτη φορά στη μαθηματική τους εμπειρία, να υπάρχει ανάγκη να εργαστούν με τυπικούς ορισμούς για να καθαρίσουν την ομίχλη που δημιουργείται από τις αβεβαιότητες και τις διαισθητικές πεποιθήσεις. Οι ορισμοί όμως δεν είναι απαραίτητα σχεδιασμένοι για να αντικαταστήσουν την αρχική διαίσθηση. Μάλλον ενισχύουν την διαίσθηση. Επομένως οι ορισμοί των ορίων πρέπει να γίνουν κατανοητοί. Σύμφωνα με τη Mamona-Downs (2001), όταν ο μαθητής βλέπει τις πρώτες φορές τον ορισμό ενός ορίου, προσπαθεί συγχρόνως να κατανοήσει τον συμβολισμό και πως αυτό το νόημα ταιριάζει με οποιεσδήποτε προϋπάρχουσες άτυπες εικόνες που μπορεί να έχει. Ο συμβολισμός είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα φανεί παράξενος και αποθαρρυντικός. Αν και ελάχιστοι μαθητές φαίνονται να διαθέτουν μια φυσική δεξιότητα να μπορούν να αφομοιώνουν τέ-

τοιες διατυπώσεις όπως δίνονται στον ορισμό σε αξιοσημείωτα μικρό χρόνο, οι περισσότεροι μαθητές χρειάζονται σημαντικό χρόνο για να νοιώσουν άνετα με τον ορισμό ενώ αρκετοί τρομοκρατούνται και δεν τον κατακτούν ποτέ. Αν τελικά ο ορισμός κατανοηθεί, γίνεται πρόθυμα αποδεκτός ως ένας κατάλληλος τρόπος για την περιγραφή μιας οριακής διαδικασίας. Μ' αυτό δεν εννοούμε αναφέρει η Mamona-Downs (2001) ότι αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να κατασκευάσουν τον ορισμό μόνοι τους.

Ο Cornu(1991) αναφέρει ότι μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες στη διδασκαλία και τη μάθηση της έννοιας του ορίου βρίσκεται όχι μόνο στην αφθονία και την πολυπλοκότητα της, αλλά και στο βαθμό στον οποίο οι γνωστικές πτυχές δεν μπορούν να παραχθούν καθαρά από τον μαθηματικό ορισμό . Μια πλευρά αποτελεί η ιδέα της προσέγγισης που συνήθως συναντάται για πρώτη φορά μέσω μιας δυναμικής έννοιας του ορίου, και ο τρόπος με τον οποίο η έννοια εφαρμόζεται για να λύσει πραγματικά προβλήματα που δεν βασίζονται στον ορισμό αλλά σε πολλές διαφορετικές ιδιότητες της διαισθητικής έννοιας. Ξεκινώντας οι μαθητές από μια τέτοια αντίληψη συχνά πιστεύουν ότι «κατανοούν» τον ορισμό του ορίου χωρίς να κατανοούν όλες τις συνέπιες της τυπικής έννοιας στην πραγματικότητα. Οι μαθητές συχνά μπορούν να ολοκληρώσουν πολλές από τις ασκήσεις που τους ζητείται να λύσουν, χωρίς να είναι υποχρεωμένοι να κατανοήσουν καθόλου το φορμαλισμό του ορισμού. Εν τω μεταξύ, οι ποσοδείκτες «για κάθε», «υπάρχει τουλάχιστον ένα» καθώς και ο συνδυασμός τους ,που υπάρχει στον ε-δ ορισμό, έχουν τις δικές τους σημασίες στην καθημερινή γλώσσα που είναι διαφορετικές από εκείνες που συναντώνται στον ορισμό του ορίου. Από μια τέτοια αρχή ανακύπτουν εννοιολογικά εμπόδια που μπορούν να προκαλέσουν σοβαρές δυσκολίες.

Η Sfard (1987) επισημαίνει ότι στη βιβλιογραφία υπάρχει γενική συμφωνία στο ότι η διαδικασία ή οι λειτουργικές συλλήψεις πρέπει να προηγηθούν της ανάπτυξης δομικών εννοιών ή εννοιών αντικειμένων. Εντούτοις, όσον αφορά τη σχέση των σπουδαστών με μια σύλληψη διαδικασίας του ορίου, η οποία αναφέρεται μερικές φορές ως δυναμική σύλληψη, και την τυπική κατανόηση της έννοιας του ορίου υπάρχουν δύο διαφορετικές απόψεις όπως επισημαίνουν οι Cottrill et al.(1996).

Μια άποψη υποστηρίζει ότι μια δυναμική σύλληψη είναι εύκολο και φυσικό να αναπτυχθεί στους μαθητές (Tall,1981). Σύμφωνα με αυτήν την άποψη, η κύρια δυσκολία είναι να περάσουν από μια δυναμική σύλληψη σε μια τυπική κατανόηση των ορίων (Williams,1991). Οι Tall & Vinner (1981) και Williams (1991), θεωρούν ότι η δυναμική σύλληψη των σπουδαστών τους εμποδίζει την κίνηση τους προς την ανά-

πτυξη μιας τυπικής σύλληψης. Συγκεκριμένα ο Williams (1991),σημειώνει ότι ενώ είναι δυνατόν να αποφευχθεί η δημιουργία παρανοήσεων των σπουδαστών, είναι λιγότερο εύκολο να βοηθηθούν οι σπουδαστές να κινηθούν από μια δυναμική προς μια στατική αντίληψη του ορίου.

Μία άλλη υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη μιας ισχυρής δυναμικής σύλληψης είναι απαραίτητη για μια τυπική κατανόηση. Η δυσκολία βρίσκεται στην κατασκευή της δυναμικής αντίληψης και αυτή η δυσκολία είναι το εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας (Davis & Vinner,1986). Η συνηθέστερα αναφερόμενη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές στην κατασκευή μιας δυναμικής έννοιας του ορίου είναι η αντίληψη τους που έχουν για το όριο ως κάτι στο οποίο δεν φτάνουμε ποτέ πραγματικά. Η Mamona –Downs(1990) προτείνει ότι η κατανόηση της έννοιας του συνεχούς από τους σπουδαστές θα μπορούσε να προσφέρει κάποια εξήγηση γι' αυτή την παρανόηση.

Οι Cottrill et al.(1996) υποστηρίζουν ότι « η συνήθης άτυπη, δυναμική αντίληψη των τιμών μιας συνάρτησης που πλησιάζουν μια οριακή τιμή καθώς οι τιμές στο πεδίο ορισμού πλησιάζουν μια σταθερή ποσότητα είναι πιο περίπλοκη από όσο ίσως να έχει θεωρηθεί. Είναι όχι μόνο μια μοναδική διαδικασία, αλλά ένα συντονισμένο ζευγάρι διαδικασιών το οποίο είναι, στην πραγματικότητα, ένα σχήμα. Οι παρατηρήσεις μας, μας οδηγούν να συμφωνήσουμε με τη θέση ότι η κατασκευή αυτού του σχήματος πρέπει να είναι η πρώτη προτεραιότητα για τους περισσότερους σπουδαστές, ότι οι περισσότεροι σπουδαστές δεν έχουν πετύχει στην παραγωγή μιας τέτοιας κατασκευής, και ότι αυτό βοηθά να εξηγήσει τις δυσκολίες τους με την έννοια ορίου». Οι παραπάνω ερευνητές προτείνουν μια νέα παραλλαγή στις παραπάνω απόψεις μεταξύ των δυναμικών ή διαδικαστικών συλλήψεων των ορίων και των στατικών ή τυπικών συλλήψεων. Συγκεκριμένα αναφέρουν «Η ανάλυσή μας υποδηλώνει ότι αυτό που έχει ονομαστεί δυναμική σύλληψη του ορίου είναι πολύ περισσότερο περίπλοκο από μια διαδικασία που συλλαμβάνεται από την εσωτερίκευση μιας δράσης. Σε αντιδιαστολή με άλλους ερευνητές που θεωρούν ότι μία δυναμική σύλληψη μπορεί να εμποδίσει την πρόοδο προς την ανάπτυξη μιας τυπικής κατανόησης της έννοιας του ορίου, πιστεύουμε ότι η δυσκολία στη μετάβαση σε μια πιο τυπική σύλληψη του ορίου είναι τουλάχιστον εν μέρει αποτέλεσμα της ανεπαρκούς ανάπτυξης μίας ισχυρής δυναμικής σύλληψης».

1.4 ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

Σύμφωνα με τον Vinner (1991) όταν πρέπει να αποφασίσουμε για την παιδαγωγική της διδασκαλίας των μαθηματικών θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όχι μόνο το ζήτημα του « *πώς οι μαθητές αναμένονται να κατακτήσουν τις μαθηματικές έννοιες,* αλλά επίσης, και κυρίως , *πως οι μαθητές κατακτούν πραγματικά αυτές τις έννοιες».* Κατά τον σχεδιασμό μιας διδασκαλίας που να οδηγεί στα επιθυμητά αποτελέσματα ο δάσκαλος πρέπει να έχει υπόψη του ότι τα τεχνικά πλαίσια επιβάλλουν στους μαθητές κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που είναι τυπικές στα πλαίσια της καθημερινής ζωής.

Οι Tall & Vinner (1981) σημειώνουν ότι ο ανθρώπινος νους δεν είναι μια αμιγώς λογική οντότητα. Ο σύνθετος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί συχνά διαφέρει από τη λογική των μαθηματικών. Δεν είναι πάντα η καθαρή λογική εκείνη που μας παρέχει την ενόραση, ούτε είναι η τύχη εκείνη που μας αναγκάζει να κάνουμε λάθη. Για να αντιληφθούμε πως ένας μαθητής οδηγείται στην κατάκτηση μιας έννοιας ή σε παρανόηση αυτής, πρέπει να διατυπώσουμε μια διάκριση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών όπως ορίζονται τυπικά και των γνωστικών διεργασιών μέσω των οποίων συλλαμβάνονται.

Οι παραπάνω ερευνητές συνεχίζουν, ότι πολλές έννοιες που εύκολα χρησιμοποιούμε δεν είναι τυπικά ορισμένες . Τις μαθαίνουμε μέσω της εμπειρίας και της χρήσης τους σε κατάλληλα πλαίσια. Αργότερα οι έννοιες αυτές μπορούν να τελειοποιηθούν ως προς το νόημα τους και να ερμηνευτούν με αυξανόμενη σημασία στη λεπτομέρεια με ή δίχως την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Συνήθως σ' αυτή τη διαδικασία αποδίδεται στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα το οποίο της δίνει τη δυνατότητα να μεταφερθεί μέσω της επικοινωνίας και συμβάλλει στο νοητικό της χειρισμό. Αλλά η συνολική γνωστική δομή που χρωματίζει το νόημα της έννοιας είναι πολύ ανώτερη από την απλή ανάκληση ενός απλού συμβόλου. Είναι κάτι περισσότερο από οποιαδήποτε νοητική αναπαράσταση, είτε εικονική είτε συμβολική ή κάποια άλλη. Κατά τις νοητικές διαδικασίες της ανάκλησης και του χειρισμού μιας έννοιας, πολλές διεργασίες που συσχετίζονται ενεργοποιούνται, τόσο ενσυνείδητα όσο και ασυνείδητα επηρεάζοντας το νόημα και τον τρόπο χρήσης.

Για να περιγράψουν τη συνολική γνωστική δομή που συσχετίζεται με την έννοια οι Tall & Vinner (1981) χρησιμοποίησαν στην έρευνα τους τον όρο, **εικόνα έννοιας (concept image).** Αυτή δομείται με την πάροδο του χρόνου μέσω εμπειριών κάθε είδους, καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει. Από αυτά που έχουμε

ως τώρα αναφέρει είναι σαφές ότι είναι δυνατό να μιλήσουμε για την εικόνα έννοιας μόνο και πάντα σε σχέση με ένα συγκεκριμένο άτομο. Επιπροσθέτως το ίδιο άτομο μπορεί να αντιδράσει διαφορετικά σε ένα συγκεκριμένο όρο(όνομα της έννοιας) σε διαφορετικές περιστάσεις.

Κατά τους Tall & Vinner(1981) ο όρος **«προκαλούμενη εικόνα έννοιας» (evoked concept image)** εισάγεται για να περιγράψει το μέρος της μνήμης το οποίο προκαλείται σε ένα δεδομένο πλαίσιο. Σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μπορεί να προκληθούν φαινομενικά συγκρουόμενες εικόνες. Μόνο όταν προκαλούνται συγκρουόμενες πλευρές ταυτόχρονα μπορεί να υπάρχει κάποια σύγκρουση ή σύγχυση. Τα παιδιά που κάνουν μαθηματικά χρησιμοποιούν συχνά διαφορετικές διαδικασίες ανάλογα με το πλαίσιο, διαπράττοντας διαφορετικά σφάλματα ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουν.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές ο ορισμός μιας έννοιας (αν η έννοια διαθέτει ένα ορισμό) αποτελεί ένα αρκετά διαφορετικό θέμα . Θεωρούν ότι ο **ορισμός της έννοιας (concept definition)** είναι ένα σχήμα λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει εκείνη την έννοια. Είναι δυνατόν να τον μάθει κάποιος μηχανικά ή να του αποδώσει βαθύτερο νόημα ή να τον συσχετίσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια στο σύνολο της. Μπορεί επίσης να είναι μια προσωπική του εξήγηση για την δική του (προκαλούμενη) εικόνα της έννοιας. Ο μαθητής μπορεί να μεταβάλλει χρονικά τον ορισμό που του δίνεται ή κατασκευάζει μόνος του. Μ' αυτόν τον τρόπο ένας **προσωπικός ορισμός** της έννοιας μπορεί να διαφέρει από τον **τυπικό ορισμό** της ο οποίος είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Για κάθε μαθητή ένας ορισμός της έννοιας παράγει τη δική του εικόνα έννοιας ο οποίος θα μπορούσε να ονομαστεί «**εικόνα του ορισμού της έννοιας».** Αυτό φυσικά είναι τμήμα της εικόνας έννοιας. Σε κάποιους μαθητές μπορεί να είναι ουσιαστικά ανύπαρκτο. Σε άλλους μπορεί ή όχι να συσχετίζεται λογικά με άλλα τμήματα της εικόνας έννοιας.

Οι Tall & Vinner(1981) θεωρούν ότι σε λεπτές και περίπλοκες έννοιες όπως είναι το όριο, είναι δυνατόν να ενεργοποιηθούν τμήματα της σχετικής με αυτό εικόνας έννοιας τα οποία είναι πιθανό να συγκρούονται μεταξύ τους. Έτσι σε διαφορετικές στιγμές μπορούν να προκληθούν συγκρουόμενες εικόνες έννοιας σχετικές με την έννοια, χωρίς όμως το άτομο να έχει οποιαδήποτε πραγματική αίσθηση σύγκρουσης ή σύγχυσης. Οι παραπάνω ερευνητές ονόμασαν ένα τμήμα της εικόνας έννοιας ή του ορισμού της έννοιας που μπορεί να συγκρούεται με ένα άλλο τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας ως **δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης.** Τέτοιοι

παράγοντες δεν χρειάζεται ποτέ να προκληθούν σε περιστάσεις που προκαλούν πραγματική γνωστική σύγκρουση. Αλλά αν αυτοί οι παράγοντες προκληθούν ταυτόχρονα, θα ονομαστούν **παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης.** Σε κάποιες περιστάσεις οι παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης μπορούν να προκληθούν υποσυνείδητα και η σύγκρουση να εμφανίζεται μόνο από μικρή αίσθηση ανησυχίας. Σε περίπτωση όμως αποτυχίας (π.χ στη λύση προβλήματος) το υποκείμενο θα συνειδητοποιήσει τη σύγκρουση. Ο πλέον σοβαρός παράγοντας δυνητικής σύγκρουσης είναι όταν η εικόνα έννοιας έρχεται σε αντίθεση όχι με ένα τμήμα της εικόνας έννοιας αλλά με τον ορισμό της έννοιας. Τέτοιοι παράγοντες μπορούν να εμποδίσουν τη μάθηση μιας τυπικής θεωρίας εκτός και αν τροποποιηθεί η εικόνα έννοιας. Σπουδαστές που έχουν εικόνα έννοιας που περιέχει παράγοντα σύγκρουσης, πιθανά να παραμείνουν στη δική τους ερμηνεία και να θεωρήσουν την τυπική θεωρία μη λειτουργική ή περιττή.

Κατά τον σχηματισμό μιας έννοιας ο Vinner (1991) αναφέρεται στην επιθυμητή θεωρία και πρακτική ως ακολούθως: Μπορεί ένας μαθητής να μην διαθέτει εικόνα έννοιας για μια έννοια ή να μην διαθέτει ορισμό για αυτή την έννοια ή κανένα από τα δύο . Θεωρείται ότι δεν διαθέτει εικόνα έννοιας, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με ένα άνευ νοήματος τρόπο. Μπορεί επίσης να υπάρξει αλληλεπίδραση μεταξύ της εικόνας έννοιας και ορισμού μιας έννοιας αν και μπορούν να διαμορφωθούν ανεξάρτητα. Όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού και δεν υπάρχει εικόνα έννοιας αυτή είναι δυνατόν να αποκτηθεί βαθμιαία μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις .Εντούτοις αυτό δεν αντανακλά απαραίτητα όλες τις πτυχές του ορισμού της έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner (1991) πολλοί δάσκαλοι στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Όμως η κατάκτηση μιας έννοιας κατά τον Vinner (1991) σημαίνει το σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας για αυτήν. Η αποστήθιση του ορισμού μιας έννοιας δεν εγγυάται την κατανόηση της έννοιας. Το να κατανοήσουμε μια έννοια, σημαίνει να διαθέτουμε την εικόνα έννοιας. Η απομνημόνευση του ορισμού του ορίου και η κατανόηση της θεμελιώδους έννοιας είναι δυο διαφορετικά θέματα.

Ο Vinner (1991) ισχυρίζεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν χρησιμοποιεί τους τυπικούς ορισμούς κατά την εργασία πάνω σε γνωστικά ζητήματα. Συγκεκριμένα ισχυρίζεται ότι στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση η πλειοψηφία των μαθητών δεν αναπτύσσει συνήθειες σκέψης που είναι απαραίτητες στα

πλαίσια των μαθηματικών (τεχνικά πλαίσια). Οι μαθητές συνεχίζουν να χρησιμοποιούν τις συνήθειες που έχουν από τον τρόπο σκέψης στην καθημερινή ζωή.
Για την υποστήριξη του ισχυρισμού του παρουσιάζει κάποια πειραματικά δεδομένα από έρευνες που έγιναν σε σχολεία και πανεπιστήμια της Αγγλίας (στην έρευνα συμμετείχαν καλοί μαθητές). Οι έννοιες που εξετάστηκαν από τον παραπάνω ερευνητή είναι η έννοια της συνάρτησης η έννοια της εφαπτομένης και η έννοια του ορίου μιας ακολουθίας. Οι ερωτήσεις που ετέθησαν ήταν έμμεσες ώστε να έχουν τη δυνατότητα να εκθέτουν την εικόνα έννοιας των υποκειμένων. Τα ευρήματα δείχνουν ότι παρά την έμφαση που δόθηκε στον ορισμό των εννοιών στη διδασκαλία που προηγήθηκε, πολλοί μαθητές - σπουδαστές δεν τον χρησιμοποίησαν για να απαντήσουν σε ερωτήσεις που έπρεπε να είχαν χρησιμοποιηθεί οι τυπικοί ορισμοί.

Ο Vinner (1991) σημειώνει ότι «Ένας από τους στόχους της διδασκαλίας των μαθητών θα πρέπει να είναι η μεταβολή των συνηθειών της σκέψης από τον τρόπο της καθημερινής ζωής στον τεχνικό. Αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα σε μικρή χρονική περίοδο και δεν μπορεί να είναι επιτυχές με όλους. Η πεποίθηση μας είναι ότι οι μαθηματικές έννοιες, αν η φύση τους το επιτρέπει, θα πρέπει να ξεκινήσει με διάφορα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα με τη βοήθεια των οποίων θα διαμορφωθεί η εικόνα έννοιας», και συνεχίζει : «Αυτό δε σημαίνει ότι ο τυπικός ορισμός δεν πρέπει να παρουσιαστεί στο μαθητή. Εντούτοις ο δάσκαλος ή ο συγγραφέας μαθηματικών βιβλίων πρέπει να έχει επίγνωση της επίδρασης που μπορεί να έχει μια τέτοια παρουσίαση στη σκέψη του μαθητή. Αν οι μαθητές μας είναι υποψήφιοι για ανώτερα μαθηματικά, τότε χωρίς καμιά αμφιβολία, πρέπει να εκπαιδευτούν ώστε να χρησιμοποιούν τον ορισμό ως τελικό κριτήριο για τα διάφορα προβλήματα».

1.4.1 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Η γλώσσα είναι ένα πολύπλοκο συμβολικό σύστημα που πρωταρχικό σκοπό έχει να κάνει δυνατή την επικοινωνία ανάμεσα στους ανθρώπους. Επομένως η γλώσσα που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία την επηρεάζει σημαντικά. Για τον σχεδιασμό μιας διδασκαλίας με στόχο να αναπτύξουν οι μαθητές την επιθυμητή εικόνα έννοιας, πρέπει ο δάσκαλος (αυτός που τη σχεδιάζει),να γνωρίζει τις διαισθητικές τους ιδέες από την καθημερινή τους εμπειρία και τη γλώσσα με την οποία οι ιδέες αυτές εκφράζο-

νται. Οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν στην τάξη πολλές καθημερινές φράσεις με ειδική σημασία. Αυτό μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές.

Ο Monaghan(1991) ερεύνησε συστηματικά τα αποτελέσματα της γλώσσας που χρησιμοποιείται από τους δασκάλους, στην διδασκαλία της έννοιας του ορίου. Παρατήρησε ότι οι σπουδαστές μπορούν να κατασκευάζουν εικόνες διαδικασιών σύγκλισης που είναι σε διάσταση με τις έννοιες που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί.

Ο παραπάνω ερευνητής , ασχολήθηκε συγκεκριμένα με τις έμφυτες ασάφειες στις φράσεις : **« τείνει», « προσεγγίζει», «συγκλίνει»** και **« όριο».** σε αριθμητικά και γεωμετρικά περιβάλλοντα. Αυτές οι φράσεις χρησιμοποιούνται συνήθως στον Απειροστικό Λογισμό όπου οι μαθηματικές σημασίες τους είναι ισοδύναμες. Παρατηρεί ότι αυτό δεν συμβαίνει με τους σπουδαστές. Αν για ένα Μαθηματικό εκφράσεις όπως : η καμπύλη τείνει στο 0», ή « η καμπύλη προσεγγίζει το 0», ή «η καμπύλη συγκλίνει στο 0» ή «η καμπύλη έχει το 0 ως όριο», σημαίνουν το ίδιο πράγμα, οι μαθητές έδιναν διαφορετική ερμηνεία αναφερόμενοι στην ίδια καμπύλη.

Στο πρώτο ερωτηματολόγιο της έρευνας ο Monaghan(1991), ζήτησε από τους σπουδαστές να γράψουν τέσσερεις προτάσεις που κάθε μια να χρησιμοποιεί μία από τις φράσεις : « τείνει», « προσεγγίζει», «συγκλίνει» και « όριο». Το πλαίσιο θα μπορούσε να είναι μαθηματικό ή μη μαθηματικό.

Από τις απαντήσεις σπουδαστών προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα :

ΟΡΙΟ: Κάθε σπουδαστής χρησιμοποίησε το «όριο ταχύτητας» όταν του ζητήθηκε να γράψει πρόταση που να περιέχει τη λέξη «όριο». Ένα όριο ταχύτητας είναι ένας συμβατικός νόμος -το νόμιμο όριο- που απαγορεύεται να υπερβούμε. Οι περισσότεροι άνθρωποι, εντούτοις το υπερβαίνουν μερικές φορές .Τα φυσικά όρια είναι σύνορα που είναι τεχνητά, ιδιαίτερα απίθανο να ξεπεραστούν. Όπως π.χ. το ύψος που μπορεί κάποιος να πηδήσει ή το όριο ανίχνευσης ενός ραντάρ.

Αυτά τα όρια υπονοούν ένα **φράγμα**. Μπορεί να αντιπροσωπεύουν την πιο ακραία πραγματοποίηση ή το σημείο ακριβώς μετά από το εφικτό.

Μετά από το όριο ταχύτητας εμφανίστηκαν τα φυσικά και διανοητικά όρια.

Τα διανοητικά όρια δεν έχουν κανένα μαθηματικό ανάλογο όπως της υπομονής των ανθρώπων, των νεύρων ή των διανοητικών ικανοτήτων.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΕΙ: Το προσεγγίζει έγινε αντιληπτό με ένα δυναμικότερο τρόπο. Αντιπροσωπεύει μια μετακίνηση προς ένα τέρμα , χωρίς πάντα να φτάνουμε σ 'αυτό. Π.χ «το τραίνο πλησιάζει τον σταθμό», «το αυτοκίνητο πλησιάζει τα φανάρια». Το αντικείμενο που κινείται μπορεί να φτάσει στο στόχο αν και όχι στο χρόνο που η πρόταση εκφράζεται.

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ: Το συγκλίνει έχει λιγότερες καθημερινές σημασίες και χρησιμοποιείται όταν δύο αντικείμενα έρχονται πλησιέστερα και στις περισσότερες περιπτώσεις αγγίζονται. Π.χ. οι φωτεινές ακτίνες συγκλίνουν, οι δρόμοι συγκλίνουν, οι γραμμές συγκλίνουν. Εάν αυτή είναι η κυρίαρχη εικόνα έννοιας συγκλίνει, τότε είναι δύσκολο να φανεί πως θα κατανοήσουν ότι μια ακολουθία συγκλίνει σε ένα αριθμό. Οι εικόνες που προκαλεί δεν ισχύουν πάντα στις μαθηματικές τοποθετήσεις.

ΤΕΙΝΕΙ: Οι απαντήσεις των σπουδαστών αναφερόταν στη πλειοψηφία τους σε προσωπικές προτιμήσεις (τείνει να πιει πολύ, τείνει να φορά τζιν).

Στα μαθηματικά παραδείγματα χρησιμοποίησαν το τείνει με την ίδια έννοια με το προσεγγίζει(το 1 διαιρούμενο επανειλημμένα με το10 τείνει στο 0).

Στα συμπεράσματα του Monaghan(1991) παρατηρεί ότι ενώ οι φράσεις τείνει, προσεγγίζει, συγκλίνει και όριο, αλληλοεναλλάσσονται -σαν συνώνυμες - από ένα μαθηματικό, οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν σε διαφορετικά συμπεράσματα διότι αυτές οι φράσεις ερμηνεύονται στη φυσική τους γλώσσα έτσι ώστε να προκαλούν διαφορετικές νοητικές αναπαραστάσεις για την ίδια μαθηματική έννοια. Το προσεγγίζει εμφανίζεται να παρουσιάζει τη μικρότερη δυσκολία για τους μαθητές επειδή είναι ασαφής όρος .Το τείνει θεωρείται συχνά σαν παρόμοιας σημασίας με το προσεγγίζει στα μαθηματικά πλαίσια αν και η καθημερινή του χρήση δεν υπονοεί καταστάσεις ορίου. Και στις δυο φράσεις δίνεται μια δυναμική ερμηνεία Το συγκλίνει προκαλεί σύγχυση ως προς το ότι η σημασία του στη καθημερινότητα σχετίζεται έντονα με γραμμές που συγκλίνουν. Το όριο αντιμετωπίζεται συχνά σαν συνοριακό σημείο.

Ο Monaghan (1991) καταλήγει στα συμπέρασμα ότι : «Οι σπουδαστές θα πρέπει να οδηγηθούν στην εξερεύνηση και τον σχολιασμό των προσωπικών τους αντιλήψεων και να συνειδητοποιήσουν πως οι καθημερινές έννοιες των μαθηματικών φράσεων μπορούν να τους οδηγήσουν σε λαθεμένες ερμηνείες»

Ο Cornu (1983) μελέτησε τη σημασία των λέξεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν την έννοια του ορίου συνάρτησης. Παρατηρεί ότι οι φράσεις «τείνει προς» και «όριο» έχουν μια σημασία πριν τη διδασκαλία του όπως αναφέρουν οι Schwarzenberger & Tall (1978) και συνεχίζουν να παραμένουν σ' αυτή και μετά θα τους δοθεί ο τυπικός ορισμός.

Ο Cornu (1983) σημειώνει ότι έρευνες αποκάλυψαν πολλές διαφορετικές σημασίες για τη έκφραση **«τείνει προς»**.

- πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του) (to approach)
- πλησιάζει...χωρίς να φτάνει (to approach…without reaching it)
- πλησιάζει…μέχρι σχεδόν να το φθάσει(to approach…just reaching it)

- μοιάζει (χωρίς οποιαδήποτε παραλλαγή, όπως «το μπλε τείνει προς το βιολετί) (to resemble)

Σύμφωνα με τον Cornu (1983) η λέξη **«όριο»** μπορεί να έχει διαφορετικές σημασίες για διαφορετικά άτομα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ως «απρόσιτο όριο» (impassibe), αλλά μπορεί επίσης να είναι :

- ✓ ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φτάσουμε,
- ✓ ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο να φθάσουμε,
- ✓ ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε χωρίς να το φτάνουμε,
- ✓ ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φθάνουμε,
- ✓ ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο,
- ✓ ένα ανώτερο ή κατώτερο όριο,
- ✓ ένα διάστημα,
- ✓ εκείνο που έρχεται «αμέσως μετά» από κάτι το οποίο μπορούμε να φτάσουμε,
- ✓ ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας,
- ✓ το τέλος, το τέρμα.

Από την έρευνα αναδεικνύεται ότι η σημασία που αποδίδεται στις λέξεις **«τείνει προς »** και **«όριο»** ποικίλει από τον ένα μαθητή στον άλλο. Επίσης για τον ίδιο μαθητή, η ίδια λέξη μπορεί να έχει διάφορες σημασίες ανάλογα με τις περιστάσεις.

Ο Cornu (1991),επισημαίνει ότι οι αυθόρμητες ιδέες που δημιουργούνται στους μαθητές από τις σημασίες αυτών των λέξεων παραμένουν σ' αυτούς και σε ανώτερο επίπεδο των σπουδών τους. Ενδέχεται, όταν οι μαθητές έρθουν σε επαφή με τον τυπικό ορισμό της έννοιας, αυτές οι αντιφατικές ιδέες τις οποίες διατηρούν, να τους οδηγήσουν στο σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας που θα περιέχει δυνητικούς παράγοντες σύγκρουσης , με το νόημα που δίνουν οι Tall & Vinner(1981).

Οι Grugnetti & Rizza (2003) ερεύνησαν τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του **«ορίου»** και του **«απείρου»**. Σ΄ ένα τμήμα της έρευνας που έλαβαν μέρος περίπου 600 μαθητές (14 έως 19 ετών) από γυμνάσια και λύκεια διαφόρων τύπων της Ιταλίας και είχε στόχο να διερευνήσει τις ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στον όρο **« όριο »**. Από την ανάλυση των απαντήσεων στην ερώτηση : « εξηγείστε τι σημαίνει ο όρος **όριο** για σας» προέκυψαν τα εξής :

1. Η ιδέα ενός εμποδίου, φράγματος κανόνα περιορισμού 44%
2. Η ιδέα ενός συνόρου, κλεισίματος 30%
3. Η ιδέα ενός ακραίου σημείου..... 19%
4. Άλλες έννοιες (συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών) 3%
5. Καμία απάντηση 4%

Παρατηρούν μάλιστα οι ερευνήτριες ότι η ιδέα του εμποδίου(φυσικού ή ηθικού) συναντάται περισσότερο στις μικρότερες ηλικίες και μειώνεται καθώς η ηλικία αυξάνει.

Η προηγούμενη ερώτηση προκάλεσε σύμφωνα με τις Grugnetti και Rizza(2002) την διατύπωση της εικασίας σύμφωνα με την οποία «η ισχυρή» ιδέα ενός ορίου σαν φράγμα αντιπροσωπεύει ένα εμπόδιο στη διαδικασία κατανόησης της έννοιας του ορίου. Αυτό είναι ένα εμπόδιο στο βαθμό που μπορεί να προκαλέσει τουλάχιστον δυο τύπους δυσκολιών:

a) Δυσκολία στο συσχετισμό του ορίου με την ιδέα μιας διαδικασίας συνεχούς επανάληψης (και ως εκ τούτου και με μια διαδικασία που συνεχίζεται επ' άπειρον).
b) Δυσκολία στην αποδοχή της δυνατότητας ενός άπειρου ορίου.

Η παρουσία ενός είδους αντίθεσης μεταξύ της ιδέας του ορίου και του απείρου εμφανίστηκε με μεγάλη συχνότητα στην απάντηση της ερώτησης «εξηγείστε τι σημαίνει η λέξη «άπειρο» για σας» η οποία υπήρχε στο δεύτερο ερωτηματολόγιο που έδωσαν οι ερευνήτριες: *άπειρο είναι κάτι που δεν έχει όριο.* Η ανάλυση του ερωτηματολογίου δίνει έμφαση πως ένα μεγάλο τμήμα μαθητών συνδέει τον όρο «όριο»με μια ιδέα πεπερασμένου στο χώρο και τον χώρο, που κάτι που τους οδηγεί να θεωρήσουν το όριο ως αντίθετο του απείρου.

1.4.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έχουν καταγραφεί πολλά μοντέλα του ορίου συνάρτησης όπως :

Το όριο ως ένα φράγμα που δεν μπορεί να ξεπεραστεί (Cornu, 1983).

Το όριο ως άφθαστο (Tall & Schwarzenberger,1978).

Το όριο ως κίνηση (Tall & Vinner,1981).

Από τα μοντέλα αυτά, το όριο ως φράγμα και ως άφθαστο είναι και τα δύο ασυνεπή με τον τυπικό ορισμό και αποτελούν παρανοήσεις. Το όριο ως κίνηση αν και είναι λογικό και συχνά χρήσιμο μοντέλο δεν είναι ακριβές και μπορεί να επηρεάσει την κατανόηση του τυπικού ορισμού από τους μαθητές (Szydlik,2000).

Η Robert (1982) ερεύνησε τα διαφορετικά πρότυπα που μπορούν να έχουν οι σπουδαστές για την έννοια του ορίου ακολουθίας. Παρά το γεγονός ότι έχει δοθεί στους μαθητές ο τυπικός ορισμός της έννοιας, όταν τους ζητηθεί να την περιγράψουν, ενεργούν σαν να μην τους έχει δοθεί και έχουν τη τάση να αναφέρονται σε

προηγούμενες εμπειρίες τους. Στην έρευνα συμμετείχαν 1380 σπουδαστές που είχαν διδαχθεί τον τυπικό ορισμό του ορίου ακολουθίας σε διάφορα επίπεδα στο σχολείο και στο πανεπιστήμιο. Η ερευνήτρια ρώτησε τους σπουδαστές πως θα εξηγούσαν την έννοια της συγκλίνουσας ακολουθίας σε μαθητές 14 ή 15 ετών. Οι σπουδαστές ενήργησαν σαν να μην γνώριζαν τον τυπικό ορισμό. Παρατηρήθηκαν εκδηλώσεις αυθόρμητων πρωτογενών αντιλήψεων που εκφράστηκαν ως:

- **στατική αντιμετώπιση** : « οι τελικοί όροι έχουν πάντα την ίδια τιμή»
- **περιοριστική αντιμετώπιση*:*** «οι τιμές δεν μπορούν ν ξεπεράσουν το ℓ»

Ταυτόχρονα εμφανίστηκαν μοντέλα που προέκυψαν από την τυπική διδασκαλία τα οποία η ερευνήτρια ταξινόμησε στις παρακάτω κατηγορίες :

- ***Μονοτονικά και δυναμικά μονοτονικά μοντέλα*** (12%)

«μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ακολουθία φραγμένη άνω»(αντίστοιχα φθίνουσα φραγμένη κάτω)

«μια συγκλίνουσα είναι μια αύξουσα(ή φθίνουσα) ακολουθία που πλησιάζει ένα όριο»

- ***Δυναμικά μοντέλα*** (35%)

« η u_n τείνει στο ℓ»

« η u_n πλησιάζει το ℓ»

«η απόσταση της u_n από το ℓ γίνεται μικρή»

«οι τιμές πλησιάζουν ένα αριθμό όλο και περισσότερο»

- ***Στατικά μοντέλα*** (13%)

«τα u_n βρίσκονται σ' ένα διάστημα κοντά στο ℓ»

«τα u_n είναι συγκεντρωμένα γύρω από το ℓ»

- ***Μικτά μοντέλα*** (14%)

«ένα μίγμα των ανωτέρω».

Από τους σπουδαστές που συμμετείχαν στην έρευνα, 4% έδωσαν τον τυπικό ορισμό, 5% δεν απάντησαν, ενώ οι υπόλοιποι έδωσαν ελλιπείς απαντήσεις. Από την παραπάνω έρευνα έρχονται στη επιφάνεια μοντέλα για το όριο όπως : « Το όριο είναι ένα φράγμα», « Η σύγκλιση συνδέεται με την μονοτονία».

Η ερευνήτρια παρατηρεί ότι τα παραπάνω μοντέλα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές λύνουν προβλήματα. Είναι σαφές ότι οι σπουδαστές δεν διαθέτουν μόνο μια έννοια για το όριο αλλά περισσότερες οι οποίες εμφανίζονται ανάλογα με τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται. Επίσης είναι φανερή η τάση των σπουδαστών να προτείνουν δυναμικές ερμηνείες. Οι αντιλήψεις αυτές μπορούν να δημιουργηθούν όταν η διδασκαλία επικεντρώνεται στη διαδικασία προσέγγισης, παρά στην ίδια έννοια

του ορίου. Οι εικόνες έννοιας που σχετίζονται μ' αυτή τη διαδικασία, περιέχουν πολλούς παράγοντες που συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό («πλησιάζει αλλά δεν μπορεί να φθάσει», «δεν μπορεί να το περάσει», «τείνει προς»,κ.λ.π.). Συνεπώς οι σπουδαστές αναπτύσσουν εικόνες για το όριο και το άπειρο που σχετίζονται με παρανοήσεις που αφορούν τη διαδικασία της «προσέγγισης» ή «της αύξησης» ή «της επ' άπειρον προσέγγισης» .

1.5 ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Ο δεύτερος τομέας της έρευνας που αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου, εξετάζει τον ρόλο των γνωστικών εμποδίων στην προσπάθεια να εντοπιστούν δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας. Τα εμπόδια αυτά αναπτύσσονται κατά την προσπάθεια της νέας γνώσης να ενσωματωθεί στο γνωστικό σχήμα και συναντάει την παλιά γνώση. Ο προσδιορισμός τους έχει απασχολήσει ευρέως τους ερευνητές της διδακτικής. Σύμφωνα με τον Cornu (1991) μπορούμε να διακρίνουμε αρκετούς διαφορετικούς τύπους εμποδίων όπως :

γενετικά και ψυχολογικά εμπόδια τα οποία εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της προσωπικής ανάπτυξης του μαθητή,

διδακτικά εμπόδια τα οποία εμφανίζονται εξαιτίας της φύσης της διδασκαλίας και του δασκάλου,

επιστημολογικά εμπόδια τα οποία εμφανίζονται λόγω της φύσης των ίδιων των μαθηματικών.

Τα γνωστικά εμπόδια προκαλούν επιβράδυνση της διαδικασίας μάθησης και οδηγούν σε γνωστικές δυσκολίες. Επίσης είναι υπεύθυνα για την αδράνεια στασιμότητα και παλινδρόμηση της διαδικασίας μάθησης. Κατά τον σχεδιασμό μιας διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας είναι μέγιστης σημασίας ο προσδιορισμός των πιθανών εμποδίων ιδιαίτερα των επιστημολογικών.

Για τη σημασία των επιστημολογικών εμποδίων ο Σπύρου (2005) αναφέρει : «Αν αγνοήσουμε τα εμπόδια διατρέχουμε τους κινδύνους : είτε να διδάξουμε στα παιδιά τις τελικά διαμορφωμένες γνώσεις με τρόπο φορμαλιστικό, χωρίς ιδιαίτερο νόημα για τα ίδια τα παιδιά, σαν μια τυπική (formal) γλώσσα αναντίστοιχη με το βαθμό ανάπτυξης τους, είτε να παρεμβάλουμε κάποιες βοηθητικές γνώσεις, που τις κατανοούν μεν τα παιδιά και τις θεμελιώνουν πάνω σε προηγούμενες, αλλά ο περιορισμένος και ατελής χαρακτήρας τους συντελεί στη δημιουργία μεγάλων δυσκολιών για την περαι-

τέρω πορεία. Είναι ανάγκη να διαμορφωθεί η διδακτέα ύλη στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες ύστερα από μελέτη του ρόλου των διαφόρων επιστημολογικών εμποδίων».

1.5.1 ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Τα επιστημολογικά εμπόδια όπως ήδη αναφέραμε , εμφανίζονται λόγω της φύσης των ίδιων των μαθηματικών εννοιών και ονομάστηκαν έτσι από τον Bachelar (1938). Ο Bachelar θεωρεί ότι η επιστημονική γνώση δεν δομείται με μια συνεχή διαδικασία, αλλά προκύπτει από απόρριψη προηγουμένων μορφών γνώσης οι οποίες συνιστούν τα «επιστημολογικά εμπόδια». Συγκεκριμένα αναφέρει : « αντιμετωπίζουμε νέα γνώση που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπάρχουσα γνώση και έτσι πρέπει να καταστρέψουμε τις προϋπάρχουσες λανθασμένες ιδέες». Έδειξε ότι τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται στην ιστορική ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης και στην εκπαιδευτική πρακτική. Γι' αυτόν (Bachelar) όπως επισημαίνει ο Cornu (1991), τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν δυο βασικά χαρακτηριστικά:

- Αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιώδη συστατικά της γνώσης, που πρέπει να αποκτηθεί.
- Συναντώνται εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας.

Τα επιστημολογικά εμπόδια αναλύονται στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών από τον Brousseau (1983). Ο Brousseau (1983) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά σε κάποιο πλαίσιο μιας ορισμένης γνωστικής περιοχής και επομένως εδραιώνεται, αλλά αποτυγχάνοντας να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ' ένα άλλο πλαίσιο οδηγεί σε αντιφάσεις. Επομένως καθίσταται αναγκαίο να καταστραφεί η αρχική ανεπαρκής και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με μια πιο λειτουργική γνώση στο νέο πλαίσιο. Η απόρριψη και η διευκρίνιση ενός τέτοιου εμποδίου αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης. Το ξεπέρασμα αυτού του εμποδίου δεν μπορεί να γίνει χωρίς την αποσταθεροποίηση των αρχικών ιδεών, με την τοποθέτηση τους σ' ένα νέο πλαίσιο όπου φαίνεται καθαρά ότι αποτυγχάνουν. Αυτό επομένως απαιτεί μια μεγάλη προσπάθεια γνωστικής ανακατασκευής .

Από τη μελέτη της ιστορίας της έννοιας του ορίου εντοπίζονται περίοδοι βραδείας εξέλιξης, που πιθανόν να οφείλονται σε δυσκολίες που προέκυψαν και οι οποίες μπορεί να υποδείξουν την παρουσία επιστημολογικών εμποδίων. Σύμφωνα με τον

Cornu(1991), στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου προκύπτουν τέσσερα κύρια επιστημολογικά εμπόδια :

1) Η αποτυχία σύνδεσης γεωμετρίας και αριθμών.

Πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί η έννοια του ορίου δεν αποσαφηνίστηκε την περίοδο 430-300 π.Χ. όταν οι αρχαίοι Έλληνες εκδήλωσαν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου, για παράδειγμα, παρείχε μια ευκαιρία για την ανάπτυξη εργαλείων που μοιάζουν εξαιρετικά με την έννοια του ορίου. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 π.Χ) θέλησε να αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών δυο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ενέγραψε κανονικά πολύγωνα στους δύο κύκλους και αυξάνοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών, προσέγγισε τα εμβαδά των δύο κύκλων. Σε κάθε βήμα ο λόγος των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων και από αυτό προκύπτει ότι «οριακά» αυτό θα ισχύει για τα εμβαδά των κύκλων.

Αυτή η μετάβαση προς το όριο, που εξηγείται πολύ απλά, θα καθοριζόταν ένα έτος αργότερα, μέσω της μεθόδου της εξάντλησης , που αποδίδεται στον Εύδοξο τον Κνίδιο (408-255 π.Χ). Η μέθοδος της εξάντλησης βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου (Στοιχεία Ευκλείδη, βιβλίο Χ, πρόταση Ι),που αναφέρει : «Δοθέντων δυο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του, κατόπιν από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, τότε θα μείνει κάποια στιγμή κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους».

Όμως παρά το γεγονός ότι η έννοια της εξάντλησης φαίνεται εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου, δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε υπεύθυνα ότι οι Έλληνες κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι ουσιαστικά μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου. Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη, όχι σε αριθμούς .Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρά αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου αριθμών απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία, και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων, φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε η μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

2) Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού.

Ιστορικά η έννοια του ορίου συναντά την υπόθεση για την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων που είναι σχεδόν μηδέν χωρίς να έχουν ένα συγκεκριμένο «προσδι-

ορίσιμο» μέγεθος. Τι συμβαίνει τη στιγμή που μια από τις ποσότητες αυτές μηδενίζεται;

Τέτοια φιλοσοφικά προβλήματα απασχόλησαν πολυάριθμους μαθηματικούς, όπως ο Newton, ο οποίος μίλησε για την «ψυχή των εκλιπόντων ποσοτήτων» τη στιγμή που αυτές εξαφανίζονται για να του επιτρέψουν να υπολογίσει τον «έσχατο λόγο τους». Ο Euler χρησιμοποίησε ελεύθερα την έννοια του απείρως μικρού ως μια ποσότητα που μπορεί, όταν απαιτείται να θεωρηθεί ίση με το μηδέν. Δεν θεωρούσε ότι οι έννοιες του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού έκρυβαν τόσο πολύ μυστήριο όσο πιστεύετο γενικά. Για τον Euler ο λογισμός ήταν απλά ο καθορισμός του λόγου των εκλιπόντων(evanescent) ελάχιστων μεταβολών για την έκφραση 0/0 (Boyer,1949). Αντίθετα ο D'Albembert εναντιώθηκε στη χρήση των απείρως μικρών ποσοτήτων και επεδίωξε να τις απομακρύνει από τον Απειροστικό Λογισμό. Χρησιμοποίησε το επιχείρημα ότι μια ποσότητα ή είναι κάτι ή δεν είναι τίποτα. Αν είναι κάτι τότε δεν μπορεί να γίνει μηδέν και αν είναι τίποτε τότε είναι ήδη μηδέν. Ο Cauchy χρησιμοποίησε επίσης την έννοια του απείρως μικρού. Όπως αναφέρει ο Boyer(1949,p.273) ο Cauchy στο Cours d'analyse de l' Ecole Polytechnique(1821), εξήγησε την ιδέα του απειροστού ως εξής : «Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν».

Η ιδέα ότι το όριο είναι μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της ύπαρξης και της ανυπαρξίας κάποιου πράγματος συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές. Το $\varepsilon \rangle 0$ θεωρείται ότι αναπαριστά ένα μη μηδενικό αριθμό μικρότερο από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Με τον ίδιο τρόπο κάποιοι μπορεί να πιστεύουν ότι το 0,999….. είναι ο τελευταίος αριθμός πριν από το 1 αλλά που δεν είναι ίσος με 1.

3) Η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου.

Η έννοια του ορίου είναι δύσκολο να εισαχθεί στα μαθηματικά επειδή φαίνεται να έχει μεγαλύτερη σχέση με τη μεταφυσική ή με τη φιλοσοφία.

Οι μαθηματικοί συχνά επιφυλάσσονται να μιλήσουν για τέτοιες έννοιες, από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον D'Almbert ο οποίος έγραψε «μπορεί κάποιος να τα καταφέρει εύκολα στον Απειροστικό Λογισμό χωρίς τα υπόλοιπα μεταφυσικά του απείρου». Ο Lagrange εξέφρασε παρόμοιο φόβο για τις μεταφυσικές πτυχές. Αν και στις αρχές της σταδιοδρομίας του πίστευε ότι θα μπορούσε να καταστήσει αυστηρή τη χρήση των απειροστών, αργότερα θεώρησε ότι τα απειροστά του Leibniz δεν έχουν καμία μεταφυσική βάση και προσπάθησε να θεμελιώσει τον Απειροστικό Λογισμό χρησιμοποιώντας άπειρες σειρές με γνήσια αλγεβρικούς όρους. Όμως οδη-

γήθηκε σε αποτυχία γιατί η άλγεβρα όπως του παραδόθηκε από τον Euler ήταν θεμελιωμένη σε μια λανθασμένη άποψη του απείρου. Έτσι, με οποιανδήποτε τρόπο κι αν στράφηκαν οι μαθηματικοί στην ιστορική εξέλιξη του θέματος, ήρθαν αντιμέτωποι με βαθιές θεωρητικές δυσκολίες.

Η μεταφυσική απόχρωση της έννοιας του απείρου αποτελεί ένα από τα κύρια εμπόδια και για τους σημερινούς μαθητές. Αυτό το εμπόδιο καθιστά την κατανόηση του ορίου εξαιρετικά δύσκολη, ιδιαίτερα όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τις γνωστές αλγεβρικές και υπολογιστικές μεθόδους.

4) Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι

Το αν επιτυγχάνεται το όριο ή όχι είναι μια αντιπαράθεση που διήρκεσε σε όλη την ιστορία της έννοιας. Ο Robihns (1697-1751) εκτίμησε ότι το όριο δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί, ακριβώς όπως τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στο κύκλο δεν μπορούν ποτέ να είναι ίσα μ' αυτόν. Υποστήριξε ότι : «Δίνουμε την ονομασία έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση».

Από την άλλη μεριά , ο Jurin (1685-1750) είπε ότι « ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που αυτές εξουδετερώνονται», «το ζήτημα δεν είναι αν η αύξηση είναι μηδενική, αλλά το ότι εξαφανίζεται, ή ότι είναι το σημείο της εξαφάνισης», «υπάρχει ένας έσχατος λόγος των αυξήσεων που εξαφανίζονται», «μια αύξηση που γεννάται είναι μια αύξηση που αρχίζει να υπάρχει από το τίποτε, ή που αρχίζει να παράγεται, αλλά που πρέπει να φθάσει ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να αποδοθεί σε τόσο μικρή ποσότητα».

Ο D'Almbert επέμενε ότι μια ποσότητα δεν θα έπρεπε ποτέ να γίνει ίση με το όριο της : «Για να μιλήσουμε σωστά, το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει από αυτήν τόσο λίγο όσο κάποιος επιθυμεί». Αυτή η αντιπαράθεση παραμένει ζωντανή και στους μαθητές μας : Σε μια συζήτηση ένας μαθητής ρώτησε: «Όταν το x τείνει στο μηδέν, τότε δεν είναι ίσο με μηδέν ;».

Ο Cornu(1991) σημειώνει ότι υπάρχουν βεβαίως πολλά άλλα εμπόδια που σχετίζονται με την έννοια του ορίου εκτός από αυτά τα τέσσερα. Τα λάθη που διαπράττουν οι μαθητές είναι πολύτιμες ενδείξεις για τον εντοπισμό των εμποδίων . Επομένως, η κατασκευή παιδαγωγικών στρατηγικών πρέπει να λάβει υπόψη τέτοια εμπόδια. Το ζήτημα δεν είναι να τα αποφύγουμε αλλά, αντίθετα να οδηγήσουμε το μαθητή να τα συναντήσει και να τα υπερπηδήσει, αντιμετωπίζοντας τα εμπόδια ως συστατικά των αναθεωρημένων μαθηματικών που πρόκειται να αποκτηθούν.

Η Artique(1998), αναφέρεται στα επιστημολογικά εμπόδια και επισημαίνει «ότι μπορούμε να μελετήσουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν από συναφείς και μόνο τοπικά επαρκείς γνώσεις που εμφανίζονται κατά την ιστορική εξέλιξη των εννοιών και κατά την τρέχουσα διδασκαλία, ακόμη και αν δεν έχουν την ίδια μορφή λόγω φανερών πολιτισμικών διαφορών».

Όσον αφορά την έννοια του ορίου η Artique(1998), σημειώνει ότι οι διάφοροι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν στα παρακάτω εμπόδια :

i. Το όριο ως η τελική ή η ανυπέρβλητη κατάληξη μιας διαδικασίας , προκαλεί έντονες αντιλήψεις, να θεωρείται (το όριο) ως φράγμα ή ως ο τελευταίος όρος μιας διαδικασίας ή τείνει να περιορίσει τη σύγκληση στη μονότονη σύγκληση.
ii. Η υπεργενίκευση των ιδιοτήτων των πεπερασμένων διαδικασιών στις άπειρες διαδικασίες σύμφωνα με την αρχή του συνεχούς όπως δόθηκε από τον Leibniz.
iii. Η υπερίσχυση των γεωμετρικών μορφών έναντι των αλγεβρικών που εμπλέκονται στη διαδικασία του ορίου.

Το 1985 η Sierpinska διεξήγαγε μια ιστορική έρευνα και πειραματική εργασία με μια μικρή ομάδα σπουδαστών. Η ερευνήτρια μελέτησε τις αντιλήψεις των σπουδαστών σχετικά με το άπειρο, την έννοια της συνάρτησης και των πραγματικών αριθμών. Από αυτή την έρευνα προκύπτει μια πρώτη οργανωμένη προσπάθεια παρουσίασης των βασικών επιστημολογικών εμποδίων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου. Σύμφωνα με την ερευνήτρια έχουμε τις εξής περιπτώσεις επιστημολογικών εμποδίων :

I. Το ***«Ευρετικού χαρακτήρα εμπόδιο»***, το οποίο συνίσταται στη έλλειψη αυστηρότητας. Σύμφωνα μ' αυτό η κίνηση προς το όριο είναι μια μέθοδος ευρετικού χαρακτήρα και δεν συσχετίζεται με κάποια μαθηματική πράξη ή διαδικασία. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε αποτέλεσμα με την χρήση μιας συμπερασματολογίας που στηρίζεται σ' ένα είδος ατελούς επαγωγής και στην εποπτεία. Ανάλογα με την εποπτεία που χρησιμοποιούμε στην ευρετική διακρίνουμε δύο κατηγορίες στο εμπόδιο αυτό:

Ia.. Το ***«Ευρετικό στατικό εμπόδιο»*** στο οποίο η εύρεση του ορίου στηρίζεται σε εποπτεία ξένη προς την ιδέα της κίνησης. Συγκεκριμένα η εύρεση του ορίου είναι εύρεση κάποιου αντικειμένου του οποίου μόνο προσεγγίσεις είναι δυνατόν να γνωρίζουμε.

Ib. Το ***«Ευρετικό κινητικό εμπόδιο»*** στο οποίο η εποπτεία συνδέεται με την ιδέα της κίνησης . Έτσι «η εύρεση του ορίου συνδέεται με την εύρεση κάποιου αντι-

κειμένου καθώς κινούμαστε συνεχώς και προσεγγίζουμε το άπειρο». Σ' αυτή την κατηγορία είναι εμφανής η παρουσία της έννοιας του δυνητικού απείρου σ' αντίθεση με την κατηγορία **Ia.**όπου απουσιάζει η έννοια του απείρου.

Στη παραπάνω διάκριση οι προσεγγίσεις μπορεί να είναι γεωμετρικές είτε αριθμητικές. Οπότε στη κατηγορία **Ia.** μιλάμε για «Ευρετικό γεωμετρικό εμπόδιο» και «Ευρετικό αριθμητικό εμπόδιο» αντίστοιχα. Ενώ στη κατηγορία **Ib.** μιλάμε για «Ευρετικό γεωμετρικό εμπόδιο» και «Ευρετικό αριθμητικό εμπόδιο» αντίστοιχα.

Και στις δύο περιπτώσεις Ia, Ib μπορούμε να διακρίνουμε μια θεώρηση των μαθηματικών με βάση μια εμπειρική – υπολογιστική λογική. Επίσης και τα δύο είδη ευρετικών εμποδίων παρουσιάζονται και σε γεωμετρικά και σε αλγεβρικά πλαίσια ανάλογα με το είδος προσέγγισης που ακολουθείται.

II. Το ***«Σχετιζόμενο με την αυστηρότητα εμπόδιο»*** που χαρακτηρίζεται είτε από υπερβολική αυστηρότητα είτε από αυστηρότητα στραμμένη προς λάθος κατεύθυνση.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

IIa Το ***«Εμπόδιο τύπου Εύδοξου».*** σύμφωνα με το οποίο η κίνηση προς το όριο δεν είναι μαθηματική διαδικασία αλλά αυστηρή μέθοδος απόδειξης συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Μια τέτοια αντίληψη μπορεί να δημιουργηθεί ενώ δουλεύει κάποιος μέσω του ε-δ τυπικού ορισμού χρησιμοποιώντας και αποδεικνύοντας σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και αριθμητικών παραστάσεων.

IIb.Το ***«Εμπόδιο τύπου Fermat»*** σύμφωνα με το οποίο η κίνηση προς το όριο είναι μαθηματική διαδικασία που χαρακτηρίζεται από τη συσχέτιση αριθμών με τις μεταβλητές και την παράλειψη των αριθμητικών τιμών που είναι αμελητέες σε σχέση με κάποιες άλλες. Στη παραπάνω διάκριση τόσο στη περίπτωση **IIa** όσο και στη **IIb** κυριαρχεί μια φορμαλιστική αντίληψη για τα μαθηματικά και παρατηρείται μια ευρεία χρήση συμβολικών χειρισμών. Απουσιάζει επίσης κάθε μεταφυσική χρήση της έννοιας του απείρου. Τα μαθηματικά σχετίζονται άμεσα με τη διατύπωση και απόδειξη θεωρημάτων. Ειδικά στην περίπτωση του εμποδίου τύπου Fermat αναγό -μαστε σχεδόν πάντα στην αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης.

Η προσπάθεια της Sierpinska επικεντρώθηκε στη διαμόρφωση των κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων που θα συντελούσαν στην υπερπήδηση των παραπάνω εμποδίων από τους μαθητές. Ένα σημαντικό μέρος από αυτή την ερευνητική της εργασία παρουσίασε στο άρθρο της : "Humanities students and epistemiological obstacles related to Limits"(1987). Στην εισαγωγή αυτού του άρθρου τονίζει: «Αν η παρουσία ενός επιστημολογικού εμποδίου σ' έναν σπουδαστή συνδέεται με μια πεποί-

θηση κάποιου είδούς, τότε η υπερπήδηση του εμποδίου δεν συνίσταται στην αντικατάσταση αυτής της πεποίθησης από την αντίθεση της. Αυτό θα σήμαινε ότι πέφτουμε στο άλλο αντίθετο εμπόδιο του διπόλου. Αντίθετα σημαίνει ότι ο σπουδαστής πρέπει να αρθεί σ' ένα ύψος που βρίσκεται πάνω από τις πεποιθήσεις του, να επιλύσει τα προβλήματα ώστε να αποκτήσει συνείδηση των ενδεχομένων διαφορετικών υποθέσεων».

Επιπλέον σήμερα η αυξανόμενη χρήση Η/Υ στη διδασκαλία εννοιών δημιουργεί νέο πεδίο έρευνας που αφορά την δημιουργία μιας νέας μορφής και ποιότητας επιστημολογικών εμποδίων.

Συμπέρασμα όλων των ερευνητών : τα εμπόδια υφίστανται πέρα από κάθε αμφιβολία παρά το γεγονός ότι η διάκριση, η αναγνώριση, η ταξινόμηση και η διερεύνηση των αιτίων τους απαιτούν ακόμη έρευνες και συζητήσεις (Σπύρου,2005).

1.6 ΟΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ-ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΑΥΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Ανάμεσα στους παράγοντες που θεωρείται ότι επηρεάζουν τους μαθητές στην κατανόηση μιας έννοιας ή στην επίλυση προβλημάτων είναι και οι συναισθηματικοί καθώς και παράγοντες που μπορεί να έχουν ταυτόχρονα γνωστικές και συναισθηματικές διαστάσεις. Τα τελευταία είκοσι χρόνια, ένας μεγάλος αριθμός των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών και της γνωστικής ψυχολογίας έχει ασχοληθεί με τον ρόλο του συναισθηματικού τομέα (affect) και των πεποιθήσεων (beliefs) των μαθητών για τα μαθηματικά (Cobb,1986; Frid,1994; McLeon, 1989,1992; Schoenfeld, 1985a, 1985b,1989; Silver,1994; Szydlik,2000).

Ο McLeod (1992) διακρίνει τρεις παράγοντες του συναισθηματικού τομέα –συγκινήσεις (emotions), στάσεις (attitudes) και πεποιθήσεις (beliefs) που χαρακτηρίζονται από προοδευτική μείωση της έντασης, και αντίστοιχη αύξηση της γνωστικής συνιστώσας και της διάρκειας. Ο Cobb (1986) όρισε τις πεποιθήσεις ως τις προσωπικές υποθέσεις ενός ατόμου σχετικά με τη φύση της πραγματικότητας. Αυτές οι υποθέσεις αποτελούν τη βάση της προσανατολισμένης σε στόχους δραστηριότητας. Οι πεποιθήσεις είναι διακεκριμένες από τις στάσεις ή τα συναισθήματα ως προς το ότι έχουν ελάχιστη συναισθηματική εμπλοκή και είναι οι πιο σταθερές στο χρόνο McLeod

(1992). Οι πεποιθήσεις ενός ατόμου για τη φύση των μαθηματικών, περιλαμβάνουν υποθέσεις που αφορούν τα αποδεικτικά στοιχεία και τα μέσα για την απόδοση εγκυρότητας.

Η Szydlik (2000) θεωρεί ότι η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης παρέχει ένα ελκυστικό πλαίσιο για τη μελέτη των πεποιθήσεων των σπουδαστών για τα μαθηματικά. Διερεύνησε τις πεποιθήσεις των σπουδαστών που φοιτούσαν στο δεύτερο έτος των σπουδών τους στον Απειροστικό Λογισμό, στα μαθηματικά και τη σχέση που είχαν οι πεποιθήσεις τους στη κατανόηση της έννοιας του ορίου. Οι πεποιθήσεις των σπουδαστών για το περιεχόμενο που λογικά αποτελεί τη βάση της έννοιας του ορίου (πεποιθήσεις για τους πραγματικούς αριθμούς, το άπειρο και τις συναρτήσεις) αποκαλούνται με τον όρο **πεποιθήσεις περιεχομένου (content beliefs)**, ενώ οι πεποιθήσεις σχετικά με το πώς η μαθηματική αλήθεια και εγκυρότητα εδραιώνονται, αποκαλούνται **πηγές βεβαιότητας (sources of conviction)** (Frid, 1994).

Το κίνητρο για τη μελέτη της Szydlik προέκυψε από τη βιβλιογραφία που ανέφερε ότι τα αντιπαραδείγματα δεν πείθουν τους σπουδαστές να μεταβάλουν τα ασυνεπή ή ατελή μοντέλα τους για το όριο (Sierpinska,1987 ; Williams,1991). Πράγματι, πολλοί σπουδαστές μπορεί να μη βασίζονται στη συνέπεια, τη λογική, ή ακόμη και τα εμπειρικά δεδομένα για την εγκυρότητα στα μαθηματικά, αλλά να βασίζονται αντιθέτως στην αυθεντία ενός διδάσκοντος ή ενός εγχειριδίου(Carpenter, Lindquist, Matthews & Silver,1983 ; Frid & Olson, 1993 ; Schoenfeld, 1989). Οι προσφυγές στην αυθεντία για τον προσδιορισμό της μαθηματικής αλήθειας αποκαλούνται με τον όρο **εξωτερικές πηγές βεβαιότητας** και οι εκκλήσεις σε εμπειρικά δεδομένα, στη διαίσθηση, τη λογική ή τη συνέπεια ονομάζονται **εσωτερικές πηγές βεβαιότητας** (Frid, 1994).

Η Szydlic(2000) αναφέρει ότι επέλεξε την έννοια του ορίου για να εξετάσει τις πεποιθήσεις των σπουδαστών για τους εξής λόγους :

- ✓ Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική από μαθηματική άποψη. Ίσως αποτελεί την θεμελιώδη έννοια του Απειροστικού Λογισμού.
- ✓ Το όριο είναι μια δύσκολη έννοια στην κατάκτηση της από τους μαθητές (Davis & Vinner, 1986 ; Sierpinska, 1987 ; Tall & Vinner, 1981). Επιπλέον οι μαθητές εξακολουθούν να διατηρούν ατελείς και εναλλακτικές αντιλήψεις για το όριο ακόμη κι έπειτα από προσεγμένη διδασκαλία σχεδιασμένη για να τις εξαλείψει (Davis & Vinner, 1986 ; Williams, 1991).
- ✓ Ίσως, για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, το πεδίο αυτό έχει αποσπάσει ουσιαστική προσοχή από ερευνητές της διδακτικής. Αρκετά μοντέλα

του ορίου (τα οποία ο Cornu,(1991), αποκάλεσε αυθόρμητα μοντέλα των μαθητών) έχουν καταγραφεί : το όριο είναι άφθαστο (Tall & Schwarzenberger, 1978), το όριο ως κίνηση (Tall & Vinner,1981), και το όριο ως ένα φράγμα που δεν μπορεί να ξεπεραστεί (Cornu, 1991). Από αυτά τα μοντέλα το όριο ως άφθαστο και ως φράγμα είναι και τα δύο ασυνεπή με τον τυπικό ορισμό και επομένως αποτελούν πραγματικά παρανοήσεις. Η αντίληψη του ορίου ως κίνηση αν και είναι ένα λογικό και συχνά χρήσιμο μοντέλο του ορίου, δεν είναι ακριβής και μπορεί να επηρεάσει την κατανόηση του τυπικού ορισμού από τους φοιτητές.

- ✓ Οι οριακές διαδικασίες δεν είναι πάντα διαισθητικές, και επομένως ένα τυπικό πλαίσιο παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για τη σκέψη και τον υπολογισμό ορισμένων ορίων. Η Sierpinska (1987) και ο Williams (1991) έχουν και οι δύο προτείνει ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά μπορούν να εμποδίσουν την κατανόηση του πεδίου αυτού.

Σύμφωνα με τη Szydlic (2000) το πιο σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της έρευνας είναι «η ένδειξη ότι οι πεποιθήσεις των σπουδαστών μπορούν να επηρεάζουν την εννοιολογική κατανόηση του ορίου».

Όσον αφορά τις **πηγές βεβαιότητας** των σπουδαστών που πήραν μέρος στην έρευνα αποκαλύπτεται μια μεγάλη διαφοροποίηση. Στο ένα άκρο σπουδαστές αντιλαμβάνονται τον Απειροστικό Λογισμό σαν μια συλλογή από γεγονότα και διαδικασίες που πρέπει να απομνημονευτούν και να εφαρμοστούν. Οι σπουδαστές που έχουν αυτές τις πεποιθήσεις, διατηρούν ατελή και αντιφατικά μοντέλα για το όριο. Συχνά δεν μπορούν να δώσουν ένα κατανοητό ορισμό για το όριο μιας συνάρτησης ή να εξηγήσουν γιατί οι διατυπώσεις και διαδικασίες που ακολούθησαν είναι έγκυρες. Στο άλλο άκρο σπουδαστές μπορούν να δουν τον Απειροστικό Λογισμό σαν λογικό και συνεπή. Αυτή η αντίληψη τους επιτρέπει να είναι δεκτικοί σε τυπικούς ορισμούς και μπορούν να λύσουν προβλήματα που αναφέρονται στο όριο. Σπουδαστές με εσωτερικές πηγές βεβαιότητας δίνουν κατανοητούς ορισμούς για το όριο και είναι πιθανότερο αυτοί σε σύγκριση με τους σπουδαστές με εξωτερικές πηγές να κατέχουν μια στατική αντίληψη για το όριο.

Η Szydlic (2000) επισημαίνει ότι το γεγονός ότι δεν έχουν όλοι οι σπουδαστές με ***εσωτερικές πηγές βεβαιότητας*** πλήρη κατανόηση της έννοιας του ορίου δεν αποτελεί έκπληξη. Οι μαθηματικοί έχουν ***εσωτερικές πηγές βεβαιότητας***, βρίσκουν πολλές μαθηματικές έννοιες δύσκολές, αλλά έχουν την ικανότητα τελικά να βγάζουν νόημα. Γνωρίζουν ότι μπορούν να βρουν την απάντηση με τη λογική. Ωστόσο,

σπουδαστές με ***εξωτερικές πηγές βεβαιότητας*** δεν θα κατανοήσουν τα μαθηματικά εκτός και αν ***πηγές βεβαιότητας*** μετατραπούν. Τελικά, για αυτούς τα μαθηματικά δεν είναι για να καταλαβαίνουν.

Επίσης η Szydlic (2000) διαπιστώνει ότι υφίσταται μια πλατιά κλίμακα ***πεποιθήσεων περιεχομένου*** για τις συναρτήσεις, τους πραγματικούς αριθμούς και το άπειρο ακόμη και για τους σπουδαστές που παίρνουν μέρος στην έρευνα (φοιτούν στο δεύτερο έτος των σπουδών τους στον Απειροστικό Λογισμό), και μας παρέχει κάποιες ενδείξεις ότι οι αντιλήψεις των σπουδαστών για τις συναρτήσεις συνδέονται με την κατανόηση της έννοιας του ορίου όπου οι πεποιθήσεις τους έχουν σχέση με τη μη συνειδητοποίηση της έννοιας της πληρότητας της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Επειδή συνήθως οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, οι διαισθητικές τους πεποιθήσεις είναι ευρύτατες στο θέμα αυτό (Fischbein,1999).

Η Szydlic (2000), σημειώνει ότι οι σύγχρονοι ερευνητές διαφωνούν αν πρέπει ο Απειροστικός Λογισμός να διδάσκεται σε άτυπη μορφή, ώστε να επιτρέπει στους σπουδαστές να ανακαλύπτουν σημαντικές ιδέες ή αν πρέπει να παρουσιάζεται αυστηρά κατασκευασμένος. Τα αποτελέσματα της έρευνας που αναφερόμαστε δείχνουν ότι μπορούν να συμβούν και τα δύο. Κάποιοι σπουδαστές δεν είναι έτοιμοι να δεχτούν αποδείξεις και επιχειρήματα, ενώ άλλοι απογοητεύονται όταν δεν τους παρέχονται τυπικοί ορισμοί και αποδείξεις. Χωρίς αυστηρότητα νοιώθουν ανίσχυροι να διατυπώσουν επιχειρήματα. Για αυτούς, οι δάσκαλοι πρέπει να είναι προσεκτικοί ώστε να μη μειώνουν την αυστηρότητα και τη σημασία των τυπικών ορισμών.

1.7 ΟΙ ΑΤΥΠΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ – ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΩΣ ΕΜΠΟΔΙΟ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Οι αυθόρμητες πρωτογενείς αντιλήψεις είναι το σύνολο των διαισθητικών εκτιμήσεων, εικόνων και γνώσεων που από την καθημερινή εμπειρία συσσωρεύει το άτομο. Ο Cornu (1981,1983) αναφέρεται στις αντιλήψεις αυτές για μια έννοιας που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία της και τις ονομάζει **«αυθόρμητες αντιλήψεις» (spontaneous conceptions).**

Ο Cornu (1991) επισημαίνει ότι για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες η διδασκαλία δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος. Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι' αυτό το θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις, που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως οι κοινές σημασίες των όρων που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία. Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ' ένα μάθημα μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που μπορεί να φαντάζονται οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι ιδέες (αυθόρμητες αντιλήψεις) δεν εξαφανίζονται. Αναμιγνύονται με τη νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών. Σύμφωνα με τον παραπάνω ερευνητή για να επιλυθεί ένα πρόβλημα , γενικά δεν στηριζόμαστε μόνο στην επαρκή επιστημονική θεωρία αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες αυτές ιδέες. Αυτό το φαινόμενο παρατηρεί, είναι γνωστό στην εμπειρική και θεωρητική ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών από την εποχή του Bachelard στη δεκαετία του 1930,αλλά μόνο τον τελευταίο καιρό έχει πλήρως συνειδητοποιηθεί ότι ακριβώς ίδιες δυνάμεις δρουν και στη προφανή λογική των μαθηματικών.

Οι αντιλήψεις αυτές μπορούν να είναι χρήσιμες ακόμη και αν προκαλούν εμπόδια στην προσπάθεια κατανόησης μιας έννοιας. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να παίρνουν σοβαρά υπόψη τους αυτές τις αντιλήψεις και την ανθεκτικότητα που ενδεχομένως παρουσιάζουν ορισμένες απ' αυτές, με αποτέλεσμα να προκαλούν δυσκολίες στους μαθητές στη κατανόηση μιας έννοιας ή να τους οδηγούν σε ανεπιθύμητες παρανοήσεις..

Οι Davis & Vinner (1986) προσπάθησαν να εντοπίσουν που οφείλονται τα λάθη και οι παρανοήσεις όσον αφορά την έννοια του ορίου. Διεξήγαγαν μια έρευνα δυο ετών στον Απειροστικό Λογισμό με στόχο την έννοια του ορίου, σε συνεργασία με τους διδάσκοντες στο πανεπιστημιακό γυμνάσιο της Ουρπάνα. Ο σχεδιασμός της έρευνας ήταν να προηγηθεί η κατανόηση των εννοιών και μετά να ασχοληθούν οι μαθητές με εφαρμογές τους. Μετά από προσεκτικά σχεδιασμένες διδασκαλίες διάρκειας δύο ετών, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι δε υπήρχε βελτίωση στη κατανόηση της έννοιας. Ενώ στο πρώτο έτος των σπουδών τους είχαν διδαχθεί τον τυπικό ορισμό και τον χειριζόταν με σχετική ευκολία, όταν τους ζητήθηκε την πρώτη ημέρα του επόμενου σχολικού έτους να διατυπώσουν τον τυπικό ορισμό για το όριο μιας ακολουθίας , και να περιγράψουν διαισθητικά την αντίστοιχη έννοια, οι απαντήσεις τους δεν φανέρωναν την κατανόηση της. Οι μαθητές μαζί με τις νέες έννοιες είχαν διατηρήσει και τις πρωταρχικές αντιλήψεις τους με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε παρανοήσεις όπως :

- Μια ακολουθία δεν πρέπει να φθάνει το όριο της.
- Η μονοτονία μιας ακολουθίας είναι πάντα δεδομένη.
- Σύγχυση του ορίου με το φράγμα.
- Σύγχυση του $f(x_o)$ με το $\lim_{x \to x_o} f(x)$
- Οι ακολουθίες πρέπει να έχουν κάποιο προφανή, συνεπή τύπο.
- Η ακολουθία έχει ένα «τελευταίο» όρο.
- Δεν διατηρείται η σειρά των ε και N, όπως διαβάζουμε τον ορισμό από τα αριστερά.

Οι Davis και Vinner (1986) πρότειναν τις παρακάτω ερμηνείες για τις παρανοήσεις των μαθητών όπως αυτές που αναφέραμε :

1. Την επιρροή της γλώσσας.
2. Τη σύνθεση αναπαραστάσεων στα μαθηματικά από εμπειρίες που προηγούνται αυτών.
3. Την κατασκευή εννοιών μέσα στα μαθηματικά.
4. Την επίδραση των συγκεκριμένων παραδειγμάτων.
5. Την παρερμηνεία των εμπειριών του.

Ο Williams (1991,2001) ερεύνησε λεπτομερέστερα αυτό που ο Cornu (1983) ονόμασε «αυθόρμητες αντιλήψεις» των σπουδαστών για το όριο και τα μέσα με τα οποία αυτές οι αντιλήψεις μπορούν να αλλάξουν και να γίνουν αυστηρότερες. Αυτή η έρευνα είχε τους στόχους :

a) να περιγράψει την ύπαρξη διαφόρων προτύπων ορίου,
b) να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα παραδείγματα που θα πρότειναν μια αλλαγή στον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν το όριο προς την κατεύθυνση του τυπικού ορισμού,
c) να τεκμηριώσει τους παράγοντες που έχουν επιπτώσεις σε μια τέτοια αλλαγή.

Στα αποτελέσματα που παρουσιάζει ο Williams (2001) επιλέγει 10 θέματα που δείχνουν τις πιο συνηθισμένες άτυπες απόψεις των σπουδαστών για το όριο συνάρτησης. Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν από ένα μεγαλύτερο πρόγραμμα το οποίο ερεύνησε την εξέλιξη στην κατανόηση της έννοιας του ορίου σε 10 σπουδαστές που φοιτούσαν στο δεύτερο εξάμηνο των σπουδών τους στον Απειροστικό Λογισμό, μετά από 7- εβδομάδων πειραματική διδασκαλία. Οι 10 σπουδαστές επιλέχτηκαν από 341 που φοιτούσαν στο ίδιο εξάμηνο με βάσει τις απαντήσεις τους σε ερωτηματολόγιο που αναφερόταν στη κατανόηση της έννοιας του ορίου. Σ' αυτό το ερωτηματολόγιο,

ζητήθηκε από τους σπουδαστές να χαρακτηρίσουν κάθε μια από έξι προτάσεις που αναφερόταν στα όρια ως αληθή ή ψευδή, να διαλέξουν μια πρόταση που θεωρούσαν ότι περιγράφει καλύτερα το όριο και να κάνουν μια περιγραφή που εξηγούν τι σκέφτονται ότι είναι ένα όριο. Επίσης από τους σπουδαστές που επιλέχτηκαν, ζητήθηκε να εκφράσουν διάφορες εναλλακτικές αντιλήψεις για το όριο. Συγκεκριμένα αντιλήψεις που περιλαμβάνουν τη δυνατότητα να φθάσει μια συνάρτηση το όριο της, δυναμικές ή με προσανατολισμένη κίνηση απόψεις για το όριο, το όριο ως φράγμα αλλά και πιο στατικές απόψεις.

Οι άτυπες αντιλήψεις των σπουδαστών για το όριο συνάρτησης και τον τυπικό της ορισμό περιγράφονται από τα παρακάτω πρότυπα:

1. Ένα όριο είναι ένα είδος εκτίμησης μιας δεδομένης τιμής που επιτυγχάνει η συνάρτηση με ένα δεδομένο σφάλμα. Μπορείτε να πάρετε ολοένα καλύτερες εκτιμήσεις περιορίζοντας το x, κοντά στο s (για x→s) και μικραίνοντας το σφάλμα, αλλά η συνάρτηση δεν φθάνει ποτέ στο όριό της.

Στην πραγματικότητα ένα όριο είναι μια προσέγγιση και όχι ένας συγκεκριμένος αριθμός . Παίρνοντας τιμές κοντά στο s, μπορείτε να πλησιάσετε το όριο αλλά όχι να το ξεπεράσει**.**

2. Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο κοντά στο οποίο η συνάρτηση παίρνει τιμές αλλά ποτέ ακριβώς ίσες με αυτό. Εάν πάρετε το όριο της f(x) καθώς x →s, μπορείτε να κάνετε τη συνάρτηση να πάει όσο κοντά θέλετε στο όριο, αλλά δεν θα γίνει ποτέ πραγματικά ίση με το αυτό, ακριβώς όπως το x ποτέ πραγματικά δεν γίνεται ίσο με s. Όταν παίρνετε ένα όριο, δεν ενδιαφέρεστε εάν το x γίνει πάντα πραγματικά ίσο με s, απλώς ότι είναι κοντά στο s. Το ίδιο συμβαίνει και με την f(x). Δεν τίθεται θέμα εάν η f(x) είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το όριο, αλλά μόνο ότι είναι κοντά σε αυτό. Εάν η f(x) κάποτε γίνει ίση με το όριο, τότε δεν έχετε πραγματικά ένα όριο.

3. Το όριο είναι το μέγιστο (ή ελάχιστο) μιας συνάρτησης καθώς το x πλησιάζει κάποιο αριθμό. Όταν πλησιάζει αυτόν τον αριθμό, οι τιμές της συνάρτησης εγκλωβίζονται από την αριθμητική τιμή του ορίου. Για παράδειγμα, όπως όταν αυξάνεται μια συνάρτηση γρήγορο ρυθμό φθάνοντας στο επίπεδο μιας οριζόντιας ασύμπτωτης ,το όριο είναι η τιμή που δείχνει αυτή η οριζόντια ευθεία.

Έτσι ένα όριο είναι ένα σημείο ή ένας αριθμός μετά από τον οποίο οι τιμές της συνάρτησης δεν μπορούν να φθάσουν. Στην πραγματικότητα, οι τιμές της ποτέ δεν φτάνουν στο όριο αλλά μπορούν να πλησιάζουν κοντά.

4. Μια συνάρτηση f έχει ένα όριο L καθώς x →s , εάν οι αριθμητικές τιμές της για x κοντά στο s, είναι κοντά στο L. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε πολύ μικρό διάστημα γύρω από το L, μπορείτε να βρείτε ένα διάστημα γύρω από το s έτσι ώστε όλες οι τιμές του x στο διάστημα γύρω από το s αντιστοιχούν σε τιμές της συνάρτησης κάπου στο διάστημα γύρω από το L.

5. Ένα όριο σημαίνει ότι όταν το x κινείται όλο και πιο κοντά προς κάποιο αριθμό s, η f(x) κινείται πιο κοντά προς το όριο. Η συνάρτηση πηγαίνει απείρως κοντά στο όριο αλλά δεν το φτάνει ποτέ. Είναι όπως μια ασύμπτωτη που η συνάρτηση μπορεί (ενδιάμεσα) να την τέμνει μερικές φορές (ή ακόμα και απείρως πολλές φορές) αλλά την πλησιάζει συνεχώς όλο και πιο κοντά.

6. Όταν μια συνάρτηση κινείται προς κάποιο αριθμό και πηγαίνει όλο και πιο κοντά του, εκείνος ο αριθμός είναι το όριο της. Έτσι, ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο προς το οποίο μια συνάρτηση πηγαίνει αλλά δεν το ξεπερνά. Είναι σαν να διασχίσετε την μισή απόσταση από ένα τοίχο, κατόπιν την μισή από την αυτήν που μένει και συνεχίζετε μ' αυτόν τον τρόπο. Πλησιάζετε πιο κοντά και ο τοίχος είναι όπως το όριο. Τελικά, το να φθάσετε στο όριο, είναι ακριβώς σαν να φθάσετε στον τοίχο.

7. Αυτό που είναι σημαντικό για τα όρια είναι η ιδέα της «εγγύτητας». Όταν λέτε το όριο καθώς το x προσεγγίζει το s, σημαίνει ότι εάν το x είναι κοντά στο s, τότε η f(x) είναι κοντά στο όριο. Είναι εκείνο που ο ορισμός προσπαθεί να πει. Η ιδέα του ορισμού είναι να αποδείξει ότι μπορείτε να πάτε τόσο κοντά όσο θέλετε. Λέω ότι μπορώ να κάνω το f(x) να πάει τόσο κοντά όσο θέλω στο όριο με την επιλογή x αρκετά κοντά στο s και το αποδεικνύω λέγοντας σας πόσο κοντά το x πρέπει να είναι στο s όποτε μου πείτε πόσο κοντά θέλετε το f(x) να είναι στο όριο. Αυτή είναι περίπου όλη η ουσία του ε-δ ορισμού.

8. Δεν μπορείτε να υπολογίσετε ένα όριο μόνο με το να παίρνετε πολλά σημεία κοντά σε ένα αριθμό, επειδή μπορείτε μόνο να πάρετε έναν πεπερασμένο πλήθος σημείων και αυτό δεν είναι αρκεί να σας πει τι

ακριβώς κάνει η συνάρτηση πραγματικά. Μπορεί να βρείτε κάτι διαφορετικό όταν φτάσετε πιο κοντά στο σημείο. Πρέπει πραγματικά να αποδείξετε ότι μπορείτε να πηγαίνετε τόσο κοντά όσο θέλετε στον αριθμό και συγχρόνως η συνάρτηση εξακολουθεί να είναι ακόμα κοντά στο όριο. Αυτό εξηγεί γιατί χρειάζεστε τα θεωρήματα ορίου.

9. Η εύρεση ενός ορίου είναι πολύ ευκολότερη από την κατανόηση του ορισμού. Όταν χρειάζεται να βρείτε ένα όριο, απλώς βάζετε ένα αριθμό στην θέση του x. ¨Όπως π.χ για να βρούμε το όριο της f(x) καθώς το x προσεγγίζει το 0, βρίσκεις

το f(x) για x= 0. Εάν αυτό δεν μπορεί να γίνει, εφαρμόζουμε κάποια αλγεβρική διαδικασία, προσπαθώντας να αποφύγουμε το πρόβλημα και προσπαθούμε πάλι. Ο ορισμός λέει "να πλησιάσω κοντά" και όλα αυτά, αλλά όταν ασχολείστε με προβλήματα, το όριο καταλήγει να είναι αυτό που παίρνετε βρίσκοντας μία τιμή.

10. Εάν θέλετε να σχεδιάσετε ένα όριο, σχεδιάζετε το x να κινείται όλο και πιο κοντά προς κάποιο αριθμό και το σημείο στη γραφική παράσταση επάνω από αυτό κινούμενο κατά μήκος της γραφικής παράστασης , να πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο όριο. Έτσι πλησιάζετε απλώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης από το οποίο περνά η συνάρτηση.

Ο παραπάνω ερευνητής επέλεξε δύο σπουδαστές με τους οποίους συναντήθηκε μεμονωμένα σε πέντε συνεδριάσεις κατά την διάρκεια των πειραματικών μαθημάτων. Μέσα σ' αυτές διερευνήθηκαν και συζητήθηκαν οι ορισμοί των σπουδαστών για το όριο έτσι ώστε να τροποποιηθούν και τελειοποιηθούν αυτοί κατά την διάρκεια των 7 εβδομάδων. Στη πρώτη και την τρίτη συνεδρίαση στόχος του ερευνητή ήταν να εκμαιεύσει τα πρότυπα που έχουν οι μαθητές για το όριο. Στις τρεις ενδιάμεσες έγινε προσπάθεια στο να μετακινηθούν οι σπουδαστές από τις εναλλακτικές και άτυπες αντιλήψεις που διατηρούσαν, προς την περισσότερο τυπικά εκφρασμένη έννοια. Στα συμπεράσματα ο ερευνητής επισημαίνει ότι οι απόψεις των σπουδαστών για το όριο ήταν συχνά αλληλοσυγκρουόμενες. Επιβεβαιώνεται η διαδικαστική δυναμική άποψη των σπουδαστών για το όριο, όπως π.χ να υπολογίζουν τιμές της συνάρτησης σε διαδοχικά σημεία καθώς αυτά πλησιάζουν όλο και πιο κοντά σ' ένα σημείο που μας ενδιαφέρει. Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι σπουδαστές απέτυχαν και σ' αυτή την ερευνητική προσπάθεια να υιοθετήσουν μια πιο τυπική άποψη για τι όριο. Θεωρούν την ευκολία και την πρακτικότητα ενός προτύπου σημαντικότερη από τη μαθηματική τυπικότητα.

Ο Williams (2001) στα συμπεράσματα αναφέρει ότι καμία μέθοδος δεν μπορεί από μόνη της να συλλάβει τον πλούτο και την ποικιλία που χαρακτηρίζει την ανθρώπινη σκέψη. Κάθε μέθοδος φωτίζει κάποιες πλευρές ενός θέματος ενώ επισκιάζει κάποιες άλλες. Υποστηρίζει ότι η μέθοδος που εφαρμόστηκε στη έρευνα που αναφερόμαστε φαίνεται να ταιριάζει, διότι από τη μία εντοπίζει τα βασικά μοντέλα και από την άλλη είναι αρκετά ευαίσθητη να συλλάβει την εξέλιξη στη κατανόηση κατά την διάρκεια των πειραματικών μαθημάτων. Προτείνει για τη βελτίωση της κατανόησης των ορίων από τους σπουδαστές ώστε να προχωρήσουν σε περισσότερο τυπικές μορφές κατανόησης της έννοιας, μια προσεκτική διδασκαλία η οποία να παίρνει υπόψη της την πλούσια ποικιλία από τα πρότυπα ορίου που οι σπουδαστές φέρουν στη τάξη όπως

και τα είδη της γνώσης που εκτιμούν. Στη προσπάθεια αυτή μπορούν να βοηθήσουν οι προτάσεις διαφόρων ερευνητών όπως, να εξεταστούν και ερμηνευτούν οι αντιλήψεις των σπουδαστών από την άποψη εννοιολογικών μεταφορών (με βάση την φυσική εμπειρία) των ενσαρκωμένων μαθηματικών Lakoff και Nunez(2000), ή από την άποψη των επιστημολογικών εμποδίων(Cornu,1991; Sierpinska,1987) ή την άποψη των (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) που αναφέρεται στη σύγκρουση της εικόνας έννοιας και του ορισμού μιας έννοιας.

Οι Grugnetti και Rizza (2002) ερεύνησαν τις δυσκολίες που είχαν οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες του ορίου και του απείρου. Ένα τμήμα της έρευνας που πραγματοποίησαν οι Dallanoce et al.(2000) και οι Alberti et al.(2001) (που συμμετείχαν στην ομάδα των παραπάνω ερευνητριών) αφορούσε τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών που σχετίζονται με το όριο μαζί με εκείνες που συνδέονται με το άπειρο τα απειροστά και τη συνέχεια. Σ' αυτή την έρευνα έλαβαν μέρος 300 μαθητές μεταξύ 10 και 19 ετών από σχολεία της Ιταλίας της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας διαπίστωσε την ύπαρξη πρωτοβαθμίων διαισθητικών αντιλήψεων ιδιαίτερα στις μικρότερες ηλικίες. Από την άλλη μεριά δεν ήταν δυνατό να προσδιορισθεί μια αξιοσημείωτη εξέλιξη αυτών των αντιλήψεων είτε ποσοτικά είτε ποιοτικά, όσο οι μαθητές προχωρούν σε επόμενες τάξεις. Αντίθετα αυτές οι πρωτοβάθμιες διαισθητικές αντιλήψεις τείνουν να εκφυλιστούν και σε κάποιες περιπτώσεις είναι πιθανή μια οπισθοδρόμηση. Οι ερευνήτριες σημειώνουν ότι τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με τη διαπίστωση του Fischbein (1973,1987) ο οποίος αναφερόμενος στις αρχικές διαισθήσεις των μαθητών παρατηρεί ότι είναι σημαντικό να καλλιεργηθούν αυτές ώστε να μπορέσουν να εξελιχθούν σε «δευτεροβάθμιες διαισθήσεις». Όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου οι παραπάνω ερευνήτριες παρατηρούν για τέτοιες έννοιες, με πολυπλοκότητα και μεγάλη σημασία, είναι κατάλληλη μια βαθμιαία προσέγγιση, που επιδιώκει να αναπτύξει μια κατανόηση από τα πρώτα χρόνια στο σχολείο, με αφετηρία τις πρώτες διαισθήσεις των μαθητών. Σ' αυτό το πλαίσιο επισημαίνουν τη σημασία της προσέγγισης ως πηγής πληροφοριών.

1.8 ΤΟ ΟΡΙΟ ΣΑΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΣΑΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Ο τρίτος κρίσιμος τομέας έρευνας εστιάζει στις δυσκολίες που συναντά η κατανόηση της έννοιας του ορίου, σαν μια διαδικασία αλλά και σαν αντικείμενο που σχετίζεται με το αποτέλεσμα της άπειρης αυτής διαδικασίας.

Τα τελευταία 25 χρόνια έχουν προταθεί θεωρίες οι οποίες ερμηνεύουν τη διαδικασία κατασκευής της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητή. Οι βασικές ενεργητικές (enactive) γνωσιακές θεωρίες[4] ασχολούνται με την εξήγηση της λειτουργίας της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, και έχουν σκοπό ν' αναλύσουν τον τρόπο που μια μαθηματική έννοια καταγράφεται στον νου και γίνεται κτήμα του μαθητή ώστε να ανακαλύπτεται και να χρησιμοποιείται όποτε προκύψει. Διαπιστώνουν σε μια μαθηματική έννοια δύο κυρίως μέρη ένα λειτουργικό, αλγοριθμικό και ένα συμβολικό εννοιολογικό που αποτελεί το μέρος εκείνο που προσφέρεται στην συμβολική διαχείριση και τους υπολογισμούς. Αυτές οι θεωρίες είναι :

- Η θεωρία APOS (1991). Ο όρος APOS προκύπτει από τα αρχικά Action – Process – Object–Schema, δηλαδη Δράση– Διαδικασία–Αντικείμενο–Σχήμα.

  Όπως αναφέρει ο εμπνευστής της, Dubinsky η ιδέα του ξεκινά από τον Piaget. Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώνονται πάνω στη βάση ενεργειών (actions) που ασκούνται βήμα -βήμα σε αντικείμενα (objects) και προσλαμβάνονται ως ιδέες μιας συνολικής διαδικασίας, και τελικά ενθυλακώνονται (encapsulated) ως ένα νοητικό σχήμα (schema).
- Η θεωρία της υποστασιοποίησης της Sfard(1991) (που είναι μικρή παραλλαγή της προηγούμενης θεωρίας) προτείνει δυο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας: μια λειτουργική (operational) η οποία εστιάζεται στην διαδικασία και μια δομική (structural η οποία εστιάζεται στα αντικείμενα. Σύμφωνα με την Sfard(1991), ιστορικά στην ανάπτυξη των μαθηματικών υπάρχει μια ιεραρχική δομή σύμφωνα με την οποία ο λειτουργικός τρόπος προσέγγισης μιας έννοιας ακολουθείται από τη δομική κατανόησή της στο αμέσως ψηλότερο επίπεδο. Τα τρία επίπεδα στην ανάπτυξη μιας έννοιας ονομάζονται εσωτερίκευση(iinteriorization), συμπύκνωση(condensation) και υποστασιοποίηση(reification). Η βαθύτερη κατανόηση μιας έννοιας επιτυγχάνεται στο επίπεδο της υποστασιοποίησης.

[4] Σπύρου, Π. (2005) Επιστημολογία των Μαθηματικών (Σημειώσεις Παραδόσεων)

- Η θεωρία του **procept,** σύνθετη λέξη παραγόμενη από το **process** και **concept** των Gray & Tall (1994). Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν αυτόν τον όρο για να ονομάσουν ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει είτε μια διαδικασία είτε μια έννοια.

1.8.1 ΘΕΩΡΙΑ DUBINSKY («γενετική αποσύνθεση»της έννοιας του ορίου) ΘΕΩΡΙΑ APOS

Ένα **σχήμα** είναι μια συνεπής συλλογή δράσεων, διαδικασιών, αντικειμένων και άλλων σχημάτων, που είναι συνδεδεμένα με κάποιον τρόπο και εφαρμοσμένα επάνω σε μια κατάσταση προβλήματος (Dubinsky,1991). Σύμφωνα με τον Dubinsky(1991), η γνώση μιας έννοιας είναι η τάση του ατόμου να φέρνει στο νου ένα σχήμα ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί, να οργανώσει ή να χειριστεί μια προβληματική κατάσταση. Ενδεχομένως είναι δύσκολο να διαχωριστεί η μαθηματική γνώση από τη μαθηματική κατασκευή. Αν θέλουμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, ας παρατηρήσουμε άτομα που λύνουν προβλήματα. Αυτό δεν μπορεί να αποκαλύψει σαφώς τα αντικείμενα, τις διαδικασίες και τα σχήματα, αλλά μπορεί να δείξει πως δημιουργείται η γνώση. Ένας μαθητής μπορεί να χειρίζεται κάποιο είδος προβλημάτων με παρόμοιο τρόπο, κάθε φορά που τα συναντά. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με σχήματα. Αν ο μαθητής επιτύχει, τα προβλήματα έχουν αφομοιωθεί στο σχήμα. Αν όχι, το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε μπορεί να προσαρμοστεί ώστε να αντιμετωπίσει τη νέα κατάσταση. Μπορεί όμως να μην συμβεί αυτό.

Για την κατανόηση μιας έννοιας που εξετάζουμε, ο Dubinsky (1991) υποστηρίζει ότι σε ήδη υπάρχοντα σχήματα δημιουργούνται νέα με βάση τη αναστοχαστική αφαίρεση και έχει διατυπώσει την έννοια της «γενετικής αποσύνθεσης» των μαθηματικών εννοιών, δηλαδή μια συλλογή αναστοχαστικών αφαιρέσεων που προσεγγίζονται με μια ορισμένη σειρά ώστε να προκληθεί η κατανόηση μιας έννοιας. Αυτό σημαίνει ότι η κατανόηση δεν μπορεί να λάβει χώρα μέχρι να σχηματιστούν τουλάχιστον απλουστευτικά σχήματα. Διαφορετικά οι μαθητές γνωρίζουν μόνο να εκτελούν έργα ρουτίνας και αγνοούν το πραγματικό νόημα μιας έννοιας.

Όταν πρέπει η νέα γνώση να προσαρμοστεί με την υπάρχουσα , είναι απαραίτητοι περίοδοι σύγχυσης όπως αναφέρει ο Cornu (1991), αυτό αποτελεί τμήμα της μαθη-

σιακής διαδικασίας. Η σύγχυση είναι εκείνη που δημιουργεί την ανάγκη στους μαθητές να προσαρμόζουν τα σχήματα τους.

Η θεωρία **APOS** που εμπνευστής της είναι ο Dubinsky και αναπτύχτηκε από τον ίδιο και τους συναδέλφους του Cottril, Nichols, Schwingendorf, Thomas και Vidakovic(1996) προτείνει με βάση την αναστοχαστική αφαίρεση , να προχωρούμε από το ένα βήμα στο άλλο σε μια «γενετικής αποσύνθεσης» μιας έννοιας συνειδητοποιώντας και κατανοώντας καταστάσεις .

Στα πλαίσια της θεωρίας APOS, όσον αφορά τη «γενετική αποσύνθεση» του ορίου συνάρτησης $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, οι παραπάνω ερευνητές έκαναν συγκεκριμένες παρατηρήσεις ερμηνεύοντας και αναλύοντας τις δυσκολίες που συναντούσαν οι μαθητές τους ενώ εκτελούσαν κάποιες δραστηριότητες.

Κάποιοι μαθητές υπολόγιζαν την τιμή της f σ' ένα μόνο σημείο x κοντά στο α ή το f(α). Γι' αυτούς το όριο συνάρτησης ήταν μια στατική έννοια όχι πρακτικά πολύ διαφορετική από την τιμή της f στο α. Κάποιοι άλλοι προχωρούσαν ένα βήμα και υπολόγιζαν μερικά διαδοχικά σημεία κοντά στο α. Ενδεχομένως δεν έλεγχαν την διαδικασία, αλλά απλά το ένα βήμα υπολογισμού προκαλούσε το επόμενο. Όταν το άτομο αναστοχάζεται πάνω σε κάποια δράση, αρχίζει συνειδητά να αποκτά τον έλεγχο της. Τότε η συγκεκριμένη δράση εσωτερικοποιείται, και γίνεται μια διαδικασία (process).

Στα πλαίσια της «γενετικής αποσύνθεσης» από τη στιγμή που ο μαθητής έχει εσωτερικοποιήσει τις διαδικασίες $x \to a$ ή $f(x) \to \ell$ έχει συνειδητό έλεγχο μιας ακολουθίας τιμών του x που πλησιάζουν συνεχώς το α ή τιμών της συνάρτησης που πλησιάζουν τον αριθμό ℓ. Στο σημείο αυτό παρατηρήθηκαν δυσκολίες στους μαθητές να εσωτερικεύσουν με ένα συντονισμένο τρόπο τις δύο αυτές διαδικασίες.

Από την στιγμή που θα συντονισθούν οι παραπάνω διαδικασίες μέσω της f,δηλαδή ο μαθητής συνειδητοποιήσει ότι η συνάρτηση f εφαρμόζεται στη διαδικασία που το x προσεγγίζει το α για να προκύψει η διαδικασία που η f(x) προσεγγίζει το ℓ, έχει επιτευχθεί η κατασκευή ενός συντονισμένου σχήματος διαδικασιών.

Καθώς ο μαθητής αναστοχάζεται πάνω στη δράση μετασχηματισμού διαδικασιών,αυτές αρχίζουν να γίνονται **αντικείμενα (objects)** . Ένα αντικείμενο κατασκευάζεται μέσω της **ενθυλάκωσης (encapsulated)** μιας διαδικασίας και όταν ο μαθητής δρα συνειδητά, αντιλαμβάνεται ότι οι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σ' αυτήν και μπορεί να κατασκευάσει τέτοιους μετασχηματισμούς.

Το επόμενο βήμα είναι να ενσωματωθούν οι δύο διαδικασίες $x \to a$ και $f(x) \to \ell$ σε ένα αντικείμενο που τις περιλαμβάνει και το οποίο μπορούμε να χειριστούμε συνολικά.

Στο επόμενο βήμα αναδημιουργούνται οι δύο διαδικασίες $x \to a$ και $f(x) \to \ell$ με την εισαγωγή αριθμητικών εκτιμήσεων για την εγγύτητα της προσέγγισης.
Συμβολικά : $0<|x-a|<\delta$ και $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.
Για την ολοκληρωμένη σύλληψη του ε-δ ορισμού που εφαρμόζεται σε συγκεκριμένες καταστάσεις, πρέπει να συνδεθεί η αναδημιουργημένη διαδικασία του προηγούμενου βήματος με χρήση ποσοδεικτών. Στα δύο τελευταία βήματα εμφανίστηκαν οι μαθητές να έχουν ιδιαίτερα μεγάλες δυσκολίες.

Συνέπεια της «γενετικής αποσύνθεσης» της έννοιας του ορίου προκύπτει η διδακτική πρόταση: Για την εισαγωγή της έννοιας του ορίου πρέπει πρώτα να προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη νοητική εικόνα της έννοιας και την ακολουθία των νοητικών κατασκευών που είναι απαραίτητο να εκτελέσει ο μαθητής. Επειδή οι μαθητές έχουν διαφορετικές εμπειρίες και διαφορετικές γνωστικές δομές είναι απίθανο να απαιτηθεί για όλους μια ίδια ακολουθία. Είναι σημαντικό οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά και συνειδητά στην διαδικασία της αναστοχαστικής αφαίρεσης για να ανακασκευάσουν, όπου απαιτηθεί ,τη γνωστική δομή, τους καθώς προσπαθούν να κατανοήσουν την έννοια του ορίου. Στο σημείο αυτό μπορεί να λειτουργήσει υποβοηθητικά ο Η / Υ. Θα πρέπει όμως να ελέγχεται ο κόσμος των εμπειριών των μαθητών στο νέο περιβάλλον, να διαπιστώσουμε τι μαθαίνεται και με ποια μορφή η γνώση διατηρείται στο μυαλό του μαθητή.

Οι Cottrill et al.(1996),επισημαίνουν ότι: η κύρια συμβολή της «γενετικής αποσύνθεσης» στο σχεδιασμό της διδασκαλίας έγκειται στο ότι προτείνει συγκεκριμένες νοητικές κατασκευές που μπορούν να γίνουν κατά τη μάθηση του υλικού. Η διδασκαλία εστιάζεται στο να πείσει τους σπουδαστές να κάνουν αυτές τις κατασκευές. Ένας σημαντικός τρόπος με τον οποίο προσπαθούμε να το επιτύχουμε αυτό είναι να οδηγήσουμε τους σπουδαστές να κάνουν κατασκευές στους υπολογιστές, κατασκευές που πιστεύουμε ότι μπορούν να τους οδηγήσουν στο να κάνουν αντίστοιχες κατασκευές στο μυαλό τους.

1.8.2 ΤΟ ΟΡΙΟ ΩΣ PROCEPT

Οι Gray.E & Tall.D (1992) χρησιμοποίησαν τον όρο procept για να ονομάσουν ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει είτε μια διαδικασία είτε μια έννοια. Procepts συναντάμε ευρέως στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στην αριθμητική, άλγεβρα, απειρο-

στικό λογισμό και ανάλυση. Οι παραπάνω ερευνητές δεν υποστηρίζουν ότι όλες οι μαθηματικές έννοιες είναι procepts.

Τα σύμβολα $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ και $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$ είτε αντιπροσωπεύουν μια διαδικασία προσέγγισης ή το αριθμητικό αποτέλεσμα. Συνεπώς το όριο είναι ένα procept.

Για παράδειγμα το $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ χρησιμοποιεί την ιδέα να αναπαραστήσει την διαδικασία «τείνει προς ένα όριο» και την τιμή του ορίου. Αλλά σε σχέση με την αριθμητική και την άλγεβρα υπάρχει μια λεπτή διαφορά. Τα procepts στην αριθμητική (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός κ.λ.π) έχουν σαφώς ορισμένους αλγόριθμους υπολογισμού του αποτελέσματος, και στην άλγεβρα μπορούν τουλάχιστον δυνητικά να υπολογιστούν εάν οι τιμές των μεταβλητών είναι γνωστές.

Αλλά τα procepts του ορίου συχνά δεν έχουν ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο που να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα ο υπολογισμός

του παρακάτω αθροίσματος : $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$

Η τιμή είναι γνωστό ότι είναι $\frac{\pi^2}{6}$. Αλλά έχει υπολογισθεί αρχικά με τη χρήση σύνθετων μεθόδων της ανάλυσης και όχι με προφανείς αριθμητικές μεθόδους. Με αυτή τη λογική τα procepts λειτουργούν στα ανώτερα μαθηματικά με τρόπους που δεν είναι αναμενόμενοι από τους μαθητές, που στηριζόμενοι στην προηγούμενη εμπειρία τους , ενδεχομένως να οδηγηθούν σε περαιτέρω γνωστική σύγκρουση.

Οι Tall, et al. (2000),σημειώνουν ότι στον απειροστικό λογισμό, η διαδικασία του ορίου είναι δυνητικά άπειρη. Ενδεχομένως ένα όριο υπολογίζεται με μη πεπερασμένο αλγόριθμο. Έτσι αν και όλα τα σύμβολα που έχουν μια δομή, διαδικασία –έννοια, δηλαδή εκείνο που τα καθιστά ικανά να ταξινομηθούν ως procepts, οι αλλαγές στη φύση τους προξενεί κρίσιμες γνωστικές δυσκολίες στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και από την άλγεβρα στον απειροστικό λογισμό. Αυτό επίσης εξηγεί γιατί οι μαθητές ενώ είναι ικανοί να χρησιμοποιούν πεπερασμένους αλγόριθμους στον Απειροστικό Λογισμό, τους είναι δύσκολο να δίνουν λύσεις σε προβλήματα χρησιμοποιώντας την άπειρη διαδικασία του ορίου.

2. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα σημαντικό θέμα που απασχολεί τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι η συνεισφορά της μαθηματικής εκπαίδευσης και του εκπαιδευτικού στη διαδικασία της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και γενικότερα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Το θέμα της κατανόησης όμως έχει απασχολήσει τόσο κλασικούς φιλοσόφους (Locke, Hume, Spinoza), όσο και άλλους νεότερους(Vygotsky, Skinner). Ο τρόπος που ο μαθητής κατανοεί απασχολεί σύγχρονους ερευνητές (Dubinsky, 1991; Gray &Tall, 1994; Hiebert & Carpenter,1992 ; Sfard, 1991…). Η ανεπάρκεια της παραδοσιακής παιδαγωγικής άποψης, σύμφωνα με την οποία το σχολείο προσφέρει ένα περιβάλλον εξάσκησης και ενίσχυσης σωστών συμπεριφορών ο δε δάσκαλος ενισχύει τη συμπεριφορά που θέλει να επαναληφθεί, έστρεψαν το ενδιαφέρον των ερευνητών της διδακτικής σε εναλλακτικές προσεγγίσεις.

Η εναλλακτική προσέγγιση αναζητείται στη σχέση μεταξύ της δομής των μαθηματικών και της φύσης της ανθρώπινης σκέψης, την οποία μελετά η Γνωσιακή Επιστήμη[5]. Οι νεότερες εξελίξεις της ψυχολογίας, των νευροεπιστημών, της γλωσσολογίας, των μελετών για την τεχνητή νοημοσύνη προσέφεραν πολλές νέες ιδέες για το πώς η κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί και να αξιολογηθεί (Σπύρου, 2005 σ.256). Η τελευταία μεγάλη τομή στις διδακτικές θεωρίες είναι η θεωρία του κονστρουκτιβισμού η οποία ουσιαστικά αρχίζει με το έργο του Jean Piaget (1896-1980). Η έρευνα αρχίζει να εστιάζεται στο τι γίνεται στο ανθρώπινο μυαλό και στον τρόπο με τον οποίο είναι δομημένη η γνώση σ αυτό, σε αντίθεση με τις προγενέστερες έρευνες που έδιναν βάρος στη μελέτη της ανθρώπινης συμπεριφοράς.

Βασική θέση της Γνωστικής Ψυχολογίας είναι ότι οι πληροφορίες του περιβάλλοντος γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας από τον εγκέφαλο μέσω γνωστικών διαδικασιών όπως της αντίληψης, της προσοχής, της μνήμης και της σκέψης. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι πιστεύουν πως ο τρόπος με τον οποίο ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον εξαρτάται από τρεις βασικές ικανότητες :

a) την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος,

[5] Η γνωσιακή επιστήμη είναι ένα επιστημονικό πεδίο που συγκεντρώνει ό,τι είναι γνωστό για το νου από πολλούς ακαδημαϊκούς κλάδους: Ψυχολογία, Γλωσσολογία, Ανθρωπολογία, Φιλοσοφία και Επιστήμη των Υπολογιστών.

b) την ικανότητα του χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και

c) την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας (Βοσνιάδου, 2003).

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι περισσότεροι γνωστικοί ψυχολόγοι θεωρούν το νου ως ένα σύστημα που οικοδομεί και χειρίζεται σύμβολα. Προσπαθούν έτσι να κατανοήσουν πως αναπαριστώνται και χρησιμοποιούνται τα σύμβολα αυτά και πως σχετίζονται με την ανθρώπινη δραστηριότητα, ιδιαίτερα τη νοητική (Βοσνιάδου, 2003).

Οι Dufour,Janvier et al.(1987) σημειώνουν ότι για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα, κατασκευάζουμε νοητικές εικόνες , τις οποίες ονομάζουμε εσωτερικές –νοητικές αναπαραστάσεις. Με αυτήν την έννοια χρησιμοποιεί ο Piaget τον όρο «αναπαράσταση». Για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών οι εσωτερικές αναπαραστάσεις έχουν μεγάλη σημασία. Οι αναπαραστάσεις που σχηματίζει ο κάθε μαθητής στο μυαλό του για μία έννοια ή ένα σύμβολο, είναι διαφορετικές και καθορίζουν τον ατομικό τρόπο κατάκτησης της έννοιας.

Η κατανόηση είναι ο συνδυασμός αντίληψης και ενέργειας. Βασίζεται στην αναπαράσταση της πληροφορίας και στην ενέργεια του υποκειμένου σ' αυτή. Απαιτεί την κατασκευή, το χειρισμό και την αποθήκευση εσωτερικών αναπαραστάσεων. Ο Billman (1999) υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς αναπαράσταση .

Κατά τον Goldin(1998), οι στόχοι που τίθενται στη μαθηματική εκπαίδευση δεν πρέπει να περιορίζονται στη μεταβίβαση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου και στη διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης προβλήματος. Οι στόχοι πρέπει να εστιάζονται στην οικοδόμηση ισχυρών και διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης στους μαθητές. Ο Kaput (1987a) υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από τη μία δομή στην άλλη. «Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής, που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση»(Kaput,1987a).

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985: 1987a 1987b). Οι πρακτικοί λόγοι αφορούν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα μαθηματικά. Οι θεωρητικοί λόγοι αφορούν στην ανάγκη για ύπαρξη ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες, που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και

χρήση των αναπαραστάσεων. Το θεωρητικό πλαίσιο θεωρείται ότι παρέχει ένα γλωσσικό/σημειωτικό συμπλήρωμα στην καθαρά γνωστική προσέγγιση των πιο πάνω προβλημάτων (Kaput, 1987a, σ. 19).

Οι (Lesh, Post & Behr, 1987; Seeger, 1998), υποστηρίζουν ότι η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει :

- την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεσαι με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης,
- την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης, και
- την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο.

Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος διαφαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εξετάζουν το θέμα αυτό (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Boulton-Lewis, 1998; Cifarelli, 1998; Duval, 1987; Even, 1998; Gagatsis, 1997; Gagatsis et al.,1999; Goldin & Kaput, 1996; Greer &Harel, 1998; Hitt, 1998; Janvier,1987a; Janvier, 1987b; Janvier, 1998; Kput, 1985; Kaput, 1987a; Kaput, 1987b; Lesh, Behr, & Post, 1987a; Lesh, Post, & Behr, 1987b)[6].

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε στην έννοια της αναπαράστασης και τα είδη αναπαραστάσεων και εστιάζουμε στο ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών με ιδιαίτερη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και την έννοια του ορίου συνάρτησης.

2.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Ο όρος « **αναπαράσταση**» είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin, & Kaput, 1996 ; Kaput, 1985 ; Roth & McGinn, 1998 ;Seeger,1998 ; Von Claserfeld,1987b).

Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα : προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin, & Kaput, 1996; Kaput, 1988) . Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί «**σχήματα συμβόλων**» (Kaput, 1987; Kaput, 1987b) ή «**συστήματα αναπαράστασης**» (Goldin,1987).

---

[6] Γαγάτσης, Α. – Μιχαηλίδου, Ε. – Σιακαλλή, Μ., «Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών» Λευκωσία 2001.

Επικρατέστερος θεωρείται ο ορισμός που δίνεται από τον Kaput (1987a),σύμφωνα με τον οποίο η έννοια της **αναπαράστασης** περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες.

α. την ολότητα που αναπαρίσταται

β. την ολότητα που αναπαριστά

γ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση, που αναπαρίστανται

δ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση

ε. την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες .

Με βάση αυτόν τον ορισμό η αναπαράσταση θεωρείται ως ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια (signified and referenced concept),το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο (signifier and referent material sign).

2.2.1 ΕΙΔΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στη σχετική βιβλιογραφία συναντάμε διάφορους τρόπους διάκρισης των αναπαραστάσεων. Στο πλαίσιο που αναφερόμαστε στην έννοια της αναπαράστασης, μπορούν να ενταχθούν δύο είδη αναπαραστάσεων : **οι εσωτερικές / νοητικές** και **οι εξωτερικές / σημειωτικές** αναπαραστάσεις (DeLoache, Uttal, & Pierroutsakos, 1998: Gagatsis et al., 1999: Goldin, & Kaput, 1996: Janvier, 1987a: Roth, & McGinn, 1998: Seeger, 1998). Οι Goldin και Kaput διακρίνουν τα εσωτερικά από τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης υποστηρίζοντας ότι «η διάκριση αυτή είναι ουσιαστικής σημασίας για την Ψυχολογία και τη μάθηση των Μαθηματικών» (Goldin & Kaput, 1996).

Ο όρος εσωτερικές / νοητικές αναπαραστάσεις αναφέρεται « σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου)» (Dufour-Janvier et al.,1987). Λόγω της φύσης τους δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν με βάση την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων.

Ο όρος εξωτερικές / σημειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρεται «σε όλους τους εξωτερικούς συμβολισμούς φορείς –σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα- οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος)» (Dufour-Janvier et al.,1987). Ο όρος ση-

μειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως ανεξάρτητος από τη διάκριση «εσωτερικές –εξωτερικές» αναπαραστάσεις (Duval, 1987). Με τον τρόπο αυτόν υπονοείται ότι τόσο οι εξωτερικές όσο και οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι συνδυασμοί σημείων.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι εξωτερικές δηλώσεις ή καλύτερα «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών» δηλαδή οι εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες οι μαθητές (Lesh, Behr, & Post, 1987). Υπάρχουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος (Lesh, Behr, & Post, 1987):

1. Κείμενα, στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.
2. Χειριστικά αντικείμενα / μοντέλα , όπως είναι οι κύβοι αριθμητικής, οι ράβδοι κλασμάτων, η αριθμητική γραμμή, οι κύβοι Dienes, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος / μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά καθ' αυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
3. Εικόνες ή διαγράμματα - στατικά εικονικά μοντέλα τα οποία, όπως και τα χειριστικά μοντέλα, είναι δυνατό να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
4. Γλώσσες - συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών, που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία (π.χ. μαθηματική λογική).
5. Γραπτά σύμβολα - τα οποία, όπως και οι γλώσσες, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην ομιλούμενη γλώσσα.

Σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας και ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή η σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι αμφίδρομη(Goldin, & Kaput, 1996; Kaput, 1998) , όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1.

Διάγραμμα 1.

Πολλές φορές οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα (Goldin, & Kaput, 1996; Kaput, 1998).

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996).

Στην εργασία αυτή ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις εξωτερικές αναπαραστάσεις δηλαδή για τις γραφικές παραστάσεις, τις συμβολικές εκφράσεις ή τις λεκτικές περιγραφές που χρησιμοποιούμε στις ιδιότητες ή στις ασκήσεις και στα προβλήματα που εμπλέκουν την έννοια του ορίου. Ουσιαστικά μελετάμε αν η αλλαγή στον τύπο της αναπαράστασης επιφέρει αλλαγές στις ορθές ή λαθεμένες απαντήσεις των μαθητών. Είναι φανερό με τη μεθοδολογία στην έρευνα αυτή δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν οι νοερές αναπαραστάσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια του ορίου.

2.3 ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η μαθηματική εκπαίδευση χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Οι Dufour et al. (1987) σημειώνουν : «Η έννοια της αναπαράστασης είναι σύμφυτη με τα μαθηματικά». Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζει η χρήση συστημάτων αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις και έρευνες τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα. Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics(NCTM) πρόσθεσε την αναπαράσταση στα "Principles and Standards of School Mathematics", λόγω της αυξανόμενης σημασίας της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών ενώ αρχικά, το 1989, είχε θεωρηθεί ως μέρος της επικοινωνίας .

Ο βασικός στόχος της χρήσης εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι η δημιουργία πλούσιων εσωτερικών δομών για τις μαθηματικές έννοιες, αφού εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις βρίσκονται σε σχέση αλληλεπίδρασης (Goldin & Kaput, 1996). Δηλαδή οι εξωτερικές αναπαραστάσεις επηρεάζουν τις εσωτερικές, ενώ αυτές με τη σειρά τους βρίσκουν τη φυσική τους έκφραση – υλοποίηση (instantiation) μέσω των εξωτερικών. Όμως είναι σημαντικό οι εξωτερικές αναπαραστάσεις , που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία , να σχετίζονται με τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών, να σχετίζονται με τις ήδη υπάρχουσες εσωτερικές αναπαραστάσεις (DeLoache et al.,1998; Dufour-Janvier et al.,1987; Von Clasersfeld,1987b). Είναι πιθανόν να υπάρχει χάσμα ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, τις οποίες καλούνται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, και στην αναπαράσταση που έχουν οι ίδιοι δημιουργήσει για την κατάσταση του προβλήματος ως αποτέλεσμα προσωπικών βιωμάτων και προηγούμενων εμπειριών.

Οι Coldin & Kaput (1996) υποστηρίζουν ότι η χρήση της έννοιας της αναπαράστασης μας επιτρέπει να περιγράψουμε με λεπτομέρεια τι μπορούν και τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές και να συζητήσουμε ποιες ικανότητες επιδιώκουμε να αναπτύξουν. Επιπρόσθετα παρέχει τη δυνατότητα για λεπτομερή ανάλυση δομικών ιδιοτήτων που θεωρούνται σημαντικές στα μαθηματικά, καθώς επίσης τη συζήτηση αναφορικά με τα αποτελέσματα που οφείλονται στο μέσο που χρησιμοποιείται για τη παρουσίαση των εξωτερικών αναπαραστάσεων.

Η χρήση ποικιλίας εξωτερικών αναπαραστάσεων έχει συνδεθεί με τη διαδικασία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Ο Duval (2002) θεωρεί ότι χαρακτηριστικό

στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η ταυτόχρονη κινητοποίηση δύο τουλάχιστον συστημάτων αναπαράστασης. Με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων, που αναφέρονται στην ίδια έννοια δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να αντιληφθεί τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών αναπαραστάσεων, την κοινή δομή και να κατορθώσει να οικοδομήσει την έννοια, που αποτελεί στόχο της διδασκαλίας. Όμως παρόλο που η αναγνώριση και η αξιοποίηση των σχέσεων δομής ανάμεσα σε καταστάσεις, που διαφέρουν όσον αφορά τα εξωτερικά χαρακτηριστικά είναι σύμφυτη με τη μαθηματική γνώση όπως επισημαίνουν οι Green και Harel (1998), σύμφωνα με αποτελέσματα πειραματικών μελετών των παραπάνω ερευνητών, τα υποκείμενα αδυνατούν να εντοπίσουν τέτοιες σχέσεις δομικής ομοιότητας, όταν κληθούν να χειριστούν ισομορφικά προβλήματα[7].

Πολλές φορές τα υποκείμενα αποτυγχάνουν να εφαρμόσουν μαθηματικές αρχές σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Συγκεκριμένα οι Dufour-Janvier et al.(1987), αναφέρουν ότι δημιουργείται σύγχυση, όταν τα υποκείμενα έρχονται αντιμέτωπα με την ίδια έννοια ενσωματωμένη σε διαφορετικά πλαίσια (context). Το γεγονός αυτό σύμφωνα με τους Dufour-Janvier et al.(1987), δημιουργεί αμφιβολίες αναφορικά με την αποτελεσματικότητα της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια έννοια. Στην πραγματικότητα απλώς δημιουργούνται συντακτικοί κανόνες αντιστοιχίας ανάμεσα στις αναπαραστάσεις. Δεν αναζητούνται οι κοινές δομικές ιδιότητες των διαφόρων αναπαραστάσεων. Τα παραπάνω αποτελέσματα ερευνών(Dufour-Janvier et al.,1987; Green και Harel ,1998),επισημαίνουν μια σημαντική αδυναμία της μαθηματικής παιδείας. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα οι Green και Harel εισηγούνται «την καλλιέργεια δομικής συνείδησης και συγκεκριμένα την καλλιέργεια της ικανότητας αναγνώρισης ισομορφισμών από τα υποκείμενα ως μέρος της γενικότερης ανάπτυξης των δεξιοτήτων τους σε σχέση με την οικοδόμηση ενεργειών αναπαράστασης».

Η διαδικασία μετάφρασης από μια εξωτερική αναπαράσταση σε άλλη στοχεύει στην ενίσχυση τις συνδέσεις ανάμεσα στα γνωστικά πεδία και τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Ο όρος **μετάφραση** αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από μια αναπαράσταση σε μία άλλη (Janvier,1987).

Η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών όσο

[7] Ισομορφικά προβλήματα καλούνται αυτά που έχουν κοινά δομικά χαρακτηριστικά

και για την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a). Όσο κι αν το πέρασμα αυτό φαίνεται φυσικό, για μερικές περιπτώσεις, ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία (Duval, 1987), στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Gagatsis,1997; Janvier, 1987a ; Janvier, 1987b; Lesh et al.,1987a)[8]. Αν και τα περισσότερα διδακτικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό μια ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων με στόχο να διευκολύνουν την κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών, παραβλέπονται οι διαδικασίες μετάφρασης. Μια μετάφραση περιλαμβάνει δυο μορφές αναπαράστασης: την «πηγή»(αρχική αναπαράσταση) και το «στόχο»(τελική αναπαράσταση(Janvier, 1987a). Όπως επισημαίνει ο παραπάνω ερευνητής, προκειμένου να πραγματοποιηθεί άμεσα και σωστά μια μετάφραση είναι απαραίτητο να επιλεγούν και να αξιοποιηθούν τα στοιχεία της πηγής που είναι απαραίτητα για να δημιουργηθεί ο στόχος. Έτσι είναι φανερός ο ρόλος της διδασκαλίας στρατηγικών για μια επιτυχημένη μετάφραση από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο. Επιπλέον ο Janvier (1987a) διαπιστώνει, από τα αποτελέσματα έρευνας ότι οι διαδικασίες μετάφρασης αναπτύσσονται αποτελεσματικότερα όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν μεταφράσεις τόσο από την πηγή στο στόχο όσο και από το στόχο στη πηγή κατά τρόπο συμμετρικό.

Η χρήση αναπαραστάσεων ως μέσων για την επίλυση προβλημάτων έχει απασχολήσει ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών (Cifarelli,1998; Gagatsis et al.1999; Goldin,1987; Lesh et al.1987a; Owens et al.1998). Οι όροι πρόβλημα και επίλυση προβλήματος επιδέχονται πολλαπλές ερμηνείες. Όσον αφορά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, εμπλέκεται ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων. Ένα επεισόδιο επίλυσης προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μικρό μοντέλο μιας διαδικασίας μάθησης και ως τέτοιο, όπως η σύγχρονη έρευνα στην Ψυχολογία της Μάθησης υπογραμμίζει (Schoenfeld,1992) εμπλέκει πέρα από γνωστικούς, μεταγνωστικούς και συναισθηματικούς παράγοντες. Η σημασία τέτοιων παραγόντων προκύπτει όταν χρειάζεται να ερμηνευθεί η επιτυχία ενός υποκειμένου, το οποίο συμμετέχει στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Οι Lest et al.(1987a) εξέτασαν το ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις μεταφράσεις από το ένα σύ-

[8] Γαγάτσης ,Α. – Μιχαηλίδου, Ε. – Σιακαλλή, Μ., «Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών» Λευκωσία 2001.

στημα αναπαράστασης στο άλλο και στους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο το σύστημα. Οι παραπάνω ερευνητές διαπίστωσαν δυσκολίες μετάφρασης από τον ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, καθώς οι μετασχηματισμοί μέσα στο ίδιο το σύστημα αποτελούν σημαντικούς παράγοντες, οι οποίοι επηρεάζουν τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος. Οι Dufour-Janvier et al.(1987) επισημαίνουν ότι οι μαθητές δεν αξιολογούν τις αναπαραστάσεις με κριτήριο την καταλληλότητα τους στη συγκεκριμένη κατάσταση προβλήματος. Αντίθετα επιλέγουν την αναπαράσταση που χειρίζονται καλύτερα. Δεν αντιλαμβάνονται ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις αποτελούν διαφορετικούς τρόπους έκφρασης του ίδιου προβλήματος. Θεωρούν ότι κάθε αναπαράσταση αποτελεί διαφορετικό πρόβλημα.

Γενικά για να αξιοποιηθούν αποτελεσματικά οι αναπαραστάσεις και να λειτουργήσουν ως μέσα για τη κατανόηση και επίλυση προβλημάτων, είναι απαραίτητο οι μαθητές να κατανοήσουν τη φύση, τις δυνατότητες, τα χαρακτηριστικά και τους περιορισμούς των συγκεκριμένων αναπαραστάσεων και να είναι σε θέση να διακρίνουν τις σχέσεις δομής ανάμεσα στις αναπαραστάσεις, καθώς επίσης την αναλογία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση.

2.3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η έννοια του ορίου, άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της συνάρτησης, άρχισε να διαμορφώνεται μετά τη διαμόρφωση της συγκεκριμένης έννοιας (τέλος 18^{ου} αιώνα). Η έννοια της συνάρτησης είναι βασική και καταλαμβάνει μεγάλο μέρος στην διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τον Eisenberg (1992), «ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα έπρεπε να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης». Ωστόσο, η ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την διαδικασία συνδυασμού των συστημάτων αναπαράστασης μιας έννοιας, η οποία εμπλέκεται στην επίλυση προβλήματος, δυσχεραίνουν την επίτευξη του πιο πάνω στόχου(Hitt, 1998). Ο Kaput (1989) αναφέρει ότι η φύση

των συνδέσμων μέσα στις αναπαραστάσεις και μεταξύ των αναπαραστάσεων απαιτεί έρευνα. Πιθανότατα οι μαθητές διατηρούν τελείως διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα για τη συνάρτηση και δεν εκμεταλλεύονται πλήρως τα συμπληρωματικά χαρακτηριστικά καθενός. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται.

Ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από τη μια κατάσταση στην άλλη χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις (Hitt, 1998). Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών, η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, τόσο σε μαθητές γυμνασίου, σε μαθητές λυκείου (Gagatsis,1997; Hitt, 1998; Kerslake, 1986), σε αποφοίτους Λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992), όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artique, 1992) και καθηγητές Μαθηματικών (Hitt, 1998). Οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου(1992) σημειώνουν ότι μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση . Συγκεκριμένα , το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου. Συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση.

2.3.2 ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ο Tall (1995f), αναφέρεται στη χρήση των αναπαραστάσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με στόχο να βοηθήσουν ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματισθούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις. Σύμφωνα με τον Tall (1995f), μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κόσμους προσέγγισης των Μαθηματικών. δηλαδή τρεις τρόπους μαθηματικής σκέψης: τον ενσώματο ή ενσαρκωμένο (embodied), τον κόσμο των διεργασιών ή διαδι-

κασιοεννοιολογικό (proceptual) και τον αξιωματικό (axiomatic). Ο ενσώματος κόσμος σκέψης βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση. Οι εικονικές αναπαραστάσεις οπτικές ή νοερές, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στα πλαίσια του κόσμου αυτού. Στο κόσμο των διεργασιών ο μαθητής συνδέει την διαδικασία με την έννοια μέσω των μαθηματικών συμβόλων και αποτελεί το δεύτερο στάδιο εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Η αντίληψη που κυριαρχεί σε αυτόν τον κόσμο είναι ότι ο μαθητής πρέπει να μάθει να σκέφτεται χρησιμοποιώντας μόνο τις συμβολικές αναπαραστάσεις δηλαδή μόνο τα τυπικά μαθηματικά. Αξιωματικός κόσμος είναι ο κόσμος στον οποίο τα μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα και πρωταρχικές έννοιες Με χρήση αυτών, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις . Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις κ.ο.κ. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης. Οι δύο πρώτοι κόσμοι κυριαρχούν στη πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

Ο Tall(1995f) αναφέρεται σε τέσσερεις γενικές περιπτώσεις όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ώστε να συντελέσουν στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης του μαθητή.

- **Χρήση αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών**.

Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Η δυνατότητα αναπαράστασης αυτών των ορισμών με τρόπο ώστε να γίνουν κατανοητοί μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά.

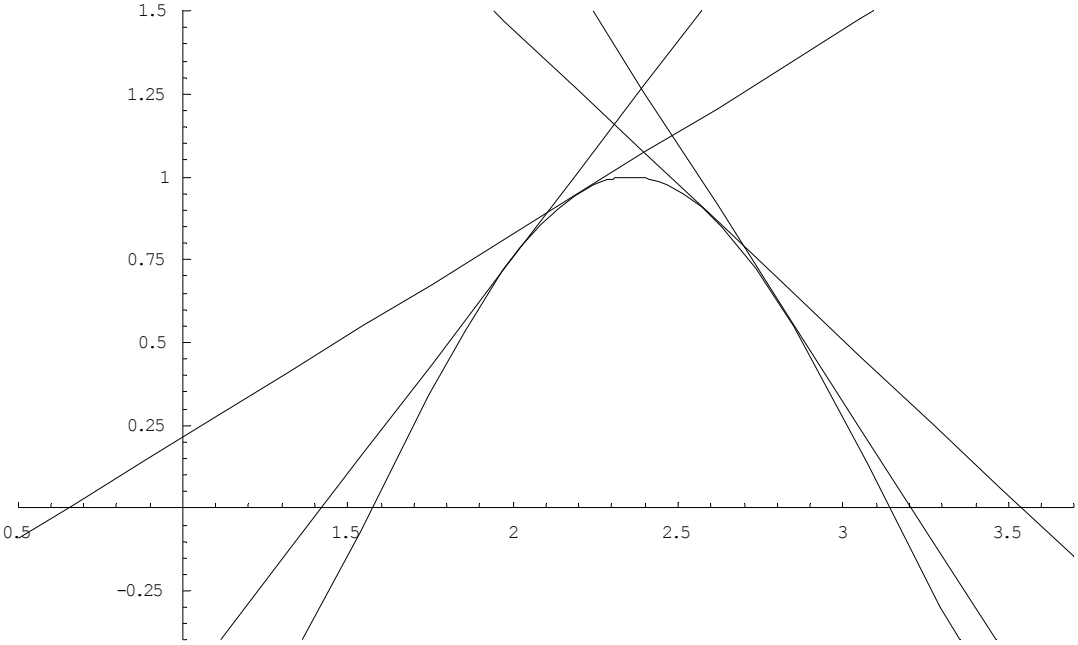
Ένα παράδειγμα έννοιας που δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, είναι η έννοια της απόλυτης τιμής. Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από τους μαθητές με έναν μάλλον μηχανικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη. Επίσης τους εμποδίζει να κατανοήσουν πιο δύσκολες έννοιες που θα συναντήσουν αργότερα και που η απόλυτη τιμή παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό τους, όπως είναι η έννοια του ορίου. Αντίθετα, αν ο μαθητής έχει κατα-

νοήσει την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών σε έναν άξονα και αντιληφθεί την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν, καθώς και την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών ως την απόσταση τους πάνω στον άξονα, θα έχει τη δυνατότητα να βλέπει θέματα που συνδέονται με την απόλυτη τιμή και από μια γεωμετρική οπτική. Αυτή η οπτική θα του φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις. Για να γίνει όμως αυτό απαιτείται εξάσκηση του μαθητή. Πρέπει δηλαδή από τον μαθητή, παράλληλα με τις αλγεβρικές λύσεις, να του ζητούνται και γεωμετρικές λύσεις των ασκήσεων όταν αυτό είναι πρόσφορο.

- **Χρήση αναπαραστάσεων για τη δημιουργία εικασιών**.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα να προκύψει αυτή ως εικασία. Δηλαδή, μετά από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανόν να ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Η δημιουργία εικασιών απουσιάζει πλήρως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Δεν φαίνεται η διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψε η διατύπωση των προτάσεων και των θεωρημάτων. Οι αναπαραστάσεις μπορεί να συμβάλουν ώστε να αναπτυχθεί μέσα στη τάξη ένας προβληματισμός, που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας. Ιδιαίτερα σήμερα, με τη χρήση των νέων τεχνολογιών, αυτό μπορεί να γίνει με πολύ καλύτερους όρους.

Αναφέρουμε για παράδειγμα ένα σημαντικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του λυκείου. Είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της. Πως, όμως, σκεφτήκαμε ότι συνδέεται η μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος; Αυτό το βήμα, όπως τονίστηκε και προηγουμένως, είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή και είναι ένα βήμα που μπορεί να γίνει στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο. Στο παράδειγμα που διαπραγματευόμαστε, η μελέτη της κίνησης της εφαπτομένης πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (σχήμα 1) μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία (αντ. αμβλεία) γωνία με τον άξονα xx΄. Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ο μαθητής μπορεί να βλέπει την κίνηση της εφαπτομένης.



Σχήμα 1

Η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί στη σύνδεση της μονοτονίας με την παράγωγο. Στη συνέχεια με ποιο προσεκτική μελέτη γραφημάτων και με κατάλληλες ερωτήσεις που τίθενται από τον καθηγητή μπορεί να δημιουργηθεί η ακόλουθη εικασία:
Αν η παράγωγος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι θετική (αντ. αρνητική) σε ένα διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε αυτό το διάστημα.

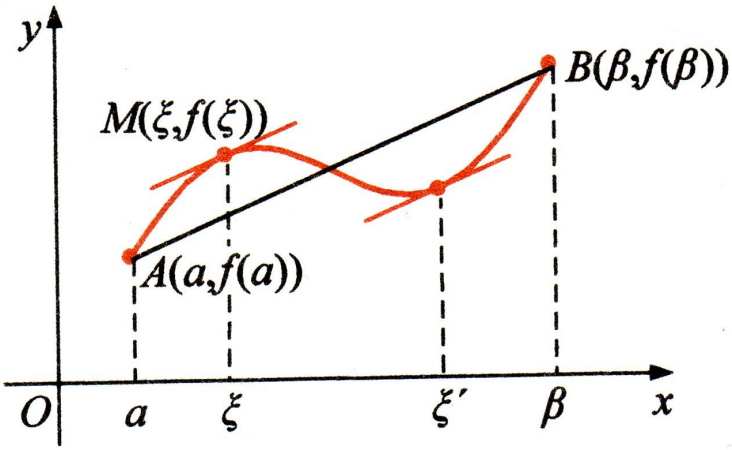
Η μελέτη και η προσεκτική παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων στη μαθηματική έρευνα πολλές φορές οδήγησε στη διατύπωση σημαντικών γενικών εικασιών που εν συνεχεία αποδείχθηκαν. Η μελέτη που περιγράψαμε παραπάνω είναι τέτοιας μορφής. Η εφαρμογή τέτοιων διαδικασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όχι μόνο στο Λύκειο αλλά και σε μικρότερες τάξεις, αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη του μαθητή. Για να είναι όμως αποτελεσματικές διαδικασίες αυτού του τύπου, πρέπει ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να σκέφτεται πάνω στα σχήματα και να μπορεί να μεταφράζει τα συμπεράσματα σε συμβολικά μαθηματικά.

- Χρήση αναπαραστάσεων για την περιγραφή Μαθηματικών συμπερασμάτων.

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στον μαθητή. Η περιγραφή αυτής της πρότασης με μια εικονική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής:

" Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ συνάρτηση συνεχής στο [α, β] και διαφορίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$ "

Η γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος (σχήμα 2) βοηθάει τον μαθητή να καταλάβει τι ουσιαστικά "λέει" το θεώρημα.



Σχήμα 2

- **Περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων.**

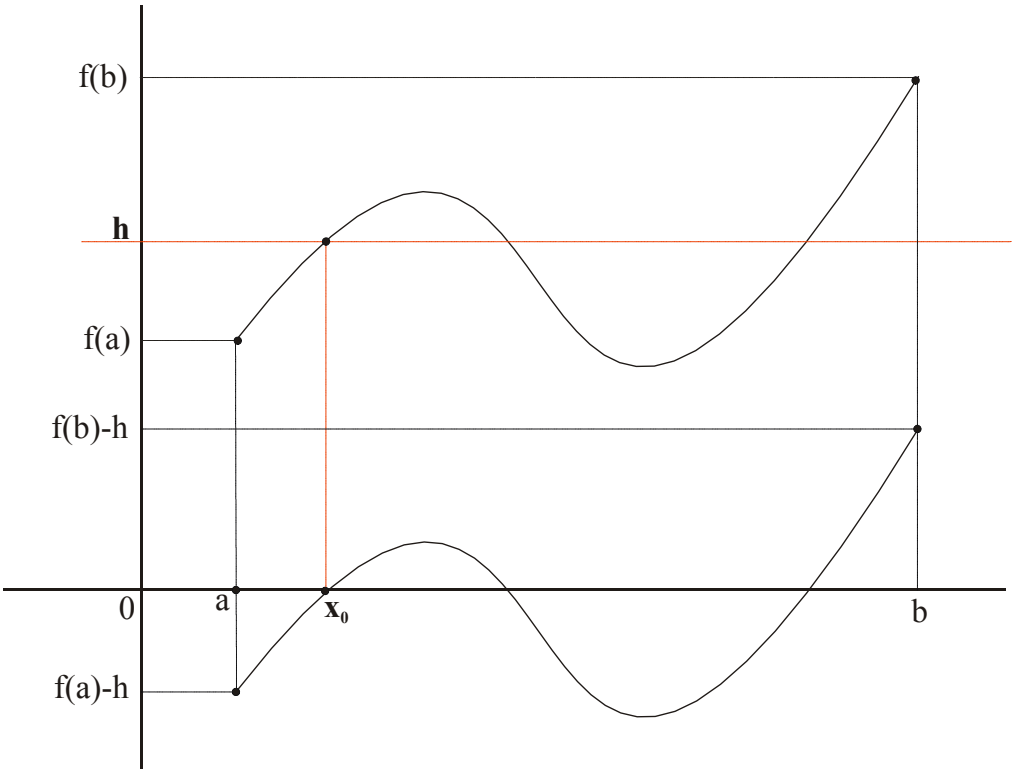
Πολλές φορές διαδικασίες ή αποδείξεις φαίνονται στους μαθητές περίεργες. Δεν μπορούν να καταλάβουν τι "λένε" και έτσι δεν μπορούν να τις μάθουν. Αυτό αφορά στις, θεωρούμενες από τους μαθητές, δύσκολες αποδείξεις. Αλλά και όσον αφορά σε διαδικασίες ή αποδείξεις που οι μαθητές τις θεωρούν εύκολες, πολλές φορές αυτό που μαθαίνουν και είναι σε θέση να κάνουν είναι απλώς να τις εφαρμόζουν ή να τις αναπαράγουν όταν τους ζητηθεί. Δεν έχουν κατανοήσει όμως την ουσία τους. Δεν έχουν καταλάβει την ουσιαστική μαθηματική ιδέα που κρύβεται πίσω από τη φορμαλιστική παρουσίαση. Η δυνατότητα περιγραφής τέτοιων διαδικασιών ή αποδείξεων με οικίες στο μαθητή αναπαραστάσεις τον βοηθάει στη κατανόηση τους. Ένα παράδειγμα μια τέτοιας απόδειξης είναι η απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

" Αν $f:[a, b] \to R$ συνεχής συνάρτηση και $f(a) < h < f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_o) = η$."

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για η=0, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b] \to \mathbf{R}$, με $g(x)=f(x)-η$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=η$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη που δεν δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές. Πόσοι όμως από αυτούς κατανοούν την ουσία της; Πόσοι κατανοούν ότι κάνουμε μια μεταφορά της συνάρτησης g, ώστε να ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή όμως της παραπάνω απόδειξης με το σχήμα 3 ή, πολύ καλύτερα, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου θα φαίνεται η κίνηση, αναπαριστά αυτή την ιδέα.



Σχήμα 3

Ο Tall(1995), σημειώνει ότι για να μπορέσει ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών

στο σχολείο, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τον ενσαρκωμένο και τον διαδιακασιοεννοιολογικό κόσμο σκέψης. Να εξασκήσει τον μαθητή να χρησιμοποιεί και τους δύο κόσμους , να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τον ένα στον άλλο. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτόν που είναι πιο πρόσφορος για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει , γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από τη τυπική απόδειξη.

2.3.3 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟ

Οι νοητικές αναπαραστάσεις είναι νοητικοί σχηματισμοί που παράγονται εσωτερικά και οργανώνονται , εμπλουτίζονται ή απορρίπτονται ανάλογα με το βαθμό χρήσης και εφαρμογής τους στα πλαίσια της καθημερινής εμπειρίας.

Όσον αφορά την έννοια του ορίου, επειδή διαθέτει πλούσια διαισθητική βάση, οι μαθητές που διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια, διατηρούν άτυπες αντιλήψεις για αυτήν(Κεφ.1). Αποτέλεσμα αυτών των αντιλήψεων είναι κάποιες φορές οι νοητικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν να είναι ασυνεπείς με την έννοια κατά συνέπεια και η εικόνα έννοιας που προκύπτει. Αυτό γίνεται φανερό με τις παρανοήσεις για την έννοια στις οποίες οδηγούνται. Η σημασία των άτυπων αντιλήψεων έχει απασχολήσει και απασχολεί ερευνητές της διδακτικής(Cornu ,1981,1983 ; Davis & Vinner,1986; Grugnetti & Rizza, 2003; Schwarzenberger & Tall, 1978; Williams,1991,2001).

Η Juter (2003) με έρευνα της σε πανεπιστήμιο της Σουηδίας αναζήτησε απαντήσεις στις ερωτήσεις :

- πως σχηματίζουν οι φοιτητές τις εσωτερικές αναπαραστάσεις τους για το όριο συνάρτησης,
- αν αλλάζουν αυτές οι αναπαραστάσεις με τη διδασκαλία κατά τη διάρκεια της έρευνας,
- αν κάτι αλλάζει τι είναι αυτό και
- αν οι αναπαραστάσεις των φοιτητών με υψηλές επιδόσεις διαφέρουν από αυτών με χαμηλότερες.

Στην έρευνα συμμετείχαν περίπου 100 φοιτητές, 19 ετών και άνω(το ένα τέταρτο από αυτούς ήταν γυναίκες). Οι φοιτητές αυτοί είχαν διδαχθεί ανάλυση και άλγεβρα σε πρώτο επίπεδο. Παρακολούθησαν πρόγραμμα 20 εβδομάδων χωρισμένοι σε δύο

υποομάδες (10 εβδομάδες για κάθε ομάδα). Το πρόγραμμα περιλάμβανε δύο διαλέξεις (45 λεπτών) και δύο συνεδρίες εργασίας, τρεις ημέρες ανά εβδομάδα. Στη πρώτη σειρά μαθημάτων το όριο συνάρτησης παρουσιάστηκε πριν τη παραγώγιση ενώ στη δεύτερη ακολούθησε άλλη σειρά σε σχέση με το ολοκλήρωμα και τις σειρές. Μετά το τέλος του προγράμματος, για τη πρώτη ομάδα η εξέταση ήταν μόνο γραπτή ενώ για τη δεύτερη γραπτή και προφορική.

Στα αποτελέσματα η ερευνήτρια παρουσίασε 4 περιπτώσεις που επελέγησαν σαν αντιπροσωπευτικότερες δείγματος ώστε να γίνουν συγκρίσεις. Η Juter (2003) σημειώνει ότι είναι αδύνατο να γνωρίζουμε τι σκέφτονται οι φοιτητές. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να διαπιστώσουμε τι ολοκληρώνουν, τι λένε και τι κάνουν. Σε κάποιες περιπτώσεις οι φοιτητές δεν εγκαταλείπουν τις αρχικές αναπαραστάσεις εύκολα. Ο Wililams(1991), αναφέρει μια πιθανή αιτία για αυτό. Με την υπόθεση ότι ένας φοιτητής σε αυτή την κατάσταση με την εμπειρία του μέχρι τώρα είναι σταθερός με τη θεωρία όπως την αντιλαμβάνεται. Μετά ο φοιτητής αντιμετωπίζει ένα παράδειγμα που δεν ταιριάζει με τη θεωρία . Αντί να τροποποιήσει την ερμηνεία του για τη θεωρία, πιθανά να θεωρήσει το παράδειγμα σαν ασήμαντη εξαίρεση. Μπορεί να είναι δύσκολο να αλλάξεις ένα μέρος μιας νοητικής αναπαράστασης σημειώνει η ερευνήτρια. Μπορεί να επιδρά και στην υπόλοιπη αναπαράσταση με ένα τρόπο που να απαιτεί και αυτή μεγαλύτερη τροποποίηση. Αυτός μπορεί να είναι ο λόγος που τμήματα της αναπαράστασης μένουν αναλλοίωτα ακόμη και αν το άτομο είναι ενημερωμένο για το λάθος.

Όμως παρατηρήθηκαν κάποιες αλλαγές στις αναπαραστάσεις των φοιτητών. Ένας φοιτητής ενώ θεωρούσε το όριο σαν σύγκριση μεταξύ συναρτήσεων, άρχισε να το θεωρεί σαν ένα άφθαστο σημείο. Κάποιος άλλος ενώ εστίαζε στην απόσταση μεταξύ συνάρτησης και ορίου, άρχισε να θεωρεί το όριο σαν φράγμα που δεν μπορεί να ξεπεραστεί. Αυτές οι αλλαγές δεν δημιούργησαν τροποποιήσεις στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις. Άλλαξαν όμως τον τρόπο που σκέφτονται αυτοί οι μαθητές για το όριο.

Σε καταστάσεις λύσης προβλήματος οι φοιτητές δεν επικαλέστηκαν τον ορισμού της έννοιας. Παρόλο που κάποιοι φοιτητές είχαν την άποψη ότι ο ορισμός είναι σημαντικός δεν τον γνώριζαν. Πίστευαν όμως ότι μπορούν να κατακτήσουν τη έννοια βασιζόμενοι μάλλον στην επιτυχή λύση των προβλημάτων στο πρόγραμμα. Ο Cornu (1991), σημειώνει ότι ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η έννοια του ορίου για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων που δε βασίζονται στο ορισμό αλλά σε διαφορετικές ιδιότητες της διαισθητικής έννοιας, έχει σαν συνεπεία οι σπουδαστές να πιστεύουν ότι «κατανοούν» τον ορισμό, χωρίς πραγματικά να κατανοούν όλες τις πτυχές

της τυπικής έννοιας. Οι φοιτητές μπορούν να έχουν μια εικόνα έννοιας που μπορεί να ανταποκριθεί μέχρι κάποιο σημείο. Όταν βρεθούν σε διαφορετική κατάσταση η εικόνα έννοιας που έχουν μπορεί να αλλάξει. Ο Vinner(1991),αναφέρει ότι όσο η αναφορά στην εικόνα έννοιας οδηγεί σε σωστή λύση, σπουδαστής θα συνεχίσει να αναφέρεται στην εικόνα έννοιας δεδομένου ότι η στρατηγική είναι απλή και φυσιολογική. Μόνο μια αποτυχία μπορεί να πείσει τον μαθητή να χρησιμοποιήσει τον ορισμό της έννοιας ως τελικό κριτήριο για τη δράση του.

Η Juter (2003) στα συμπεράσματα της έρευνας σημειώνει ότι οι αναπαραστάσεις των φοιτητών κατά τη διάρκεια του προγράμματος αλλάζουν. Κάποιες αλλαγές ανακατασκευάζουν ολόκληρα τμήματα της εικόνας έννοιας. Άλλες αλλαγές είναι μικρότερες τροποποιήσεις στην εικόνα έννοιας. Ακόμη τμήματα αν και λαθεμένα παραμένουν αναλλοίωτα. Η μεγαλύτερη αλλαγή στην εικόνα έννοιας έγινε στη φοιτήτρια που ήταν υψηλών επιδόσεων.

Σε πολλές περιπτώσεις η ίδια η έννοια ή η μαθηματική δομή παρουσιάζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής έχει την ευκαιρία να αξιολογήσει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, να εντοπίσει τις κοινές τους ιδιότητες και κατ' επέκταση τη μαθηματική δομή που αποτελεί στόχο της διδασκαλίας. Όπως επισημαίνουν οι Green & Harel (1998), η αναγνώριση και η αξιοποίηση των δομικών σχέσεων ανάμεσα σε καταστάσεις που διαφέρουν όσον αφορά τα εξωτερικά χαρακτηριστικά είναι σύμφυτη με τη μαθηματική γνώση. Οι Gagatsis & Christou (2002) παρατηρούν ότι όταν η διδασκαλία εννοιών γίνεται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι μαθητές πραγματοποιούν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων και έτσι μπορούν να διακρίνουν μεταξύ τους τις μαθηματικές έννοιες.

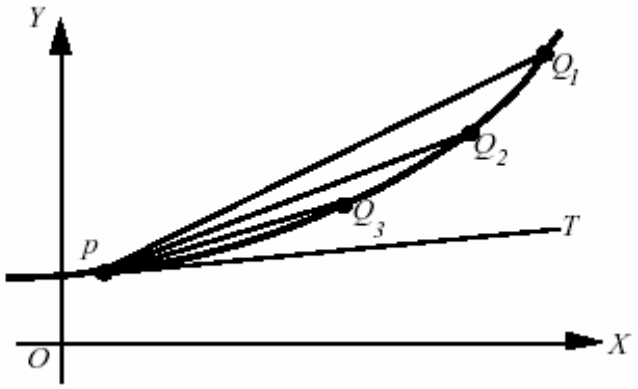
Πολλές μαθηματικές έννοιες μπορούμε να τις δούμε με δύο διαφορετικούς συμπληρωματικούς τρόπους, ως λειτουργικό και δομικό, ή ως διαδικασία και αντικείμενο. Η έννοια του αντικειμένου είναι δομημένη ώστε να ενσωματώνει τη διαδικασία (Dubinsky & Harel,1992). Οι Gray & Tall (1994) χρησιμοποίησαν τον όρο procept, σύνθετη λέξη παραγόμενη από το process και concept για να ονομάσουν ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει είτε μια διαδικασία είτε μια έννοια.Η αναπαράσταση $\lim_{x \to x_0} f(x)=\ell$ αντιπροσωπεύει είτε μια διαδικασία προσέγγισης, είτε το αντικείμενο που σχετίζεται με το αποτέλεσμα αυτής της άπειρης διαδικασίας. Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Monaghan,1991; Sierpinska,1987; Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall & Vinner ,1981;) διαπιστώνεται ότι όχι μόνο μαθητές αλλά και φοιτητές μαθηματικών σε όλο τον κόσμο δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι αριθμοί

0.999… και 1 ταυτίζονται. Η αναπαράσταση 0.999…παριστάνει μια διαδικασία (όριο της ακολουθίας 0.9, 0.99, 0.999, …) , ενώ η αναπαράσταση 1 παριστάνει ένα αντικείμενο. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να θεωρήσουν ίσους δύο αριθμούς που παριστάνονται από διαφορετικές αναπαραστάσεις. Ο αριθμός 1 δημιουργήθηκε από την άπειρη διαδικασία που περιγράφεται από τον 0.999…αλλά « αυτονομήθηκε» από αυτήν σαν αποτέλεσμα της.

Η Sfard (1991) παρατηρεί ότι η ικανότητα να αντιμετωπίζεις μια συνάρτηση ή ένα αριθμό ή άλλη μαθηματική έννοια ταυτόχρονα σαν διαδικασία και σαν αντικείμενο είναι απαραίτητη για τη βαθιά κατανόηση των μαθηματικών όπως και αν ορίζεται η κατανόηση. Δηλαδή η παραπάνω ερευνήτρια προτείνει δύο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας μια λειτουργική (operational) η οποία εστιάζεται στην διαδικασία και μια δομική (structural) η οποία εστιάζεται στα αντικείμενα.

Η έννοια του ορίου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισάγεται εποπτικά μέσω παραδειγμάτων και δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε γεωμετρικά ή αλγεβρικά πλαίσια. Ο τυπικός ορισμός δεν διδάσκεται. Η επιλογή παραδειγμάτων για την διδασκαλία του, ορίου απαιτεί μεγάλη προσοχή ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να σχηματίσουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις που θα τους οδηγήσουν σε συνεπή εικόνα έννοιας . Επίσης απαιτείται η διερεύνηση των άτυπων αντιλήψεων των μαθητών πριν από την διδασκαλία της έννοιας. Οι αντιλήψεις αυτές περιέχουν πλήθος από ασάφειες και οδηγούν σε παρανοήσεις σχετικές με την έννοια. Ο Janvier(1987) σημειώνει ότι «είναι σημαντικό να διαγνωστούν οι αντιλήψεις των μαθητών γιατί διασφαλίζουν τη βασική γνώση, που θα συστηματοποιηθεί με τη διδασκαλία».

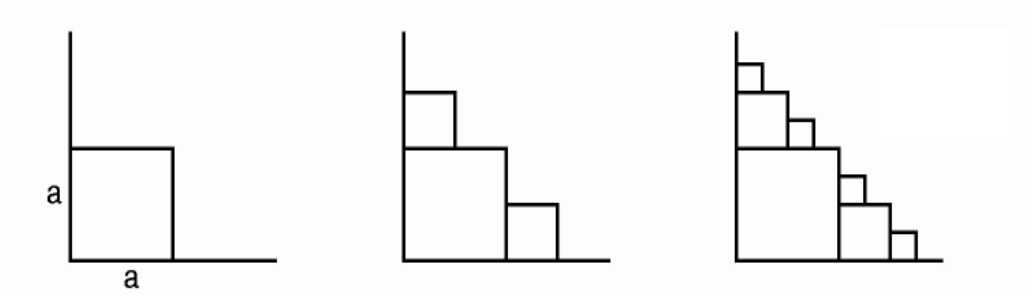
Το παράδειγμα μιας εφαπτομένης που θεωρείται σαν όριο μιας ακολουθίας τεμνουσών που την προσεγγίζουν, δείχνει ότι ο μαθητής πρέπει να ξεπεράσει πλήθος εννοιολογικών δυσκολιών για να οδηγηθεί στην κατανόηση του ορίου. Ο Orton (1977) μελέτησε τις απαντήσεις 110 μαθητών όταν ρωτήθηκαν τι συμβαίνει στις τέμνουσες (χορδές) PQ μιας σχεδιασμένης καμπύλης (σχήμα 4), καθώς το σημείο Q_1 τείνει προς το P κινούμενο πάνω στην καμπύλη.



Σχήμα 4

Οι 43 μαθητές φάνηκαν μη ικανοί, ακόμη και όταν παροτρύνθηκαν έντονα, να αντιληφθούν ότι η διαδικασία οδηγεί στην εφαπτομένη της καμπύλης. Η τέμνουσα αγνοήθηκε από πολλούς μαθητές και εμφανίστηκε το φαινόμενο να εστιάζουν την προσοχή τους μόνο στη χορδή PQ, παρά το γεγονός ότι το διάγραμμα και η εξήγηση είχαν σκοπό να προσπαθήσουν να εξασφαλίσουν ότι αυτό δεν θα συνέβαινε. Διατυπώθηκαν χαρακτηριστικές ανεπαρκείς απαντήσεις όπως : «η γραμμή μικραίνει σε μήκος», «γίνεται σημείο», «το εμβαδόν μικραίνει»….

Η προσπάθεια να απλοποιηθεί η έννοια του ορίου με παράδειγμα όπου γίνεται χρήση εξωτερικής αναπαράστασης που είναι «ασυνεπής» με την έννοια του ορίου οδηγεί τον μαθητή κατευθείαν σε γνωστικά εμπόδια. Όπως συμβαίνει στο παράδειγμα μιας «κλίμακας με σκαλοπάτια» όπου μισού μεγέθους σκαλοπάτια παρεμβάλλονται μεταξύ κάθε σκαλοπατιού και κατόπιν η διαδικασία επαναλαμβάνεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.**



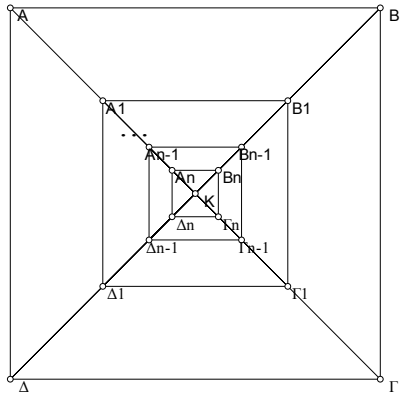
Σχήμα 5

Η ερώτηση «να βρεθεί το εμβαδόν κάτω από τη τελική κλίμακα» παραπέμπει σε πεπερασμένη διαδικασία(πεπερασμένος αριθμός βημάτων).Ο μαθητής, είναι πιθανό με αυτό το παράδειγμα θεωρήσει ότι το όριο της σκάλας με άπειρο αριθμό σκαλοπατιών είναι το «τελευταίο σκαλοπάτι» να σχηματίσει την εσωτερική αναπαράσταση ότι «το όριο μιας ακολουθίας είναι ο τελικός όρος της».

Αντίθετα η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων μπορούν να εισάγουν τους μαθητές σε οριακές διαδικασίες προσέγγισης που πιθανά να τους οδηγήσει στη κατάκτηση

της έννοιας. Η παρακάτω δραστηριότητα[9] προτείνεται για την εισαγωγή της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 1 και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του.
Έστω A_1, B_1, $Γ_1$, $Δ_1$ τα μέσα των ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_1B_1Γ_1Δ_1$,έστω A_2, B_2, $Γ_2$, $Δ_2$ τα μέσα των KA_1, KB_1, $KΓ_1$, $KΔ_1$ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_2B_2Γ_2Δ_2$,και γενικά αν A_n, B_n, $Γ_n$, $Δ_n$ τα μέσα των KA_{n-1}, KB_{n-1}, $KΓ_{n-1}$, $KΔ_{n-1}$ αντίστοιχα, σχηματίζουμε το τετράγωνο $A_nB_nΓ_nΔ_n$, για n = 2, 3, …
Δηλαδή κάθε τετράγωνο έχει κορυφές τα μέσα των αποστάσεων του Κ από τις κορυφές του τετραγώνου που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο βήμα.



(i) Ποια είναι η τομή των εσωτερικών των τετραγώνων;

(ii) Υπολογίστε το εμβαδόν E_n του τετραγώνου $A_nB_nΓ_nΔ_n$, n = 1, 2, …

(iii) Υπάρχει τετράγωνο που αυτό και τα επόμενά του έχουν εμβαδόν μικρότερο από 10^{-300};

Εξετάστε την αντίστοιχη ερώτηση για τον αριθμό $10^{-1.000.000}$.

[9] Ζαχαριάδης, Θ. (2005), Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος «Διδακτική Απειροστικού Λογισμού»

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε σύντομα τι συμβαίνει στο ελληνικό σχολείο σήμερα. Τους στόχους που θέτει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για τα μαθηματικά στην ενότητα που αναφερόμαστε, πώς εφαρμόζεται το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας καθώς και τον τρόπο διδασκαλίας που, συνήθως, ακολουθείται από τους διδάσκοντες. Στη συνέχεια καθορίζουμε τους στόχους της παρούσας έρευνας, περιγράφουμε τον τρόπο επιλογής του δείγματος των μαθητών της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου που ακολουθούν θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση και τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Παρουσιάζουμε το ερωτηματολόγιο που δόθηκε προς συμπλήρωση από τους μαθητές καθώς και τον τρόπο αξιολόγησης του. Τέλος θα αναφερθούμε στη στατιστική ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο δοθέν ερωτηματολόγιο.

3.2 ΤΙ ΙΣΧΥΕΙ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Στο Ελληνικό σχολείο σήμερα κυριαρχεί η παραδοσιακή παιδαγωγική άποψη, σύμφωνα με την οποία η καλή διδασκαλία είναι επαρκής για καλή μάθηση. Η διδασκαλία συνήθως είναι μετωπική, με στόχο τη μεταφορά πληροφοριών από τον διδάσκοντα προς τους μαθητές. Οι φροντιστηριακές προσεγγίσεις και νοοτροπίες κυριαρχούν, ενώ απουσιάζουν δραστηριότητες εναλλακτικού χαρακτήρα που θα ευνοούσαν τη διερευνητική και συνεργατική μάθηση, την οικοδόμηση των νέων γνώσεων και την καλλιέργεια δεξιοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν διδακτικές μεθόδους που εστιάζουν στην εκπλήρωση αυστηρά προσδιορισμένων διδακτικών στόχων. Όσον αφορά το μαθησιακό αποτέλεσμα πολλές φορές καθορίζεται από το κατά πόσο μπορούν οι μαθητές να ανακαλούν γνώσεις σε εξετάσεις συμβατικού τύπου. Δεν εξετάζεται κατά πόσο οι απαντήσεις των μαθητών βασίζονται στη βαθύτερη κατανόηση και την εφαρμογή δεξιοτήτων.

Η ευρύτερη εκπαιδευτική διαδικασία δεν ευνοεί διαθεματικές προσεγγίσεις. Ειδικότερα στο Ενιαίο Λύκειο παραμένει επικεντρωμένη στις πανελλαδικές εξετάσεις, μια προσέγγιση που σε μεγάλο βαθμό ευνοείται από το σχολικό περιβάλλον και ενισχύονται ακόμη περισσότερο από το κοινωνικό περιβάλλον. Δηλαδή το Ενιαίο Λύκειο δεν αποτελεί αυτοτελή κύκλο σπουδών αλλά αντιμετωπίζεται ως προθάλαμος για την εισαγωγή στη τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σ' αυτό το πλαίσιο εντάσσεται η μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές που είναι οι τελικοί αποδέκτες αυτής της κατάστασης συχνά αποκομίζουν μια λαθεμένη εικόνα του τι είναι μαθηματικά. Βασικές έννοιες των μαθηματικών δεν κατανοούνται από τους μαθητές. Η έννοια του ορίου συνάρτησης είναι η πιο σημαντική και ίσως η πιο δύσκολη στην κατανόησή της από τις έννοιες που διδάσκονται στο Λύκειο.

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την έννοια του ορίου στη Β΄ τάξη του Ενιαίου Λυκείου. Επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση στην έννοια του ορίου κατά την αναζήτηση του αθροίσματος των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο απολύτως μικρότερο της μονάδας. Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.) προτείνει να προσεγγίζουν οι μαθητές την έννοια του ορίου μέσα από προβλήματα και παραδείγματα που θα παρουσιάσει ο διδάσκων στη τάξη.

Στη Γ΄ τάξη όλοι οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά γενικής παιδείας, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουν, και χρησιμοποιούν το βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» των Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ., και Σβέρκου Α. Στο 1^{ο} κεφάλαιο του βιβλίου με τίτλο «Διαφορικός Λογισμός», γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Παρουσιάζονται οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας και τέλος της παραγώγου συνάρτησης. Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διαφόρων εννοιών και προτάσεων. Όσον αφορά την έννοια του ορίου, παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα. Επισημαίνεται μάλιστα στις «Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά το σχολικό έτος 2005-2006» του Π. Ι σ.193, ότι η διδασκαλία της έννοιας του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου.

Οι μαθητές της Γ΄ τάξης που επιλέγουν τη θετική ή την τεχνολογική κατεύθυνση διδάσκονται μαθηματικά κατεύθυνσης και χρησιμοποιούν το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» των Ανδρεαδάκη Σ., Κασταργύρη Β., Μέτη Σ., Μπουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ. και Πολύζου Γ. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από ένα

κεφάλαιο άλγεβρας και τρία κεφάλαια ανάλυσης. Η άλγεβρα αποτελεί το 17% περίπου της διδακτέας ύλης , ενώ η ανάλυση το υπόλοιπο 83%.

Το πρώτο κεφάλαιο της ανάλυσης αποτελείται από τρεις επιμέρους ενότητες :

a) Τις βασικές έννοιες της ανάλυσης,
b) Το όριο συνάρτησης σε ένα σημείο $x_o \varepsilon R \cup \{ -\infty , +\infty \}$ και
c) Τη συνέχεια συνάρτησης.

Η έννοια του ορίου στο $x_o \varepsilon R$ εισάγεται εποπτικά μέσω παραδειγμάτων δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε γεωμετρικά ή αριθμητικά πλαίσια. Ο τυπικός ε-δ ορισμός αναφέρεται μόνο για τη πληρότητα του βιβλίου, όπως αναφέρεται στις οδηγίες του Π.Ι, δεν διδάσκεται και προφανώς δεν εξετάζεται.

Στο σχολικό βιβλίο τονίζεται ότι η προϋπόθεση για την ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης στο $x_o \varepsilon R$, είναι να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(α, x_o) \cup (x_o, β)$ ή $(α, x_o)$ ή $(x_o, β)$. Αναφέρεται η μοναδικότητα του ορίου, και ακολουθούν οι ιδιότητες των ορίων και πιο συγκεκριμένα: όριο και διάταξη, όρια και πράξεις, το κριτήριο παρεμβολής, τριγωνομετρικά όρια. Επίσης υποδεικνύει πώς να εργαζόμαστε για να βρούμε το όριο σύνθετης συνάρτησης. Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται χωρίς να αποδεικνύονται. Η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης στο $x_o \varepsilon R$ ορίζεται επίσης εποπτικά ενώ τα όρια προσδιορίζονται και στη περίπτωση αυτή μόνο με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους.

Με τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου, όπως επισημαίνει το Π.Ι. (σ.194) επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_o \varepsilon R$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθεια τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.
- Να μπορούν να διαπιστώνουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση.
- Να μπορούν να υπολογίζουν τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
- Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και τα όρια τα σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές.
- Να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.

Επισημαίνεται επίσης (σ.193) ότι: « Η διδασκαλία του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώ-

γου και του ολοκληρώματος που αποτελεί και το κέντρο βάρους της ανάλυσης (που περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη). Γι' αυτό πρέπει να αποφεύγεται η άσκοπη ασκησιολογία και η λύση ασκήσεων με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $x_o \varepsilon R$ Ο προσδιορισμός του ορίου συνάρτησης πρέπει να γίνεται με εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων. Όρια, τα οποία υπολογίζονται ευκολότερα με τον κανόνα De L'Hopital, να διδαχθούν αργότερα (κεφ.2) με τη βοήθεια του κανόνα αυτού».

Συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι να μην δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην σε βάθος κατανόηση της έννοιας του ορίου, ούτε στην εφαρμογή της σε καταστάσεις λύσης προβλήματος που ξεφεύγουν από τη ρουτίνα των ασκήσεων. Ο δάσκαλος παρουσιάζει με αφηγηματικό τρόπο την έννοια, λύνει κάποια παραδείγματα και μετά δίνεται ένας αριθμός παρόμοιων περίπου ασκήσεων για εξάσκηση και εμπέδωση. Οι ασκήσεις δεν εστιάζουν στην έννοια του ορίου, αλλά κυρίως σε αλγεβρικές μεθόδους εύρεσής του, όπως τη χρήση ανισοτήτων, την έννοια της απόλυτης τιμής και σε άλλες πολύπλοκες τεχνικές, τις οποίες εφαρμόζουν μηχανικά για να λύσουν ασκήσεις και προβλήματα που εμπίπτουν σε ειδικές κατηγορίες. Οι μαθητές διαμορφώνουν την άδηλη πεποίθηση ότι τα όρια αφορούν κυρίως πράξεις και δεν χρειάζεται να κατακτήσουν την έννοια. Δηλαδή παρατηρείται μια υποβάθμιση σε θεμελιώδη έννοια της ανάλυσης όπως είναι το όριο συνάρτησης, σε ένα είδος αλγεβρικού και αλγοριθμικού υπολογισμού. Το γεγονός ότι στην έννοια του ορίου αντιμετωπίζεται μια άπειρη διαδικασία δεν εμφανίζεται πουθενά. Όμως μια τέτοια προσέγγιση δεν έχει σχέση με την προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του ορίου. Οι μαθητές μας μπορούν να υπολογίζουν τεχνικά πολύ δύσκολα όρια, αλλά ουσιαστικά αγνοούν τι ακριβώς σημαίνει όριο συνάρτησης. Στην υπάρχουσα κατάσταση και με δεδομένο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στη διδακτική ενότητα του ορίου, στην επιλογή θεμάτων για τις πανελλαδικές εξετάσεις δεν υπάρχει πάντα συμβατότητα με το σχολικό βιβλίο σε θέματα που αναφέρονται στο όριο συνάρτησης. Όπως για παράδειγμα συνέβη στα θέματα των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης που τέθηκαν στις πανελλαδικές εξετάσεις τον Μάιο του 2005. Συγκεκριμένα στο τρίτο ερώτημα του 3ου Θέματος , οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν όριο στο άπειρο τριγωνομετρικής συνάρτησης. Ανάλογο παράδειγμα ή άσκηση δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Τα θέμα αυτό δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές. Τα ποσοστά των μαθητών που κατόρθωσαν να συγκεντρώσουν το σύνολο των μονάδων σ' αυτό το ερώτημα είναι : 6% της θετικής κατεύθυνσης, και 4.87% της τεχνολογικής[10].

Παρόμοια θέματα έχουν τεθεί και σε εξετάσεις παλαιοτέρων χρόνων.

[10] Απλακίδης Ι.,2005

Αναφερόμαστε και στις πανελλαδικές εξετάσεις γιατί αφ' ενός μεν, καλώς ή κακώς, η διδασκαλία και η αξιολόγηση αποτελούν ξεχωριστές διαδικασίες στο Ελληνικό Σχολείο αφ' ετέρου δε γιατί κάθε χρόνο αναδεικνύουν αδυναμίες και προβλήματα της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Το Π.Ι στο Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) προσδιορίζει τους γενικούς στόχους για τα μαθηματικά. Μεταξύ άλλων αναφέρονται ότι επιδιώκεται οι μαθητές να μπορούν : «Να μυηθούν και να εξοικειωθούν με τη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και γενικότερα να καλλιεργήσουν τη μαθηματική τους σκέψη και την κριτική τους ικανότητα . Να αποκτήσουν μια αξιόλογη βάση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που θα τους επιτρέψει να συνεχίσουν τις σπουδές τους σε πιο προχωρημένο επίπεδο».(Ε.Π.Π.Σ.,1998). Όμως παρά τις αρχικές προθέσεις αυτών που σχεδίασαν την τελευταία εκπαιδευτική μεταρρύθμιση (1998) η πορεία των τελευταίων ετών όπως καταγράφεται και μέσα από τις εξετάσεις, υπογραμμίζει ότι το εκπαιδευτικό μας σύστημα εξακολουθεί να παραμένει εξεταστοκεντρικό.

Στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στη διδακτική ενότητα του ορίου εστιάζεται η ερευνητική μας εργασία. Το μαθηματικά (με το σύστημα που ισχύει σήμερα για την εισαγωγή των υποψηφίων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση), αποτελούν το πιο σημαντικό μάθημα για όσους μαθητές έχουν στόχο τις θετικές επιστήμες. Επίσης συντελεί αποφασιστικά και για την εισαγωγή στις ιατρικές και οικονομικές σχολές.(Για την εισαγωγή στη τριτοβάθμια εκπαίδευση ο βαθμός σε κάθε μάθημα στις Γ.Ε. πολλαπλασιάζεται με ειδικό συντελεστή ανάλογα με την Πανεπιστημιακή Σχολή που στοχεύει ο υποψήφιος φοιτητής). Σημειώνουμε πως ο αρχικός προγραμματισμός στην τελευταία μεταρρύθμιση προέβλεπε διαφορετικά μαθηματικά για τις δύο κατευθύνσεις. Εφαρμόστηκε μόνο μία χρονιά το 2000.Απο τότε έχουμε κοινό βιβλίο και κοινή ύλη και κοινές εξετάσεις για τις δύο κατευθύνσεις.

Όσον αφορά τον αριθμό των μαθητών που επιλέγουν τη Θετική κατεύθυνση χρόνο με τον χρόνο φθίνει ενώ της Τεχνολογικής αυξάνει όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα[11] :

	Θετική Κατεύθυνση	Τεχνολογική Κατεύθυνση
2000	43,4%	25,6%
2003	18,4%	35,2%

[11] Παπαδόπούλος Κ., Απλάκίδης Ι.(2004)

Εδώ πρέπει να σημειωθεί η ανομοιογένεια που παρατηρείται στη σύνθεση των τμημάτων Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, η οποία είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Τα ποσοστά των μαθητών με επίδοση κάτω από τη βάση, ιδιαίτερα στην Τεχνολογική Κατεύθυνση, παραμένουν σταθερά τα τελευταία χρόνια στο 75-80%.
Η μετακίνηση των μαθητών από τη θετική προς την τεχνολογική κατεύθυνση καθώς και οι εντυπωσιακά χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά των μαθητών της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που αξίζει να ερευνηθεί.

3.3 ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ

Η έννοια του Διδακτικού Συμβολαίου εισήχθη από τον Guy Brousseau (1990, 1997) σε μια προσπάθεια να δώσει μια θεωρητική ερμηνεία για αρκετές δυσλειτουργίες στη μάθηση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Brousseau : «Καλούμε Διδακτικό Συμβόλαιο, το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένονται από τον μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από το διδάσκοντα. Αυτό το συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν εν μέρει ρητά αυτή τη σχέση, αλλά πάνω από όλα, υπόρρητα το ό,τι κάθε συμμετέχων στη διδακτική σχέση θα τη διαχειρίζεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, αλλά πάντα έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του άλλου».

Το Διδακτικό Συμβόλαιο αναφέρεται σε ένα σύνολο αλληλοσυνδεόμενων κανόνων και αμοιβαίων προσδοκιών το οποίο διαπραγματεύεται στη μαθηματική τάξη. Επιβάλλει το πώς πρέπει να συμπεριφέρονται οι μαθητές και οι δάσκαλοι στο μάθημα των μαθηματικών, πως πρέπει να σκέφτονται και να επικοινωνούν μεταξύ τους, τι ερωτήσεις επιτρέπονται να γίνονται από το δάσκαλο καθώς και τι απαντήσεις αναμένονται από τους μαθητές.

Το συμβόλαιο αυτό «υπογράφεται» στα πρώτα στάδια της φοίτησης των παιδιών στο σχολείο. Η συμπεριφορά τους στα μαθηματικά προκύπτει από νόρμες και υπόρρητους κανόνες που δημιουργούνται με το χρόνο και ριζώνονται σταδιακά , με τη δύναμη της συνήθειας. Κατόπιν αυτού, επίδραση στη «δομή» του συμβολαίου ασκεί η στρατηγική της κάθε διδασκαλίας, και άρα οι κανόνες του διδακτικού συμβολαίου διαφοροποιούνται από τάξη σε τάξη καθώς και σε κάθε διαφορετική διδακτική κατάσταση. Δηλαδή το διδακτικό συμβόλαιο εξαρτάται πρώτα από όλα από τη στρατηγική διδασκαλίας που έχει υιοθετηθεί. Οι παιδαγωγικές επιλογές, ο τρόπος εργασίας

που απαιτείται από τους μαθητές, οι διδακτικοί στόχοι, η επιστημολογία του καθηγητή, οι συνθήκες αξιολόγησης, συνθέτουν τους ουσιαστικούς παράγοντες του συμβολαίου διδακτικής που θα υιοθετηθεί.

Η κατάκτηση γνώσης από τους μαθητές, είναι ο ακρογωνιαίος λίθος του διδακτικού συμβολαίου. Σε κάθε καινούριο «στάδιο», το συμβόλαιο ανανεώνεται και επαναδιαπραγματεύεται. Ο περισσότερος χρόνος αυτής της διαπραγμάτευσης περνά απαρατήρητος. Το Διδακτικό Συμβόλαιο εκδηλώνεται κυρίως όταν παραβιαστεί από έναν από τους συμμετέχοντες στη διδακτική σχέση. Σύμφωνα με τον Brousseau (1990, 1997) η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του συμβολαίου αλλά πάνω στις ρήξεις του διδακτικού συμβολαίου.

Το φαινόμενο του Διδακτικού Συμβολαίου στα σχολικά μαθηματικά είναι ιδιαίτερα έκδηλο όταν τα υποκείμενα έχουν να αντιμετωπίσουν , όχι συνηθισμένα σχολικά προβλήματα αλλά ανοικτά ή μη συνηθισμένα σχολικά λεκτικά προβλήματα. Πολλές μελέτες έχουν εκπονηθεί για την απήχηση του Διδακτικού Συμβολαίου στους μαθητές στη λύση προβλήματος και ιδιαίτερα στη λύση λεκτικών προβλημάτων (συνηθισμένων ή ανοικτών ή μη συνηθισμένων). Οι Verschaffel et al. (2000) μελέτησαν τη συμπεριφορά των μαθητών ηλικίας 10 έως 14 ετών σε τέτοιου είδους προβλήματα και ταξινομούν τα λεκτικά προβλήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες :

- Στα συνηθισμένα – σταθερά προβλήματα ή αλλιώς προβλήματα S (Standarrd Problems), τα οποία μπορούν να λυθούν από τους μαθητές χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Τα προβλήματα S αποτελούν , σύμφωνα με τους Verschaffel et al. (2000), την πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στα σχολικά μαθηματικά πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων.
- Στα προβληματικά προβλήματα ή αλλιώς προβλήματα P (Problematic Problems), στα οποία το μαθηματικό μοντέλο δεν είναι εμφανές εκτός και αν κατά την επίλυση τους ληφθούν υπόψη οι ρεαλιστικές καταστάσεις που εγείρουν τέτοια προβλήματα. Τα προβλήματα P σπανίως συναντώνται σε σχολικά εγχειρίδια και δεν χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία από μαθηματικούς – δασκάλους.

Όσον αφορά τον ρόλο του Διδακτικού Συμβολαίου στη λύση προβλήματος στους μαθητές Γυμνασίου –Λυκείου ελάχιστη προσοχή έχει δοθεί. Στην παρούσα μελέτη εξετάζουμε σε ποια έκταση η συμπεριφορά των μαθητών καθορίζεται από τους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου στα έργα που αφορούν την έννοια του ορίου.

3.4 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Με βάση τι ισχύει σήμερα στο Ελληνικό σχολείο, τι αναλυτικό πρόγραμμα εφαρμόζεται για τα μαθηματικά και τι διαδικασίες ακολουθούνται συνήθως στη διδασκαλία, η παρούσα έρευνα έχει στόχους να διερευνήσει :

- Τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του ορίου και τον βαθμό κατανόησης της έννοιας από αυτούς.
- Τον ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση της έννοιας του ορίου.
- Την επίδοση τους σε έργα πάνω στην έννοια του ορίου τα οποία απαιτούν μετάβαση από μια γεωμετρική αναπαράσταση σε μια αλγεβρική και αντίστροφα.
- Την χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων σε καταστάσεις λύσης προβλήματος που έχουν σχέση με το όριο .
- Πως σχετίζεται το «Διδακτικό Συμβόλαιο» με τις διαδικασίες που ακολουθούν για την επίλυση έργων που αφορούν την έννοια του ορίου.

3.4.1 ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν 222 μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου, εκ των οποίων 71 θετικής και 151 τεχνολογικής κατεύθυνσης, από 14 δημόσια σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Αθήνας .

Έγινε προσπάθεια να επιλεχθούν Λύκεια από διαφορετικές περιοχές (Μαρούσι, Ν. Ηράκλειο, Γαλάτσι, Θρακομακεδόνες, Καλλιθέα, Ν. Σμύρνη, Μοσχάτο, Ρέντης). Όμως η επιλογή δεν ήταν τυχαία και επιλέχθηκαν Λύκεια στα οποία δέχθηκαν να συνεργαστούν οι συνάδελφοι μαθηματικοί.

Η έρευνα έγινε τον Δεκέμβριο του 2005 , αφού οι μαθητές είχαν διδαχθεί την έννοια του ορίου συνάρτησης.

3.4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Δίνουμε παρακάτω μια σύντομη περιγραφή του ερωτηματολογίου (βλ. Παράρτημα) με τους αντίστοιχους συμβολισμούς για τις μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν για την στατιστική ανάλυση των δεδομένων(κωδικοποίηση).

ΕΡΓΟ 1ο

Περιλαμβάνει τρεις ερωτήσεις, οι οποίες μας δίνουν τη δυνατότητα να διερευνήσουμε τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του ορίου.

Δίνονται οι διαφορετικές τιμές του ύψους ενός φυτού που καλλιεργείται σ' ένα θερμοκήπιο. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν σε μια ακολουθία της μορφής 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999,… και οι μαθητές ερωτώνται αν το ύψος του φυτού έχει ένα όριο, να βρουν αυτό το όριο και να απαντήσουν αν μπορεί το φυτό να φθάσει την οροφή του θερμοκηπίου που έχει ύψος 2m.

Οι απαντήσεις των μαθητών στις τρεις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : L1, L2, L3 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 2ο

Ζητείται από τους μαθητές να υποθέσουν ότι είναι δάσκαλοι και να εξηγήσουν σύντομα σ' ένα μαθητή τα παρακάτω :

α) τι είναι όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o ,

β) τη σχέση του x_o με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και

γ) πότε δεν υπάρχει το όριο συνάρτησης .

Με δεδομένο ότι δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη των μαθηματικών του Λυκείου ο ε−δ ορισμός, σωστή θεωρείται η απάντηση (για τη πρώτη ερώτηση) : «μια συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο x_o, αν οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιανδήποτε τρόπο τον αριθμό x_o». Σωστές θεωρούνται επίσης οι απαντήσεις που εκφράζουν το ίδιο νόημα με διαφορετικές λέξεις, αυτές που περιλαμβάνουν ένα κατάλληλο σχήμα και αυτές που διατυπώνουν τον τυπικό ε−δ ορισμό.

Οι απαντήσεις των μαθητών στις τρεις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : D1, D2, D3 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 3ο

Δίνονται πέντε αλγεβρικές εκφράσεις, τέσσερεις από τις οποίες αντιπροσωπεύουν όρια και μία την αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης σε ένα σημείο. Ζητείται από τους μαθητές βασιζόμενοι στην γραφική παράσταση της συνάρτησης που δίνεται να κρίνουν αν είναι σωστές ή λάθος οι παραπάνω αλγεβρικές εκφράσεις. Οι απαντήσεις

των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : GS1, GS2, GS3, GS4, GS5 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 4 º

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων και έξι όρια σε αλγεβρική μορφή. Ζητείται από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν κάθε γραφική παράσταση με το αντίστοιχο όριο.

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : SG1, SG2, SG3, SG4 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 5º

Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν τρία όρια .

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : GS6, GS7, GS8 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 6º

Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης όταν δίνεται ο τύπος και να υπολογίσουν δύο όρια αυτής.

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : Scg, GSc1 , GSc2 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 7º

Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, βασιζόμενοι σε πέντε προϋποθέσεις από τις οποίες οι τέσσερεις περιλαμβάνουν όρια.

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους κωδικούς : Scg1, Scg2, Scg3, Scg4, Scg5 αντίστοιχα.

ΕΡΓΟ 8º

Δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης (που περιέχει μια παράμετρο) και ζητείται από τους μαθητές να βρουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης , να προσδιορίσουν την τιμή της παραμέτρου ώστε το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει σ' ένα σημείο να

πραγματικός αριθμός και να υπολογίσουν το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει σ' αυτό το σημείο .
Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτού του έργου συμβολίζονται με τους αντίστοιχους κωδικούς : Sd , SL1 , SL2.

ΕΡΓΟ 9ο

Το έργο αυτό αποτελείται από ένα πρόβλημα που περιλαμβάνει μια γεωμετρική αναπαράσταση και στοχεύει να διερευνήσει τη συμπεριφορά των μαθητών στη λύση προβλήματος που περιέχει όρια και αν αυτή επηρεάζεται από τη φύση της οπτικής αναπαράστασης. Οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση αυτού του έργου συμβολίζεται με τον κωδικό : P_i .

ΕΡΓΟ 10ο

Στο έργο αυτό παρουσιάζεται ένα πρόβλημα με μια γεωμετρική αναπαράσταση και ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν δύο όρια που αναφέρονται σthν κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) μιας τέμνουσας PQ ενός ημικυκλίου ενόσω ένα από τα σημεία τομής Q(x,y) = $Q(x, \sqrt{25-x^2})$ διατρέχει το ημικύκλιο , ενώ το σημείο P έχει συντεταγμένες (-3, 4).
Το πρώτο όριο που ζητείται να υπολογιστεί αναφέρεται στον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας PQ όταν το x τείνει στο 3. Οι απαντήσεις των μαθητών για το πρώτο όριο συμβολίζεται με τον κωδικό : PC1.
Το δεύτερο όριο που ζητείται να υπολογιστεί αναφέρεται στον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας PQ όταν το σημείο Q(x,y) που διατρέχει το ημικύκλιο μετακινηθεί στο σημείο με συντεταγμένες (-3, 4).
Οι απαντήσεις των μαθητών για το δεύτερο όριο συμβολίζεται με τον κωδικό : PC2.
Οι απαντήσεις των μαθητών στον υπολογισμό του δεύτερου ορίου μπορούν να δοθούν κατευθείαν χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική αναπαράσταση, ή να χρησιμοποιήσουν αλγοριθμικές διαδικασίες και συμβολίζονται με τους κωδικούς NDC (No Didactic Contract) και DC (Didactic Contract) αντίστοιχα.

3.4.3 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Τα ερωτηματολόγια διανεμήθηκαν στους μαθητές μετά από συνεννόηση με τον διδάσκοντα καθηγητή. Ο χρόνος που δόθηκε για τη συμπλήρωσή τους ήταν μία ώρα. Οι μαθητές τα συμπλήρωσαν, χωρίς να δοθούν επεξηγήσεις.

3.4.4 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Για τη βαθμολόγηση των απαντήσεων, ακολουθήθηκε ο παρακάτω τρόπος.
Η κάθε ερώτηση, σε όλα τα έργα λαμβάνει : 1 αν η απάντηση είναι σωστή και 0 αν η απάντηση είναι λανθασμένη ή δεν δίνεται απάντηση.
Όσον αφορά την βαθμολόγηση των απαντήσεων των μαθητών στον υπολογισμό του δεύτερου ορίου (PC2), του 10^{ου} έργου οι μεταβλητές με κωδικούς DC και NDC βαθμολογούνται ως εξής : 1 για τη μεταβλητή NDC αν οι μαθητές απαντούν χωρίς να εφαρμόζουν αλγοριθμικές διαδικασίες αλλά κατευθείαν από τη γεωμετρική αναπαράσταση και 0 για τη μεταβλητή DC, ενώ αν χρησιμοποιήσουν αλγοριθμικές διαδικασίες για να απαντήσουν, βαθμολογούνται με 0 για τη μεταβλητή NDC και 1 για τη μεταβλητή DC.

3.4.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΟΥ R.GRAS[12]

Για την στατιστική ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν οι μαθητές του δείγματος, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό επεξεργασίας SPSS και η Συνεπαγωγική Μέθοδος του R. Gras.

Η αναγκαιότητα χρήσης της Συνεπαγωγικής Μεθόδου του R. Gras διαφαίνεται μέσα από την παράθεση ενός προβληματισμού σχετικά με την έρευνα που διεξάγεται πάνω σε διάφορα εκπαιδευτικά θέματα. Συγκεκριμένα, ο Gras (1995) αναφέρει ότι υπάρχει ανάγκη για χρήση μιας μεθόδου ανάλυσης δεδομένων, η οποία αποτελεί «ένα ακριβή μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξάγουν συμπεράσματα». Χαρακτηριστικό

[12] Γαγάτσης, Α.-Μιχαηλίδου, Ε.- Σιακαλή, Μ. «Συναρτήσεις – Ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης, σελ. 79» Λευκωσία 2000.

παράδειγμα αποτελεί μια μέθοδος ανάλυσης, η οποία ιεραρχεί και συνδέει παράγοντες. Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (1995) κρίνεται κατάλληλη στην περίπτωση όπου αναζητούμε :

- τους κύριους παράγοντες διάκρισης σε ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών
- ένα διαμερισμό των μεταβλητών
- μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση : μια ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων
- μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών : ένα δένδρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής κτλ.

Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των υποκειμένων. Οι σχέσεις στις οποίες καταλήγουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για ένα δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται, Κατ' αναλογία η αποτυχία η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

Η συνεπαγωγική μέθοδος δίνει τα εξής διαγράμματα: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, Δεντροδιάγραμμα Ομοιότητας και Δεν το διάγραμμα Ιεράρχησης. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες συνεπαγωγικές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατό να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (τονισμένο βέλος) ή 95%(λεπτό βέλος). Σε περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή (Έργο 1→ Έργο 2) αυτό σημαίνει ότι επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο Έργο 2, ενώ η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο Έργο 1. Με άλλα λόγια, αν το υποκείμενο επιτύχει στο Έργο 1 θα επιτύχει και στο Έργο 2, ενώ αν το υποκείμενο αποτύχει στο Έργο 2 θα αποτύχει και στο Έργο 1. Στο Δεντροδιάγραμμα Ομοιότητας ή Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διάφορα έργα. Ομαδοποιούνται μαζί έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρνονται με όμοιο τρόπο. Οι οριζόντιες συνδέσεις με έντονο κόκκινο υποδηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

Τέλος οι απαντήσεις των μαθητών σχολιάστηκαν ποιοτικά. Παρουσιάζονται δε ενδιαφέρουσες απαντήσεις, οι οποίες δόθηκαν από τους μαθητές και που φανερώνουν τις παρανοήσεις τους στην έννοια του ορίου.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε τρία τμήματα. Στο πρώτο τμήμα παρουσιάζομε τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων που προέκυψαν από τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων με το λογισμικό SPSS. Γίνεται προσπάθεια να εμφανιστεί η τάση των μαθητών που απαντούν στις ερωτήσεις που τους δόθηκαν.

Στο δεύτερο τμήμα τα αποτελέσματα προέρχονται από τη συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων και το διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών, με σκοπό να ταξινομήσει τους μαθητές σύμφωνα με τις προσεγγίσεις που συνηθίζουν να κάνουν.

Στο τρίτο τμήμα παρουσιάζεται η ποιοτική ανάλυση των δεδομένων και ιδιαίτερα κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές . Στόχος είναι να εξηγηθεί καλύτερα η συμπεριφορά τους και συγκεκριμένα οι δυσκολίες που συνάντησαν σε κάθε ερώτηση, και να φωτιστούν οι παρανοήσεις που εκφράζουν.

4.2 ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΔΟΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε έργο παρουσιάζονται στον **ΠΙΝΑΚΑ 1.** Στις ερωτήσεις του πρώτου έργου οι οποίες εξέταζαν τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για το όριο συνάρτησης το ποσοστά επιτυχίας διαφοροποιούνται. Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών 92% απάντησε ότι το ύψος του φυτού έχει ένα όριο, όμως δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν την άπειρη διαδικασία η οποία εμφανίζεται και ότι η ακολουθία 1.9, 1.99, 1.999, …τείνει στο 2,γιατι μόνο 66% προσδιόρισε σωστά το όριο. Επίσης μεγαλύτερο ποσοστό 76% υπέθεσε ότι το φυτό δεν θα φθάσει στην οροφή δηλαδή προκύπτει ότι κάποιοι μαθητές απάντησαν ότι δεν θα φθάσει τα δύο μέτρα , χωρίς να έχουν απαντήσει ότι το όριο της ακολουθίας είναι το 2. Οι απαντήσεις των μαθητών σ' αυτές τις ερωτήσεις είναι πιθανά συνδυασμός των διαισθητικών τους αντιλήψεων για το όριο που έχουν αποκτηθεί από την καθημερινή τους εμπειρία και τις μαθηματικές τους γνώσεις για αυτή την έννοια.

Στο δεύτερο έργο όπου οι μαθητές χρειάζεται να δώσουν ποιοτικές εξηγήσεις εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις. Μόνο 20,7% απάντησαν σωστά τι είναι όριο συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o (D1) και μόνο 19,8% από αυτούς εξήγησαν σωστά την περίπτωση που δεν υπάρχει όριο συνάρτησης όταν το x τείνει σ' ένα συγκεκριμένο x_o σημείο (D3). Επίσης οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στο να κατανοήσουν τη σχέση ενός $x_o \in R$ με το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o (D2).

Οι μαθητές παρουσίασαν υψηλή επίδοση σε απλές μετατροπές μεταξύ αλγεβρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε ερωτήσεις που αφορούσαν το όριο συνάρτησης. Συγκεκριμένα στη περίπτωση που ζητείται από τους μαθητές να κρίνουν αν είναι σωστές ή λάθος τέσσερεις αλγεβρικές εκφράσεις ορίων και μια αλγεβρική έκφραση που δίνει την αριθμητική τιμή της συνάρτησης σ' ένα σημείο, βασιζόμενοι σε δοθείσα γραφική παράσταση, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι ως ακολούθως : GS1: 86,1%, GS2: 89,2%, GS3: 89,6%, και GS4: 83,3%. Στην $5^{η}$ ερώτηση του ίδιου έργου, οι μαθητές συνάντησαν μεγάλη δυσκολία. Μόνο 25% από αυτούς αναγνώρισαν ότι η αλγεβρική έκφραση που δινόταν ήταν λάθος. Η πλειοψηφία των μαθητών φάνηκε να μην αναγνώρισε ότι η ευθεία x=4 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που δίνεται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Ποσοστά σωστών απαντήσεων στο δοθέν ερωτηματολόγιο

Ερωτήσεις	% των σωστών απαντήσεων
L1	92.3
L2	65.8
L3	76.1
D1	20.7
D2	40.5
D3	19.8
GS1	86.1
GS2	89.2
GS3	89.6
GS4	83.3
GS5	25.2
SG1	90.5
SG2	92.8
SG3	88.2
SG4	77.9

GS6	71.2
GS7	66.2
GS8	83.3
Sgs	80.6
GSc1	68.5
GSc2	55.9
Scg1	42.8
Scg2	73
Scg3	49.5
Scg4	56.3
Scg5	44.6
Sd	92.3
SL1	63.3
SL2	59
Pi	6.8
PC1	32.9
PC2	40.5
DC	15,3
NDC	32,4

Στο 4^{ο} έργο οι μαθητές έπρεπε να αντιστοιχίσουν σε κάθε μια γραφική παράσταση συνάρτησης από τις τέσσερεις που δινόταν το αντίστοιχο όριο από τα έξι όρια που δινόταν σε αλγεβρική έκφραση. Τα ποσοστά επιτυχίας ήσαν πάνω από 80% (SG1: 90,5%, SG2: 92%, SG3: 88,8%, SG4: 77,9%).

Οι μαθητές είχαν μάλλον μικρότερη επιτυχία στο 5^{ο} έργο όπου δινόταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τρία όρια αυτής (GS6: 71,2%, GS7: 66,2%, GS8: 80,2%). Το γεγονός ότι οι απαντήσεις σ' αυτό το έργο δεν απαιτούσαν μόνο κάποιες διαπιστώσεις από τους μαθητές αλλά έπρεπε να ερμηνεύσουν τις συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης για να υπολογίσουν τα ζητούμενα όρια, φαίνεται ότι τους προκάλεσε μεγαλύτερη δυσκολία. Επιπλέον η κατασκευή αλγεβρικής έκφρασης που να βασίζεται σε μια γραφική παράσταση δεν συνηθίζεται στο σχολείο. Δηλαδή στο σχολείο η πρακτική που συνήθως εφαρμόζεται είναι να ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν γραφική παράσταση με βάση δοσμένη αλγεβρική έκφραση (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Duval, 2002).

Στο 6^{ο} έργο, 81% των μαθητών κατόρθωσαν να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δίνεται σε αλγεβρική έκφραση (ο τύπος της) (Scg), ενώ 69% και 56% αυτών υπολόγισαν τα ζητούμενα όρια (GSc1, GSc2). Τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας που παρατηρούνται στον υπολογισμό των ορίων σ' αυτό το έργο

σε σχέση με το προηγούμενο, θα μπορούσαν να εξηγηθούν από το γεγονός ότι στο προηγούμενο έργο δινόταν η γραφική παράσταση, ενώ στο 6^{ο} ο σωστός υπολογισμός των ορίων εξαρτάται από τη σωστή ή όχι κατασκευή της γραφικής παράστασης, και από τις πληροφορίες που μπορούσαν να πάρουν από την καινούργια αναπαράσταση.

Τα ποσοστά επιτυχίας στο 7^{ο} έργο, είναι φανερά χαμηλότερα. Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που βασίζεται σε τέσσερεις αλγεβρικές εκφράσεις που περιείχαν όρια και στην αριθμητική τιμή της συνάρτησης σε δύο σημεία, οι οποίες καθορίζουν την κατασκευή αυτή : Scg1: 42,8%, Scg2: 73%, Scg3: 49,5%, Scg4: 56,3% και Scg5: 44,6%. Οι μαθητές συνάντησαν τη μεγαλύτερη δυσκολία στη πρώτη (Scg1) και στη τελευταία ερώτηση (Scg5) όπου έπρεπε να σχεδιάσουν ασύμπτωτες, καθώς το x τείνει στο + ∞ ή - ∞. Τη μικρότερη δυσκολία συνάντησαν στη μετατροπή των αλγεβρικών εκφράσεων οι οποίες δεν περιέχουν όρια (Scg2) αλλά αναφέρονται στην αριθμητική τιμή της συνάρτησης στα σημεία x= - 3 και x=0. Τα χαμηλά ποσοστά σ' αυτό το έργο ενδεχομένως οφείλονται και στο γεγονός ότι τα στοιχεία που δίνονται δεν επαρκούν για την εικόνα της συνάρτησης. Δηλαδή υπάρχουν πολλά γραφήματα που ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις και οι μαθητές θα έπρεπε να σχεδιάσουν ένα. Τέτοιου τύπου ερωτήσεις δεν τους είναι οικείες. Σημειώνουμε ότι οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις αυτού του έργου χρησιμοποιούν συνήθως μονότονες συναρτήσεις στην κατασκευή της γραφικής παράστασης που ζητείται.

Στο 8^{ο} έργο σχεδόν όλοι οι μαθητές (92%) βρήκαν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης της οποίας ο τύπος περιέχει παράμετρο, ενώ 63% προσδιόρισαν τη παράμετρο έτσι ώστε το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει σε ένα συγκεκριμένο σημείο να είναι πραγματικός αριθμός (SL1) και 59% υπολόγισαν το ζητούμενο όριο (SL1). Η σχετικά χαμηλότερη επίδοση των μαθητών στις δύο τελευταίες ερωτήσεις του ίδιου θέματος, εξηγείται πιθανότατα από το γεγονός ότι η ύπαρξη της παραμέτρου στον τύπο της συνάρτησης, κάνει το έργο περισσότερο σύνθετο και λιγότερο οικείο στους μαθητές σε σχέση με τις καθιερωμένες μεθόδους που χειρίζονται τα όρια στις δραστηριότητες που τους δίνονται στα μαθηματικά στο σχολείο.

Η επίδοση των μαθητών στο 9^{ο} έργο μειώνεται ριζικά, καθώς μόνο 7% των μαθητών μπόρεσε να λύσει το πρόβλημα. Οι μαθητές στηρίχτηκαν περισσότερο από όσο έπρεπε στη γεωμετρική αναπαράσταση που συνόδευε το πρόβλημα, ώστε να οδηγηθούν και να τη χρησιμοποιήσουν με ένα ακατάλληλο διαισθητικό τρόπο που τους οδήγησε σε μια λανθασμένη μαθηματικά απάντηση.

Στο 10^{ο} έργο μόνο 33% υπολόγισε σωστά το πρώτο όριο που αναφερόταν στον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας QP ενός ημικυκλίου όταν P(3,4) και Q(x,ψ) διατρέχει το ημικύκλιο δηλαδή υπολόγισαν το limλ(x) όταν το x τείνει στο 3, όπου λ(x) προσδιορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας QP, ενώ 41% υπολόγισαν σωστά το δεύτερο όριο όταν το σημείο Q(x,ψ) μετακινήθηκε σε ένα συγκεκριμένο σημείο Q(-3, 4) του ημικυκλίου δηλαδή υπολόγισαν το limλ(x) όταν το x τείνει στο -3. Ένα ποσοστό 32% των μαθητών βρήκε κατευθείαν το δεύτερο όριο (Pc2) χρησιμοποιώντας αποτελεσματικά τις πληροφορίες που δίνονται από τη δοθείσα γεωμετρική αναπαράσταση (NDC). Όμως αν και η τιμή του συντελεστή διεύθυνσης είναι προφανής από τις πληροφορίες που δίνει το σχήμα, 15% των μαθητών επέμενε για να υπολογίσει το όριο να χρησιμοποιεί τις καθιερωμένες μεθόδους (DC), δηλαδή αλγοριθμικές διαδικασίες.

Συνοπτικά, η προηγούμενη περιγραφή των αποτελεσμάτων υποδεικνύει ότι οι μαθητές έχουν καλή επίδοση σε έργα που απαιτούν μετάφραση από μια γεωμετρική αναπαράσταση σε μια αλγεβρική και αντίστροφα, όταν απαιτείται μια απλή διαπίστωση όπως για παράδειγμα η αντιστοίχηση γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε αλγεβρικές εκφράσεις πάνω στα όρια. Το γεγονός ότι η έννοια του ορίου εισάγεται στο Λύκειο εποπτικά μέσω παραδειγμάτων και δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε γεωμετρικά και αλγεβρικά πλαίσια δίνει μια εξήγηση για αυτά τα ευρήματα.

Συγκριτικά μεγάλη επιτυχία παρατηρήθηκε στις μετατροπές από μια γεωμετρική αναπαράσταση σε μια αλγεβρική, όπου το ζητούμενο ήταν ο υπολογισμός ορίων από τις συντεταγμένες των σημείων στις δοθείσες γραφικές παραστάσεις. Ενώ στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή στη περίπτωση όπου το ζητούμενο ήταν η μετάβαση από μια αλγεβρική αναπαράσταση σε μια γεωμετρική, όταν δηλαδή δίνεται αλγεβρική έκφραση και ζητείται η κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, οι μαθητές παρουσίασαν μικρότερη επιτυχία. Με βάση τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (σ.195), με τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου, μεταξύ των άλλων «επιδιώκεται από τους μαθητές να μπορούν να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_o \in R$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση και να υπολογίζουν απλά όρια βασιζόμενοι στις ιδιότητες των ορίων». Δεν δίνεται έμφαση στη μετάβαση από μια αλγεβρική αναπαράσταση σε μια γεωμετρική όσον αφορά το όριο συνάρτησης, επομένως μαθηματικές δραστηριότητες τέτοιου είδους, δεν φαίνεται να περιλαμβάνονται στη συνήθη διδασκαλία.

Γενικά οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να μην κατανοούν την έννοια του ορίου ώστε να μπορούν να την εξηγήσουν. Αυτή η δυσκολία πιθανά ερμηνεύεται από τις

οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου που χρησιμοποιούνται στη σχολική πρακτική. Σ' αυτές τις οδηγίες (σ.193) επισημαίνεται ότι: «η διδασκαλία της έννοιας του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος», προκαλώντας έτσι έλλειψη μιας συστηματικής προσπάθειας ώστε να αναπτυχθεί η εννοιολογική κατανόηση του ορίου. Μια εξήγηση για τη χαμηλή επίδοση των μαθητών στη λύση προβλήματος πάνω στα όρια πιθανά να δίνεται από τον περιορισμό των εφαρμογών πάνω στα όρια σε ασκήσεις ρουτίνας στα σχολικά μαθηματικά, με συνέπεια να οδηγούνται οι μαθητές σε μια μάλλον μηχανική και ανεπαρκή μάθηση.

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στις περισσότερες μεταβάσεις από μια αναπαράσταση σε μία άλλη, όταν η γεωμετρική αναπαράσταση περιλαμβάνει ασύμπτωτη, ή όταν η αλγεβρική έκφραση περιλαμβάνει όριο που είναι ένας πραγματικός αριθμός ℓ , καθώς το x τείνει στο άπειρο ή όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_o . Η γνωστική πολυπλοκότητα της έννοιας του απείρου (Tsamir & Tirosh, 2006) συνδυασμένο με το γεγονός ότι στο σχολείο, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα που εφαρμόζεται, το άπειρο όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο $x_o \in R$ ορίζεται μόνο εποπτικά, ενώ τα όρια αυτού του τύπου υπολογίζονται από τις ιδιότητες τους, μπορεί να μας δώσει μια εξήγηση για τις προαναφερθείσες δυσκολίες.

Τα αποτελέσματα από τη crosstabs ανάλυση υποδεικνύουν ότι παρά το γεγονός ότι το ποσοστό που όρισε σωστά την έννοια του ορίου ήταν μικρό (20,7%), οι περισσότεροι από αυτούς απάντησαν με επιτυχία σε όλα σχεδόν τα έργα του ερωτηματολογίου. Για παράδειγμα, 91,3% από αυτούς απάντησε σωστά στη πρώτη ερώτηση του πρώτου έργου που αφορούσε τη διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου, 65,8% τη δεύτερη και 76,1% τη τρίτη. Στα περισσότερα έργα, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν ψηλότερα από τα αντίστοιχα όλου του δείγματος. Για παράδειγμα (GS1: 86,1%, GS2: 89,2%, GS3: 89,6%, GS7: 66,2%, GS8: 80,2%). Γενικά οι μαθητές που ήταν ικανοί να δώσουν μια επαρκή εξήγηση για την έννοια του ορίου, μπόρεσαν να εφαρμόσουν αλγορίθμους και διαδικασίες που είχαν διδαχθεί, σωστά σε έργα με διαφορετικές απαιτήσεις.

Στις μεταβλητές της έρευνας υπήρχε ως μεταβλητή η κατεύθυνση (P) για τη θετική και (Te) για την τεχνολογική. Από την στατιστική ανάλυση προέκυψε **στατιστικά σημαντική διαφορά** σε επίδοση (στους μέσους όρους) ανάλογα αν προέρχονται από θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση, όπως φαίνεται από τον **ΠΙΝΑΚΑ 2.**

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

P<0.01

Άσκηση	Μέσος όρος θετική	Μέσος όρος τεχνολογική
L3	0.84	0.72
D1	0.10	0.42
D2	0.25	0.70
D3	0.08	0.42
Gs4	0.79	0.92
Gs6	0.64	0.84
Gs8	0.77	0.96
SL1	0.57	0.76
SL2	0.52	0.72
Pi	0.02	0.16
PC1	0.21	0.55
PC2	0.29	0.62

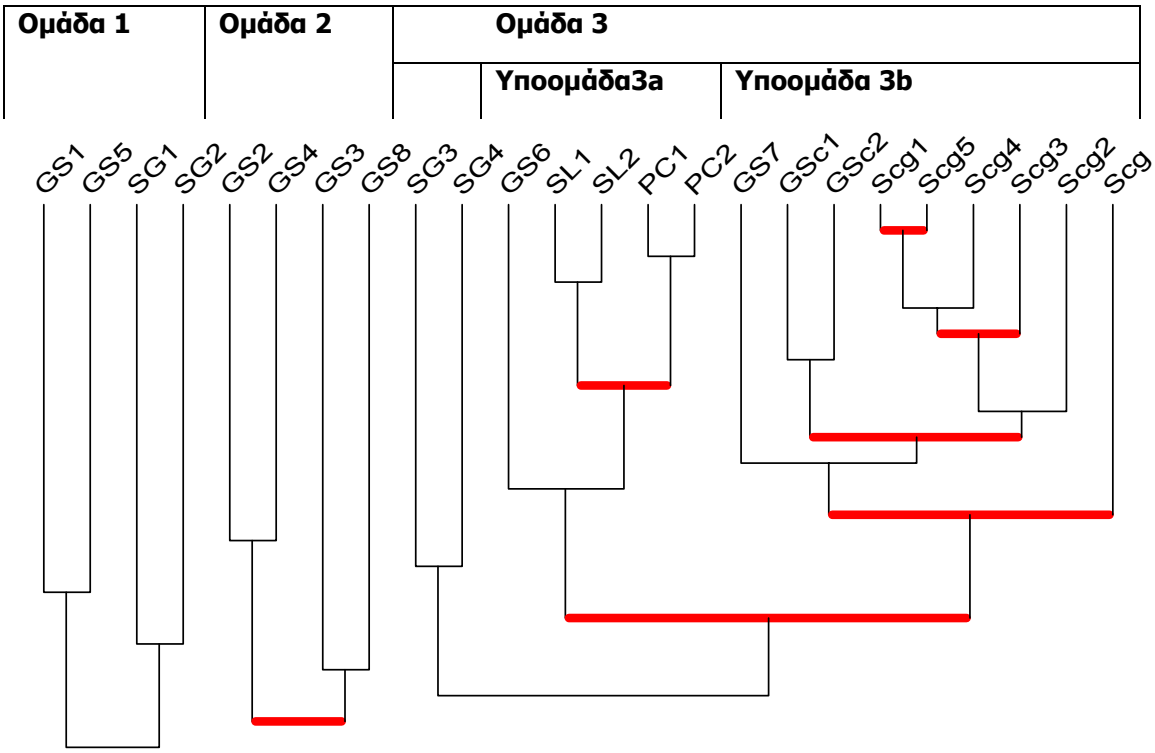
4.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ ΣΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Το Διάγραμμα Ομοιότητας (Lerman,1981) των απαντήσεων των μαθητών στα αντικείμενα του ερωτηματολογίου, κατασκευάστηκε με τη βοήθεια του λογισμικού CHIC (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier & Gras, 2000). Το **Διάγραμμα Ομοιότητας** οργανώνει τις μεταβλητές της έρευνας σε ομάδες σύμφωνα με την ομοιογένεια που εμφανίζουν κατά το χειρισμό των έργων από τους μαθητές. Αυτή η ομαδοποίηση ενδεχομένως οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα κάθε ομάδας μεταβλητών.

Επίσης χρησιμοποιούμε την έννοια των «**συμπληρωματικών μεταβλητών**» που μας δίνει τη δυνατότητα να αναγνωρίσουμε ποια αντικείμενα ήσαν «υπεύθυνα» για τη διαμόρφωση των συγκεκριμένων ομάδων των μεταβλητών(βλ. παράρτημα **ΠΙΝΑΚΑΣ 5**) Στην έρευνα μας ορίσαμε ως συμπληρωματικές μεταβλητές την ικανότητα των μαθητών να ορίσουν την έννοια του ορίου (D1,D2 και D3), την τάση να απαντούν κάτω από τις συνθήκες του **Διδακτικού Συμβολαίου** ή όχι (DC και NDC), τις διαισθητικές αντιλήψεις τους για τα όρια (L1, L2 L3) και την ικανότητα να προσδιορίσουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Sd). Συνεπώς μπορούμε να γνωρίζουμε ποια ομάδα από τους μαθητές αναφορικά με τις προαναφερθείσες μεταβλητές συνέβαλαν περισσότερο στο σχηματισμό κάθε ομάδας.

Το Διάγραμμα Ομοιότητας που παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1** περιλαμβάνει τρεις διακριτές ομάδες : **Ομάδα 1**, **2** και **3**. Η Ομάδα 1 αποτελείται από τις απαντήσεις των

μαθητών στα έργα που απαιτούν μετάφραση γεωμετρικής αναπαράστασης σε αλγεβρική αναπαράσταση πάνω στα όρια (GS1, GS5, SG1, SG2). Ειδικά στα δύο πρώτα έργα οι μαθητές έκριναν αν τα δύο όρια που δόθηκαν σε αλγεβρική μορφή αντιστοιχούν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δίνεται, ενώ στα δύο επόμενα οι μαθητές αντιστοιχούν τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων που δίνονται με τα κατάλληλα όρια που δίνονται σε αλγεβρική μορφή. Εκτός από τη κοινή φύση αναπαράστασης που εμπλέκεται στα έργα, ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό για τα τρία από τα τέσσερα έργα είναι ότι εμπλέκουν την έννοια του απείρου, το οποίο παρουσιάζεται είτε ως όριο συνάρτησης, είτε το x τείνει στο άπειρο. Επομένως η συγκεκριμένη ομάδα υποδηλώνει ότι οι μαθητές έδειξαν συνέπεια όταν χειρίζονται γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις ορίων που εμπεριέχουν την έννοια του απείρου.



Σχήμα 1: Το Διάγραμμα Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του ερωτηματολογίου

Note: The bold lines stand for similarity relations that are 99% significant.

Η συμπληρωματική μεταβλητή η οποία συμβάλει περισσότερο στην καθιέρωση της πρώτης ομάδας ομοιότητας, είναι η ομάδα των μαθητών που είχε την τάση να χρησιμοποιεί τυπικές αλγεβρικές διαδικασίες ακόμη και σε περιπτώσεις που δεν ήταν

ο ενδεδειγμένος τρόπος. Τα αποτελέσματα της crosstabs ανάλυσης μεταξύ των μαθητών που συμπεριφέρθηκαν κάτω από τις συνθήκες του διδακτικού συμβολαίου και αυτών που αντέδρασαν διαφορετικά, μας δίνουν στοιχεία για τα παραπάνω ευρήματα. Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών που η συμπεριφορά τους καθοριζόταν από τις συνθήκες του διδακτικού συμβολαίου ήταν ψηλότερα (GS1 : 94,1 , GS5 : 41,2 , SG1 :100, SG2 : 97,1) από τα ποσοστά των μαθητών που δεν ήταν επηρεασμένοι από το Διδακτικό Συμβόλαιο σ΄αυτά τα έργα (GS1: 90,3 , GS5 :16,7, SG1 :94.4, SG2 :95.8).

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει επίσης τις απαντήσεις των μαθητών σε μετατροπές διαφορετικών ορίων (GS4, GS3, GS8) και μιας αριθμητικής τιμής μιας συνάρτησης (GS2), μεταξύ μιας αλγεβρικής και μιας γεωμετρικής αναπαράστασης. Στις μετατροπές GS2, GS4 και GS3 οι μαθητές έπρεπε να κρίνουν αν δύο αλγεβρικές εκφράσεις που περιέχουν όρια και η αριθμητική τιμή της συνάρτησης σε ένα συγκεκριμένο σημείο ήταν σωστές ή όχι, βασιζόμενοι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης που δίνεται , ενώ στη μετατροπή GS8, έπρεπε να υπολογίσουν το όριο μιας συνάρτησης, βασιζόμενοι στη γραφική παράσταση αυτής που δίνεται. Η απευθείας σχέση ομοιότητας που σχηματίζεται μεταξύ των GS3 και GS8 ενδεχομένως είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι εμπεριέχουν και οι δύο την έννοια του απείρου. Η διαμόρφωση της δεύτερης ομάδας υποδεικνύει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν παρόμοιες διαδικασίες σε μετατροπές ορίων μεταξύ μιας αλγεβρικής και μιας γεωμετρικής αναπαράστασης. Η ύπαρξη της έννοιας του απείρου μέσα στα όρια ενδεχομένως ενισχύει αυτή τη συνέπεια. Η ομάδα των μαθητών που ευθύνονται περισσότερο για την διαμόρφωση της δεύτερης ομάδας αποτελείται από μαθητές που δεν συμπεριέλαβαν αλγεβρικές διαδικασίες για να απαντήσουν στις ερωτήσεις πάνω στα όρια όταν δεν ήταν απαραίτητο ή δεν ήταν ο ενδεδειγμένος τρόπος. Η crosstabs ανάλυση έδειξε ότι ένα μεγαλύτερο ποσοστό από τους μαθητές που δεν λειτούργησε κάτω από τις συνθήκες του Διδακτικού Συμβολαίου (GS2 : 94,4%, GS4 : 91,7%, GS3 : 97,2%, GS8 : 90,2%), απάντησε με επιτυχία στα περισσότερα έργα, σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών που ήταν ρητά επηρεασμένοι από το Διδακτικό Συμβόλαιο (GS2 : 88,2%, GS4 : 88,2%, GS3 : 94,1%, GS8 : 91,2%). Κατά συνέπεια οι μαθητές που κατόρθωσαν να παραβιάσουν το Διδακτικό Συμβόλαιο έχουν περισσότερες πιθανότητες να απαντήσουν με επιτυχία σ' αυτά τα έργα, σε σχέση με τους μαθητές που λειτούργησαν κάτω από τις συνθήκες αυτού.

Η διαμόρφωση των δύο προηγούμενων ομάδων ενδεχομένως να είναι κατά κύριο λόγο ο αποσπασματικός τρόπος που απαντούν οι μαθητές σε απλές μετατροπές πάνω

στα όρια μεταξύ αλγεβρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων όπου απαιτείται η ερμηνεία μιας γραφικής παράστασης, ή διαδικασία αναγνώρισης και μετάφρασης. Το εννοιολογικό χαρακτηριστικό των ορίων με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές και ειδικότερα η ανάμιξη της έννοιας του απείρου ή όχι έχουν επίσης ένα ρόλο όσο αφορά την ομοιογένεια των μεθόδων που ακολουθούν. Η συνέπεια στις απαντήσεις των μαθητών σ' αυτά τα έργα εξηγείται από την επιρροή ή όχι του Διδακτικού Συμβολαίου αντίστοιχα.

Οι μεγαλύτερες και σημαντικότερες ομοιότητες (βλ. παράρτημα **ΠΙΝΑΚΑΣ 4**) εμφανίζονται στη τρίτη ομάδα που είναι και η μεγαλύτερη. Δύο μεγάλες υποομάδες μπορούν να αναγνωριστούν σ΄ αυτή την ομάδα : η **Υποομάδα 3a** και η **Υποομάδα 3b**. Η Υποομάδα 3a αποτελείται από τις απαντήσεις των μαθητών σε δύο προβλήματα του ερωτηματολογίου. Συγκεκριμένα εμπεριέχει τις απαντήσεις σε δύο ερωτήσεις του 8^{ου} έργου όπου έπρεπε να προσδιορίσουν την τιμή μιας παραμέτρου μιας συνάρτησης έτσι ώστε το όριο όταν το x τείνει σε ένα σημείο να είναι πραγματικός αριθμός (SL1) και να υπολογίσουν αυτό το όριο (SL2). Στο 10^{ο} έργο ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν δύο όρια που αναφέρονται σthν κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) μιας τέμνουσας PQ ενός ημικυκλίου ενόσω ένα από τα σημεία τομής Q(x,ψ) = Q(x, $\sqrt{25-x^2}$) διατρέχει το ημικύκλιο , ενώ το σημείο P έχει συντεταγμένες (-3, 4). Το πρώτο όριο που ζητείται να υπολογιστεί αναφέρεται στον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας PQ δηλαδή το limλ(x) όταν το x τείνει στο 3 , (PC1). Ενώ το δεύτερο όριο αναφέρεται στον συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας PQ δηλαδή το limλ(x) όταν το σημείο Q(x,ψ) που διατρέχει το ημικύκλιο μετακινηθεί στο σημείο με συντεταγμένες (-3, 4), (PC2). Αυτή η υποομάδα συμπληρώνεται από τη μεταβλητή GS6 που αντιπροσωπεύει την αναγνώριση ενός συγκεκριμένου ορίου μιας συνάρτησης στη γραφική της παράσταση, που δεν υπάρχει και επομένως δεν μπορεί να υπολογιστεί. Η διαμόρφωση της υποομάδας 3a πιθανά εξηγείται από το γεγονός ότι τα προβλήματα που εμπλέκονται είναι αρκετά πολύπλοκα, μη τυποποιημένα, ασυνήθιστα για τους μαθητές. Τα προβλήματα αυτά διαφοροποιούνται από αυτά που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια και από αυτά που χρησιμοποιούνται για την τυπική αξιολόγηση ή από αυτά που τίθενται κατά την διάρκεια της σχολικής πρακτικής. Ζητήθηκε από τους μαθητές όχι μόνο να χρησιμοποιήσουν συμβατικές αλγοριθμικές διαδικασίες για να υπολογίσουν όρια, αλλά επίσης ο ευέλικτος χειρισμός ενός ορίου με μια άγνωστη παράμετρο (SL1 , SL2), η ερμηνεία μιας γεωμετρικής αναπαράστασης και σημείων της που δίνονται από τις συντεταγμένες των σε συμβολική μορφή

(PC1 , PC2) και ο παράγοντας ότι ένα πρόβλημα που τίθεται στους μαθητές ενδεχομένως δεν έχει απάντηση(GS6). Η συμπληρωματική μεταβλητή η οποία συνέβαλε περισσότερο στη σύσταση (διαμόρφωση) της Υποομάδας 3a είναι η ομάδα των μαθητών που φαίνεται να προσεγγίζει τα συγκεκριμένα προβλήματα με μη συνηθισμένες αλγεβρικές μεθόδους.

Τα αποτελέσματα από τη crosstabs ανάλυση μεταξύ της τάσης των μαθητών να παραβιάσουν το διδακτικό συμβόλαιο και της επιτυχίας τους στα συγκεκριμένα έργα συμφωνούν με τα πιο πάνω ευρήματα. Βρέθηκε ότι οι μαθητές που κατόρθωσαν να παραβιάσουν το διδακτικό συμβόλαιο ήταν πιθανότερο να απαντήσουν σωστά σ' αυτά τα «ασυνήθιστα» έργα (SL1 : 88,9%, SL2 : 87,5%, PC1 : 72,2%, PC2 : 93,1%) σε σχέση με τους μαθητές λειτούργησαν κάτω από τις συνθήκες του διδακτικού συμβολαίου (SL1 : 76,5%, SL2 : 73,5%, PC1 : 64,7%, PC2 : 58,8%).

Η **Υποομάδα 3b** σχηματίστηκε από τις μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα που ζητούν:

- την κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης βασισμένης σε πέντε προϋποθέσεις που δίνονται σε συμβολική μορφή και περιέχουν όρια (Scg1, Scg5, Scg4, Scg3, Scg2)
- την κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης η οποία δίνεται σε αλγεβρική μορφή(δηλαδή δίνεται ο τύπος της) (Scg) και
- τον υπολογισμό δύο ορίων που βασίζονται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που κατασκευάστηκε από τους μαθητές (GSc1 και GSc2).

Επίσης αυτή η υποομάδα περιλαμβάνει μια μεταβλητή που αντιστοιχεί στον υπολογισμό ενός ορίου που βασίζεται σε μια δοθείσα γραφική παράσταση (GS7).

Η σύσταση αυτής της Υποομάδας ενισχύει την άποψη για τις ικανότητες των μαθητών να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων στη βάση βέβαιων πληροφοριών ή περιορισμών που δίνονται σε αλγεβρική μορφή. Η συμπληρωματική μεταβλητή που συνεισφέρει περισσότερο στη διαμόρφωση της Υποομάδας 3b στο Διάγραμμα Ομοιότητας είναι η ομάδα των μαθητών που προσδιόρισε την σχέση ενός σημείου x_o (όταν αναφερόμαστε στο όριο μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_o) με το πεδίο ορισμού της (D2). Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι οι μαθητές που δεν συμπεριέλαβαν κατ' ανάγκη αλγοριθμικές σκέψεις για τις λύσεις των έργων, ήταν περισσότερο υπεύθυνοι σε σχέση με τους σπουδαστές που αντιδρούν στο να αλλάξουν τον αλγοριθμικό τρόπο που σκέφτονται. Αυτά τα ευρήματα ενισχύονται από τα ψηλότερα ποσοστά των μαθητών που κατόρθωσαν να παραβιάσουν το διδακτικό συμβόλαιο στα περισσότερα έργα (GSc1 : 80,6%, GSc2 : 69,4%, Scg1 : 56,9%,

Scg5 : 58,3%, Scg4 : 70,8%, Scg2 : 83,3%), σε σχέση με τους μαθητές που εκτέλεσαν τα έργα κάτω από τις συνθήκες του διδακτικού συμβολαίου(GSc1 : 67,6%, GSc2 : 55,9%, Scg1 : 47,1%, Scg5 : 50,0%, Scg4 : 58,8%, Scg2 : 73,5%).

Οι δύο Υποομάδες που εμπεριέχονται στη τρίτη Ομάδα συμπληρώνονται από τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα που απαιτούν μετατροπή μεταξύ μιας αλγεβρικής αναπαράστασης ορίων και μιας γεωμετρικής (SG3, SG4). Ειδικότερα, σ' αυτά τα έργα οι μαθητές συνδυάζουν τη δοθείσα γραφική αναπαράσταση δύο συναρτήσεων με κατάλληλα όρια που δίνονται σε αλγεβρική μορφή. Ένα κοινό χαρακτηριστικό των ορίων σ' αυτά τα έργα είναι ότι το x τείνει στο άπειρο και το όριο είναι το άπειρο.

Γενικά, η διαμόρφωση των προαναφερθέντων Ομάδων και Υποομάδων ομοιότητας των μεταβλητών φανερώνουν ότι οι μαθητές είχαν τη τάση να προσεγγίζουν τις διαφοροποιήσεις των έργων πάνω στα όρια, με παρόμοιους και συνεπείς τρόπους με αναφορά στις απαιτήσεις αυτών (έργων), δηλαδή

- να εκτελούν απλές μετατροπές έργων μεταξύ μιας γεωμετρικής και μιας αλγεβρικής αναπαράστασης (Ομάδα 1 και 2),
- να εκτελούν περισσότερο σύνθετες μετατροπές προβλημάτων από μια γεωμετρική σε μια αλγεβρική αναπαράσταση και λύνουν μη συνηθισμένα προβλήματα υπολογισμού μέσα σε αλγεβρικό σύστημα αναπαράστασης (Υποομάδα 3a), και
- να εκτελούν μετατροπές έργων από μια αλγεβρική σε μια γραφική αναπαράσταση που περιλαμβάνει την κατασκευή του γραφήματος συναρτήσεων (Υποομάδα 3b)

Κάποια εννοιολογικά χαρακτηριστικά των έργων όπως η εμφάνιση της έννοιας του απείρου, παίζουν ένα ρόλο στην επίδοση των μαθητών. Συγχρόνως αυτά τα ευρήματα υπονοούν την ύπαρξη της στεγανοποίησης μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών σε έργα διαφορετικής φύσης και κατεύθυνσης.

Όπως το Διάγραμμα Ομοιότητας, το **Συνεπαγωγικό Διάγραμμα** των απαντήσεων των μαθητών στα θέματα του ερωτηματολογίου κατασκευάστηκε με τη χρήση του λογισμικού CHIC. Το συνεπαγωγικό διάγραμμα, το οποίο υλοποιεί τη στατιστική συνεπαγωγική μέθοδο του Gras, περιλαμβάνει συνεπαγωγικές σχέσεις που υποδεικνύουν αν η επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο έργο συνεπάγεται επιτυχία σε ένα άλλο έργο που σχετίζεται με το προηγούμενο.

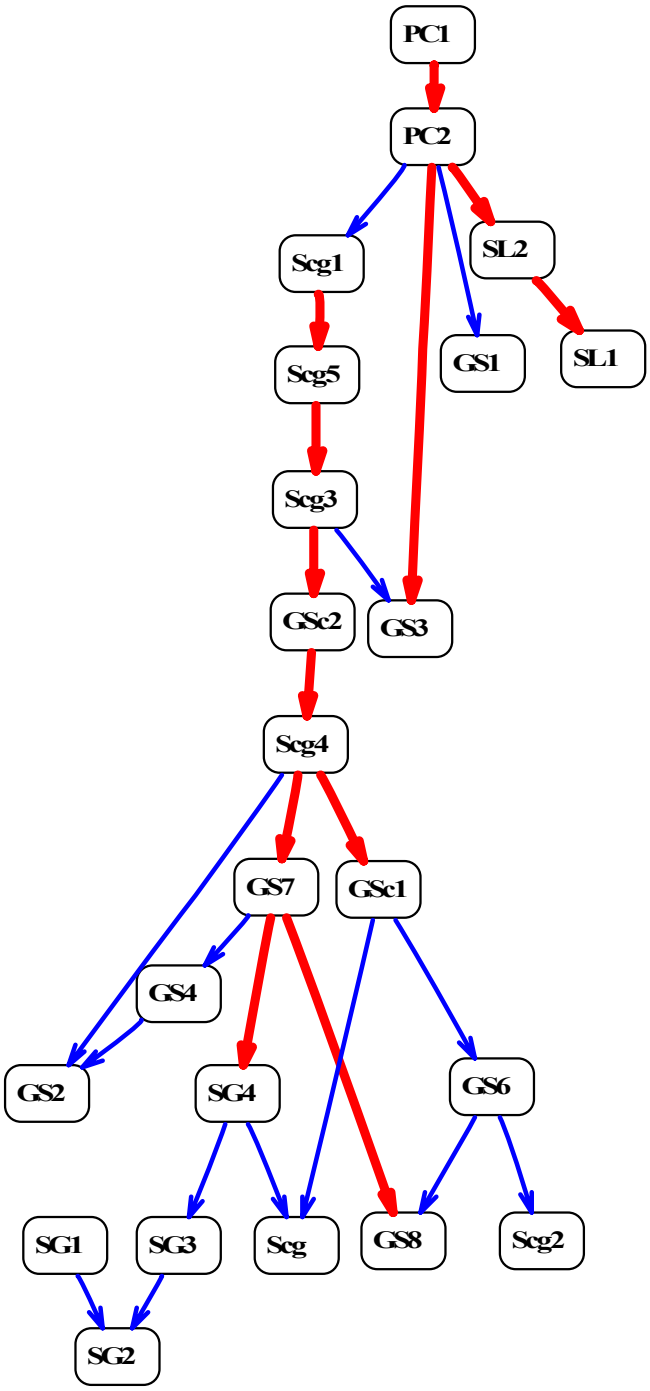
Το **Σχήμα 2** παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του ερωτηματολογίου. Η συνεπαγωγική αλυσίδα αρχίζει με τις μετα-

βλητές PC1 και PC2 υποδεικνύοντας ότι το αντίστοιχο (10°) έργο ήταν το δυσκολότερο. Οι μαθητές που κατόρθωσαν να βρουν τα δύο όρια που αναφερόταν στο συντελεστή διεύθυνσης μιας τέμνουσας ενός ημικυκλίου σε μια γεωμετρική αναπαράσταση, εκτέλεσαν σωστά επίσης όλα τα έργα του ερωτηματολογίου, που είναι κατασκευή και μετατροπή έργων και ένα ασυνήθιστο υπολογιστικό πρόβλημα μέσα σε αλγεβρικό σύστημα αναπαράστασης. Οι μαθητές συνάντησαν μεγαλύτερη δυσκολία στο 10° έργο, ενδεχομένως επειδή δεν αποτελούσε ένα συνηθισμένο πρόβλημα που χρησιμοποιείται στις σύνηθες σχολικές δραστηριότητες και απαιτούσε τον ευέλικτο συντονισμό των γεωμετρικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων των ορίων.

Το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα ενισχύει τα αποτελέσματα που προέρχονται από τις σωστές απαντήσεις ότι τα έργα που αντιστοιχούν στις μεταβλητές SG1, SG3, GS2, GS8, Scg και Scg2 ήταν ευκολότερα από τα έργα που απαιτούσαν κατασκευή και αντιστοιχούν στις μεταβλητές Scg1, Scg5, Scg3 και Scg4. Οι συγκεκριμένες συνεπαγωγικές σχέσεις υποδεικνύουν επίσης ότι οι μαθητές που εκτέλεσαν σωστά τα έργα που απαιτούσαν τη μετατροπή της πληροφορίας που προερχόταν από μια αλγεβρική αναπαράσταση σε μια γραφική και την κατασκευή ενός γραφήματος, για παράδειγμα οι μεταβλητές : Scg1, Scg3, Scg4 και Scg5, που βασίζονται σε δοθείσες συνθήκες που σχετίζονται με όρια, εκτέλεσαν με επιτυχία και τα έργα που περιλάμβαναν την αντίστροφη μετατροπή, δηλαδή :

- να συνδυάσουν τις αλγεβρικές αναπαραστάσεις με τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις για παράδειγμα οι μεταβλητές SG1, SG3 και SG2,
- να υπολογίσουν όρια που βασιζόταν σε μια γραφική αναπαράσταση (GS6, GS8, GS7) και
- να αποφασίσουν αν τα δοθέντα όρια σε αλγεβρική μορφή, αντιστοιχούσαν σε μια συνάρτηση που δινόταν η γραφική της παράσταση όπως για παράδειγμα οι μεταβλητές GS4, GS2.

Αυτά τα αποτελέσματα υπονοούν ότι ένα πρόβλημα που προϋποθέτει την ερμηνεία συμβολικών εκφράσεων πάνω στα όρια και τη μεταφορά τους στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που να πληρεί αυτές τις προϋποθέσεις,



Σχήμα 2: Το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του ερωτηματολογίου

The bold arrows stand for implications that are 99% significant while the rest have a significance level of 95%.

προκαλεί περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές από το να κατανοήσουν διαισθητικά τις μαθηματικές πληροφορίες που παρουσιάζονται έμμεσα σε ένα διάγραμμα με αναφορά στα όρια.

Στη γραμμή με τις σχέσεις ομοιότητας, οι συνεπαγωγικές σχέσεις σχηματίζονται περισσότερο μεταξύ των μεταβλητών που αντιστοιχούν στο ίδιο έργο ενισχύοντας το γεγονός ότι η επιτυχία των μαθητών εξαρτάται από τη γνωστική διαδικασία (δηλαδή τον τύπο της μετατροπής μεταξύ των παραστάσεων) που απαιτείται από το έργο. Τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά (δηλαδή το μαθηματικό περιεχόμενο) των έργων έχει μικρότερη επίδραση. Ένα κοινό αυτών των εσωτερικών συνεπαγωγών είναι ότι οι μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν όρια που εμπεριέχουν τη έννοια του απείρου (για παράδειγμα GS3, GS5) δεν σχετίζονται με τα άλλα όρια του ιδίου έργου ή ήταν τα δυσκολότερα (για παράδειγμα SG4, Scg1, Scg5) σχετικά με τα άλλα έργα του έργου και επιτυχία σ' αυτά συνεπάγεται επιτυχία και στα άλλα όρια του έργου. Το άπειρο είναι μια φιλοσοφικά σύνθετη έννοια η οποία δεν συναινεί με τις εμπειρίες τους από τον πραγματικό κόσμο (Tsamir & Tirosh, 2006).

4.4 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σχολιάζουμε τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα του ερωτηματολογίου από την ποιοτική τους πλευρά. Αναφερόμαστε κυρίως στις απαντήσεις τους στο δεύτερο έργο του ερωτηματολογίου, επειδή παρουσιάζουν ενδιαφέρον και είναι ενδεικτικές για τις αντιλήψεις που διατηρούν για την έννοια του ορίου.

Η συνηθέστερη απάντηση είναι «όταν οι ώρες τείνουν στο $+\infty$ το ύψος τείνει στο 2» Υπάρχουν απαντήσεις που αναφέρουν ότι :

« το όριο είναι το 1.9» (3 μαθητές) ή

«το όριο είναι το 1.9999…» (12 μαθητές).

Η τελευταία λαθεμένη απάντηση ήταν αναμενόμενη. Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Monaghan,1991; Sierpinska,1987; Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall & Vinner ,1981) διαπιστώνεται ότι όχι μόνο μαθητές αλλά και φοιτητές μαθηματικών σε όλο τον κόσμο δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι αριθμοί 0.999… και 1 ταυτίζονται. Στη συγκεκριμένη ερώτηση οι μαθητές δεν κατανοούν ότι οι αριθμοί 1.999… και 2 ταυτίζονται. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να θεωρήσουν ίσους δύο αριθμούς που παριστάνονται από διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Η πλειοψηφία των μαθητών διατηρούν την ιδέα ότι το φυτό δεν μπορεί να φθάσει την οροφή του θερμοκηπίου. Όμως, μερικές από τις φραστικές διατυπώσεις, φανερώνουν εσφαλμένες εντυπώσεις όπως :

«Το φυτό θα φθάσει στην οροφή οριακά»,

« Θεωρητικά δεν φτάνει, πρακτικά μπορεί»,

«Δεν θα την ακουμπήσει»,

«Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε : ίσως ναι ,ίσως όχι»,

Οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών που βασίζονται στη καθημερινή τους εμπειρία από τον πραγματικό κόσμο, δυσκολεύουν ή ακόμη και εμποδίζουν τη θεωρητική κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Αναφορικά με την δεύτερη ερώτηση «Αν ήσουν καθηγητής ,τι θα έλεγες σ' ένα μαθητή-τρια για να εξηγήσεις το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o ;», προσπαθούμε να ταξινομήσουμε τις απαντήσεις σε σχέση με τις κύριες ιδέες που εκφράζονται από τους μαθητές.

Συγκεκριμένα συναντάμε τις απαντήσεις :

« Το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o είναι μια τιμή την οποία η f πλησιάζει αλλά δεν φτάνει ποτέ» (12 μαθητές).

«Το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o είναι η αριθμητική τιμή (λένε και αλγεβρική) την οποία παίρνει η f, για $x= x_o$» (10 μαθητές).

«Το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o είναι η μέγιστη τιμή την οποία την οποία μπορεί να πάρει η f, για $x= x_o$» (4 μαθητές).

Απαντήσεις που έδωσαν προσεγγιστικά ένα σωστό ορισμό ξεχώρισαν όσον αφορά τον τρόπο περιγραφής του. Πέντε μαθητές απάντησαν πως θα εξηγούσαν το όριο με ένα κατάλληλο σχήμα, και πράγματι σχεδίασαν ένα, ενώ οι περισσότεροι από τους μαθητές που απάντησαν σωστά έδωσαν μια φραστική διατύπωση του τύπου : « Ένας πραγματικός αριθμός ℓ είναι το όριο μιας συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_o, όταν οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιανδήποτε τρόπο τον αριθμό x_o». Ένας μαθητής διατύπωσε σωστά τον τυπικό ορισμό ο οποίος ούτε διδάσκεται ούτε εξετάζεται στο Ενιαίο Λύκειο όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Είκοσι επτά μαθητές, ενώ προσπαθούσαν να εξηγήσουν τη σχέση του x_o με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_o, δήλωσαν ότι το x_o πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης διαφορετικά το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o δεν έχει νόημα. Μια άποψη που διατυπώθηκε ευρέως μεταξύ των μαθητών (37 μαθητές) στο δεύτερο έργο, ήταν ότι δεν υπάρχει το όριο της

συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_o όταν δεν συμπίπτουν τα πλευρικά όρια σ' αυτό το σημείο , χωρίς να κάνουν καμία αναφορά στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αυτή η απάντηση των μαθητών προκύπτει από το γεγονός ότι όλες οι περιπτώσεις που έχουν συναντήσει στα σχολικά βιβλία που η συνάρτηση δεν έχει όριο, υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι διαφορετικά. Η περίπτωση να μην υπάρχουν ούτε τα πλευρικά όρια δεν αναφέρεται πουθενά. Επίσης 9 μαθητές απαντούν ότι « δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_o όταν το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός», ενώ 3 μαθητές απαντούν ότι «δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_o όταν το όριο είναι 0». Από την τελευταία απάντηση φαίνεται το πρόβλημα με την έννοια του μηδενός. Μηδέν για τους μαθητές σημαίνει ότι κάτι δεν υπάρχει οπότε όταν το όριο είναι μηδέν οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει το όριο.

Οι δυσκολίες των μαθητών στην έννοια του ορίου όσον αφορά τα πλευρικά όρια αποκαλύφτηκε στο 5° έργο. Μαθητές που προσδιόρισαν σωστά ότι δεν υπάρχει το πρώτο όριο, διατήρησαν αυτή την αντίληψη και για το δεύτερο όριο, ακόμη και αν τα πλευρικά όρια σ' αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν ίσα . Στο ίδιο έργο 15 μαθητές απαντούν ότι $\lim_{x\to 2} f(x)=2$. Αυτοί οι μαθητές φαίνεται να συγχέουν την έννοια του ορίου με την έννοια της συνέχειας. Θεωρώντας ότι το όριο όταν υπάρχει είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο x_o . Δηλαδή θεωρούν ότι για να υπάρχει το όριο πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα με $f(x_o)$.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κύριος στόχος αυτής της έρευνας ήταν να διερευνήσει τις αντιλήψεις των μαθητών που φοιτούν στη Γ΄τάξη του Ενιαίου Λυκείου πάνω στο όριο συνάρτησης, τον βαθμό στον οποίο γίνεται κατανοητή αυτή η συγκεκριμένη έννοια από τους μαθητές και πως συσχετίζεται η κατασκευή της έννοιας με τις ικανότητες των μαθητών να χειρίζονται διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των ορίων. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει τι είναι όριο συνάρτησης, υποδεικνύοντας τη δυσκολία που συναντούν στο να κατανοήσουν την έννοια. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι περισσότερες αντιλήψεις των μαθητών για το όριο που διαπιστώθηκαν στη παρούσα έρευνα, συμφωνούν με τις σχετικές αντιλήψεις που έχουν διατυπωθεί από προηγούμενες έρευνες πάνω στο ίδιο πεδίο. Μια από τις κύριες αντιλήψεις που εκφράστηκε από τους μαθητές, ήταν το μοντέλο του ορίου ως άφθαστο, έχει διαπιστωθεί από προηγούμενες έρευνες (Cornu, 1983; Davis & Vinner, 1986; Williams, 1991) . Άλλη αντίληψη που διατηρούν οι μαθητές, ήταν ότι «το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης για $x= x_o$». Οι Davis & Vinner(1986) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές διατηρούν τις πρωταρχικές αντιλήψεις τους και μετά από προσεκτικά σχεδιασμένες διδασκαλίες, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε παρανοήσεις όπως $f(x_o)$ είναι το ίδιο με το limf(x) καθώς το x τείνει στο x_o. Επίσης μια σημασία (ένα νόημα) που δόθηκε από τους μαθητές αυτής της έρευνας στην έννοια του ορίου είναι ότι «το όριο μιας συνάρτησης είναι το μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει το x_o». Η άποψη αυτή έχει διαπιστωθεί από τον Williams (1991), ο οποίος ερεύνησε και περίγραψε την ύπαρξη διαφόρων προτύπων ορίων που διατηρούν οι μαθητές.

Σε μια προσπάθεια να εξηγήσουν τη σχέση ενός x_o με το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_o , ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών διατύπωσε την άποψη ότι το σημείο x_o πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ότι σε διαφορετική περίπτωση, το όριο δεν έχει έννοια. Μια άλλη άποψη που διατυπώθηκε εκτεταμένα μεταξύ των μαθητών, ήταν ότι δεν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f καθώς το x τείνει στο x_o όταν δεν συμπίπτουν τα πλευρικά όρια σ' αυτό το σημείο, χωρίς να αναφέρουν ότι μπορεί να μην υπάρχει κανένα πλευρικό όριο. Ούτε ανέφεραν ότι ανάλογα με το πεδίο ορισμού, μπορεί το ένα από τα δύο πλευρικά όρια να μην έχει νόημα. Αυτή η απάντηση των μαθητών προκύπτει από το γεγονός ότι όλες οι περιπτώσεις που έχουν συναντήσει στα σχολικά βιβλία που η συ-

νάρτηση δεν έχει όριο, υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι διαφορετικά. Η περίπτωση να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια δεν αναφέρεται πουθενά. Επίσης οι εν λόγω μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι δύο αριθμοί που παριστάνονται διαφορετικά δηλαδή 2 και 1.999… είναι ίσοι. Ο αριθμός 1.999… παριστάνει μια διαδικασία (όριο της ακολουθίας 1.9, 1.99, 1.999 …) , ενώ ο αριθμός 2 παριστάνει ένα αντικείμενο. Ο αριθμός 2 δημιουργήθηκε από την άπειρη διαδικασία που περιγράφεται από τον 1.999… αλλά «αυτονομήθηκε» από αυτήν σαν αποτέλεσμα της. Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Monaghan,1991; Sierpinska,1987; Tall & Vinner, 1981) διαπιστώνεται ότι όχι μόνο μαθητές αλλά και φοιτητές Μαθηματικών σε όλο τον κόσμο δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι αριθμοί 0.999… και 1 ταυτίζονται.

Η κατάκτηση της έννοιας του ορίου είναι μια περίπλοκη (σύνθετη) διαδικασία όπως έχουν επισημάνει ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών (Davis & Vinner,1986; Sierpinska, 1987; Tall & Vinner ,1981). Η διαδικασία αυτή ενδεχομένως δυσχεραίνεται από ποικίλες δυσκολίες και εμπόδια επιστημολογικής, γνωστικής και διδακτικής φύσης. Η μεγάλη διαισθητική βάση του θέματος, η απαραίτητη κατανόηση προαπαιτουμένων εννοιών (όπως των πραγματικών αριθμών, του απείρου και της συνάρτησης) προξενούν δυσκολίες στην εμπέδωση της έννοιας από τους μαθητές. Επίσης οι ανεπαρκείς και ατελείς απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές και οι παρανοήσεις που εκφράζουν, πιθανά σχετίζονται με τη διδακτική προσέγγιση που εμφανίζεται να δίνει έμφαση στους υπολογισμούς, επιδιώκοντας την κατάλληλη τυποποίηση από το να εστιάσει σε κριτική αιτιολόγηση, στη λύση μη κοινότυπων προβλημάτων και στην εννοιολογική κατανόηση των ορίων.

Η κατάκτηση της έννοιας του ορίου βρέθηκε να έχει ρόλο στην επίδοση των μαθητών σε διάφορα έργα του ερωτηματολογίου με μεγάλο βαθμό δυσκολίας που περιλαμβάνουν διαφορετικές μετατροπές αναπαραστάσεων. Η ομάδα των μαθητών που είχε κατανοήσει την έννοια του ορίου είχε κατακτήσει μια εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου (συμπεριλαμβανομένης μιας σωστής αντίληψης για τη σχέση του x_o με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες υπάρχει το όριο όταν το x τείνει στο x_o) είχαν περισσότερες πιθανότητες να ολοκληρώσουν τις μετατροπές ορίων από αλγεβρικές σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις και αντίστροφα, δηλαδή να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με βάση τις αλγεβρικές συνθήκες που δίνονται και περιέχουν όρια και να υπολογίσουν όρια βασιζόμενοι σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις αντίστοιχα, με ένα επιτυχή και λογικό τρόπο.

Η επίδοση των μαθητών σε έργα διαφόρων ορίων βρέθηκε να διαφέρει όσον αφορά την κατεύθυνση της μετατροπής μεταξύ γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων. Οι μαθητές εκτέλεσαν καλύτερα τις μετατροπές των ορίων από μια γραφική σε μια συμβολική αναπαράσταση παρά από τη μετατροπή στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή την κατασκευή γραφήματος μιας συνάρτησης βασισμένο σε όρια που δινόταν σε αλγεβρική μορφή. Αυτή η ανεπάρκεια που παρατηρείται στις απαντήσεις των μαθητών ενδεχομένως είναι συνέπεια δύο διαφορετικών παραγόντων. Ο πρώτος αφορά τα διαφορετικά επίπεδα της γνωστικής πολυπλοκότητας των δύο τύπων της μετατροπής των ορίων. Η μετατροπή ενός ορίου από μια γραφική μορφή σε μια αλγεβρική, για παράδειγμα ο υπολογισμός ενός ορίου με βάση τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δίνεται, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια καθαρή μετατροπή (Duval,2002) , από την αντίστροφη πορεία όπως για παράδειγμα τον σχεδιασμό μιας συνάρτησης που ικανοποιεί συγκεκριμένες προϋποθέσεις που περιλαμβάνουν όρια. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο που περιλαμβάνει κυρίως μονόπλευρες δραστηριότητες που προωθούν τη χρήση γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων μεμονωμένα ή δίνουν έμφαση σε συγκεκριμένους τύπους μετατροπών.

Ένα άλλο θέμα που αφορά αυτή την έρευνα ήταν να διερευνήσει τις ικανότητες των μαθητών να χειρίζονται γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις ορίων σε έργα διαφορετικών τύπων. Τα σημαντικά αποτελέσματα των διαφόρων τρόπων αναπαράστασης στην επίδοση των μαθητών, γίνονται φανερά όχι μόνο από την επιτυχία των μαθητών αλλά και από την συνέπεια της σκέψης τους σε διάφορα έργα.

Οι μαθητές συνάντησαν μεγάλη δυσκολία στη λύση προβλήματος πάνω στα όρια που περιλάμβαναν μια γεωμετρική αναπαράσταση (Έργο 9° και 10°). Αυτή η ανεπάρκεια πιθανά οφείλεται στο γεγονός ότι η λύση τέτοιων προβλημάτων απαιτεί την ερμηνεία της γεωμετρικής αναπαράστασης και την μετατροπή της σε συμβολική έκφραση που σχετίζεται με όρια. Σύμφωνα με τον Tall (1995), συμπεράσματα που εξαρτώνται αποκλειστικά σε οπτικές αναπαραστάσεις πιθανά να είναι ανακριβή. Η δυνατότητα μετάφρασης από μια οπτική σε μια συμβολική αναπαράσταση είναι απαραίτητη, διότι μια μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται και γίνεται αποδεκτή μόνο μέσα από την τυπική απόδειξη. Για παράδειγμα, η γεωμετρική αναπαράσταση στο 9° έργο πιθανά να έχει οδηγήσει τους μαθητές στο αποτέλεσμα ότι η ακολουθία a_v συγκλίνει στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Εύκολα όμως αποδεικνύεται ότι a_v=ΑΒ+ΑΓ για κάθε v=1,2,… ,δηλαδή ότι η ακολουθία είναι σταθερή. Άρα συγκλίνει στη σταθερή τιμή της που δεν είναι ίση με αυτή που πιθανά να καταλήγαμε εποπτικά.

Ένα ασυνήθιστο πρόβλημα σε αλγεβρική μορφή που περιλάμβανε τον υπολογισμό μιας άγνωστης παραμέτρου που σχετιζόταν με ένα όριο, προκάλεσε μικρότερη δυσκολία στους μαθητές από το πρόβλημα που προαναφέραμε. Αυτό πιθανά να οφείλεται στη συμβολική μορφή που δόθηκε η συνάρτηση που ήταν οικία σ' αυτούς από σχολικά μαθηματικά, και το γεγονός ότι το έργο απαιτούσε τη χρήση μόνο μιας αναπαράστασης και όχι τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων αναπαραστάσεων.

Οι σχέσεις ομοιότητας φανερώνουν την συνέπεια των μαθητών στα έργα του ίδιου τύπου αναπαράστασης, ενώ οι συνεπαγωγικές σχέσεις έδειξαν ότι η επιτυχία σε ένα αντικείμενο μιας συγκεκριμένης μετατροπής συνεπάγεται επιτυχία σε ένα άλλο αντικείμενο που περιλαμβάνει τον ίδιο τύπο μετατροπής ανεξάρτητα από το είδος του ορίου που εμπεριέχεται. Αυτό το φαινόμενο ήταν εμφανές στην περίπτωση των έργων που απαιτούσαν κατασκευή. Οι μαθητές αντιμετώπισαν όμοια και με λογικό ειρμό την κατασκευή ενός γραφήματος με βάση τα όρια που δόθηκαν σε αλγεβρική μορφή αλλά χαρακτηριστικά από άλλα έργα που περιλάμβαναν ένα άλλο τύπο αναπαράστασης. Αυτό το είδος της ασυνέπειας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένδειξη έλλειψης ευελιξίας μεταξύ των διαφόρων τρόπων αναπαράστασης, ή με άλλα λόγια την ύπαρξη της στεγανοποίησης στη σκέψη των μαθητών (Γαγάτσης κ.α., 2003). Σύμφωνα με το φαινόμενο της στεγανοποίησης, οι μαθητές έχουν την τάση να χειρίζονται τα αποσπασματικά τα έργα που διαφέρουν ως προς τον τρόπο αναπαράστασης ή τον τύπο της μετατροπής που εμπλέκει, παρά το γεγονός ότι αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο μελέτης, για παράδειγμα στα όρια.

Όσον αφορά τη λύση προβλήματος και τη σχέση της με τις επιδόσεις των μαθητών σε έργα που απαιτούσαν μετατροπές πάνω στα όρια, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα. Μια διακριτή ομάδα που σχηματίστηκε από τις απαντήσεις των μαθητών στη λύση προβλήματος, καθιερώθηκε στο διάγραμμα ομοιότητας, υποδεικνύοντας τον στεγανοποιημένο τρόπο σκέψης τους σε μη συνηθισμένα προβλήματα σε σχέση με τον τρόπο που αντιμετωπίζουν απλούστερα έργα. Επιπλέον οι μαθητές συνάντησαν μεγάλη δυσκολία σε μη συνηθισμένα προβλήματα και η επιτυχία σε κάποια έργα υποδηλώνει επιτυχία στα περισσότερο «κοινότυπα» έργα που απαιτούσαν μετατροπές πάνω στα όρια. Το γεγονός ότι δεν δίνεται έμφαση στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και η εφαρμογή της έννοιας περιορίζεται συχνά σε ασκήσεις ρουτίνας, οδηγεί σε μηχανική και επιφανειακή μάθηση (Furinghetti & Paola, 1991), ενδεχομένως δίνει μια εξήγηση για την περιορισμένη και αποσπασματική απόδοση των μαθητών στη λύση προβλήματος πάνω στα όρια.

Γενικά είναι αξιοσημείωτο ότι οι μαθητές επέδειξαν συνέπεια στον τρόπο που χειρίστηκαν τα διάφορα έργα. Δηλαδή στις απλές μετατροπές έργων, στους υπολογισμούς ορίων, στις κατασκευές γραφημάτων και σε μη «κοινότυπα» προβλήματα. Όρια με τα ίδια εννοιολογικά χαρακτηριστικά δεν προσεγγίστηκαν απαραίτητα με συνέπεια από τους μαθητές. Ο τρόπος που οι μαθητές εκτέλεσαν τις μετατροπές επηρεάστηκε κυρίως από την εμπλεκόμενη αναπαράσταση και την κατεύθυνση της μετατροπής (από αλγεβρική σε γεωμετρική και αντίστροφα) και στη συνέχεια από τον εννοιολογικό χαρακτήρα των ορίων. Υποθέτουμε ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών και επομένως φανερώνουν την ανεπάρκεια τους, οφείλονται κυρίως στη διαδικασία που απαιτείται για να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι απαιτήσεις των έργων παρά σε αιτίες που έχουν σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο από μόνο του.

Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις ορίων που εμπεριέχουν την έννοια του απείρου, αντιμετωπίστηκαν με ένα συνεπή τρόπο παρά το γεγονός ότι ανήκαν σε έργα διαφορετικής φύσης. Επιπλέον, το άπειρο είναι η μόνη εννοιολογική συνιστώσα των ορίων που βρέθηκε να προκαλεί δυσκολίες στη επίδοση των μαθητών σε έργα του ίδιου τύπου. Ο βαθμός δυσκολίας των ορίων που εμπεριείχαν την έννοια του απείρου είτε ως τιμή του ορίου μιας συνάρτησης είτε ως τιμή στην οποία τείνει το x, ήταν σημαντικά μεγαλύτερος σε σχέση με τη δυσκολία των έργων που δεν περιείχαν την έννοια του απείρου. Το άπειρο είναι μια φιλοσοφικά σύνθετη έννοια η οποία δεν συναινεί με τα νοητικά σχήματα τα οποία έχουν κατασκευαστεί από τις εμπειρίες τους από τον πραγματικό κόσμο που περιλαμβάνει πεπερασμένα αντικείμενα, διαδικασίες και γεγονότα (Tsamir & Tirosh, 2006). Επιπλέον υπάρχει μια αντίφαση μεταξύ των διαισθητικών αντιλήψεων για το όριο ως φράγμα και ως περιορισμός, που διατηρείται από ένα μέρος των μαθητών, και της έννοιας του απείρου. Αυτή η αντίληψη ενδεχομένως ενισχύεται από τον συνειρμό του όρου «όριο» με την αντίληψη του «πεπερασμένου» στο χρόνο και τον χώρο και προκαλεί δυσκολία στην αποδοχή ότι το όριο μπορεί να είναι άπειρο (Grugnetti & Rizza, 2003). Το γεγονός ότι σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα το άπειρο όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο $x_o \in R$ ορίζεται μόνο εποπτικά, ενώ τα όρια αυτού του τύπου βρίσκονται μόνο με χρήση των ιδιοτήτων τους, ενδεχομένως αποτελεί μια εξήγηση για τις προαναφερθείσες δυσκολίες.

Ένα μικρό ποσοστό των μαθητών (15%) λειτούργησε κάτω από τις συνθήκες του διδακτικού συμβολαίου χρησιμοποιώντας στερεοτυπικές αλγοριθμικές μεθόδους, αντί να ερμηνεύσει και να χρησιμοποιήσει ευέλικτα μια δοθείσα γεωμετρική αναπαράσταση σε μια κατάσταση λύσης προβλήματος – που μπορούσε να οδηγή-

σει στη λύση κατευθείαν και ευκολότερα – και να υπολογίσει όρια. Παρ' όλα αυτά, βρέθηκε ότι μαθητές που η συμπεριφορά τους δεν καθοριζόταν από το διδακτικό συμβόλαιο, λειτούργησαν πολύ καλύτερα σε όλα σχεδόν τα έργα πάνω στα όρια, σε σχέση με τους μαθητές που επηρεαστήκαν από αυτό.

Επί πλέον, η εξέταση των συμπληρωματικών μεταβλητών στο διάγραμμα ομοιότητας αποκάλυψε ότι η σταθερή συμπεριφορά των μαθητών στα διάφορα έργα θα μπορούσε να εξηγηθεί αρχικά μέσα από το διδακτικό συμβόλαιο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που αντιμετώπισαν μια κατάσταση προβλήματος ευέλικτα και με τρόπο που δεν ήταν απαραίτητο να χρησιμοποιήσουν γνωστές αλγοριθμικές μεθόδους διαμόρφωσαν την ομάδα που ήταν κυρίως υπεύθυνη για τις συνεπείς και όμοια επιτυχείς απαντήσεις στα περισσότερο σύνθετα και ασυνήθιστα προβλήματα και τις μετατροπές έργων του ερωτηματολογίου. Αντίθετα οι μαθητές που ήταν επηρεασμένοι από το διδακτικό συμβόλαιο και χρησιμοποίησαν αλγοριθμικές προσεγγίσεις ακόμη και σε περιπτώσεις όπου αυτές οι μέθοδοι δεν ήταν κατάλληλοι, χειρίστηκαν τις απλές μετατροπές έργων με συνέπεια. Αυτά τα αποτελέσματα ενισχύουν τον ισχυρισμό των ερευνητών όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία ότι το Διδακτικό Συμβόλαιο και οι συνέπειες του εμφανίζονται περισσότερο στη λύση ανοικτών και μη συνηθισμένων προβλημάτων και ότι η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του Διδακτικού Συμβολαίου αλλά πάνω στη ρήξη του (Brousseau, 1997).

Οι παραπάνω ισχυρισμοί μπορεί να αποτελέσουν κίνητρο για μελλοντικές έρευνες όσον αφορά τη διδακτική πρακτική που σχετίζεται με τα όρια. Τα ευρήματα μας ενισχύουν την ανεπάρκεια ή ακόμη την ακαταλληλότητα των διδακτικών στρατηγικών που εφαρμόζονται για την ανάπτυξη της κατανόησης των ορίων. Πιστεύουμε ότι δεν αρκεί να περιγράφουμε τι γνωρίζουν οι μαθητές για μια συγκεκριμένη έννοια ή πως την χρησιμοποιούν στη βάση συγκεκριμένης διάστασης όπως εισηγούμαστε στην παρούσα έρευνα, για παράδειγμα κατασκευασμένος ορισμός, μετατροπές της έννοιας μεταξύ συμβολικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων και λύση προβλήματος, αλλά θα ήταν σημαντικό και χρήσιμο να εξεταστεί αν ο σχεδιασμός και η εφαρμογή διδακτικών δραστηριοτήτων που να μην περιορίζουν και ξεχωρίζουν τις διδακτικές πλευρές, αλλά να συνδέονται μεταξύ τους στη βάση των παραπάνω τύπων κατανόησης της έννοιας, προωθώντας τη χρήση πολλαπλών συστημάτων αναπαράστασης και της εναλλαγής – μετάφρασης από το ένα σύστημα στο άλλο και τη λύση μη συνηθισμένων προβλημάτων με τη χρήση διαφορετικών διαδικασιών που ενδεχομένως να συνεισφέρουν στην ανάπτυξη μιας περιεκτικής και

λογικής κατανόησης των ορίων και την επιτυχή λύση προβλήματος. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας έρευνας θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους δασκάλους των μαθηματικών για τη σημασία μιας πολυδιάστατης προσέγγισης που να αποτελείται από (τουλάχιστο) αυτούς τους τύπους των δεξιοτήτων όχι μόνο σαν μέσον να εξετάσουν και εξηγήσουν πως γίνεται κατανοητή η έννοια του ορίου από τους μαθητές , αλλά να διδάξουν όρια στο Λύκειο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωση Βιβλιογραφία

Artigue, M. (1991). "Analysis", in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 168-198), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Artique, M. (1998). "Teaching and Learning Elementary Analysis : What can we learn from didactical research and curriculum evolution?" *(First Mediterranean Conference on Mathematics 1997).*

Billman,D.(1999). "Representations",in *A Companion to Cognitive Science*,William Bechtel & George Graham(eds.), Blackwell Publishers, pp.649-659.

Boyer, C.B. (1949). The History of Calculus and its Conceptual Development, reprinted by Dover New York 1959.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches in didactique des mathematiques,* 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1990). Le contract didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 9*, 308-336.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherlandd & V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cifarelli, V.(1998). The Development of Mental Representations as a Proplem Solving Activity. *The Journal of Mathematical Behavior,17(2), 238-264.*

Cobb, P. (1986). Contexts, goals, beliefs, and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 6(2), 2-9.

Cornu, B. (1983).Quelques obstacies ; a l' apprentissage de la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathematiques, 4,236-268.

Cornu, B. (1991). "Limits", in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996), " Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema" J*ournal of Mathematical Behavior,* 15, 167-192.

Davis, R. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5,* 281-303.

DeLoache, J.S., Uttal, D.H., & Pierroutsakos, S.L. (1998). The Development of Early Symbolization : Educational implications*. Learning and Instruction*, 8(4),325-339.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinkihg (pp. 95-123). Dordrecht :Kluwer Ac ademic Publishers.

Dufour – Janvier,B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T.(1986). On the visual versus analytical thinking in Mathematics , Proceeding of PME 10, London, 152-158.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T.(1991).On the reluctance to visualize immathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham(Eds) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes No. 19, 25-37.*

Duval, R.(2002).The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Reserch in Mathematics Education, 1(2), 1-16.*

Eisenberg, T.(1992). On the Development of a Sence for Functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Fuction. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.153-174). The Mathematical Associotion of America.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Fuctions. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 105-121.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. In D. Reidel (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 615-645). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoing. In *Educational Studies in Mathematics* 38:11-50.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16-19). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(5), 719-729.

Frid, S.(1994) . Three approaches to undergraduate calculus instruction : Their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction. In Szydlik,-Jennifer-Earles (2000) Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function" *(Journal for Research in Mathematics Education v* 31 no3 May 2000. p. 258-276).

Gagatsis, A.,& Christou, C. (2002). The structure of translations among representations in functions. *Scientia Paedagogical Experimentals, 39, 1*

Goldin,G. A.(1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior,17(2),137-165.*

Goldin,G. A., & Kaput, J.J. (1996). A Joint Perpective of the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In von L.P. Steffe & …Mahwah, *Theories of Mathematics Learning* (pp.59-65). Hillsdale, NJ : Lawrence Eribaum.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1992). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching,* 142, 6-10.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality,ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25,2,115-141.

Green, B., & Harel, G(1998). The Role of Isomorphisms in Mathematical Gognition. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1),5-24

Grugnetti L., & Rizza A. (2003). A lengthy process for the establishment of the concept of limit. *Proceedings of the Third Conference of the European Group for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy. Retrieved August 1, 2006, from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG11/TG11_Grugnetti_cerme3.pdf **Or** http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

Hiebert, J., Carpenter, T.P.(1992). Learning and with understanding. In Grouws, D. A.(ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching with Learning . New York : National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Fuction. *The Journal of Mathematical Behavor*,17(1),123-134.

Juter, K. (2003). Limits of Functions – How do students handle them ?

http:// www.vxu. se/msi/picme 10/L4JK.pdf.

Kaput, J.J.(1985). Representation and Problem Solving : Methodological Issues Relate to Modeling. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning of Mathematics Problem Solving : Multiple Reserch Perpectives* (pp.381-394). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Kaput,J. J. (1987a). Rrepresentation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J.(1987b). Toward a Teory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Khinchin, A.Ya. (1968). Infinite Processes Background to Analysis.In Mamona-Downs, J.(2001). "Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence", *Educational studies in mathematics*, 48, p261.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T (1987). Rational Number Relations and Proportions. In C. Janvier(Ed .), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Li, L. & Tall D. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. *Proceedings of PME 17, Tsukuba, Japan, II, 41-48.*

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000)." Where Mathematics comes from". New York: Basic Books.

Mamona-Downs, J.(1990). "Sequences and series – Sequences and functions : Students' confusions",*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 21(2),333-337.

Mamona-Downs, J.(2001). "Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence", *Educational studies in mathematics*, 48, 259-288.

McLeod, D. B.(1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisatio.In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York: Macmillan.

Monaghan, J. D. (1986). "Adolescent's understanding of limits and infinity". Unpublished Ph.D. Thesis, Warwick University, U.K.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*, 3, 20-24.

NCTM.,(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston : Va, NCTM.

Orton, A.(1977) "Chords, secants, tangents & elementary Calculus", *Mathematics Teaching*, 78, 48-49.

Owens, K.D., & Clements M. A.(1998). Representations in Spatial Problem Solving in the Classroom. *The Journal of Mathematics Behavor,* !7(1), 25-32.

Robert, A. (1982a,b). L' Acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans Enseignement Superieur, en Didactique des Mathematiques vol.no 3, 307-341.

Roth, W. M., & McGinn, M.K.(1998). Inscriptions : Towards a Theory of Representing as Social Practice. *Review of Educational Research*, 68(1), 35-59.

Schonfeld, A. H. (1989). Expolorations of students' mathematical beliefs and behavior*. Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 338-355.

Schonfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically : Problem- Solving, Metacognition and Sence Making in . In D. A. Crouws (Ed.), *Handbook of Reserch on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-368). New York : Macmillan.

Seeger, F.(1998). Representations in the Mathematical Classroom : Reflections and Constructions. In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics Classroom* (pp.308-343). Cambridge : Cambridge UP.

Sfard, A . (1987) "Two conceptions of mathematical notions :operational and structural" in *Procceding of the Twelfth International Conference of PME,Hungary,pp. 560-7.*

Sfard, A. (1991). 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational studies in mathematics*, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). " Humanities students and epistemological obstacles related to limits" *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics-An International Journal of Mathematics Education, 10, 2436.

Szydlik,J.E.(2000). " Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function" , *Journal for Research in Mathematics Education vol.* 31 no3 May 2000. p. 258-276 .

Tall, D. & Schwarzenberger ,R.L.E (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 83 (44-49)

Tall, D (1980d). "Mathematical intuition, with special reference to limiting processes", *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* Berkeley, 170-176.

Tall, D., & Vinner S., (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Tall, D. (1986). "A graphical approach to integration and the fundamental theorem*", Mathematics Teaching,* 113 48-51.

Tall, D. O. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In: Grouws D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, 495-511.

Tall, D. (1992b). "Student's difficulties in Calculus" *(Plenary presentation in working group 3,* ICME Quebec August 1992).

Tall, D.(1993).Students' Difficulties in Calculus, Plenary Address, *Proceedingof Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus,ICME-7, Quebec, Canada, 13-28*.

Tall, D. (1995f). "Cognitive Development, Representations & Proof " In Justifyihg and Proving in School Mathematics Institute of Education, London 27-38.

Tall, D., & Thomas,M. & Davis, D. & Gray, E. & Simson, A. (2000).What is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior* 18(2), 223-241.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2006). PME 1 to 30 – Summing up and looking ahead: A personal perspective on infinite sets. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. 1, pp. 49-63). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Verchaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vinner, S. (1983).Concept definition, concept image and the notion of function.*The international Journal of Mathimatical Education in Science and Technology.* 14, 293-305.

Vinner, S. (1991). "The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics", in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.

Von Glasersfeld, E.(1987).Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier(Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 215-225). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Williams, S. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 219-236.

Williams, S. (2001). Predications of the limit concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32,* 341-367

Ελληνική Βιβλιογραφία

Ανδεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ.(2005). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ , Αθήνα(ΟΕΔΒ).

Απλακίδης,Ι.(2005).«Δυσκολεύονται οι Μαθητές στα Μαθηματικά ; Τι Δείχνουν οι Γραπτές Επιδόσεις τους στις Γενικές Εξετάσεις».Πρακτικά του 22ου Πανελληνίου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ,Λαμία .

Βοσνιάδου, Σ.(1998). *Εισαγωγή στη Ψυχολόγία, εκδ. Gutenberg, Αθήνα.*

Γαγάτσης,Α.- Μιχαηλίδου,Ε. – Σιακαλλή,Μ.(2001). Θεωρίες Αναπαράστάσης και Μάθηση των Μαθηματικών,Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α.,Ηλία,Ι., Ανδρέου, Σ. (2003). Αναπαραστάσεις και Μαθηση των Μαθηματικών :Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή. Ευκλείδης Γ΄,τευχος 59, (σελ5-34), Ε.Μ.Ε.

Duval, R.(1987). Ο Ρόλος της Ερμηνείας στη Μάθηση των Μαθηματικών. Διάσταση, 2, 56-74.

Γιανακούλιας, Ε.(2005). Σημειώσεις Μαθήματος Διδακτικής Απειροστικού Λογισμού.

Ε.Π.Π.Ε.(1998), Γενικοί σκοποί της Διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο,εκδ.Ο.Ε.Δ.Β, Αθήνα,1998.

Καλδρυμίδου, Μ.,& Οικονόμου, Α.(1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. Τετάδια Διδακτικής των Μαθηματικών,10- 11 , 21-43.

Παπαδόπούλος, Κ., Απλάκίδης, Ι.(2004). «*Τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄Λυκείου Ένας Μεγάλος Ασθένής».* Πρακτικά του 22ου Πανελληνίου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας ,Τρίκαλα.

Π.Ι (2005) , Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά το σχολικό έτος 2005-2006, εκδ.Ο.Ε.Δ.Β

Σπύρου, Π. (2005) .Επιστημολογία των Μαθηματικών (Σημειώσεις Παραδόσεων)

Van Der Waerden. Η Αφύπνιση της Επιστήμης (Μετάφραση Χριστιανίδης Ι.) (σ.257-258) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** Θετική ☐ Τεχνολογική ☐
	ΦΥΛΟ: Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐
ΣΧΟΛΕΙΟ:	**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:**

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Καλλιεργούμε ένα φυτό σ΄ ένα θερμοκήπιο και παρατηρούμε την ανάπτυξή του. Έχουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις που αφορούν το ύψος του.

Σε 240 ώρες το ύψος του είναι 1.9 m

Σε 264 ώρες το ύψος του είναι 1.99 m

Σε 288 ώρες το ύψος του είναι 1.999 m

Σε 312 ώρες το ύψος του είναι 1.9999 m

Οι παρατηρήσεις συνεχίζονται.

α) Έχει το ύψος του φυτού ένα όριο.

.....

β) Εάν ναι, ποιο το όριο ;

.....

γ) Η οροφή του θερμοκηπίου είναι 2 m πάνω από το έδαφος. Θα φτάσει το φυτό στην οροφή ;

.....

2. α)Υπέθεσε ότι είσαι καθηγητής. Τι θα έλεγες σ' ένα μαθητή-τρια, για να εξηγήσεις το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o ;

β) Ποια είναι η σχέση του x_o με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

γ) Πότε δεν υπάρχει το όριο συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o ;

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κυκλώστε κάθε φορά το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ).

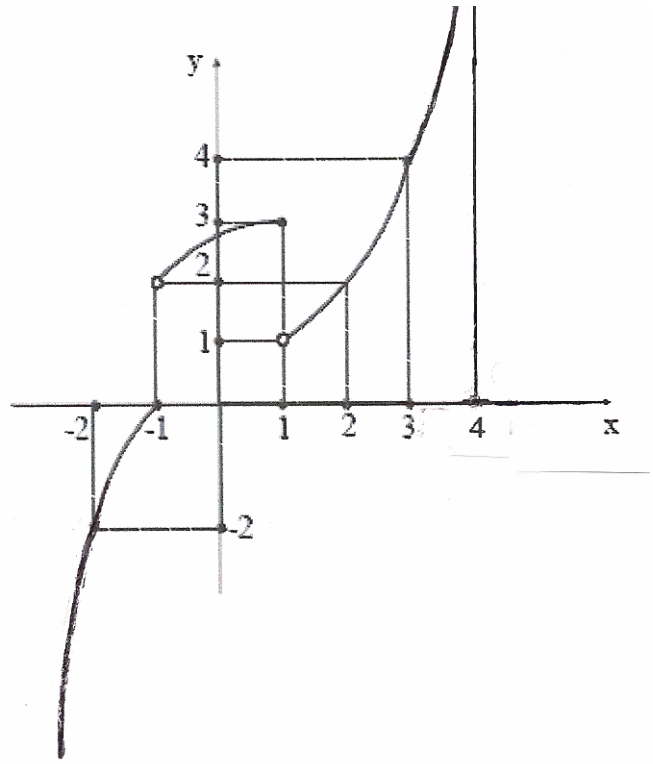
α) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ **Σ** **Λ**

β) $f(-1)=0$ **Σ** **Λ**

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **Σ** **Λ**

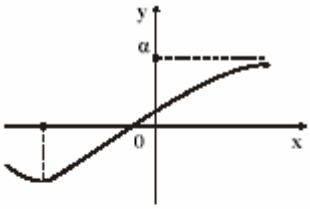
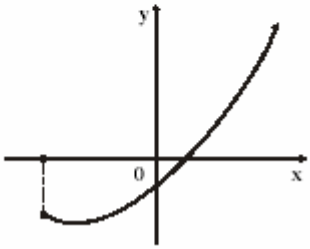
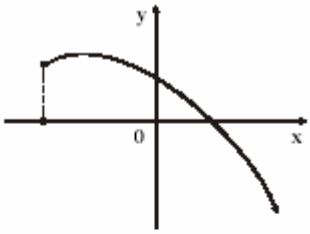
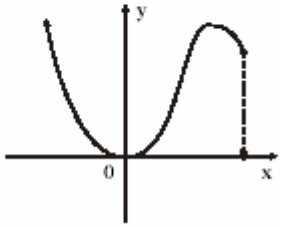
δ) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$ **Σ** **Λ**

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **Σ** **Λ**



4. Να βρεθούν ποιες από τις συναρτήσεις f, g, h, ϕ, ω, κ του πίνακα Ι της στήλης Β, αντιστοιχούν στα γραφήματα **1, 2, 3, 4,** της στήλης Α. **(Τα αποτελέσματα να γραφούν στον πίνακα ΙΙ)**

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. 	**β.** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \alpha$
3. 	**γ.** $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$
4. 	**δ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = -\infty$
	ε. $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega(x) = \alpha$
	ζ. $\lim\limits_{x \to -\infty} \kappa(x) = -\alpha$

Πίνακας ΙΙ

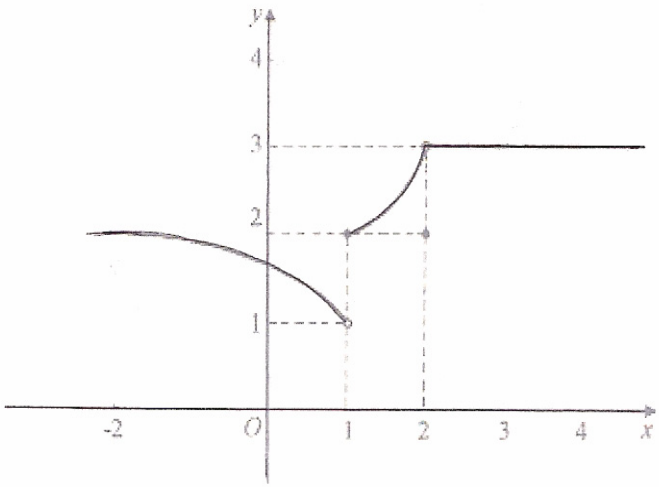
1	2	3	4

5. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D_f = [-2, +\infty)$. Με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

β) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

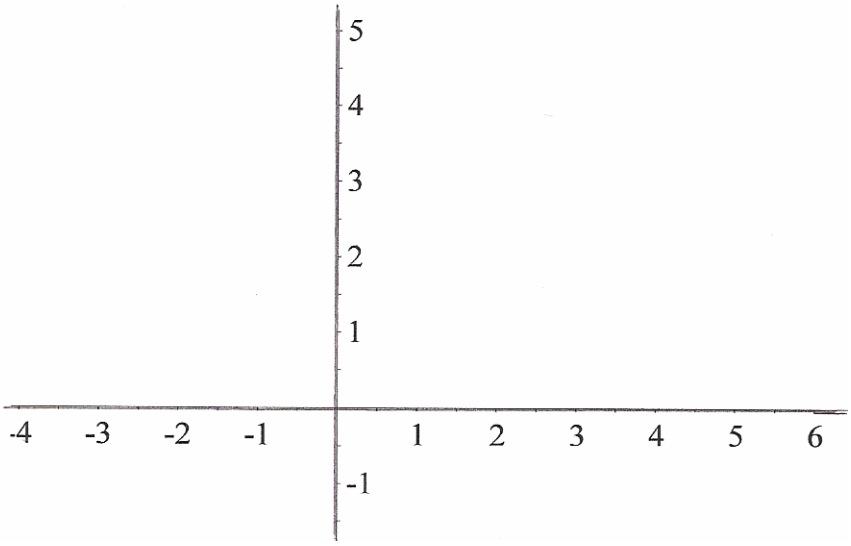


6. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφ' όσον υπάρχουν) :

α) το $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

β) το $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x+2, & x>1 \end{cases}$$



7. Να σχεδιάσετε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Df = $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ που να ικανοποιεί τα παρακάτω:

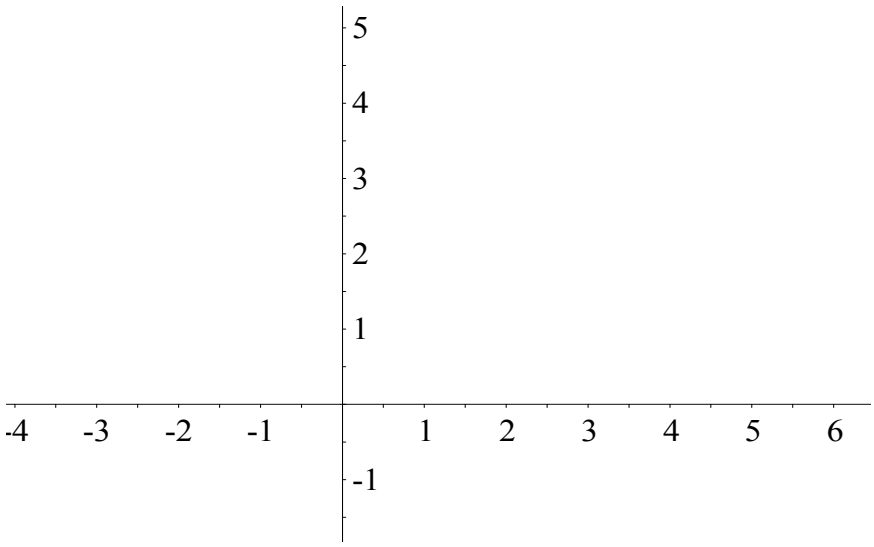
α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

β) $f(-3) = 0$, $f(0) = 3$,

γ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$,

δ) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$,



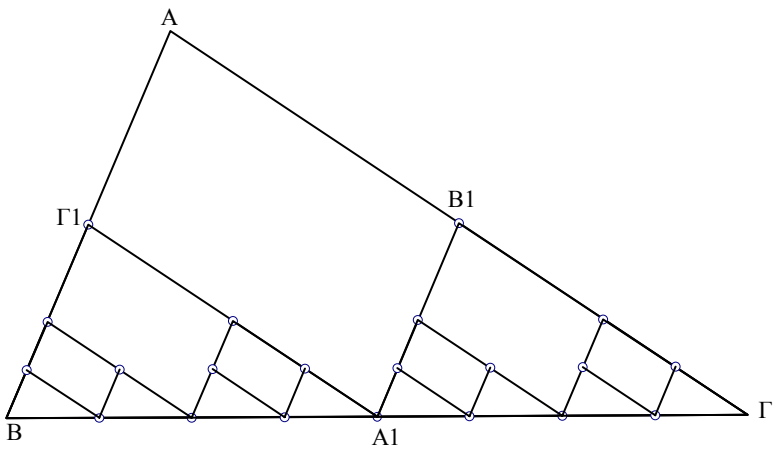
8. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{x^2-ax+2}{x-2}$$

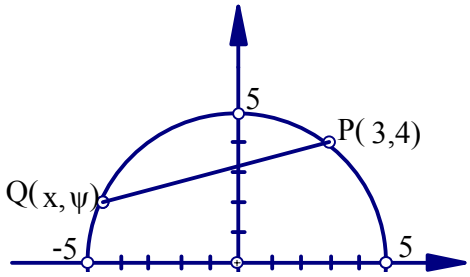
α) Που ορίζεται η συνάρτηση f ;

β) Για ποια τιμή του α υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός;. Στη συνέχεια να βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

9. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θέτουμε $α_1$=ΑΒ+ΑΓ(το άθροισμα των μηκών ΑΒ και ΑΓ). Στη συνέχεια παίρνουμε $Α_1$ μέσον της ΒΓ, $Β_1$ μέσον της ΑΓ ,$Γ_1$ μέσον της ΑΒ. Θέτουμε $α_2$= $ΒΓ_1+Γ_1Α_1+Α_1Β_1+Β_1Γ$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ΄άπειρον. Η τιμή του $α_ν$ όταν το ν αυξάνει απεριόριστα τείνει στο μήκος του ΒΓ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.



10.



Θεωρούμε το ημικύκλιο του παραπάνω σχήματος. Το σημείο Q(x,ψ)=Q(x, $\sqrt{25-x^2}$) διατρέχει το ημικύκλιο. Αν λ(x) προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της τέμνουσας QP , ζητείται: α) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} \lambda(x)$

β) αν Q(-3,4) βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της QP και να υπολογίσετε το lim λ(x)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

nb col : 25, nb lig : 222

	Occurrence	Average	Standard deviations:
GS1	: 192.00	0.86	0.34
GS2	: 198.00	0.89	0.31
GS3	: 199.00	0.90	0.30
GS4	: 184.00	0.83	0.38
GS5	: 56.00	0.25	0.43
SG1	: 201.00	0.91	0.29
SG2	: 206.00	0.93	0.26
SG3	: 194.00	0.87	0.33
SG4	: 173.00	0.78	0.41
Gs6	: 158.00	0.71	0.45
Gs7	: 147.00	0.66	0.47
Gs8	: 184.00	0.83	0.38
Scg	: 179.00	0.81	0.40
GSc2	: 152.00	0.68	0.46
GSc1	: 124.00	0.56	0.50
Scg1	: 95.00	0.43	0.49
Scg2	: 162.00	0.73	0.44
Scg3	: 110.00	0.50	0.50
Scg4	: 125.00	0.56	0.50
Scg5	: 99.00	0.45	0.50
SL1	: 140.00	0.63	0.48
SL2	: 131.00	0.59	0.49
PC1	: 73.00	0.33	0.47
PC2	: 90.00	0.41	0.49
DC	: 72.00	0.32	0.47
L1 s	: 205.00	0.92	0.27
L2 s	: 146.00	0.66	0.47
L3 s	: 169.00	0.76	0.43
D1 s	: 46.00	0.21	0.41
D2 s	: 90.00	0.41	0.49
D3 s	: 44.00	0.20	0.40
Sd s	: 205.00	0.92	0.27

Από τον πίνακα αυτό μπορούμε να δούμε σε ποιες ασκήσεις έχουμε ψηλά ποσοστά επιτυχίας όπως φαίνεται από τη δεύτερη στήλη(η πρώτη δείχνει πόσα άτομα από τα 222 πέτυχαν τις αντίστοιχες ασκήσεις).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Classification au niveau : 1 : (Scg1 Scg5) similarité : 1

Classification au niveau : 2 : (PC1 PC2) similarité : 1

Classification au niveau : 3 : (SL1 SL2) similarité : 1

Classification au niveau : 4 : ((Scg1 Scg5) Scg4) similarité : 0.999999

Classification au niveau : 5 : (((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) similarité : 0.999977

Classification au niveau : 6 : (GSc1 GSc2) similarité : 0.999955

Classification au niveau : 7 : ((SL1 SL2) (PC1 PC2)) similarité : 0.998742

Classification au niveau : 8 : ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2) similarité : 0.994311

Classification au niveau : 9 : ((GSc1 GSc2) ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2)) similarité : 0.988728

Classification au niveau : 10 : (GS7 ((GSc1 GSc2) ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2))) similarité : 0.923781

Classification au niveau : 11 : (GS6 ((SL1 SL2) (PC1 PC2))) similarité : 0.842172

Classification au niveau : 12 : ((GS7 ((GSc1 GSc2) ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2))) Scg) similarité : 0.832578

Classification au niveau : 13 : (GS2 GS4) similarité : 0.781863

Classification au niveau : 14 : (SG3 SG4) similarité : 0.773183

Classification au niveau : 15 : (GS1 GS5) similarité : 0.744192

Classification au niveau : 16 : ((GS6 ((SL1 SL2) (PC1 PC2))) ((GS7 ((GSc1 GSc2) ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2))) Scg)) similarité : 0.727215

Classification au niveau : 17 : (SG1 SG2) similarité : 0.682591

Classification au niveau : 18 : (GS3 GS8) similarité : 0.655868

Classification au niveau : 19 : ((SG3 SG4) ((GS6 ((SL1 SL2) (PC1 PC2))) ((GS7 ((GSc1 GSc2) ((((Scg1 Scg5) Scg4) Scg3) Scg2))) Scg))) similarité : 0.405373

Classification au niveau : 20 : ((GS2 GS4) (GS3 GS8)) similarité : 0.214764

Classification au niveau : 21 : ((GS1 GS5) (SG1 SG2)) similarité : 0.0635031

Le noeud le plus significatif est au niveau : 1

Noeuds significatifs
au niveau : 1
au niveau : 5
au niveau : 7
au niveau : 9
au niveau : 12
au niveau : 16
au niveau : 20

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Contribution à la classe : Scg1,Scg5 (1)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.293
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0045
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.252
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00202
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00518
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000237
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.398
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0074
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.253
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.843

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 0.000237

Contribution à la classe : PC1,PC2 (2)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.365
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.32
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.182
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0128
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 2.02e-005
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000359
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.259
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 6.1e-012
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 3.12e-005
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 1

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 6.1e-012

Contribution à la classe : SL1,SL2 (3)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.442
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.641
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.361
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00397
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00033
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00688
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.159
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 4.43e-007
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.012
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.894

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 4.43e-007

Contribution à la classe : Scg1,Scg5,Scg4 (1,4)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.314
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00684
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.222
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000498
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00356
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 4.61e-005
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.367
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00348
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.285
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.805

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 4.61e-005

Contribution à la classe : Scg1,Scg5,Scg4,Scg3 (1,4,5)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.361
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0105
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.327
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00288
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000455
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000148
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.419
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0177
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.11
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.702

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 0.000148

Contribution à la classe : GSc1,GSc2 (6)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.323
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0288
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.274
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0041
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00307
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00121
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.375
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00545
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.383

La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.962

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 0.00121

Contribution à la classe : SL1,SL2,PC1,PC2 (2,3,7)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.393
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.483
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.205
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.035
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 9.67e-005
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00157
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.28
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 3.12e-011
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.000641
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 1

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 3.12e-011

Contribution à la classe : Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2 (1,4,5,8)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.361
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0105
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.327
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00288
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000455
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000148
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.419
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0177
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.11
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.702

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 0.000148

Contribution à la classe : GSc1,GSc2,Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2 (1,4,5,6,8,9)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.44
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0462
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.276
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00602
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000784
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000399
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.324
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0104
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.245
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.655

La variable qui contribue le plus à cette classe est D3 avec un risque de : 0.000399

Contribution à la classe : GS7,GSc1,GSc2,Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2 (1,4,5,6,8,9,10)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.345
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.018
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.238
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00978

La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00039
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000769
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.345
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0179
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.275
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.593

La variable qui contribue le plus à cette classe est D2 avec un risque de : 0.00039

Contribution à la classe : GS6,SL1,SL2,PC1,PC2 (2,3,7,11)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.364
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.387
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.302
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0185
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 1.32e-005
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000626
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.305
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 3.29e-010
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00608
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 1

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 3.29e-010

Contribution à la classe : GS7,GSc1,GSc2,Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2,Scg (1,4,5,6,8,9,10,12)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.345
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.018
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.238
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00978
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00039
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000769
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.345
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0179
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.275
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.593

La variable qui contribue le plus à cette classe est D2 avec un risque de : 0.00039

Contribution à la classe : GS2,GS4 (13)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.341
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0545
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.369
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.118
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0344
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0729
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.608
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0358
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.478
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.831

La variable qui contribue le plus à cette classe est D2 avec un risque de : 0.0344

Contribution à la classe : SG3,SG4 (14)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.475
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0575
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.209
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0451
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0411
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.123
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.537
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.118
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.042
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.713

La variable qui contribue le plus à cette classe est D2 avec un risque de : 0.0411

Contribution à la classe : GS1,GS5 (15)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.496
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.489
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.727
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.114
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.267
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0207
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.625
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.956
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00513
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.852

La variable qui contribue le plus à cette classe est DC avec un risque de : 0.00513

Contribution à la classe :
GS6,SL1,SL2,PC1,PC2,GS7,GSc1,GSc2,Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2,Scg (
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,16)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.41
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.115
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.262
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0102
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00536
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000822
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.343
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 3.58e-006
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.000692
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.778

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 3.58e-006

Contribution à la classe : SG1,SG2 (17)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.356
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.493
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.123
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.265
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.194
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.156

La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.518
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.261
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.115
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.375

La variable qui contribue le plus à cette classe est DC avec un risque de : 0.115

Contribution à la classe : GS3,GS8 (18)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.428
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0465
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.303
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.011
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00374
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0931
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.428
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00836
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.035
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.947

La variable qui contribue le plus à cette classe est D2 avec un risque de : 0.00374

Contribution à la classe :
SG3,SG4,GS6,SL1,SL2,PC1,PC2,GS7,GSc1,GSc2,Scg1,Scg5,Scg4,Scg3,Scg2,Scg (
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16,19)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.358
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0549
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.252
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00988
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00097
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.000779
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.358
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 6.54e-005
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.000257
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.741

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 6.54e-005

Contribution à la classe : GS2,GS4,GS3,GS8 (13,18,20)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.449
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0688
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.443
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0217
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.00604
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0637
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.449
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00361
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.0948
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.989

La variable qui contribue le plus à cette classe est NDC avec un risque de : 0.00361

Contribution à la classe : GS1,GS5,SG1,SG2 (15,17,21)
La variable L1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.469
La variable L2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.549
La variable L3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.667
La variable D1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.124
La variable D2 contribue à cette classe avec un risque de : 0.235
La variable D3 contribue à cette classe avec un risque de : 0.0482
La variable Sd contribue à cette classe avec un risque de : 0.606
La variable NDC contribue à cette classe avec un risque de : 0.854
La variable DC contribue à cette classe avec un risque de : 0.00109
La variable DC1 contribue à cette classe avec un risque de : 0.795

La variable qui contribue le plus à cette classe est DC avec un risque de : 0.00109