ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Γ. ΖΟΥΒΕΛΟΥ

ΤΙΤΛΟΣ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΕΝΟΤΗΤΩΝ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: κα ΦΑΡΜΑΚΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

Για την παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την κα Φαρμάκη Βασιλική, που βρήκε ενδιαφέρουσα την ιδέα μου να ασχοληθώ με τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά καθώς και για το ότι δέχτηκε να είναι η επιβλέπουσα καθηγήτρια.

Επίσης θα ήθελα ειλικρινά να ευχαριστήσω τον κ. Κλαουδάτο για τη συμβολή του, την καθοδήγησή του και συνάμα για την παροχή υλικού – βιβλιογραφίας με τη βοήθεια των οποίων επιτεύγθηκε η εν λόγω εργασία.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ζαχαριάδη που δέχτηκε να συμμετάσχει στην τριμελή επιτροπή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....σελ. 2

Περίληψη 1ης θεματικής ενότητας.....σελ. 3

Περίληψη 2ης θεματικής ενότητας.....σελ. 5

Περίληψη 3ης θεματικής ενότητας.....σελ. 6

Περίληψη 4ης θεματικής ενότητας.....σελ. 8

Περίληψη 5ης θεματικής ενότητας.....σελ. 10

Περίληψη 6ης θεματικής ενότητας.....σελ. 10

1η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ. 11

1.1 Ο πυρήνας και οι συγγενικές περιοχές της μαθηματικής εκπαίδευσης.....σελ. 11

1.2 Η μαθηματική εκπαίδευση ως μια συστημική - εξελικτική επιστήμη συνδυασμού.....σελ. 17

1.3 Ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων και η εμπειρική έρευνα.....σελ. 22

2η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ. 29

2.1 Αναφορά στο επίπεδο και στο ρόλο της μαθηματικής εκπαίδευσης..σελ. 29

2.2 Προβλήματα συσσωμάτωσης.....σελ. 31

2.3 Μεριές ιδέες για τη διδασκαλία των μαθηματικών.....σελ. 33

2.4 Οι διδακτικές ενότητες ως ο πυρήνας των συνδυασμών της μαθηματικής εκπαίδευσης.....σελ. 36

2.4.1 Διδακτικές ενότητες.....σελ. 37

2.4.2 Διδακτικές ενότητες στον τομέα εκπαίδευσης των δασκάλων.....σελ. 39

2.4.3 Οι διδακτικές ενότητες στα πλαίσια της διδακτικής έρευνας.....σελ. 42

2.4.4 Συμπέρασμα.....σελ. 43

3η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ. 45

3.1 Η αναπτυξιακή έρευνα ως μία μορφή έρευνας.....σελ. 45

3.1.1 Αναπτυξιακή Έρευνα.....σελ. 46

3.2 Κατασκευή ενός πρωταρχικού σχεδίου μιας σειράς μαθημάτων...σελ. 48
3.2.1 Ανάπτυξη της θεωρίας.....σελ. 50
3.2.2 Χαρακτηριστικά.....σελ. 53
3.3 Προκαταρκτικό σχέδιο.....σελ. 56
3.3.1 Στρατηγικές που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό..... .σελ. 57
3.3.2 Επεξεργασία μιας σειράς μαθημάτων..... σελ. 63
3.3.3 Κριτήρια.....σελ. 64

4η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ. 69

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....σελ. 69
4.1.1 Μια παραδοσιακή διδασκαλία του διαφορικού λογισμού και μερικές εναλλακτικές μορφές αυτής.....σελ. 71
4.1.2 Εναλλακτικές προσεγγίσεις.....σελ. 72
4.1.3 Πραγματοποιώντας σύνδεση μεταξύ μιας αυθεντικής εμπειρίας και ενός μαθηματικού συστήματοςσυμβόλων.....σελ. 73
4.1.4 Ανακάλυψη γραφημάτων.....σελ. 74
4.1.5 Συμπεράσματα.....σελ. 75
4.2 Καθοδηγούμενη επανανακάλυψη και προοδευτική Μαθηματικοποίηση.....σελ. 76
4.2.1 Η προοπτική που έχει ένας διδακτικός σχεδιασμός.....σελ. 78
4.3 Ένα ιστορικό σχεδιάγραμμα.....σελ. 82
4.3.1 Το γράφημα ως μοντέλο για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα ταχύτητας – χρόνου.....σελ. 84
4.3.2 Ο Γαλιλαίος ερευνά την ελεύθερη πτώση.....σελ . 85
4.3.3 Εξετάζοντας στο μικροσκόπιο τα αναδυόμενα μοντέλα.....σελ. 86
4.3.4 Μία σειρά μαθημάτων για τον διαφορικό λογισμό στα πλαίσια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (RME).....σελ. 88
4.3.5 Η δημιουργία μιας μαθηματικής πραγματικότητας.....σελ. 92

5η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ. 94

Γενικά Συμπεράσματα.....σελ. 94

6η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ.....σελ.105

Θέμα: Η ιδιότητα της πρόσθεσης στους λογαρίθμους.....σελ. 105

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....σελ. 113

« Η διδασκαλία των μαθηματικών παρέχει μαθηματικές γνώσεις στους μαθητές, έτσι ώστε να καλλιεργηθεί η κατανόησή τους για την πραγματικότητα. »

Erich Wittmann

Εισαγωγή

Τα ρεαλιστικά μαθηματικά αφορούν στην διδακτική μεθοδολογία η οποία αναπτύχθηκε στο Ινστιτούτο Freudenthal στο Πανεπιστήμιο της Utrecht, και υιοθετήθηκε από το σύνολο σχεδόν των Κάτω Χωρών από το 1971. Η μεθοδολογία αυτή είναι γνωστή ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education ή RME) και έχει ως βάση την καθοδηγούμενη επανανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές μέσα από μία διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης, έννοιες που θα αποσαφηνιστούν στην συνέχεια.

Η προοπτική αυτή για την μαθηματική εκπαίδευση είναι πλέον αποδεκτή από έναν μεγάλο αριθμό χωρών όπως η Γερμανία, η Αγγλία, η Ισπανία, οι ΗΠΑ, η Βραζιλία και άλλες.

Ο όρος 'ρεαλιστικά' προφανώς παραπέμπει στην ανάγκη να είναι τα μαθηματικά συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις, αλλά θα πρέπει να τονιστεί ότι κυρίαρχο αίτημα στην RME είναι να έχουν νόημα, για τον μαθητή, οι καταστάσεις που καλείται να μαθηματικοποιήσει ο ίδιος. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δεν καλούνται να λύσουν μόνο πραγματικά προβλήματα αλλά και προβλήματα τα οποία αφορούν σε ένα μαθηματικό μοντέλο ή μία μαθηματική εφαρμογή αρκεί τα προβλήματα αυτά να συνδέονται με τα ενδιαφέροντά τους και την εμπειρία τους, φυσική ή μαθηματική. (de Lange 1996).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 1ης ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Η 1η θεματική ενότητα είναι χωρισμένη σε 3 μέρη και σκοπό έχει να κάνει μία ανάλυση και να αξιολογήσει την υπάρχουσα κατάσταση στη μαθητική εκπαίδευση. Επίσης μέσω αυτής της ενότητας θα γίνει προσπάθεια να σκιαγραφηθεί και να οριστεί λεπτομερώς ο προσδοκώμενος χαρακτήρας της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στο πρώτο μέρος της 1η θεματικής ενότητας θα γίνει αναφορά και προσδιορισμός του ρόλου των λέξεων **ανάπτυξη – έρευνα**, οι οποίες βρίσκονται τοποθετημένες στον πυρήνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επίσης θα επισημανθεί και θα δοθεί λύση στο πρόβλημα που δημιουργείται κατά τον προσανατολισμό του πυρήνα προς τη μεριά της **πρακτικής**. Επιπροσθέτως θα γίνουν σχόλια για τη σχέση που υπάρχει μεταξύ πυρήνα και συγγενικών περιοχών του, για τους σκοπούς αυτών και για το ρόλο τους στη μαθηματική εκπαίδευση. Το κλείσιμο του 1ου μέρους θα επέλθει με προσδιορισμό των όρων**, εξειδικευμένα μαθηματικά** και **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** καθώς και της σημασίας τους, της μεταξύ τους σχέσης αλλά και του ρόλου που έχουν στην ανάπτυξη των τυπικών μαθηματικών.

Το 2ο μέρος της 1ης θεματικής ενότητας ξεκινά με μία λύση στο πρόβλημα που δημιουργείται, όταν εγκαθιδρυθούν επιστημονικά πρότυπα και κριτήρια στην μαθηματική εκπαίδευση υιοθετώντας τα από συγγενικές επιστήμες. Στη συνέχεια θα έχουμε τον χαρακτηρισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης ως **επιστήμης σχεδιασμού**, που εξαιτίας αυτού προάγεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο αξιολόγησης. Ο προηγούμενος χαρακτηρισμός οφείλεται στην παρουσίαση των διδακτικών ενοτήτων ως **"τεχνητά αντικείμενα"** που δημιουργούνται στον πυρήνα.

Ιδιαίτερη αναφορά και σχολιασμός θα γίνει για το παράδειγμα της **"συστημικής εξελικτικής ανάπτυξης"** που δίνει απάντηση στην απειλή του μηχανιστικού παραδείγματος, το οποίο εμφανίζεται σε όλες τις επιστήμες σχεδιασμού. Το παράδειγμα λοιπόν της **"συστημικής εξελικτικής ανάπτυξης"** είναι εκείνο που ακολουθείται και στον τομέα σχεδιασμού διδακτικών ενοτήτων.

Το 2ο μέρος της 1ης θεματικής ενότητας κλείνει με μία λεπτομερή αναφορά των αρχών που διέπουν τις διδακτικές ενότητες και με ένα καταληκτικό συμπέρασμα που **θεωρεί το δάσκαλο ως συμμέτοχο στην έρευνα και ανάπτυξη της μαθησιακής διαδικασίας και τον μαθητή ως το εργαστήριο κατασκευής της γνώσης.**

Στο 3^{ο} μέρος της 1^{ης} θεματικής ενότητας, προτείνεται μία ιδιαίτερη προσέγγιση στην **εμπειρική έρευνα**, δηλαδή στην έρευνα που κινείται γύρω από τις διδακτικές ενότητες.

Αρχικά γίνεται διαχωρισμός των ρόλων, μεταξύ των **ειδικών επιστημόνων** της διδακτικής των μαθηματικών από μία μεριά και των μαθηματικών της εκπαίδευσης – **δασκάλων** από την άλλη. Οι πρώτοι θεωρούνται ως αυτοί που σχεδιάζουν και αναπτύσσουν τις διδακτικές ενότητες, ενώ οι δεύτεροι ως εκείνοι που πραγματοποιούν σημαντικές συνεισφορές στο ήδη διαμορφωμένο εσωτερικό του σκελετό του σχεδίου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά που διακατέχουν μία ουσιώδη διδακτική ενότητα και δίνεται ένα παράδειγμα, εκείνο των "Αριθμογωνίων".

Το 3^{ο} μέρος της 1^{ης} θεματικής ενότητας καταλήγει με έναν παραλληλισμό των διδακτικών ενοτήτων με τις **κλινικές συνεντεύξεις**, που πρώτος εισήγαγε ο Piaget. Αυτός ο παραλληλισμός οδηγεί τις διδακτικές ενότητες να θεωρηθούν ως **"κλινικά πειράματα διδασκαλίας",** όπου ο δάσκαλος ακολουθεί τις ιδέες των μαθητών. Αυτός ο χαρακτηρισμός των διδακτικών ενοτήτων τις καθιστά ως **εργαλεία έρευνας** (εμπειρικής) αλλά και ως **αντικείμενα μελέτης.**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 2ης ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Το ερώτημα που αναδύεται είναι: «Πώς να συνδυαστούν τα μαθηματικά, η ψυχολογία, τα παιδαγωγικά και η πρακτική της διδασκαλίας μέσα στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών, ώστε να προκύψουν συγκεκριμένου τύπου συνεκτικές θεωρίες και αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών ;»

Το παραπάνω πρόβλημα που μελετάται σ' αυτή την ενότητα, έχει μία σημαντική σχέση με τις θεωρητικές και εμπειρικές μελέτες, που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς επίσης συνδέεται και με την εκπαίδευση των δασκάλων. Η προσέγγιση που προτείνεται, βασίζεται στις **διδακτικές ενότητες**. Κατάλληλες διδακτικές ενότητες συσσωματώνουν στους κόλπους τους μαθηματικές, παιδαγωγικές, ψυχολογικές και πρακτικές αντιλήψεις με έναν φυσικό τρόπο, που τις καθιστά ικανές να θεωρηθούν ως το καταλληλότερο εργαλείο για τον προσδοκώμενο επιτυχή συνδυασμό.

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να περιγραφεί μία προσέγγιση που γεφυρώνει το χάσμα που υπάρχει μεταξύ των διδακτικών μεθόδων για τη μαθηματική διδασκαλία από τη μία μεριά και των μαθηματικών, ψυχολογίας, παιδαγωγικής και εξάσκηση της διδασκαλίας (διδακτική πρακτική) από την άλλη. Προσπαθώντας να πραγματοποιηθεί αυτό, συσχετίζονται οι διάφορες αντιλήψεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το ενδιαφέρον είναι ισοδυνάμως κατανεμημένο και στην εκπαίδευση των δασκάλων αλλά και στη μεθοδολογία της έρευνας που γίνεται στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στο 1ο μέρος της 2ης θεματικής ενότητας γίνεται αναφορά και περιγράφεται μία εικόνα που αφορά το επίπεδο και το ρόλο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στο 2ο μέρος, λαμβάνει χώρα μία επιχειρηματολογία που αφορά προβλήματα συσσωμάτωσης, τα οποία αναδύονται με φυσικό τρόπο όταν η μαθηματική εκπαίδευση λαμβάνεται υπ' όψιν ως ένας διεπιστημονικός τομέας μελέτης.

Στο 4ο και ουσιώδες μέρος, η χρήση παραδειγμάτων θα υποδείξει το τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων με τη βοήθεια των διδακτικών ενοτήτων.

Η παρούσα προσέγγιση βασίζεται σε μία συγκεκριμένη αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία είναι απαραίτητη για να κατανοηθεί πλήρως το 4ο μέρος. Έτσι δικαιολογείται το γεγονός ότι αυτή η αντίληψη επεξήγεται στο 3ο μέρος.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 3^{ης} ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Η 3^{η} θεματική ενότητα είναι επίσης χωρισμένη σε 3 μέρη και θέμα έχει την **αναπτυξιακή έρευνα**. Η αναπτυξιακή έρευνα είναι μία μορφή έρευνας που θέτει την δημιουργική ερώτηση **"τι οφείλει να είναι"** κάτι. Η αναπτυξιακή έρευνα αποτελείται από ένα μίγμα πραγμάτων εκείνων της ανάπτυξης προγραμμάτων σπουδών (κατά συνέπεια και των διδακτικών ενοτήτων) και της εκπαιδευτικής έρευνας (στην οποία η ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων χρησιμοποιείται ως μέσο για την επεξεργασία και αξιολόγηση μιας διδακτικής θεωρίας).

Το 1^{ο} μέρος της 3^{ης} θεματικής ενότητας ξεκινά με σύγκριση της αναπτυξιακής έρευνας με άλλες μεθόδους έρευνας και συνεχίζει με μία ιστορική αναδρομή και έναν χαρακτηρισμό της ως την κινητήριο δύναμη που ευθύνεται για την μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ολλανδία. Το 1^{ο} μέρος κλείνει δίνοντας μία σφαιρική περιγραφή της αναπτυξιακής έρευνας και των χαρακτηριστικών.

Στο 2^{ο} μέρος αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζεται ένα πρωταρχικό σχέδιο μιας σειράς μαθημάτων, το οποίο έχει χαρακτήρα ερευνητικού προγράμματος και αποτελεί το 1^{ο} βήμα της αναπτυξιακής έρευνας. Επίσης παρουσιάζεται το 2^{ο} βήμα της αναπτυξιακής έρευνας, που είναι η μελέτη των αποτελεσμάτων της διαδικασίας εκμάθησης που ακολουθήθηκε. Αυτό πραγματοποιείται φέρνοντας στην επιφάνεια σκέψεις, σκοπούς και εμπειρίες που βρίσκονται στη βάση του τελικού σχεδίου μιας σειράς μαθημάτων. Ο σκοπός όλων αυτών είναι να ανασυρθεί αρχικά μία **"τοπική"** διδακτική θεωρία. Σε αυτό το σημείο αναφέρονται τα στοιχεία στα οποία αυτή βασίζεται. Η "τοπική" αυτή διδακτική θεωρία αποτελεί την μετάβαση για να περάσουμε στην ανάπτυξη μιας **"εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας"** που αφορά μόνο την μαθηματική εκπαίδευση και είναι συνδεδεμένη με τη ρεαλιστική προσέγγιση. Ο Treffers κατασκεύασε ένα σκελετό διδακτικής θεωρίας βασισμένος σε κοινά χαρακτηριστικά που συναντώνται σε επιμέρους τοπικές διδακτικές θεωρίες. Το 2^{ο} μέρος της 3^{ης} θεματικής ενότητας κλείνει με παρουσίαση τον χαρακτηριστικών της "εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας" που δεν είναι άλλα από: **εξελικτική** – **στρωματοποιημένη** – **αναστοχαστική**.

Το 3^{ο} μέρος της 3^{ης} θεματικής ενότητας αρχικά αναφέρεται στον **προκαταρκτικό σχεδιασμό** μιας διδακτικής ενότητας και συγκεκριμένα σε ερωτήματα που θα θέσει ο

ίδιος ο σχεδιαστής – ερευνητής πρώτα στον εαυτό του και μετέπειτα στο υπάρχον σύστημα. Ακολούθως θα διατυπωθεί η "εξειδικευμένη διδακτική θεωρία" που ορίστηκε προηγούμενα με άξονα όμως τώρα τις στρατηγικές που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό σε συνδυασμό με τα κριτήρια αξιολόγησης τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 4ης ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Η 4η θεματική ενότητα είναι χωρισμένη σε 3 μέρη. Στο 1ο μέρος της 4ης θεματικής ενότητας γίνεται αναφορά στο ρόλο που έχουν τα **context problems** (προβλήματα που αναπτύσσονται σε συγκεκριμένο πλαίσιο - context) καθώς είναι αυτά που χρησιμοποιούνται από την Ολλανδική προσέγγιση, γνώστη ως ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME). Επίσης αντιπαραβάλλονται στον παραδοσιακό τρόπο οργάνωσης ενός θέματος διάφορες **εναλλακτικές προσεγγίσεις**. Το 1ο μέρος της τέταρτης θεματικής ενότητας κλείνει με διατύπωση συμπερασμάτων προερχόμενα από τις εναλλακτικές προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν.

Στο 2ο μέρος της 4ης θεματικής ενότητας διατυπώνονται και προσδιορίζονται η σημασία των όρων **επανανακάλυψη - προοδευτική μαθηματικοποίηση** καθώς και η προοπτική που έχει ένας **διδακτικός σχεδιασμός**, στα πλαίσια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευση. Έτσι λοιπόν στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση τα context problems σκοπό έχουν να ενισχύσουν μία επανανακαλυπτική διαδικασία που βοηθά τους μαθητές ώστε να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις των τυπικών μαθηματικών του σχολείου. Αυτή η προσέγγιση αρχικά περιγράφηκε από την προοπτική που της δίνει ένας διδασκαλικός σχεδιασμός. Αυτός που σχεδιάζει τη διδασκαλία προσπαθεί να υποδείξει μία πορεία με τη βοήθεια της οποίας να επανανακαλυφθούν τα μέχρι πρότινος μαθηματικά που διδάσκονται στα σχολεία. Αυτή η πορεία της επανανακάλυψης θα ακολουθηθεί χρησιμοποιώντας τα context problems τα οποία προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες για επίτευξη προοδευτικής μαθηματικοποίησης. Τα context problems είναι ορισμένα ως προβλήματα των οποίων οι καταστάσεις που περιγράφουν είναι εμπειρικά γνωστές στους μαθητές. Το 2ο μέρος της 4ης θεματικής ενότητας κλείνει με αναφορά στην έννοια της **μοντελοποίηση**ς και του **συμβολισμού**.

Στο 3ο μέρος της 4ης θεματικής ενότητας περιγράφεται ένα **σχέδιο** βασισμένο στην ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, που αφορά μία **σειρά μαθημάτων** με θέμα τον **διαφορικό λογισμό**. Το σχέδιο αυτό δόθηκε ως παράδειγμα για να διευκρινιστεί το γεγονός, ότι η θεωρία που βασίζεται στις στρατηγικές που αφορούν τον διδακτικό σχεδιασμό και που χρησιμοποιούν τα context problems και την μοντελοποίηση και που αναπτύχθηκε για τα πρώτα μαθηματικά του σχολείου, μπορεί όντως να εφαρμοστεί σε ένα τόσο προχωρημένο μαθηματικό θέμα όπως είναι ο διαφορικός λογισμός.

Ειδική προσοχή δίνεται επίσης στη στρατηγική εκείνη του διδακτικού σχεδιασμού της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, που αναφέρεται στο ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά **μοντέλα** κατά τη μετάβαση από τη θέση που έχουν όταν περιγράφουν μία επικρατούσα κατάσταση προς τη θέση που έχουν όταν ερμηνεύουν μία εν λόγω μαθηματική διαδικασία.

Έχοντας υπ' όψιν τον διπλό ρόλο των μοντέλων, δηλαδή από τη μία μεριά που περιγράφουν και από την άλλη όταν ερμηνεύουν, προσδιορίζεται και ο ρόλος κλειδιού των **συναρτήσεων** με τα **γραφήματά** τους. Από τη μία μεριά ως περιγραφικός, όταν αυτές βρίσκονται σε ένα context problem που αναζητά λύση και από την άλλη ως ερμηνευτικός όταν αναζητείται η ανάπτυξη του τυπικού διαφορικού λογισμού.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 5^{ης} ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Στα **ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ** που θα ακολουθήσουν μετά την ολοκλήρωση των τεσσάρων θεματικών ενοτήτων θα διατυπωθούν **οι βασικές αρχές** της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης και θα δοθούν **τα χαρακτηριστικά** που πρέπει να έχει μια **ουσιώδης διδακτική ενότητα** καθώς και μία **γενική δομή** της. Επίσης θα γίνει λεπτομερής αντιστοίχιση των **χαρακτηριστικών της προοδευτικής μαθηματικοποίησης** που διέκρινε ο Treffers "εξειδικευμένη διδακτική θεωρία" και των **στρατηγικών** που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό, σε συνοδεία με τα **κριτήρια** που διέπουν αυτές.

Τα **ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ** θα κλείσουν με μία απάντηση στο ερώτημα : «Ποιες είναι οι αρχές εκείνες που αντανακλούν τις θεμελιώδεις αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης και στις οποίες βασιζόμαστε για τον σχεδιασμό διδακτικών ενοτήτων;».

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 6^{ης} ΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:

Εδώ παρουσιάζεται λεπτομερώς μία διδακτική ενότητα με τίτλο την **"ΑΝΑΠΤΥΞΗ"** στο πλαίσιο των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων και αντιπαραβάλλονται οι στρατηγικές που διέπουν το διδακτικό σχεδιασμό, τα κριτήρια που αυτές συνοδεύουν και οι αντίστοιχες συνδέσεις μεταξύ διδακτικών και μαθησιακών αρχών.

1η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

1.1 Ο πυρήνας και οι συγγενικές περιοχές της μαθηματικής εκπαίδευσης

Κάνοντας μία γενική τοποθέτηση, ο σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να εξερευνήσει και να αναπτύξει τη διδασκαλία των μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα συμπεριλαμβάνοντας τις προϋποθέσεις, σκοπούς και κοινωνικό περιβάλλον αυτής. Όμοια με τις διδακτικές προσεγγίσεις που απαιτούνται για άλλα θέματα, η μαθηματική εκπαίδευση απαιτεί τη διασταύρωση των συνόρων μεταξύ επιστημών και βασίζεται στα αποτελέσματα και στις μεθόδους αρκετά διαφορετικών πεδίων συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών, της γενικής διδακτικής, των παιδαγωγικών, της κοινωνιολογίας, της ψυχολογίας, της ιστορίας της επιστήμης και άλλων. Επιστημονική γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν μπορεί να αποκτηθεί κάνοντας συνδυασμό αποτελεσμάτων από τα διάφορα πεδία. Πιθανότατα αυτό πού προαπαιτείται είναι μία ειδική διδακτική προσέγγιση, που να συγκεντρώνει διαφορετικές αντιλήψεις, φτιάχνοντας μία εικόνα για τη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση γεμάτη συνάφεια και περιεκτική σε νόημα. Η επόμενη κίνηση είναι το πέρασμα με έναν εποικοδομητικό τρόπο στην πράξη.

Το να οριοθετηθούν με λεπτομερή τρόπο οι παραπάνω ενέργειες, απαιτείται από τη μία πλευρά ισχυρές σχέσεις μεταξύ των συγγενικών, με τη μαθηματική εκπαίδευση, επιστημών καθώς και η διατήρηση από την άλλη πλευρά μιας ισορροπίας μεταξύ πρακτικής αμεσότητας και θεωρητικής απόστασης. Λαμβάνοντας υπ' όψιν πάντα το επίπεδο των σχολείων όπου ο **Bauersfeld (1988, p. 15**) αναφέρεται στις δύο υπάρχουσες κουλτούρες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το πώς θα πρέπει λοιπόν να συνδυαστούν οι διάφορες απόψεις και συγχρόνως να χειραγωγηθεί η ένταση που υπάρχει μεταξύ θεωρίας και πράξης, δεν έχει αποσαφηνισθεί εκ των προτέρων. Γι' αυτό το λόγο είναι τόσο δύσκολη η επίτευξη μιας γενικής και ειδικής αντίληψης για τη μαθηματική εκπαίδευση.

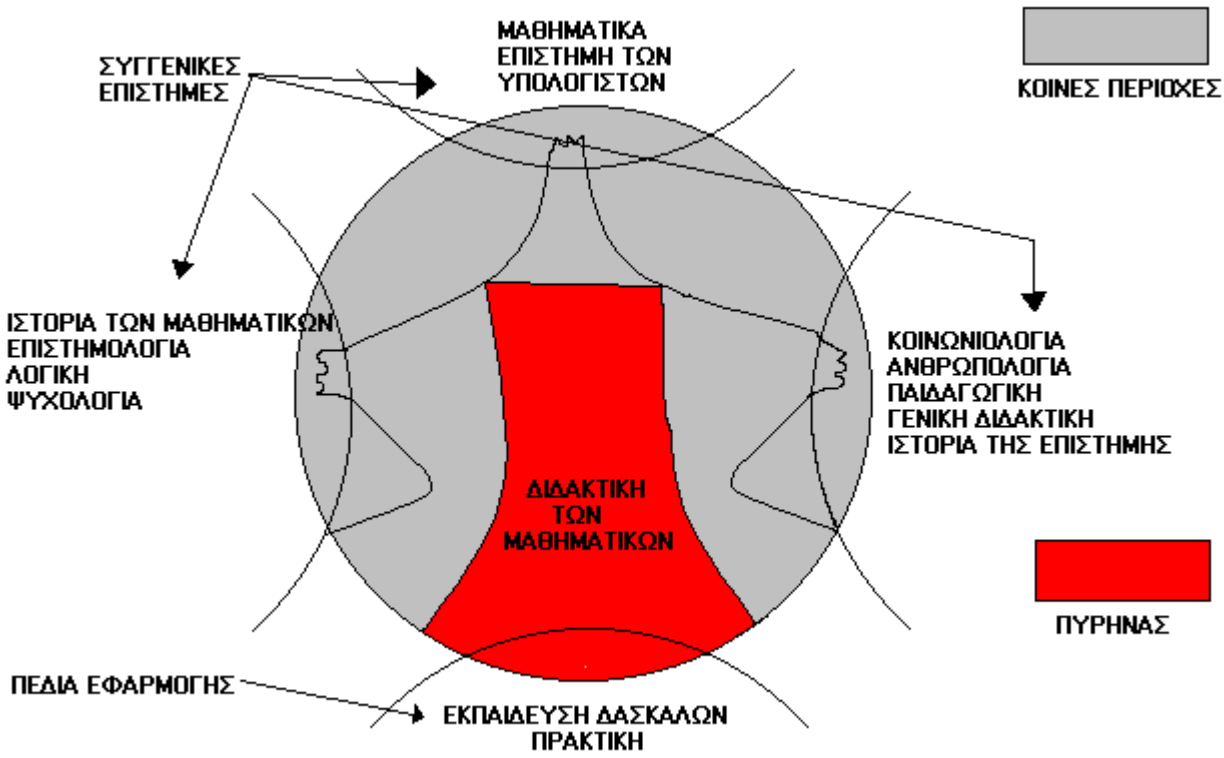
Ο **Erich Ch. Wittmann** υποστηρίζει, ότι οι συγκεκριμένες υποχρεώσεις που έχει η μαθηματική εκπαίδευση μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο εάν η έρευνα και η ανάπτυξη έχουν συγκεκριμένους τρόπους σύνδεσης με την πρακτική στον πυρήνα

τους και εάν η βελτίωση της πρακτικής είναι συνδεδεμένη με την εξολοκλήρου πρόοδο του τομέα.

Ο πυρήνας αποτελείται από ένα πλήθος στοιχείων ανάμεσα στα οποία είναι :

- ✓ **Ανάλυση** της μαθηματικής δραστηριότητας καθώς και μαθηματικών τρόπων σκέψης.
- ✓ **Ανάπτυξη** "τοπικών" θεωριών (για παράδειγμα, πάνω στην μαθηματικοποίηση, στη λύση προβλήματος, απόδειξη και εξάσκηση επιδεξιοτήτων).
- ✓ **Εξερεύνηση** πιθανών εγχειριδίων που σκοπό έχουν να κάνουν προσβάσιμες τις παραπάνω θεωρίες στους μαθητές.
- ✓ **Άσκηση** κριτικής και αιτιολόγησης εγχειριδίων για το αν πληρούνται οι γενικοί στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών.
- ✓ **Έρευνα** πάνω στα προαπαιτούμενα της μάθησης καθώς και πάνω στις διαδικασίες διδασκαλίας - μάθησης.
- ✓ **Ανάπτυξη** και αξιολόγηση ουσιωδών διδακτικών ενοτήτων, ομάδων διδακτικών ενοτήτων και προγραμμάτων σπουδών.
- ✓ **Ανάπτυξη** μεθόδων που αφορούν το σχεδιασμό, τη διδασκαλία, την παρατήρηση και την ανάλυση μαθημάτων.
- ✓ **Περίληψη** της ιστορίας της μαθηματικής εκπαίδευσης

Η εργασία στον πυρήνα απαιτεί από τον ερευνητή το ενδιαφέρον του και την αμεσότητα του στα πρακτικά προβλήματα. Όμως υπάρχει κάτι που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπ' όψιν. Ο προσανατολισμός του πυρήνα προς την μεριά της πρακτικής μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε έναν στενό πραγματισμό, ο οποίος επικεντρώνεται σε μία άμεση ικανότητα εφαρμογής που αυτό με τη σειρά του ίσως αποτελέσει ανασταλτικό στοιχείο. Αυτός ο κίνδυνος μπορεί να αποφευχθεί μόνο συνδέοντας τον πυρήνα με ένα πλήθος συγγενικών περιοχών οι οποίες προκαλούν μία ανταλλαγή ιδεών με τις συγγενικές επιστήμες κι αυτό επιτρέπει την εξερεύνηση με ένα συστηματικό τρόπο των διαφορετικών μερών του πυρήνα (σχήμα 1). Φυσικά ο πυρήνας και οι συγγενικές περιοχές έχουν κοινά στοιχεία με αποτέλεσμα τα σύνορά τους να αλλάζουν συνεχώς. Έτσι λοιπόν ένας αυστηρώς διαχωρισμός δεν είναι ποτέ εφικτός.



σχήμα 1: Ο πυρήνας και οι συγγενικές περιοχές της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι μεταξύ τους συνδέσεις και τα πεδία εφαρμογής.

Παρόλο που οι συγγενικές περιοχές είναι απαραίτητες για την άριστη λειτουργία του πεδίου, ο λεπτομερής ορισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκεται στον πυρήνα και γι' αυτό ο πυρήνας πρέπει να αποτελεί το κεντρικό συστατικό. Στην πραγματικότητα η πρόοδος στον πυρήνα είναι το κρίσιμο στοιχείο από το οποίο προκύπτει η βελτίωση ολόκληρου του πεδίου. Η παρούσα κατάσταση είναι κάτι ανάλογο με αυτό που συμβαίνει στην μουσική, στην μηχανική και στην ιατρική. Για παράδειγμα, η σύνθεση και η εκτέλεση της μουσικής έχουν προτεραιότητα απέναντι στην ιστορία, στην κριτική και στην θεωρία της μουσικής. Στην ιατρική, η θεραπεία των ασθενών αποτελεί θέμα μείζονος σημασίας σε σχέση με άλλους παράγοντες όπως ιατρική, κοινωνιολογία, ιστορία της ιατρικής κ.τ.λ. .

«Ωστόσο, ο διαχωρισμός μεταξύ πυρήνα και συγγενικών περιοχών δεν υπονοεί ότι ο ρόλος του πυρήνα περιορίζεται μόνο σε πρακτικές εφαρμογές, ενώ οι συγγενικές περιοχές θα πρέπει να αναπτύσσουν την κατάλληλη θεωρία. **Στη πραγματικότητα, η κατασκευή θεωριών ή θεωρητικών σκελετών που αναφέρονται στο σχεδιασμό**

και στην εμπειρική έρευνα της διδασκαλίας αποτελούν ένα ουσιώδη στοιχείο δουλειάς που γίνεται στον πυρήνα». (cf. Freudenthal 1987)

Όπως στην μηχανική, στην ιατρική και στην τέχνη το διαφορετικό επίπεδο του πυρήνα και των συγγενικών περιοχών αποσαφηνίζεται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1. Ο σκοπός του πυρήνα είναι να επιτύχει μία διεπιστημονική καλά συνδεδεμένη εικόνα διαφορετικών απόψεων και εποικοδομητικών αναπτύξεων καθώς η ευφυΐα των μαθηματικών της εκπαίδευσης συμβάλλει αποφασιστικά σε αυτή την επίτευξη. Οι συγγενικές περιοχές προέρχονται από τις αντίστοιχες επιστήμες, έτσι η έρευνα και η ανάπτυξη στον τομέα της διδακτικής γενικότερα, αποκτούν τον ιδιαίτερο προσανατολισμό τους από τις απαιτήσεις του πυρήνα. Θεωρητικές μελέτες που γίνονται στις συγγενικές περιοχές αποκτούν ιδιαίτερη βαρύτητα μόνο εφόσον είναι συνδεδεμένες με τον πυρήνα αποκτώντας ένα ιδιαίτερο νόημα. Ιδιαιτέρως, τα προβλήματα έρευνας που καταγράφει ο **Bauersfeld (1988pp 16-18)** μπορούν να επεξεργαστούν με ένα επαρκή, συγκεκριμένο και παραγωγικό τρόπο μόνο από τον πυρήνα.

2. Η εκπαίδευση των δασκάλων που προσανατολίζεται προς την πρακτική θα πρέπει να βασίζεται στον πυρήνα. Οι συγγενικές περιοχές είναι απαραίτητες για την βαθύτερη κατανόηση των πρακτικών προτάσεων και για την εφαρμογή τους με έναν κατάλληλο τρόπο. Ωστόσο στην εκπαίδευση των δασκάλων, ο ρόλος που διαδραματίζουν οι συγγενικές περιοχές πραγματοποιείται μόνο εάν είναι συνδεδεμένες με τον πυρήνα.

Η κεντρική θέση που κατέχει ο πυρήνας αποτελεί κυρίως μία έκφραση του εφαρμόσιμου επιπέδου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Δίνοντας έμφαση στον πυρήνα δεν σημαίνει ότι ελαχιστοποιείται η αξία των συγγενικών περιοχών και ούτε διαχωρίζονται αυτές από τον πυρήνα. Όπως καθαρά απεικονίστηκε στο σχήμα 1, είναι ο πυρήνας, οι συγγενικές περιοχές και μία έντονη αλληλεπίδραση μεταξύ τους που συνθέτουν την συνολική εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης κι αυτό με τη σειρά του καθιστά ανεξάρτητη την κοινή ευθύνη των μαθηματικών της εκπαίδευσης από τα ιδιαίτερα πεδία των ενδιαφερόντων τους.

Η εργασία στον πυρήνα πρέπει να ξεκινήσει από μία μαθηματική δραστηριότητα αφού είναι ένα γνήσιο και φυσικό στοιχείο της ανθρώπινης γνώσης. Επιπλέον θα πρέπει να συλλάβει τα «μαθηματικά» ως ένα ευρύ κοινωνικό φαινόμενο του οποίου η ποικιλία των χρήσεων και οι ιδιαίτερου τύπου εκφράσεις έχουν εν μέρει αποτυπωθεί από εξειδικευμένα μαθηματικά τα οποία βρίσκονται στα πανεπιστημιακά τμήματα των μαθηματικών. Ο Erich Ch. Wittmann προτείνει τη χρήση κεφαλαίων γραμμάτων για να περιγράψει τα **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** ως μία μαθηματική εργασία με την ευρύτερη έννοια. Αυτή η κίνηση περιλαμβάνει μαθηματικά τα οποία έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιηθεί στην επιστήμη, στη μηχανική, στα οικονομικά, στην επιστήμη των υπολογιστών, στη στατιστική, στη βιομηχανία, στο εμπόριο, στην τέχνη στην καθημερινή ζωή κ.ο.κ σύμφωνα με τις απαιτήσεις και τις ανάγκες σχετικές με τον κάθε τομέα. Τα εξειδικευμένα μαθηματικά είναι σίγουρα ένα ουσιώδες στοιχείο των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και μία περαιτέρω ερμηνεία δεν μπορεί να ευδοκιμήσει χωρίς τη συμβολή τους. Ωστόσο η αντίθετη άποψη είναι ισοδυνάμως αληθής: «τα εξειδικευμένα μαθηματικά χρωστούν ένα μεγάλο μέρος από τις ιδέες τους και τη δυναμική τους σε πιο ευρείς επιστημονικές και κοινωνικές πηγές. Με κανένα τρόπο λοιπόν δεν μπορεί να βασιστεί ένα μονοπώλιο για τα μαθηματικά».

Θα πρέπει να εννοηθεί ότι τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και όχι τα εξειδικευμένα μαθηματικά, διαμορφώνουν το κατάλληλο πεδίο αναφοράς για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ιδιαιτέρως, ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων, συναφείς ομάδες διδακτικών ενοτήτων και το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να προέρχονται από τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Αυτό έχει ως συνέπεια, η αλληλεπίδραση των μαθηματικών της εκπαίδευσης με τα μαθηματικά να καθίσταται αναγκαία, ώστε ένα σημαντικό μέρος της επιστημονικής τους ζωής να αφιερώνεται στη διέγερση, παρατήρηση και ανάλυση γνήσιων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα στη ζωή των παιδιών, των μαθητών και των μαθητών – καθηγητών. **Η οργάνωση και η παρατήρηση της γοητευτικής εμπειρίας των ανθρώπων με τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ αποτελεί το επίκεντρο της διδακτικής γνώσης και διαμορφώνει ένα φυσικό πλαίσιο για επαγγελματική επικοινωνία μεταξύ δασκάλων.**

Τα εξειδικευμένα μαθηματικά, αφού αποτελούν μέρος των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, θα πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν από τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης ως μία άποψη που όμως θα πρέπει να έρθει σε ισορροπία με άλλες απόψεις. Η ιστορία της

μαθηματικής εκπαίδευσης δηλώνει ξεκάθαρα τους κινδύνους των εξειδικευμένων μαθηματικών που ακολουθούν: «από τη μία μεριά, μπορούν να επιλεχθούν κεντρικά θέματα και στοιχεία της μαθηματικής γλώσσας τα οποία δεν μπορούν να σταθούν έξω από τον κόσμο των εξειδικευμένων μαθηματικών. Ίσως ένα παράδειγμα αυτού του λάθους που διαρκεί ακόμη είναι και η κίνηση των Νέων Μαθηματικών. Από την άλλη μεριά, τα πολύ σημαντικά από εκπαιδευτικής άποψης πεδία των μαθηματικών τα οποία δεν συναντώνται πια στην εξειδικευμένη έρευνα και διδασκαλία, ίσως χάσουν την κατάλληλη προσοχή. Μάλλον το καλύτερο παράδειγμα για αυτό το δεύτερο λάθος είναι η στοιχειώδης γεωμετρία».

«Οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι «συνειδητοποιημένοι» ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν μπορούν να προέλθουν από τα εξειδικευμένα μαθηματικά με μία απλή μετάβαση που υπαγορεύεται από την τεχνική – ξέρω κάτι και άρα μπορώ να το διδάξω» **(cf.Freudenthal 1986)**. «Αντ' αυτού θα πρέπει να δουν τα σχολικά μαθηματικά ως μία προέκταση πρώιμων ανθρωπίνων μαθηματικών ικανοτήτων οι οποίες αναπτύσσονται μέσα στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο που παρέχεται από τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (**CF Schweiger 1994, p. 299 και Dorfler 1994**). Μόνο από αυτήν την άποψη μπορεί να εγκαθιδρυθεί η ενότητα της μαθηματικής διδασκαλίας από την πρωτοβάθμια μέχρι τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και αυτή η λογική σειρά θα μπορούσε να αναπτυχθεί και στο πρόγραμμα μαθημάτων εκπαίδευσης των δασκάλων και συνεπώς αξίζει να αποτελέσει ένα επιστημονικό εφόδιο για τη διδασκαλία.

1.2 Η μαθηματική εκπαίδευση ως μια συστημική - εξελικτική επιστήμη συνδυασμού

«Είναι η μέθοδος και η μονάδα μέτρησης που δημιουργούν τα φαινόμενα … Ένα θρησκευτικό φαινόμενο μπορεί να αποκαλυφθεί μόνο όταν κατανοηθεί η ιδιαίτερη προέλευσή του, δηλαδή εφόσον γίνει αντιληπτό μόνο με θρησκευτική προσέγγιση. Το να αναλύσει κάποιος ένα τέτοιο φαινόμενο με ψυχολογική, κοινωνική, οικονομική ή οποιαδήποτε άλλη μορφή προσέγγισης, αυτομάτως οδηγείται σε αδιέξοδο με αποτέλεσμα την άρνηση ύπαρξης του φαινομένου. Έτσι χάνεται η μοναδικότητα της ύπαρξης του φαινομένου».

(**Mircea Eliade, The Religions and the Sacred**)

Το να εγκαθιδρύσει κάποιος επιστημονικά πρότυπα – κριτήρια στη μαθηματική εκπαίδευση υιοθετώντας τα από συγγενικές επιστήμες αποτελεί μια λανθασμένη κίνηση. Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι προβλήματα και ζητήματα που αφορούν την μαθηματική εκπαίδευση τείνουν με αυτόν τον τρόπο να επεξεργαστούν στο βαθμό που τους υπαγορεύουν οι διαθέσιμοι τρόποι αντιμετώπισης που βασίζονται σε αυτές τις συγγενικές επιστήμες. Ως συνέπεια όλων αυτών δεν αναγνωρίζεται επαρκώς ο επιστημονικός χαρακτήρας του πυρήνα.

Ευτυχώς όμως υπάρχει λύση στο πρόβλημα αυτό αρκεί κάποιος να εγκαταλείψει την προσκόλληση στις καθιερωμένες δομές που επιβάλλονται από τις επιστημονικές αρχές και αντ' αυτού να προσανατολιστεί στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του πυρήνα που δεν είναι άλλα από την εποικοδομητική ανάπτυξη και έρευνα που αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών. «**Εδώ η μαθηματική εκπαίδευση εντάσσεται στη μεγαλύτερη οικογένεια των "επιστημών σχεδιασμού" (cf. Wittmann 1975)**» των οποίων το επιστημονικό υπόβαθρο οριοθετήθηκε από το επιστημονικό υπόβαθρο των φυσικών επιστημών, κύριος πρωτεργάτης του οποίου ήταν ο νομπελίστας Herb Simon. Το επόμενο εδάφιο που είναι γραμμένο από τον **Simon (1970, pp. 55-58)** επεξηγεί την αντίσταση που υπέστησαν οι επιστήμες σχεδιασμού στην ακαδημαϊκή κοινότητα. Έχοντας υπ' όψιν αυτά, η παρούσα κατάσταση της μαθηματικής εκπαίδευσης προάγεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο αξιολόγησης.

«Από ιστορικής απόψεως η επιστημονικές αρχές είχαν χρέος να διδάσκουν φυσικά πράγματα, δηλαδή ποια είναι αυτά και πως αυτά λειτουργούν. Από την άλλη μεριά οι

πολυτεχνικές σχολές είχαν χρέος να διδάσκουν για τεχνητά πράγματα όπως πώς να δημιουργούνται και να σχεδιάζονται τεχνουργήματα που να έχουν επιθυμητά αποτελέσματα.

Ο σχεδιασμός λοιπόν ερμηνεύεται ως ο πυρήνας όλης της επιστημονικής εκπαίδευσης. Είναι το πρωταρχικό στοιχείο που διαχωρίζει τα επαγγέλματα από τις επιστήμες. Οι πολυτεχνικές σχολές καθώς επίσης και οι οικονομικές, νομικές, ιατρικές και αρχιτεκτονικές έχουν επικεντρώσει το ενδιαφέρων τους γύρω από την διαδικασία σχεδιασμού.

Έχοντας υπ' όψιν το ρόλο κλειδιού που παίζει ο σχεδιασμός στην επαγγελματική δραστηριότητα, συνειδητοποιούμε το πόσο λάθος είναι που οι φυσικές επιστήμες έχουν αποσύρει τις επιστήμες του "τεχνητού" από το ημερήσιο πρόγραμμα των επαγγελματικών σχολών. Έτσι οι πολυτεχνικές σχολές έχουν γίνει σχολές επιστήμης της βιολογίας και οι οικονομικές σχολές με την σειρά τους, σχολές πεπερασμένων μαθηματικών.

Η κίνηση προς τις φυσικές επιστήμες και πέρα από τις επιστήμες του "τεχνητού" έχει προχωρήσει περισσότερο στις πολυτεχνικές, οικονομικές και ιατρικές σχολές παρά στις νομικές και δημοσιογραφικές σχολές.

Αυτό το παγκόσμιο φαινόμενο έχει μια βασική και πολύ προφανή αιτία. Καθώς οι επαγγελματικές σχολές απορροφούνται ολοένα και περισσότερο από τη γενική κουλτούρα του πανεπιστημίου αποζητούν ακαδημαϊκή αναγνώριση. Όμως αυτό που επικρατεί τελικά είναι ότι η ακαδημαϊκή αναγνώριση μπορεί να προέλθει μόνο μέσα από θέματα που είναι σωστά θεμελιωμένα, αναλυμένα, τυποποιημένα και ικανά να διδαχτούν. Στο παρελθόν τα περισσότερα αν όχι όλα τα πράγματα που αφορούσαν το σχεδιασμό και τις επιστήμες του "τεχνητού" ήταν αμφισβητήσιμα , διαισθητικά και όχι πλήρως θεμελιωμένα. Έτσι λοιπόν γιατί κάποιος να επιδιώξει να μάθει ή να διδάξει ακόμη για μηχανές σχεδιασμού ή στρατηγικές σχεδιασμού αγοράς, ενώ θα μπορούσε να επιλέξει να ασχοληθεί με τη σωστά θεμελιωμένη φυσική επιστήμη; Η απάντηση είναι προφανής: δε θα το επιδίωκε.

Η παλαιού τύπου επαγγελματική σχολή δεν γνώριζε πως θα έπρεπε να παρέχει μόρφωση επαγγελματικού σχεδιασμού σε επίπεδο αντάξιου του πανεπιστημίου. Η νεότερη τύπου σχολή δεν έχει αποδεχτεί την ευθύνη αυτή της επιμόρφωσης για απόκτηση επαγγελματικών δεξιοτήτων.

Οι επαγγελματικές σχολές θα αναλάβουν ξανά τις επιστημονικές ευθύνες τους μόνο εφόσον ανακαλύψουν μια επιστήμη σχεδιασμού με τα εξής χαρακτηριστικά: σωστά

θεμελιωμένη, αναλυμένη, τυποποιημένη και εφόσον έχει βρεθεί μια θεωρία ικανή να διδάξει την διαδικασία σχεδιασμού.

Το εδάφιο λοιπόν αυτό καθιστά αναγκαία την εμφάνιση μιας επιστήμης σχεδιασμού στην παρούσα φάση.

Ο **Erich Ch. Wittmann** υποστηρίζει ότι ο σκελετός μιας επιστήμης σχεδιασμού ανοίγει το δρόμο στην μαθηματική εκπαίδευση ώστε να εκπληρώσει τις προσδοκίες της και τα καθήκοντά της καθώς και να συμβάλλει στην ανάπτυξη της αυτογνωσίας των μαθηματικών της εκπαίδευσης. Ο σκελετός αυτός ενισχύει το ρόλο του πυρήνα της μαθηματικής εκπαίδευσης που επικεντρώνεται στην κατασκευή **"τεχνητών αντικειμένων"** όπως είναι διδακτικές ενότητες, ομάδες διδακτικών ενοτήτων με πλήρη συνάφεια, πρόγραμμα σπουδών καθώς επίσης τη διερεύνηση των πιθανών αποτελεσμάτων τους στα διάφορα εκπαιδευτικά πλαίσια. Στην πραγματικότητα η ποιότητα αυτών των κατασκευών εξαρτάται από τη θεωρία που βασίζεται στη δημιουργική φαντασία και ευφυΐα των σχεδιαστών και συνάμα από την συστηματική αξιολόγηση που είναι συγχρόνως τυπική και κυριαρχεί στις επιστήμες σχεδιασμού. Το ερώτημα που προκύπτει είναι πόσο καλά αυτός ο χαρακτήρας της μαθηματικής εκπαίδευσης, ως επιστήμης σχεδιασμού, αντανακλά τις επαγγελματικές ικανότητες του διδάσκοντα. Τρανό παράδειγμα αποτελούν οι **Clark και Yinger (1977, pp. 97-99)** οι οποίοι αναγνώρισαν τη διδασκαλία ως μια επιστήμη σχεδιασμού.

Η καθαρά δομική εικόνα που έχει η μαθηματική εκπαίδευση, απορρέει από το ότι είναι μια επιστήμη σχεδιασμού, την οδηγεί σε μια ιδιαιτερότητα και ανεξαρτησία σε σύγκριση με άλλες επιστήμες. Η μαθηματική εκπαίδευση δεν είναι παράρτημα των μαθηματικών ούτε της ψυχολογίας και των παιδαγωγικών και το ίδιο ισχύει για κάθε άλλη επιστήμη σχεδιασμού που με την σειρά της δεν είναι παράρτημα των συγγενικών επιστημών της. Προσπάθειες οργάνωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης χρησιμοποιώντας συγγενικές επιστήμες ως πρότυπα αποτυγχάνουν, διότι καταπατείται και παραβλέπεται η αξία του δημιουργικού σχεδιασμού που στοχεύει σε εννοιολογικές και πρακτικές καινοτομίες.

Όσον αφορά την έρευνα πλαισίων και κριτηρίων οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης που εργάζονται κατά βάση στον πυρήνα πρέπει να ξεκινούν χρησιμοποιώντας τα εκεί υπάρχοντα επιτεύγματα. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι κατά την διάρκεια των τελευταίων 25 ετών μια θεαματική πρόοδος, συμπεριλαμβανομένης και της δημιουργίας θεωρητικών πλαισίων, έχει πραγματοποιηθεί μέσα στον πυρήνα και που τα επιτεύγματα αυτά είναι κριτήρια τα οποία έχουν τοποθετηθεί κατάλληλα ως ένας

προσανατολισμός για το μέλλον. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η "Αναπτυξιακή έρευνα" όπως προτάθηκε από τον **Freudenthal** και επεξεργάστηκε από τους Ολλανδούς μαθηματικούς της εκπαίδευσης. Φυσικά είναι λογικό η πράξη υιοθεσίας μεθόδων και κριτηρίων από συγγενικές επιστήμες στο βαθμό όμως που είναι κατάλληλες για τα προβλήματα του πυρήνα. Δεν πρέπει να αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι αναδύονται ενστάσεις που αφορούν την εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως επιστήμη σχεδιασμού, για τον απλό λόγω του ότι οι επιστήμες σχεδιασμού παραδοσιακά ακολουθούνται από ένα μηχανιστικό παράδειγμα του οποίου τα επιζήμια αποτελέσματα γίνονται όλο και πιο ορατά. Αυτή η προσέγγιση θα αποβεί σίγουρα βλαβερή στην εκπαίδευση.

Όμως είμαστε μάρτυρες της ανάπτυξης ενός νέου παραδείγματος που αφορά τις επιστήμες σχεδιασμού και το οποίο είναι βασισμένο πάνω στην **"συστημική – εξελικτική ανάπτυξη"** ζωντανών συστημάτων λαμβάνοντας υπ' όψιν την συνθετότητα και την αυτοοργάνωση αυτών των συστημάτων. Ακόμη και αν οι ερευνητές των επιστημών σχεδιασμού γενικά διστάζουν να υιοθετήσουν αυτό το νέο παράδειγμα, οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης δεν έχουν λόγο να μην το ακολουθήσουν μιας κι αυτό το παράδειγμα αναφέρεται στις πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα.

Η γνώση δεν αποτελεί πια αποτέλεσμα μετάβασης από τον δάσκαλο στον παθητικό μαθητή, αλλά γίνεται αντιληπτή ως μια παραγωγική επίτευξη του μαθητή που μαθαίνει μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές και το δάσκαλό του.

Για το λόγο αυτό τα υλικά που αναπτύσσονται από τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης πρέπει να κατασκευαστούν ώστε να αναγνωρίζουν και να επιτρέπουν αυτή την αλληλεπιδραστική προσέγγιση. Συγκεκριμένα πρέπει να παρέχουν στους δασκάλους και στους μαθητές την ελευθερία των προσωπικών επιλογών. Για να ευκολύνουν και να διεγείρουν μια εύκαμπτη χρήση σχεδιασμένου υλικού με αυτόν τον τρόπο, η εκπαιδευτικοί πρέπει να καταρτιστούν και να θεωρηθούν ως συμμέτοχοι στην έρευνα και στην ανάπτυξη και όχι απλός να θεωρούνται ως δέκτες αποτελεσμάτων. **(cf. Schupp 1979; Schwab 1983; Fischer & Malle 1983; και τα άρθρα των Brown & Cooney, von Harten & Steinbring, Voigt, και άλλων στο**

Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 4 (91) and 5 (91)). Ως συνέπεια η κατάρτιση των εκπαιδευτικών λαμβάνει μια νέα ποιότητα.

Μια σημαντική καθοδήγηση για επίτευξη καινοτομιών σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελεί προσέγγιση από τον **Schön (1987)**. Αυτή η προσέγγιση αφορά την εκπαίδευση των μηχανικών η οποία βασίζεται σε μια ιδέα του "ανθρώπου που ασκεί την επιστήμη του με αναστοχαστικό τρόπο".

Με το χαρακτήρα που διαθέτει η εξελικτική συστημική, η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να ακολουθήσει διαφορετικά μονοπάτια. Είναι σίγουρο αλλά όχι λογικό το να αναπτύξεις τη μαθηματική εκπαίδευση με μονοπαραδειγματική μορφή, όπως για παράδειγμα γίνεται στις φυσικές επιστήμες. Αξίζει να σημειωθεί η δήλωση του **Thommen (1983, p 227)** που αφορούσε τη θεωρία διαχείρισης: **«Σε μια επιστήμη σχεδιασμού η ταυτόχρονη εμφάνιση διαφορετικών προσεγγίσεων είναι ένα σημάδι προόδου και όχι παρακμής »**

1.3 Ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων και η εμπειρική έρευνα

Για να αναπτύξει κάποιος τη μαθηματική εκπαίδευση ως μία επιστήμη σχεδιασμού είναι εξαιρετικά σημαντικό να βρει τρόπους συσχέτισης του σχεδίου από την μια μεριά με την εμπειρική έρευνα από την άλλη. Στην συνέχεια προτείνεται μια ιδιαίτερη προσέγγιση στην εμπειρική έρευνα δηλαδή στην έρευνα που κινείται γύρω από διδακτικές ενότητες.

Δεν μπορεί να διαψευστεί το γεγονός, ότι οι διδακτικές ενότητες και σε μεγαλύτερη κλίμακα το πρόγραμμα σπουδών έχουν τύχει προσοχής από τη μαθηματική εκπαίδευση στο παρελθόν. Το σίγουρο είναι ότι η εξέλιξη στο πρόγραμμα σπουδών κράτησε με εξέχουσα θέση στο τέλος της δεκαετίας του ’60 και στις αρχές της δεκαετίας του ’70. Παρόλα αυτά, **ο Erich Ch. Wittmann υποστηρίζει ότι ο σχεδιασμός των διδακτικών ενοτήτων δεν έχει ποτέ υπάρξει ως αντικείμενο έρευνας**. Στις καλύτερες διδακτικές ενότητες έχουν χρησιμοποιηθεί άλλοτε λιγότερο και άλλοτε περισσότερο τυχαία παραδείγματα στην έρευνα και παρουσίαση θεωρητικών ιδεών. Αρκετές από τις καλύτερες ενότητες εκδόθηκαν σε περιοδικά που αφορούσαν δασκάλους και όχι σε περιοδικά που αφορούσαν την έρευνα και συνεπώς δύσκολα έλαβαν προσοχή από τις αρμόδιες επιτροπές έρευνας. Για το φαινόμενο αυτό δόθηκε η ακόλουθη εξήγηση: «Σε αντίθεση με την έρευνα, ο σχεδιασμός της διδασκαλίας έχει θεωρηθεί ως ένα μέτριο καθήκον το οποίο εκτελείται από τους δασκάλους και από τους συγγραφείς εγχειριδίων. Διατυπώνοντας ξανά τα λεγόμενα του **Herb Simon**: «για ποιο λόγο θα έπρεπε κάποιος που προσμένει τον ακαδημαϊκό σεβασμό να υποκύψει στο σχεδιασμό διδασκαλίας και να θέσει τον εαυτό του στο ίδιο επίπεδο με τους δασκάλους; » Η απάντηση που έχει δοθεί είναι σαφής: «δεν θα το επιδίωκε ».

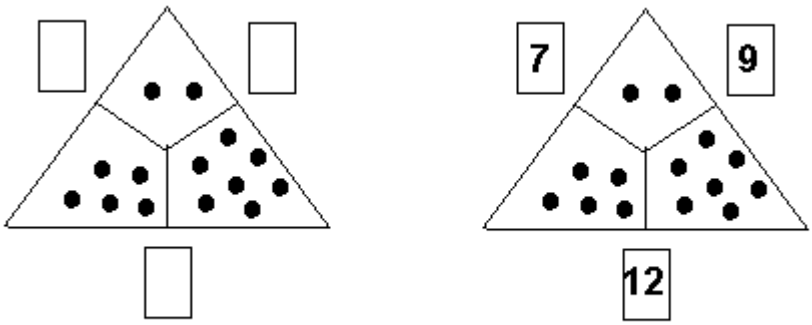
Για να προσπεράσουμε αυτήν τη θεμελιωμένα λανθασμένη εικόνα θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι σε όλα τα επίπεδα του σχεδιασμού υπάρχει, από καταβολής του, ένα ευρύ φάσμα ανταγωνισμού και εμπειρίας που εκτείνεται από τον ερασιτέχνη μέχρι τον αρχάριο, από τον λίγο η πολύ ικανό εργάτη, πεπειραμένο δάσκαλο μέχρι τον δημιουργικό εφευρέτη. Τυπικά το κύριο μέρος του σχεδιασμού όσο αναφορά μια μεγαλύτερη κλίμακα έχει πραγματοποιηθεί σε ειδικά κέντρα για έρευνα και ανάπτυξη. Η μαθηματική εκπαίδευση ως επιστήμη σχεδιασμού δεν μπορεί να αποτελέσει εξαίρεση από τον κανόνα αυτόν. Το γεγονός ότι οι δάσκαλοι λαμβάνουν

μέρος στο σχεδιασμό δεν αφήνει περιθώρια στους μαθηματικούς της εκπαίδευσης για αποχή από αυτήν την υποχρέωση. **Στον αντίποδα**: **Ο σχεδιασμός ουσιαστικών διδακτικών ενοτήτων και ιδιαίτερα ο σχεδιασμός ενός ουσιώδους προγράμματος σπουδών είναι το πλέον δύσκολο έργο που πρέπει να έρθει εις πέρας από τους ειδικούς του τομέα.** Με κανέναν τρόπο δεν μπορεί να ανατεθεί στους δασκάλους, διότι οι δάσκαλοι μπορούν να κάνουν σίγουρα σημαντικές συνεισφορές στο εσωτερικό του σκελετού του σχεδιασμού ο οποίος παρέχεται από τους ειδικούς, ιδιαίτερα όταν αυτοί είναι μέλη και βρίσκονται σε στενή επαφή με μια ομάδα έρευνας. Επίσης η προσαρμογή των διδακτικών ενοτήτων μέσα στο περιβάλλον της τάξης απαιτεί σχεδιασμό σε μικρότερη κλίμακα. **Μολαταύτα, ο δάσκαλος μπορεί να συγκριθεί περισσότερο με καθοδηγητή παρά με συνθέτη η ίσως καλύτερα με σκηνοθέτη παρά με σεναριογράφο.** Για αυτό το λόγο θα πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχουν μέρη συνεδριάσεων όπου οι δάσκαλοι να συναντώνται με σκοπό την δημιουργία του δικού τους προγράμματος σπουδών.

Θα πρέπει λοιπόν να είμαστε ανήσυχοι ώστε να αναγνωρίζουμε τις διδακτικές ενότητες που είναι ανώτερης ποιότητας από το σύνολο των ενοτήτων που αναπτύσσονται σε διάφορα επίπεδα για διάφορους λόγους. Αυτές οι ουσιώδεις διδακτικές ενότητες έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

1. Αντιπροσωπεύουν κεντρικούς σκοπούς, περιεχόμενα και αρχές της διδασκαλίας των μαθηματικών.
2. Παρέχουν πλούσιες πηγές για μαθηματικές δραστηριότητες.
3. Είναι εύκαμπτες και μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν στις καταστάσεις μιας συγκεκριμένης τάξης.
4. Εμπεριέχουν μαθηματικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές απόψεις που αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης με έναν ολιστικό τρόπο και για αυτό προσφέρουν μια ευρεία δυνατότητα για εμπειρική έρευνα.

Τυπικά μια ουσιώδη διδακτική ενότητα πάντα την χαρακτηρίζει ένα όνομα. Ως παραδείγματα μπορούν να αναφερθούν τα εξής: τα «**Αριθμογώνια**» από τους **Alistair McIntosh Douglas Quadling,** «Κάρτες καθρεπτών» από την **Marion Walter**, και «Πλήθος ωρών μέσα σε ένα χρόνο» από τον **Gerd Walthers**. Άλλα παραδείγματα και συστηματική συζήτηση για το ρόλο των ουσιωδών διδακτικών ενοτήτων που αφορούν την μαθηματική εκπαίδευση δίνονται από τον **Wittmann (1984).**



σχήμα 2:

Για να προάγουμε την διαύγεια, παρουσιάζεται παρακάτω ένα παράδειγμα ουσιώδους διδακτικής ενότητας. Σε ένα σχέδιο για το δημοτικό με το όνομα **"Maths 2000"** η ακόλουθη σύνθεση από αριθμογώνια χρησιμοποιείται στη $1^{η}$ τάξη :

Η επιφάνεια ενός τριγώνου χωρίζεται σε 3 μέρη, ενώνοντας το βαρύκεντρο του τριγώνου με τα μέσα των απέναντι πλευρών. Στη συνέχεια τοποθετούμε μετρητές ή γράφουμε νούμερα μέσα στα 3 πεδία. Ο απλός κανόνας που ακολουθείται είναι ο επόμενος:

« Προσθέστε τους αριθμούς δύο παραπλήσιων πεδίων και γράψτε το άθροισμα στο κουτί της αντίστοιχης πλευράς ». (σχήμα 2)

Έτσι προκύπτουν διάφορα προβλήματα: ξεκινώντας από τους μέσα αριθμούς οι έξω αριθμοί προκύπτουν με πρόσθεση. Όταν δίνονται ένας ή δύο αριθμοί από τους μέσα και ένας ή δύο αριθμοί από τους έξω τότε οι υπολειπόμενοι αριθμοί μπορούν να υπολογιστούν με πρόσθεση κι αφαίρεση. Όταν δίνονται οι 3 από τους έξω αριθμούς, έχουμε πρόβλημα το οποίο δεν μας επιτρέπει για άμεσους υπολογισμούς αλλά απαιτείται λίγη σκέψη. Καταλήγουμε στο ότι υπάρχει πάντα μία ακριβώς λύση. Όμως, ίσως να είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε κλάσματα ή αρνητικούς αριθμούς.

Η διδακτική ενότητα που βασίζεται πάνω στα αριθμογώνια αποτελείται από μια σειρά καθηκόντων και προβλημάτων που αναπτύσσονται με φυσικό τρόπο από το μαθηματικό περιεχόμενο. Το σενάριο για τον δάσκαλο μπορεί να δομηθεί ως εξής:

1. Να εισάγεις τον κανόνα χρησιμοποιώντας ως μέσο τα παραδείγματα και να εξασφαλίσεις το γεγονός ότι έχει πλήρως κατανοηθεί.

2. Να παρουσιάσεις μερικά παραδείγματα στα οποία να δίνονται μέσα οι αριθμοί.
3. Να παρουσιάσεις μερικά παραδείγματα στα οποία να δίνονται μερικοί αριθμοί για μέσα και μερικοί αριθμοί για έξω.
4. Να παρουσιάσεις ένα πρόβλημα στο οποίο τα νούμερα για έξω να δίνονται.
5. Να παρουσιάσεις άλλα προβλήματα που ανήκουν σε αυτό το είδος.

Όπως είναι προφανές, μια ουσιώδης διδακτική ενότητα είναι ουσιαστικά ανοιχτή. Μόνο τα προβλήματα κλειδιά είναι ορισμένα. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος ο δάσκαλος οφείλει να ακολουθεί τις ιδέες των μαθητών του στην προσπάθεια που γίνεται να λυθούν τα προβλήματα. Αυτός ο ρόλος του δασκάλου είναι εντελώς διαφορετικός σε σχέση με τις παραδοσιακές ιδέες διδασκαλίας. Η διδασκαλία μιας ουσιώδους ενότητας είναι βασικά ανάλογη με το να φέρεις εις πέρας μια κλινική συνέντευξη κατά τη διάρκεια της οποίας μόνο ερωτήσεις κλειδιά θα είναι καθορισμένες, έτσι λοιπόν η δουλειά του ερευνητή που παίρνει συνέντευξη είναι να ακολουθήσει τον τρόπο σκέψης του παιδιού.

Η ομοιότητα στη δομή μεταξύ των ουσιαστικών διδακτικών ενοτήτων από τη μία μεριά και κλινικών συνεντεύξεων από την άλλη υποδηλώνουν μια προσαρμογή των μεθόδων του Piaget για την μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών πάνω στην εμπειρική έρευνα που υπάρχει στις διδακτικές ενότητες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να φτάσουμε "**σε κλινικά πειράματα διδασκαλίας**" στα οποία οι διδακτικές ενότητες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο ως εργαλεία έρευνας, αλλά ακόμη ως αντικείμενα μελέτης.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν μέσα από αυτά τα πειράματα έχουν πολλαπλές χρήσεις: μας δίνουν πληροφορίες για τις διαδικασίες μάθησης και εκπαίδευσης, για ατομικά και συλλογικά σχέδια που αφορούν τη μάθηση, για την παραγωγική σκέψη των παιδιών καθώς και για τις δυσκολίες που αυτά αντιμετωπίζουν. Επίσης μας βοηθούν στο να αξιολογήσουμε και να αναθεωρήσουμε αν χρειαστεί τη διδακτική ενότητα με σκοπό να κάνουμε τη διδασκαλία και τη μάθηση πιο αποδοτικές .

Τα πειράματα του **Piaget** επαναλήφθηκαν πολλές φορές από άλλους εξερευνητές. Πολλά από αυτά αποτέλεσαν το επίκεντρο εκτεταμένης ψυχολογικής έρευνας. Μερικά από αυτά εγκαθίδρυσαν επίσης ειδικούς τρόπους μελέτης : για παράδειγμα ονομαζόμενα πειράματα "διατήρησης". Δεν είναι υπερβολή να ειπωθεί ότι τα

πειράματα του Piaget καθώς και τα πρότυπα που παρατήρησε στο τομέα της σκέψης των παιδιών διατηρήθηκαν στο χρόνο πολύ περισσότερο από τις θεωρίες του κι αυτό ισχύει για πολλές περιπτώσεις μέχρι και σήμερα. Με τον ίδιο τρόπο, **τα πειράματα της κλινικής διδασκαλίας** μπορούν να επαναληφθούν και γι' αυτό ποικίλουν. Με το να συγκρίνουμε τα δεδομένα μπορούμε να αναγνωρίσουμε βασικά πρότυπα διδασκαλίας και μάθησης και να εξάγουμε σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο διδασκαλίας συγκεκριμένων ενοτήτων. Μπορούμε να συλλέγουμε πολλές πληροφορίες και από την έρευνα που έκαναν οι Ιάπωνες κι αφορούσε τη μαθηματική εκπαίδευση **(cf. Becker and Miwa 1989).**

Στην καθοδήγηση τέτοιων μελετών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά υπάρχουσες μέθοδοι ποιοτικής έρευνα, ιδιαιτέρως εκείνες που αναπτύχθηκαν από Γάλλους μαθηματικούς της εκπαίδευσης σε συνεργασία με τις "διδακτικές καταστάσεις " και με "διδακτική μηχανική" (**cf Broussean 1986, Artigue Perrin – Glorian 1991, Arsac et al. 1992).** Όσον αφορά τη ικανότητα αναπαραγωγής των αποτελεσμάτων εποικοδομητικό θα ήταν να προσανατολιστούμε προς τις κοινωνικές επιστήμες.

Ο **Friedrich Von Hayek**, που έχει κερδίσει το βραβείο νόμπελ στα οικονομικά, έχει υποδείξει με μεγάλη επιτυχία, ότι η εμπειρική έρευνα σε υψηλού επιπέδου σύνθετα κοινωνικά φαινόμενα παραχωρεί πολλαπλάσια αποτελέσματα εάν κατευθυνθούμε προς την αποκάλυψη γενικών προτύπων πέρα από ειδικά δεδομένα (**Von Hayek 1956**). Το να παραδεχτούμε το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της διδασκαλίας και μάθησης εξαρτώνται από τους μαθητές και από τους δασκάλους, αυτό δεν αποκλείει την ύπαρξη προτύπων που σχετίζονται με το μαθηματικό περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης ενότητας. (**cf. also Kilpatrick 1993, pp. 27-29, Scierpinska 1993, pp. 67-71**). Φυσικά δεν θα πρέπει να περιμένουμε όλα αυτά τα πρότυπα να εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση και ούτε κάτω από όλες τις περιστάσεις.

Είναι σχεδόν φυσικό ότι τα πρότυπα θα ακολουθηθούν και θα βρίσκονται σε εναλλαγή με τα εκπαιδευτικά πλαίσια. Δε θα πρέπει βέβαια να ξεχνάμε το γνωστό θέμα ότι οι συνεντεύξεις του Piaget αποκαλύπτουν επαναλαμβανόμενα πρότυπα ειδικού περιεχομένου τα οποία όμως δεν παρουσιάζονται σε κάθε παιδί ξεχωριστά.

Η έρευνα που συγκεντρώνεται γύρω από τις διδακτικές ενότητες είναι χρήσιμη για διάφορους λόγους. **Πρώτον** είναι συγγενική με το υπάρχον ζήτημα της διδασκαλίας. **(cf the postulate of "relatedness" in Kilpatrick 1993, p.30**). **Δεύτερον** η γνώση που έχει αποκτηθεί από τα "**κλινικά πειράματα διδασκαλίας**" είναι "περιορισμένη".

Εδώ απαιτείται να είμαστε περισσότερο προσεκτικοί στο να κάνουμε γενικεύσεις πάνω στα περιεχόμενα από ότι έχουμε υπάρξει στο παρελθόν. Στο μέλλον μπορούμε σίγουρα να εξάγουμε θεωρίες καλύπτοντας έτσι μία μεγάλη ποικιλία διδασκαλίας και μάθησης. Όμως αυτές οι θεωρίες δεν μπορούν να αναδυθούν προτού να έχουμε μία συλλογή από διδακτικές ενότητες για το κάθε άτομο ξεχωριστά που να έχουν εξετασθεί λεπτομερώς. Για να μελετήσει κάποιος την μαθηματική θεωρία των ομάδων, **ο Άγγλος μαθηματικός Graham Higman δήλωσε την δεκαετία του πενήντα ότι "η πρόοδος της θεωρίας των ομάδων (group theory) εξαρτάται πρωτίστως από μία ευρεία γνώση ενός μεγαλύτερου αριθμού ειδικών ομάδων. (Higman, informal paper)**. Τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν τη δεκαετία του '80 και αφορούσαν την ταξινόμηση πεπερασμένων απλών ομάδων, έδειξαν ότι ο **Graham Higman** είχε δίκιο. Με έναν παρόμοιο τρόπο, η λεπτομερής εμπειρική μελέτη ενός μεγάλου αριθμού ουσιωδών διδακτικών ενοτήτων θα μπορούσε να αποδειχθεί ισοδυνάμως βοηθητική για τη μαθηματική εκπαίδευση.

Τρίτον, η θεωρία που είναι συγγενική με τα πειράματα διδασκαλίας είναι βαρυσήμαντη και εφαρμόσιμη. Όμως θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι εξαιτίας της υπάρχουσας πολυπλοκότητας μεταξύ διδασκαλίας ή μάθησης, τα δεδομένα και οι θεωρίες που η έρευνα ίσως παρέχει μπορεί στην ουσία ποτέ να μην παρέχουν ολοκληρωμένες πληροφορίες ικανές για να διδαχτεί μία συγκεκριμένη ενότητα. Μόνο ο δάσκαλος βρίσκεται σε θέση να αποφασίσει τις κατάλληλες συνθήκες για την τάξη του. Γι' αυτόν λοιπόν δεν θα πρέπει να υπάρχει καμία αυστηρή διάκριση μεταξύ του ερευνητή και του δασκάλου όπως ειπώθηκε νωρίτερα.

Ως συνέπεια οι δάσκαλοι θα πρέπει να είναι καταρτισμένοι κατάλληλα, ώστε να διεκπεραιώσουν μια έρευνα μικρής κλίμακας. «Η εμπειρία μου στον τομέα της κατάρτισης τους δασκάλους υπαγορεύει ότι εισάγοντας δασκάλους στη μέθοδο των κλινικών συνεντεύξεων αποτελεί σίγουρα έναν εξαιρετικό τρόπο ολοκλήρωσης της διαδικασίας» **(Wittmann 1985).**

Ο Wittmann υποστηρίζει ότι τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα ερευνών στη μαθηματική εκπαίδευση είναι κομμάτια προσεκτικά σχεδιασμένων και εμπειρικά μελετημένων διδακτικών ενοτήτων, τα οποία έχουν βασιστεί σε θεμελιώδεις θεωρητικές αρχές. Το αμέσως επόμενο βήμα είναι αυτές οι ενότητες να διαμορφώσουν το μεγαλύτερο μέρος της επιστημονικής κατάρτισης των δασκάλων. Οι δάσκαλοι που αποφοιτούν από το πανεπιστήμιο θα πρέπει να έχουν στις αποσκευές τους, μια συλλογή από ουσιώδεις διδακτικές ενότητες οι οποίες να

αντιπροσωπεύουν τα επίπεδα της διδασκαλίας. Αυτό που απορρέει εμπειρικά από το στοιχειώδης πρόγραμμα "**Maths 2000**" κάνει φανερό ότι τέτοιες ενότητες είναι οι πλέον ικανοί φορείς καινοτομίας και είναι κατάλληλα τοποθετημένοι ώστε να γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πρακτικής.

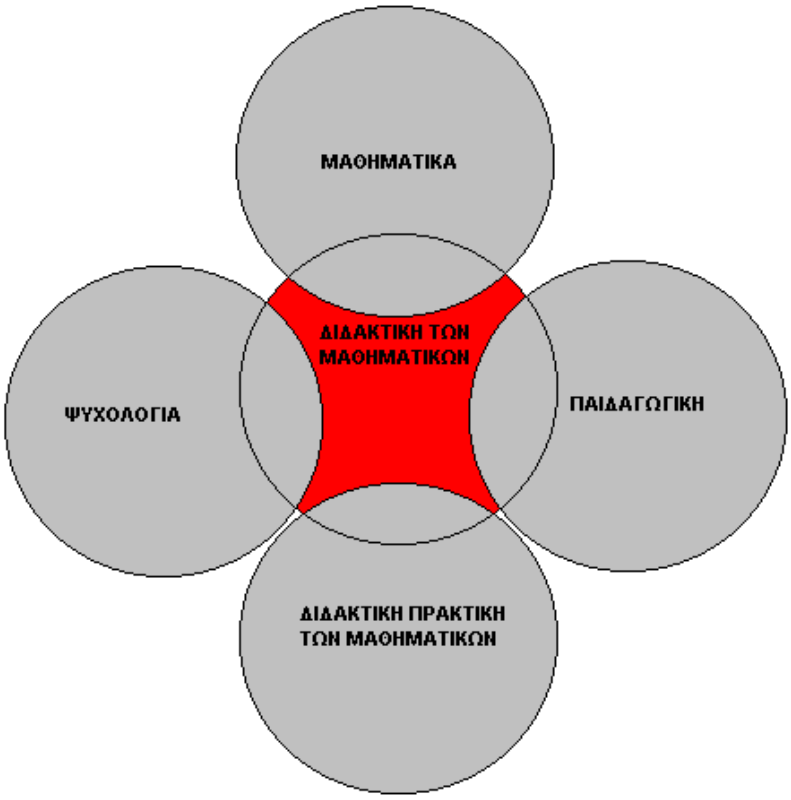
Συμπερασματικά, είναι σημαντικό να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων καθώς και η εμπειρική έρευνα που συγκεντρώνεται γύρω από αυτές, μπορεί μόνο να επιτευχθεί μόνο μέσα σε ένα σύστημα μαθηματικής εκπαίδευσης που αποτελείται από τον πυρήνα, συγγενικές περιοχές, συγγενικές επιστήμες καθώς και από έντονες αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών των συστατικών. Ιδιαιτέρως αξίζει να αναφερθεί ότι είναι αναγκαίο να υπάρχουν ισχυροί δεσμοί πραγμάτων με τα μαθηματικά σε μια ευρεία έννοια (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ).

2η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

2.1 Αναφορά στο επίπεδο και στο ρόλο της μαθηματικής εκπαίδευσης

Σε αντίθεση με τη σημαντική πρόοδο που επιτεύχθηκε σε διεθνές επίπεδο συνεργασίας πάνω στην μαθηματική εκπαίδευση την τελευταία δεκαετία, οι συζητήσεις που αφορούσαν την ιδιαίτερη ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης (ή των διδακτικών μεθόδων των μαθηματικών) περιορίστηκαν κυρίως σε εθνικό επίπεδο. Όσον αφορά την κατάσταση στη Γερμανία, στην 5η μόλις ετήσια σύνοδο για τη μαθηματική εκπαίδευση που έγινε στο **Bayreuth το 1971, ο H.G. Steiner** πυροδότησε μία ευρεία συζήτηση για την ιδιαίτερη ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία οδήγησε σε μία σειρά από άρθρα για το ρόλο και το επίπεδο της μαθηματικής εκπαίδευσης (**Bigalke et. al 1974)**.

Η εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναδύθηκε με αυτό τον τρόπο δεν ήταν καθόλου ομοιογενής και δεν είναι μέχρι και σήμερα. Ωστόσο, η περιορισμένη προσοχή που δίνεται στις αντιλήψεις εκείνων των συγγραφέων που εργάζονται ως επαγγελματίες μαθηματικοί της εκπαίδευσης στους τομείς της έρευνας καθώς επίσης και της εκπαίδευσης των δασκάλων, αποκαλύπτει μία αξιοσημείωτη συμφωνία: η μαθηματική εκπαίδευση (ή οι διδακτικές μέθοδοι για τα μαθηματικά) θεωρείται ως μία επιστήμη με τη δική της υπόσταση που αναφέρεται φυσικά στα μαθηματικά, στη ψυχολογία, στην παιδαγωγική και σε άλλους τομείς της γνώσης καθώς επίσης και στην εξάσκηση της διδασκαλίας των μαθηματικών.



Σχήμα 1

Σε αντιστοιχία με το σχήμα 1, το υπόμνημα του περιοδικού "**Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik**" για την εκπαίδευση των δασκάλων (**Μάρτιος 1981**) έχει περιγράψει την μαθηματική εκπαίδευση με τα εξής λόγια:

«Είναι καθήκον του δασκάλου να συνδυάζει τη μαθηματική γνώση, τη ψυχολογική εμπειρία και μία θετική στάση απέναντι στους νέους ανθρώπους, έτσι ώστε να διεγείρει και να υποστηρίξει την ικανότητα της μάθησης των μαθητών προς την κατεύθυνση των σκοπών που υπαγορεύει η εκπαίδευση προς αλλά και πέρα από τα μαθηματικά. Ο τρόπος σκέψης και οι πράξεις του δασκάλου χαρακτηρίζονται από το αν λαμβάνει υπ' όψιν τις στενά συνδεδεμένες καταστάσεις των μαθηματικών, των παιδαγωγικών, της ψυχολογίας και της πρακτικής καθώς και από το αν παίρνει ισορροπημένες αποφάσεις». Σύμφωνα με όλα αυτά, μία συνετή εκπαίδευση των μαθηματικών της εκπαίδευσης θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει σπουδές πάνω στη διδακτική και επιπροσθέτως καλά θεμελιωμένες σπουδές πάνω στα μαθηματικά και στον τομέα της εκπαίδευσης.

Είναι η φύση της διδακτικής των μαθηματικών που με έναν **διεπιστημονικό** τρόπο ερευνά τη σύνθεση της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης. Χρέος του επαγγελματικού τομέα που μελετάει τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης είναι να εισάγει τους μαθητές – δασκάλους σε μία συνδυαστική αντίληψη και εξάσκηση, οι

οποίες είναι απαραίτητες για την επιστήμη τους καθώς και να τους εξηγήσει το νόημα της εκπαιδευτικής εργασίας τους στον τομέα των μαθηματικών. Οι διδακτικές μέθοδοι των μαθηματικών ή (η διδακτική των μαθηματικών) συνδέουν τις εκπαιδευτικές και μαθηματικές σπουδές μεταξύ τους και παρέχουν την απαραίτητη γέφυρα για τη διδασκαλία της εξάσκησης.

Με άλλα λόγια, ο χαρακτήρας της μαθηματικής εκπαίδευσης (διδακτικές μέθοδοι των μαθηματικών) που εκφράστηκε σε αυτό το εδάφιο μπορεί να περιγραφεί από τις λέξεις κλειδιά "**διεπιστημονικότητα**", "**συσσωμάτωση**" και "**εφαρμογή**". Όπως είναι φανερό αυτές οι απαιτήσεις είναι άμεσες συνέπειες των σύνθετων συνθηκών εργασίας που έχουν οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης.

2.2 Προβλήματα συσσωμάτωσης

Όπως είναι κοινώς γνωστό, είναι πιο εύκολο να αποδεχτείς την **διεπιστημονικότητα**, την **συσσωμάτωση** και την **ικανότητα εφαρμογής** ως γεγονότα αυταπόδεικτα (δηλ. αξιωματικά) παρά να τα θέσεις προς εφαρμογή. Εκτός από τα υπάρχοντα συμφυή ζητήματα, θα πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν εξωτερικές πιέσεις, που ωθούν τη μαθηματική εκπαίδευση σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις αντίθετες προς την διεπιστημονικότητα και την συσσωμάτωση. Ξεκάθαρους υποκινητές τέτοιου είδους πιέσεων αποτελούν οι σχεδόν διαφορετικές απαιτήσεις για τη μαθηματική εκπαίδευση που εκφράζουν οι ειδικοί των συγγενικών τομέων. Για παράδειγμα, οι μαθηματικοί αν και αποδέχονται την αναγκαιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, πολύ συχνά θεωρούν ότι αυτή περιέχει μόνο στοιχειώδη μαθηματικά. Αυτό που απαιτείται από τους δασκάλους είναι να έχουν τα κατάλληλα προσόντα, που υπαγορεύονται από τα πρότυπα της μαθηματικής έρευνας και επίσης να διατηρούν μαθηματικά ζωντανούς τους εαυτούς τους δουλεύοντας, όπως λέει ο **H. Meschkowski σε έναν «μικρό μαθηματικό κήπο»**. Μερικές φορές απαιτούνται να υπάρχουν εμπειρίες που αφορούν την εξάσκηση, από τις οποίες όμως συνήθως απορρέει μία αφέλεια.

Οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης φανερώνουν πιθανές συμπάθειες για τη ψυχολογία και για την παιδαγωγική, οι οποίες όμως επιδέχονται κριτικής και συχνά απορρίπτονται για το λόγο του ότι απομακρύνονται από τα μαθηματικά.

Στον αντίποδα, οι περισσότεροι παιδαγωγοί και ψυχολόγοι θεωρούν τις διδακτικές μεθόδους των μαθηματικών ως μέρος των συγγενικών επιστημών της εκπαίδευσης.

Η περίεργη έλξη που ασκούν τα μαθηματικά εξεγείρουν την υποψία και γοργά χαρακτηρίζουν τον μαθηματικό της εκπαίδευσης ως περιορισμένα διατιθέμενο ειδικό των μαθηματικών. Το ερώτημα που προκύπτει είναι: **ποιες είναι οι απαιτήσεις των δασκάλων που βρίσκονται στο στάδιο της εξάσκησης για τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης** ; Η απάντηση που δίνεται είναι η εξής: **θα πρέπει να έχουν 10 περίπου χρόνια εξάσκησης της διδασκαλίας καθώς και συνεχή συμμετοχή στη σχολική ζωή που στην καλύτερη περίπτωση θα σημαίνει διδασκαλία περιορισμένης χρονικής διάρκειας**.

Οι θεωρητικές έρευνες που έφεραν εις πέρας οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης έγιναν αντιληπτές ως μη απαραίτητες καθώς θεωρήθηκαν ως δυσάρεστες παρεκβάσεις.

Εντάσεις μεταξύ μαθηματικών της εκπαίδευσης και ακαδημαϊκών δασκάλων έχουν προκύψει στα προηγούμενα πεδία αναφοράς κι αυτό διότι οι απαιτήσεις για το ρόλο των μαθηματικών της εκπαίδευσης είναι μερικές φορές δύσκολο να διασφαλιστούν, ιδιαίτερα αφού οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης δεν έχουν διαμορφωμένο δικό τους επιστημονικό τμήμα αλλά είναι συσσωματωμένοι, είτε στα τμήματα των μαθηματικών είτε της εκπαίδευσης.

Παρόλα αυτά, ο **Erich Wittmann** δεν συνιστά μία παράδοση άνευ όρων στην πρόκληση για ελάττωση της έντασης, βελτιώνοντας μόνο τη μία πλευρά. Αυτό αναπόφευκτα θα σήμαινε, διεύρυνση του κενού και στα άλλα πεδία αναφοράς καθώς θα ακύρωνε τα καθήκοντα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο Wittmann ειλικρινά πιστεύει, ότι αυτό θα ήταν σημάδι αδυναμίας. Προσθέτει ότι θα προσέβαλλε την αξιοπρέπεια των μαθηματικών της εκπαίδευσης μια τέτοια είδους προσαρμογή στο περιβάλλον, η οποία θα θυμίζει χαμελέοντα.

Επίσης υποστηρίζει, ότι σε αντίθεση με όλα αυτά, θα προτιμούσε να δηλώσει εν θερμό την αντίδρασή του για την ύπαρξη ανεξαρτησίας στον τομέα διδακτικής των μαθηματικών καθώς θεωρεί ότι τα προβλήματα, που αναφέρονται στη συσχέτιση της διδακτικής των μαθηματικών με τα μαθηματικά, με τις εκπαιδευτικές επιστήμες και με την άσκηση της διδασκαλίας, αποτελούν εντελώς φυσικά προβλήματα τα οποία πρέπει να συνειδητοποιηθούν ώστε να διεγερθεί η αμοιβαία διασταύρωση των συνόρων. Είναι βαθιά πεπεισμένος ότι η διασταύρωση των συνόρων μακροχρόνια θα

αποβεί επικερδής, όχι μόνο για τη μαθηματική εκπαίδευση αλλά επίσης και για τους τομείς αναφοράς.

Η πρόοδος στη λύση των προβλημάτων της συσσωμάτωσης που αναφέρθηκαν προηγούμενα, αποτελεί μείζονος σημασίας θέμα για την εκπαίδευση των δασκάλων, καθώς τα περισσότερα προγράμματα εκπαίδευσης των δασκάλων, αποτελούνται από απομονωμένα μαθηματικά, εκπαιδευτικά, διδακτικά και πρακτικά στοιχεία. Επίσης, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση παρουσιάζει έλλειψη στην αλληλοσύνδεση των διαφορετικών απόψεων.

Η ακόλουθη προσέγγιση για συσσωμάτωση των διαφόρων απόψεων για τη μαθηματική εκπαίδευση, έχει την προέλευσή της στον ανασχηματισμό των εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τους δασκάλους που έγινε στο πανεπιστήμιο του Dortmund και η οποία εισήχθηκε από το νόμο 1976 του **North-Rhine-Westphalia** για την εκπαίδευση των δασκάλων.

Ο Wittmann επιθυμεί πραγματικά να περιορίσει τον εαυτό του στο τομέα εκπαίδευσης των δασκάλων για το προκαταρκτικό επίπεδο, διότι σε αυτή την περιοχή έχει γίνει η μεγαλύτερη πρόοδος. Όμως πιστεύει ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να μεταφερθεί και στα άλλα επίπεδα.

Ακόμη δεν θεωρεί ότι για πρώτη φορά γίνεται τέτοιου είδους προσπάθεια ανασχηματισμού της εκπαίδευσης των δασκάλων με τη βοήθεια της συσσωμάτωσης διαφορετικών στοιχείων και ούτε χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά διδακτικές ενότητες για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός. Αυτό που πιστεύει όμως είναι ότι αξίζει να επεξεργαστεί όλη η ορμή «της φιλοσοφίας των διδακτικών ενοτήτων» με έναν συστηματικό και περιεκτικό σε νόημα τρόπο. Το κυρίως μέρος αυτής της θεματικής ενότητας θα αφιερωθεί σε αυτό το έργο.

2.3 Μεριές ιδέες για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Μία πιο λεπτομερής ανάλυση των προβλημάτων της συσσωμάτωσης στον τομέα 2, οδηγεί πολύ γρήγορα στην αποκάλυψη μίας απερίσκεπτης χρήσης της γλώσσας σε συζητήσεις με θέμα την εκπαίδευση των δασκάλων, και είναι αυτή η οποία ευθύνεται για ασάφειες και παρεξηγήσεις καθώς επίσης και για ότι φάνηκε να επικρατεί συμφωνία μεταξύ των όρων: “μαθηματικά”, “ψυχολογία”, “παιδαγωγική”, “μαθηματική εκπαίδευση”, “εξάσκηση της διδασκαλίας” κ.α. Σιωπηλά λοιπόν

θεωρήθηκε ότι έχουν συγκεκριμένο νόημα, παρόλη την υπαρκτή αντίθεση, ότι όλα αυτά τα πεδία, λίγο έως πολύ φανερά αποδέχονται την ποικιλία πολύ διαφορετικών εκφρασμένων απόψεων.

Λαμβάνοντας σοβαρά υπ' όψιν το πλήθος των διαφορετικών απόψεων οδηγούμαστε από την αρχή ακόμη σε μία αποθάρρυνση για εγκαθίδρυση σχέσεων γενικού χαρακτήρα καθώς και συνδυασμού των αντιλήψεων της διδακτικής των μαθηματικών με κάθε είδους αντίληψη των μαθηματικών καθώς και με κάθε είδους εξάσκησης της διδασκαλίας κ.α. Ο Wittmann δεν βλέπει άλλον δρόμο διαφυγής από εκείνον, που υπαγορεύει το ξεκίνημα από κάποιου είδους βασική εκπαιδευτική αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών και που επιλέγει είδη στάσεων των μαθηματικών, της ψυχολογίας, της παιδαγωγικής και της εξάσκησης της διδασκαλίας τα οποία να μπορούν να συνυπάρξουν αρμονικά με αυτού του είδους τη θεμελιώδη αντίληψη.

Ο ίδιος θεωρεί τον εαυτό του, ότι είναι αρκετά συνειδητοποιημένος, ότι αυτή η προσέγγιση εμπεριέχει με μεγάλη σαφήνεια υποκειμενικότητα. Όμως η υποκειμενικότητα έχει ήδη υπονοούμενα παρουσιαστεί και επιπλέον υπάρχει πάντα διαθέσιμος χώρος για μία μεταξύ δύο υποκειμενικών απόψεων συμφωνία.

Η θεμελιώδης ιδέα για τη μαθηματική διδασκαλία και προσωπική θέση του Wittmann, η οποία βρίσκεται στην "καρδιά" της προτεινόμενης προσέγγισης είναι η ακόλουθη:

«**Η διδασκαλία των μαθηματικών παρέχει μαθηματικές γνώσεις στους μαθητές, έτσι ώστε να καλλιεργηθεί η κατανόηση τους για την πραγματικότητα**».

Όπως είναι φυσικό το παραπάνω γνωμικό δεν είναι τίποτα άλλο από μια σύντομη διατύπωση μιας "γενετικής", άποψης για τη μαθηματική διδασκαλία, η οποία έχει αναπτυχθεί αλλού λεπτομερώς (cf**. Wittmann 1980 b).**

Ποιες είναι οι συνέπειες αυτής της θέσης για τα πεδία που περιβάλλουν τη διδακτική των μαθηματικών ;

Όσον αφορά τα μαθηματικά, η γενετική άποψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών δίνει έμφαση στη δυναμική των μαθηματικών, στην εφαρμογή τους σε μικρά ή μεγάλα προβλήματα, στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, στις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στα μαθηματικά καθώς επίσης και στις σχέσεις τους με τον έξω κόσμο. Είναι ξεκάθαρο το γεγονός ότι αυτή η αντίληψη βρίσκεται σε συμφωνία με την δραστήρια εικόνα των μαθηματικών όπως αυτή περιγράφηκε

από τον **Lakatos (1976)** και όχι με την εικόνα ενός αναιμικού χωρίς ενδιαφέρον σχεδίου που συνήθως παρουσιάζεται στους νεοεισαχθέντες μαθητές.

Όσον αφορά την ψυχολογία, θεωρίες όπως οι παραπάνω χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, αφού είναι θεωρίες που βασίζονται στην ενεργή έρευνα του μαθητή και από τη μεριά τους θεωρούν ότι οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών αποτελούν σημαντικό παράγοντα για τη μαθησιακή τους διαδικασία. Ένα τέτοιο τυπικό παράδειγμα είναι και η γενετική επιστημολογία και ψυχολογία του J. Piaget. Εν κατακλείδι, μέσα στα πλαίσια της παιδαγωγικής, οι θεωρίες και οι μέθοδοι που αφορούν την κοινωνική μάθηση οφείλουν να τονιστούν ιδιαίτερα.

Ο Erich Wittmann ανεπιφύλακτα δηλώνει την επιθυμία του να υποδείξει τις βαρυσήμαντες συνέπειες που συμπεραίνονται από την εκτίμηση της εκπαίδευσης των δασκάλων των μαθηματικών. Για να είναι ικανοί λοιπόν να διδάξουν μαθηματικά στους μαθητές θα πρέπει να πληρούν τα παρακάτω:

1. να έχουν επαρκή μαθηματική εκπαίδευση ώστε να διδάσκουν μαθηματικά σε ένα κατάλληλο επίπεδο πέρα από αυτό που απλά υπαγορεύει το πρόγραμμα σπουδών
2. να έχουν εκπαιδευτεί στον τομέα της ψυχολογίας διότι είναι εκείνη που τους εισάγει σε διαδικασίες όπως η παρατήρηση, η ανάλυση και η κατανόηση των επιτυχημένων ή αποτυχημένων μαθηματικών διαδικασιών της σκέψης που κάνουν οι μαθητές
3. να έχουν λάβει παιδαγωγική εκπαίδευση διότι είναι εκείνη που συνενώνει ιδέες κοινωνικού περιεχομένου που αφορούν τη μάθηση.

Είναι φανερό λοιπόν, ότι για να επιτευχθούν οι παραπάνω σκοποί χρειάζονται διδασκαλικά εκπαιδευτικά προγράμματα αρκετά διαφοροποιημένα από τα υπάρχοντα.

2.4 Οι διδακτικές ενότητες ως ο πυρήνας των συνδυασμών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η κεντρική θέση εδώ είναι η εξής :
Με σκοπό να εδραιωθούν οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών αντιλήψεων για τη μαθηματική εκπαίδευση από τη μία μεριά και των αντίστοιχων για την εκπαίδευση των δασκάλων στοιχείων (συστατικών), από την άλλη, θα ήταν χρήσιμο να ξεκινήσουμε από υπάρχοντα πράγματα τα οποία ήδη αναπαριστούν την πράξη του συνδυασμού – συσσωμάτωσης με έναν φυσικό τρόπο. Τέτοια είναι οι διδακτικές ενότητες. **Κατάλληλες διδακτικές ενότητες παρέχουν την δυνατότητα: ενασχόλησης με τα μαθηματικά, μελέτης των προσωπικών μαθησιακών διαδικασιών που ακολουθούν οι μαθητές, εκτίμησης των διαφορετικών μορφών κοινωνικής οργάνωσης, σχεδιασμού, εκτέλεσης και ανάλυσης διδασκαλίας που πραγματώνεται στην τάξη. Γι' αυτό τον λόγο, οι διδακτικές ενότητες αποτελούν μοναδικά μέσα που μπορούν να εισέλθουν στα συστατικά που αφορούν την εκπαίδευση των δασκάλων και να τα συνδέσουν μεταξύ τους.**

Καταληκτικά, οι διδακτικές ενότητες προσφέρουν έναν εξαιρετικό τρόπο για να εφαρμοστεί η έρευνα στη μαθηματική διδασκαλία. Ο Erich Wittmann προτίθεται να διευκρινίσει την "φιλοσοφία των διδακτικών ενοτήτων" με τη βοήθεια μερικών ειδικών ενοτήτων.

Μερικές διδακτικές ενότητες

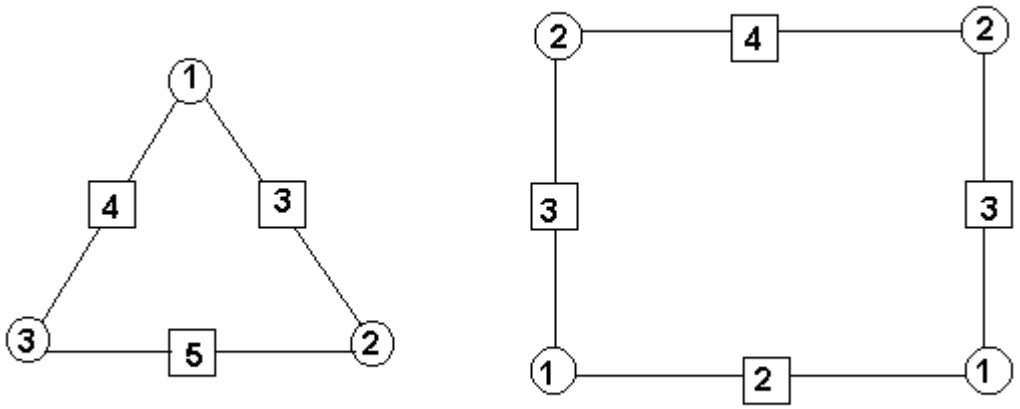
Στις σειρές μαθηματικών που αφορούσαν την εκπαίδευση των δασκάλων, ο Erich Wittmann συχνά παρουσιάζει μία διδακτική ενότητα (Δ.Ε) με μία διάταξη-σχέδιο το οποίο περιλαμβάνει σύντομες πληροφορίες για: σκοπούς (Σ), υλικό (Υ), μαθηματικά προβλήματα που προκύπτουν από το πλαίσιο την ενότητας (Π) και το παρασκήνιο της ενότητας (π) το οποίο έχει τις περισσότερες φορές μαθηματικό χαρακτήρα αλλά και μερικές φορές ψυχολογικό. Κατά τη διάρκεια της σειράς διδασκαλίας τα παραπάνω συστατικά επεξήγονται στο βαθμό που αυτός θεωρεί απαραίτητα.

Τα τρία πρώτα από τα παραδείγματα που ακολουθούν έχουν ληφθεί από τη διδασκαλία που αφορά το αρχικό επίπεδο και το τέταρτο από τη διδασκαλία που αφορά το δευτερεύον επίπεδο.

2.4.1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

Δ. Ε	Αριθμογώνια (Mc Intosh και Quadling, 1975 Walther 1978)
Σ	Προσθέτοντας, αφαιρώντας, ενεργή έρευνα αυτών των συστατικών, ερευνώντας – ανακαλύπτοντας.
Υ	Τριγωνικά και τετράπλευρα αριθμογώνια (μερικά σε φύλλα εργασίας)
Π	Δοσμένοι αριθμοί σε μερικές πλευρές και κορυφές. Να βρεθούν οι υπόλοιποι αριθμοί.
π	Γραμμική ανεξαρτησία των αριθμών σε πλευρές και κορυφές, επίλυση συστήματος με τη βοήθεια γραμμικών εξισώσεων και μέθοδος επίλυσης.

Ως υπενθύμιση, τα αριθμογώνια είναι τρίγωνα, τετράγωνα και γενικά ν-γωνα των οποίων οι πλευρές και οι κορυφές μπορούν να ονομαστούν από αριθμούς σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα: "Κάθε αριθμός που βρίσκεται σε μία πλευρά είναι το άθροισμα των αριθμών παραπλήσιων κορυφών". (σχήμα 2)



Σχήμα 2

Δ. Ε. : "Το κινέζικο θεώρημα για το υπόλοιπο"

Σ: Διαιρώντας με το υπόλοιπο, ανακαλύψεις και συζήτηση.

Υ: Αριθμημένος άξονας (ακέραιοι)

Π: Βρείτε έναν αριθμό ο οποίος όταν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 4 αφήνει υπόλοιπο 2.

Βρείτε έναν άλλο αυτού του τύπου αριθμό.

Βρείτε ακόμη έναν, ... κ.α

Μπορείτε να βρείτε ένα μοντέλο ;

π: Κινέζικο θεώρημα για το υπόλοιπο

Δ. Ε. : Εισιτήριο για μικρή ομάδα ατόμων

Σ: Υπολογισμός συνδυασμών, προσθέτοντας, αφαιρώντας δια του 2 διαίρεση ποσοτήτων που αφορούν χρήματα, μαθηματικοποίηση πραγματικών καταστάσεων, μετάφραση κειμένων, διάβασμα από τους μαθητές πινάκων πολλαπλασιασμού αριθμών μεταξύ του 1 και του 12.

Υ: Φυλλάδιο για το Γερμανικό σιδηρόδρομο

Π: Τι είναι το εισιτήριο για μικρή ομάδα ατόμων ;

Ποια είναι η μικρή ομάδα ;

Πόσα είδη μικρών ομάδων υπάρχουν ;

Πόσα μπορεί κάποιος να αποταμιεύσει χρησιμοποιώντας εισιτήριο για μικρές ομάδες ;

π: Υπολογισμός συνδυασμών, υπολογιστικοί αλγόριθμοι για πρόσθεση και αφαίρεση και συναρτήσεις.

Δ. Ε. :	Η διαδρομή του Galton (Schupp, 1976)
Σ:	Μαθηματικοποιώντας μία ιδεατή κατάσταση
Υ:	Galton Board διαφόρων μεγεθών, μπάλες
Π:	Που θα πέσει η πρώτη μπάλα ;
	Που θα πέσει η δεύτερη μπάλα ; κ.α
	Γιατί ;
	Ποιόν δρόμο μπορεί να πάρει μία μπάλα ;
	Πόσες μπάλες υπάρχουν;
	Ποιοι δρόμοι οδηγούν στο ίδιο σκοπό ;
	Να γίνει σύγκριση των πιθανών δρόμων που μπορούν να ακολουθηθούν κ.α
π:	Αλυσίδα του Bernoulli και διωνυμική κατανομή.

Τα παραδείγματα σκοπεύουν να παρουσιάσουν το γεγονός ότι μία διδακτική ενότητα με τη μορφή που παρουσιάζεται εδώ δεν αποτελεί ακόμη ένα επεξεργασμένο σχέδιο προς εφαρμογή σε σειρές μαθημάτων, παρόλο που κάθε διδακτική ενότητα τέτοιας μορφής περιέχει ουσιώδη στοιχεία για ένα τέτοιο σχέδιο. Μάλλον η διδακτική ενότητα αποτελεί μία ιδέα ή πρόταση για μία διδακτική προσέγγιση, που σκοπίμως παρουσιάζεται με την μορφή αυτή, ώστε να αφήνει διάφορους δρόμους ανοιχτούς που θα οδηγήσουν σε ένα ολοκληρωμένο και πλήρες προς εφαρμογή σχέδιο.

2.4.2 Διδακτικές ενότητες στον τομέα εκπαίδευσης των δασκάλων

Ο Erich Wittmann ξεκινάει με μία παρουσίαση του τρόπου χρησιμοποίησης των διδακτικών ενοτήτων μέσα στο πλαίσιο αναφοράς της εκπαίδευσης των δασκάλων.

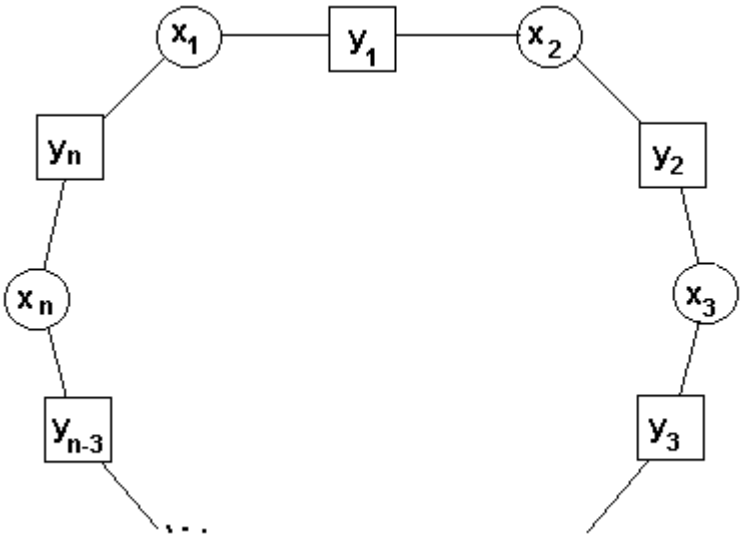
Στο διδακτικό μέρος της εκπαίδευσης των δασκάλων, κατάλληλες διδακτικές ενότητες χρησιμεύουν ως διευκρινήσεις διδακτικών αντιλήψεων που αφορούν τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών. Βασιζόμενοι σε αυτό ο **Gerhard Muller** και ο Erich Wittmann έγραψαν ένα βιβλίο για αρχάριους μαθητές δασκάλους (**Muller και Wittmann, 1978**) το μισό του οποίου αποτελείται από 24 προσεκτικά επιλεγμένες διδακτικές ενότητες. Αυτές οι ενότητες αντιπροσωπεύουν το ουσιαστικό περιεχόμενο, σκοπούς και υλικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε αρχικό επίπεδο. Από την άλλη μεριά, οι διδακτικές ενότητες είναι χρήσιμες αναφορές για σειρές μαθημάτων που αφορούν τις γενικές διδακτικές αρχές. Η ενότητα 2.4.1 "Τα αριθμογώνια", για παράδειγμα εμπεριέχει μία εφαρμογή της μεθόδου επίλυσής τους. Η ενότητα 2.4.3 είναι ένα προσχέδιο για τη γενετική αρχή (**Wittmann 1980 b ,**

Κεφάλαιο 10). Η άποψη του Erich Wittmann για την εκπαίδευση των δασκάλων βασιζόμενη στην προσωπική του εμπειρία είναι ότι οι διαλέξεις για βασικά θέματα της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι δύσκολο να φτάσουν κάπου και για τους δασκάλους και για τους μαθητές, χωρίς να γίνει αναφορά σε συγκεκριμένες διδακτικές ενότητες.

Με άλλα λόγια, η αξία που έχουν οι διδακτικές ενότητες για το διδακτικό μέρος της εκπαίδευσης, βασίζεται στο γεγονός ότι οργανώνουν τη διδακτική γνώση με έναν αποτελεσματικό τρόπο για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Όσον αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση τα αριθμογώνια για παράδειγμα, ταιριάζουν τέλεια σε μία σειρά μαθημάτων πάνω στην άλγεβρα για πρώτου και δεύτερου επιπέδου μαθητές. Οι μαθητές μπορούν αρχικά να εξερευνήσουν τα αριθμογώνια από μόνοι τους και να αναπτύξουν τις δικές τους στρατηγικές για να τα επιλύσουν. Αυτές οι εμπειρίες δείχνουν το δρόμο για μία συστηματική αλγεβρική χρησιμοποίηση των αριθμογωνίων (**Mc Intosh και Qualding 1975**). Οι σταθερές $x_1, x_2, \quad , x_n$ στις κορυφές και οι μεταβλητές $y_1, y_1, \quad y_n$ στις πλευρές ενός n-γώνου σχετίζονται μεταξύ τους με τις γραμμικές εξισώσεις:

$x_1+x_2=y_1 \qquad x_2+x_3=y_2, \qquad \ldots\ldots, \quad x_n+x_1=y_n$



Σχήμα 3

Με άλλα λόγια το γράφημα της φ αντιστοιχεί τις διατεταγμένες n-άδες $(x_1,.....x_n)$ στις $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ κι αυτό είναι μία γραμμική απεικόνιση του Q^n (ή του R^n) στον εαυτό

του. Μετασχηματίζοντας το αντίστοιχο σύστημα, απεικονίζεται η φ, να έχει βαθμό n, εάν το n είναι περιττός και βαθμό n-1 αν το n είναι άρτιος.

Με τον ίδιο τρόπο και οι υπόλοιπες διδακτικές ενότητες βοηθούν να πραγματοποιηθεί μία γνήσια μαθηματική εργασία, όπως υποδηλώνεται από τις νύξεις που περιγράφουν το μαθηματικό παρασκήνιο και τις ανάγκες.

Σε γενικά πλαίσια ο Erich Wittmann προσπάθησε να κάνει σαφές το γεγονός, ότι οι διδακτικές ενότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία για ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες πάνω στις οποίες μπορούν να οικοδομηθούν σημαντικές μαθηματικές θεωρίες. Αυτές οι θεωρίες μπορούν τότε προφανώς να συσχετιστούν με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Έτσι λοιπόν οι δάσκαλοι δεν θα τις θεωρήσουν άσχετες και άχρηστες όπως συχνά συμβαίνει στην τωρινή εκπαίδευση των δασκάλων. Η άποψη του Wittmann είναι, ότι μία αλλαγή στην κατεύθυνση της μαθηματικής εκπαίδευσης προς το μέρος που περιγράφεται εδώ, αποτελεί ένα από τα πιο επείγοντα καθήκοντα για την αναμόρφωση της εκπαίδευσης των δασκάλων.

Όσον αφορά το πρακτικό μέρος της εκπαίδευσης, σχεδόν αφήνεται να εννοηθεί, ότι οι μαθητές θα έπρεπε να επεξεργαστούν και να αξιολογήσουν διδακτικές ενότητες που έχουν ήδη συναντήσει κατά τη διάρκεια του διδακτικού μέρους της εκπαίδευσης τους.

Η θέση του Wittmann για το ποιο είναι το σημαντικό σημείο στον σχεδιασμό ενός μαθήματος αναφέρει: «**Το σημαντικότερο σημείο στο σχεδιασμό είναι να διδαχθούν το περιεχόμενο και οι δεξιότητες που βρίσκονται σε αυτό, στο βαθμό εκείνο που θα αφομοιωθούν ολοκληρωτικά και αυτό θα επιτευχθεί μέσω κατάλληλων συναφών προβλημάτων** (**cf. Wittmann 1980 b, Κεφάλαιο 5**) ». Αυτός είναι ο λόγος που τα "προβλήματα (Π)" αποτελούν ότι πρέπει να υπάρχει σε μία διδακτική ενότητα.

Βιντεοσκοπημένες ενότητες είναι πολύ χρήσιμες για διευκρίνιση διδακτικών ιδεών καθώς και για αφύπνιση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Στο Dortmund πρόκειται εγκαθιδρυθεί μία τράπεζα βιντεοταινιών που θα περιέχει τις πιο επιτυχημένες διδακτικές ενότητες.

Εξαιτίας του γεγονότος ότι είναι αρκετά δύσκολο να μελετηθούν οι διαδικασίες της σκέψης του κάθε μαθητή ξεχωριστά στη τάξη, στους μαθητές – δασκάλους θα πρέπει να προσφερθούν σπουδές πάνω στη διδακτική και ψυχολογία όπου θα τους εισάγουν στην διαδικασία των κλινικών συνεντεύξεων (**cf. Herscovics και Bergeron 1980**). Η

προσέγγιση του Wittmann σε αυτό το πεδίο (**Wittmann 1982**), δεν χρησιμοποιεί αρχικά θέματα από την φιλολογία της ψυχολογίας αλλά όπως ίσως αναμένεται προβλήματα ψυχολογίας που αναδύονται μέσα από διδακτικές ενότητες. Για παράδειγμα, η ενότητα 2.4.3 πιο κάτω θέτει τις εξής ερωτήσεις: Ποιες στρατηγικές πρωταρχικά χρησιμοποιούν τα παιδιά;

Πόσες από αυτές βρίσκουν ;

(**cf Hebler et al. 1980**)

Το τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό που ο Wittmann προσπαθεί να εξηγήσει είναι το πως να αναστοχαστεί και να προσαρτήσει το παιδαγωγικό μέρος της εκπαίδευσης, από τη θέση που του υπαγορεύουν οι εκάστοτε διδακτικές ενότητες. Θεωρητικά οι διδακτικές ενότητες είναι ανοιχτές σε παιδαγωγικές σκέψεις. Επίσης αναφέρεται στις διδακτικές ενότητες οι οποίες είναι ειδικά αφιερωμένες στην οργάνωση κοινωνικών δραστηριοτήτων (**Muller και Wittmann, 1978, Κεφάλαιο 1.5.1 σελ. 116 ff Κεφάλαιο 1.5.4, σελ 128 ff, Wittmann 1977)**

Το γεγονός και μόνο ότι οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης δεν συνηθίζουν να είναι τόσο ικανοί στο παιδαγωγικό μέρος τις εκπαίδευσης όσο συνηθίζουν να είναι στα άλλα μέρη που απαρτίζουν την εκπαίδευση των δασκάλων, τους καθιστά μη ικανούς να ασκήσουν μεγάλη επιρροή προς αυτή την κατεύθυνση. Το σημαντικό είναι ότι οι δάσκαλοι των παιδαγωγικών συλλέγουν διδακτικές ενότητες και εμβαθύνουν σε αυτές από παιδαγωγικής άποψης.

2.4.3 Οι διδακτικές ενότητες στα πλαίσια της διδακτικής έρευνας

Η εμπειρική έρευνα που εφαρμόζεται στη μαθηματική εκπαίδευση, σε διεθνές επίπεδο μοιάζει να είναι υπέρ των κλινικών μελετών (**Easley 1977**). Εφόσον τέτοιες μελέτες πραγματοποιούνται εκτός του φυσικού πλαισίου της μάθησης και της διδασκαλίας και εφόσον κατευθύνονται προς τη μεριά της βασικής έρευνας ωστόσο δεν μας παρέχουν την απαιτούμενη γνώση για να καθοδηγηθεί η μάθηση συγκεκριμένων περιεχομένων και διαδικασιών. Για αρκετά χρόνια ο **H. Freudenthal** είχε αναπτύξει μία αντίληψη για τη μαθηματική εκπαίδευση η οποία συγκεντρώνονταν γύρω από τη μελέτη ανοιχτών και κατευθυνόμενων διαδικασιών που αφορούν την μάθηση των μαθηματικών. (**cf. Freudenthal, 1978**). Ο Wittmann επιχειρεί να προχωρήσει μερικά βήματα μπροστά και να υποδηλώσει, ότι οι

ερευνητές αναλύουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών χρησιμοποιώντας έναν σκελετό, που παρέχεται από σειρές πλουσίων διδακτικά και ευρέως αποδεκτών διδακτικών ενοτήτων. Οι μελέτες του **Schupp (1976)** και έχοντας υπ' όψιν το κεφάλαιο 2.4.4 καθώς επίσης και εκείνες του **Bell (1976)** και **Galbraith (1981)** ίσως χρησιμεύσουν ως πρότυπα. Τέτοιου είδους έρευνα θα μπορούσε να έχει άμεση εφαρμογή στη διδασκαλία των μαθηματικών από την πρώτη στιγμή που σχεδιάζεται. Θα συμπεριλάμβανε πάντα συγκεκριμένο περιεχόμενο και γι' αυτό το λόγο θα μας προφύλαγε από αβάσιμες γενικότητες που προκύπτουν από άλλα περιεχόμενα.

Οι μεθοδικοί βαθμοί ελευθερίας που προσφέρονται όταν μετατρέπεις μία ευμετάβλητη διδακτική ενότητα σε μία συγκεκριμένη, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν από τους ερευνητές με διαφορετικό κάθε φορά τρόπο ανάλογα με αυτόν που υπαγορεύουν οι συνθήκες.

Ο Wittmann προσπαθεί να εισχωρήσει "τη φιλοσοφία των διδακτικών ενοτήτων", που περιγράφεται σε αυτή τη θεματική ενότητα, μέσα στη μεθοδολογία "των επιστημών του τεχνητού" που δημιουργήθηκε από τον Αμερικάνο νομπελίστα Winner Herb Simon **(Simon 1970).** Οι διδακτικές ενότητες, υποστηρίζει ότι είναι μόνο τεχνητά αντικείμενα που έχουν κατασκευαστεί από τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης και προτείνει να διερευνηθεί η συμπεριφορά και η ικανότητα βελτίωσης που παρουσιάζουν αυτά τα αντικείμενα, όταν χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια.

2.4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ο Άγγλος Graham Higman που ασχολήθηκε με τη θεωρία ομάδων κάποτε σημείωσε ότι "η πρόοδος που σημειώνεται στη θεωρία των ομάδων βασίζεται αρχικά σε μία άριστη γνώση ενός μεγαλύτερου αριθμού ειδικών ομάδων". Ο Wittmann πιστεύει ότι η μαθηματική εκπαίδευση θα μπορούσε να ωφεληθεί ουσιαστικά από την άριστη γνώση ενός μεγάλου αριθμού ειδικών διδακτικών ενοτήτων. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να αναρωτηθούμε για το πόσο σημαντικές είναι οι πιο γενικές απόψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών ή αν αυτές είναι πέρα από ή ανεξάρτητες από συγκεκριμένες διδακτικές ενότητες. Αντιθέτως: τη στιγμή που η θεωρία ομάδων δεν αποτελείται από ένα πίνακα ειδικών ομάδων αλλά είναι μία θεωρία που περιβάλλει και ασχολείται επιτυχώς με ειδικές ομάδες, οι

διδακτικές μέθοδοι των μαθηματικών κατ' αναλογία μπορούν να θεωρηθούν ως μία θεωρία που βασίζεται αλλά και ξεπερνάει την γνήσια διδασκαλία των μαθηματικών.

3η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

3.1 Η αναπτυξιακή έρευνα ως μία μορφή έρευνας

Από άρθρο του **Walker (1992),** μας δίνεται η ευκαιρία να παρατηρήσουμε ότι αρχίζει να αναδύεται ένα πλήθος ερευνητικών προσεγγίσεων. Πολλές από τις τωρινές προσεγγίσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν κάτω από δύο τίτλους, αυτούς της "επεξήγησης" και της "κατανόησης" (**Bruner 1994**). Εδώ μπορεί κάποιος να σκεφτεί την "επεξήγηση" όσον αφορά τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής καθώς και την "κατανόηση" ως τη διαμόρφωση μίας εικόνας του τι πραγματικά συμβαίνει. Εκτός από αυτούς τους δύο τίτλους, μπορούμε να διακρίνουμε ακόμη έναν, αυτόν που έχει προταθεί από την **NCTM research Advisory Committee (1988)** και τον ονομάζει "τροποποιημένη έρευνα". Τροποποιημένη έρευνα σημαίνει έρευνα η οποία δεν εστιάζει στο "τι είναι" αλλά που ασχολείται πιο ευρεία με το "τι οφείλει να είναι". Αυτό εμπεριέχει, για παράδειγμα, έρευνα που θέτει την ερώτηση "πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την εκπαίδευση ώστε να πληροί συγκεκριμένα πρότυπα και ιδανικά".

Η ιδέα της "αναπτυξιακής έρευνας ", που αποτελεί το θέμα αυτής της θεματικής ενότητας κατατάσσεται στην τελευταία κατηγορία. Η αναπτυξιακή έρευνα αποτελείται από ένα μίγμα πραγμάτων εκείνων της ανάπτυξης προγράμματος σπουδών και της εκπαιδευτικής έρευνας, στην οποία η ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων χρησιμοποιείται ως μέσο για την επεξεργασία κι αξιολόγηση μιας διδακτικής θεωρίας. Ωστόσο αυτό που αφήνεται να εννοηθεί εδώ δεν είναι ένα είδος συμβίωσης μεταξύ έρευνας κι ανάπτυξης στην οποία η έρευνα παίρνει τη μορφή μιας διαρκούς εκτίμησης στην υπηρεσία ανάπτυξης του προγράμματος σπουδών. Αντ' αυτού η αναπτυξιακή έρευνα θεωρείται ως ένα είδος έρευνας που βάζει τα θεμέλια για την εργασία εκείνων των επιστημόνων που ασχολούνται με την ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών.

Πάνω από δύο δεκαετίες, η αναπτυξιακή έρευνα έχει αποτελέσει την κινητήριο δύναμη που ευθύνεται για την μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ολλανδία. Η διαδικασία της μεταρρύθμισης ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του 70' με τη συμβολή του **Ινστιτούτου για την Ανάπτυξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (IOWO)** και συνεχίζεται από το διάδοχο του, την **Ερευνητική Ομάδα που ασχολείται με τη μαθηματική Εκπαίδευση και την Επιστήμη των**

Υπολογιστών (OWFOC), που τώρα ονομάζεται **Ινστιτούτο του Freudenthad**. **Ο κύριος σκοπός είναι η ανάπτυξη μιας μαθηματικής εκπαίδευσης που να ανταποκρίνεται στην ιδέα του Freudenthad (1973,1991) για τα μαθηματικά ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα**. Αυτό που θέλει να πει είναι, ότι θα δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να επαναπροσδιοριστούν τα μαθηματικά μέσω της μαθηματικοποίησης- μαθηματικοποιώντας ένα κεντρικό θέμα από την καθημερινότητα καθώς και μαθηματικοποιώντας ένα μαθηματικό θέμα. Σε κάθε περίπτωση το κεντρικό θέμα που πρόκειται να μαθηματικοποιηθεί θα πρέπει να είναι εμπειρικά γνωστό για τους μαθητές και εξαιτίας του γεγονότος αυτού η οραματισμένη εκπαίδευση ονομάζεται "ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση". **Επιπλέον, η ιδέα της μαθηματικοποίησης υπονοεί ύπαρξη μεγάλης αυτονομίας των μαθητών**. **Με άλλα λόγια η βασική αρχή είναι, ότι τα μαθηματικά μπορούν και θα πρέπει να μαθαίνονται μέσω προσωπικής προσπάθειας και μέσω προσωπικών διανοητικών ικανοτήτων**.

Η ενότητα αυτή εστιάζει στην περιγραφή της αναπτυξιακής έρευνας ως μία μέθοδο έρευνας που σκοπό έχει την κατασκευή μιας εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας για τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Αυτή είναι μία διδακτική θεωρία που ασκεί κριτική στις προαναφερθείσες αρχές. Η κατασκευή αυτής της διδακτικής θεωρίας θα είναι το τελικό αποτέλεσμα μιας σειράς ερευνητικών προγραμμάτων. Αυτά τα ερευνητικά προγράμματα παρατίθενται σε δύο προτάσεις: **η πρώτη πρόταση αφορά την κατασκευή ενός πρωταρχικού σχεδίου μιας σειράς μαθημάτων και η δεύτερη πρόταση αφορά την επεξεργασία αυτής της σειράς σε συνεργασία με διδακτικά πειράματα**. Μια συζήτηση πάνω στις μεθόδους που συνθέτουν αυτές τις δύο προτάσεις, διαμορφώνεται στο κύριο μέρος αυτής της ενότητας. Ως αποζημίωση για τον απόμακρο κι περιληπτικό χαρακτήρα της μέχρι τώρα παροχής πληροφοριών αυτής της ενότητας, παρατίθενται παραδείγματα που αφορούν τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών. Ξεκινώντας, δίνεται μία σφαιρική περιγραφή της αναπτυξιακής έρευνας και των χαρακτηριστικών της.

3.1.1 ΑΝΑΠΤΥΞΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Όπως προαναφέρθηκε, η αναπτυξιακή έρευνα είναι ένα κομμάτι μιας μεγάλης κλίμακας και ενός διαρκούς μεταρρυθμιστικού προγράμματος στην Ολλανδία. Η ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών αποτελεί μία από τις βασικές δραστηριότητες

αυτού του μεταρρυθμιστικού προγράμματος. Ωστόσο δεν χρησιμοποιήθηκαν τόσο γνωστές διδακτικές θεωρίες που να αφορούσαν τον σχεδιασμό. Από αυτήν την άποψη, η Ολλανδική προσέγγιση δεν διαφέρει από πολλά άλλα μεταρρυθμιστικά προγράμματα σπουδών.

Παραδοσιακές διδακτικές θεωρίες που αφορούν τον σχεδιασμό, (**Gagne 1977, Gagne Briggs 1979, Romiszowski 1981**) θα μπορούσαν να είναι αρκετά χρήσιμες σε περιπτώσεις, όπου οι σκοποί του προγράμματος σπουδών να μπορούσαν εύκολα να οριστούν και περίσσεια εμπειρική γνώση να είναι διαθέσιμη. Όμως εάν οι σκοποί του προγράμματος σπουδών είναι ακόμη ασαφείς και δεν υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα για τις προσδοκώμενες διδακτικές διαδικασίες που θα πρέπει να ακολουθηθούν, τότε οι διδακτικές θεωρίες που αφορούν τον σχεδιασμό και οι οποίες είναι αντικειμενικές και επωφελούνται της εμπειρικής γνώσης είναι περιορισμένης χρήσης για αυτές τις προσδοκώμενες διδακτικές διαδικασίες.

Στα περισσότερα μεταρρυθμιστικά πειράματα που αφορούν τα προγράμματα σπουδών, η παραγωγή υλικών για τα προγράμματα σπουδών έχει προτεραιότητα έναντι όλων κι αυτό συμβαίνει διότι με τη βοήθεια αυτών των υλικών διαμορφώνεται η μεταρρύθμιση. Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αρκετός χρόνος να ληφθούν συγκεκριμένα μεθοδικά μέτρα ώστε να εξασφαλιστούν επιστημονικές αιτιολογήσεις για της θεωρίες που αναπτύσσονται στα πειράματα. Ως συνέπεια, η ερευνητική άποψη για πολλά πειράματα προγραμμάτων σπουδών τοποθετείται στο παρασκήνιο. Όμως πάντα υπάρχουν εξαιρέσεις (**Romberg 1973**)

Στην Ολλανδική περίπτωση, η ερευνητική άποψη έχει βρεθεί στο προσκήνιο από την αρχή. Εφόσον δεν υπήρχε επεξεργασμένος θεωρητικός σκελετός ως αφετηρία, η θεωρία θα έπρεπε να ερμηνευθεί στην πορεία. Γι' αυτό τον λόγο η αναπτυξιακή έρευνα δεν είχε χρέος μόνο να παράγει προγράμματα σπουδών, αλλά και διδακτική θεωρία καθώς και αιτιολόγηση για τη θεωρία αυτή. Με αυτή την έννοια, η αντίληψη για την αναπτυξιακή έρευνα είναι συγγενική με την αντίληψη του **Steffe** για τα διδακτικά πειράματα (**Steffe 1983**). Είναι επίσης συγγενική με την εργασία του **Kamii (Kamii, Lewis & Livingston Jones 1993) καθώς και την Lampert (1989, 1990) Cobb, Yackel Wood (1992).**

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ερώτηση για την οποία οι Ολλανδοί αναπτυξιακοί ερευνητές αγωνίζονται σκληρά, είναι παρόμοια με τις ερωτήσεις που οι κονστρουκτιβιστές προσπαθούν να λύσουν. Γι' αυτούς επίσης, η ερώτηση που τίθεται είναι : Πώς θα πρέπει να σχεδιαστούν διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες:

(a) να συνδέονται με την άτυπη γνώση των μαθητών

(b) να τους καθιστά ικανούς να αναπτύξουν μία πιο επεξεργασμένη, τυπική και γενικευμένη γνώση

(c) ενώ συγχρόνως να συμβαδίζουν με τη βασική αρχή της νοητικής αυτονομίας.

Με άλλα λόγια, οι Ολλανδοί ερευνητές προσπαθούν να απαντήσουν αυτή την ερώτηση, σχεδιάζοντας και αξιολογώντας διδακτικές σειράς που εκπληρώνουν αυτές τις απαιτήσεις. Ρίχνοντας φως πάνω στη διαδικασία σχεδιασμού και πάνω στις διδακτικές σειρές, οι ερευνητές προσπαθούν να διαμορφώσουν περιληπτικά μια διδακτική θεωρία για τη "ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση ". **Η κατασκευή αυτής της διδακτικής θεωρίας είναι μία μακράς διάρκειας διαδικασία. Η θεωρία αναδύεται σιγά σιγά μέσα από μία μεγάλη συλλογή προσωπικών ερευνητικών πειραμάτων**.

3.2 Κατασκευή ενός πρωταρχικού σχεδίου μιας σειράς μαθημάτων

Σε αυτά τα προσωπικά ερευνητικά προγράμματα η ερώτηση «**Από τι πρέπει να αποτελείται η διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος ώστε να πληροί τις βασικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης** ;», απαντάται πρωτίστως και τοπικά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι η απάντηση αναζητείται για ένα συγκεκριμένο θέμα κάθε φορά και επιτυγχάνεται μέσω της διαδικασίας ανάπτυξης μιας ολόκληρης πρωτότυπης σειράς μαθημάτων. **Γενικεύοντας λέμε ότι ο ερευνητής κατασκευάζει μια προσωρινή συλλογή από διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες δουλεύονται με μια επαναληπτική διαδικασία σχεδιασμού και αξιολόγησης**. Για να κατασκευαστεί λοιπόν ένα προσωρινό σχέδιο, ο ερευνητής μπορεί να πάρει ιδέες από διάφορες πηγές και να τις ταιριάξει στην πρωτότυπη δραστηριότητα που ετοιμάζει. Αυτές οι πηγές έμπνευσης μπορεί να είναι σχολικά προγράμματα, κείμενα με θέμα την μαθηματική εκπαίδευση, ερευνητικές αναφορές κ.α. αξίζει να σημειωθεί, ότι υιοθετώντας μια δραστηριότητα που βρίσκεται σε μια σειρά μαθηματικών ή σε μια πειραματική προσέγγιση δεν σημαίνει και την αυτόματη υιοθέτηση της διδακτικής θεωρίας που αυτή βασίζεται. Με αυτή τη λογική, διδακτικές δραστηριότητες απομονώνονται από το αρχικό τους περικείμενο (πλαίσιο αναφοράς). Ο τρόπος με τον οποίο κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται

εξαρτάται από τις προσδοκίες του ερευνητή, γι' αυτό που θέλει να παράγει. Η προσέγγιση αυτή λέγεται "**theory guided bricolage" (Gravemeijer 1994a)** κι αυτό διότι μοιάζει με τον τρόπο εργασίας κάποιου, που οι Γάλλοι ονομάζουν "**bricoleur"**. Ο bricoleur ήταν κάποιος ο οποίος επιδιόρθωνε πράγματα χρησιμοποιώντας όσο το δυνατό περισσότερα από τα διαθέσιμα υλικά που είχε. Για να πραγματοποιηθεί το προηγούμενο, έπρεπε να προσαρτηθούν πολλά υλικά. Επίσης χρησιμοποιούσε τα διαθέσιμα υλικά του με τρόπους διαφορετικούς από αυτούς που εκείνα προορίζονταν. Ο αναπτυξιακός ερευνητής ακολουθεί μια παρόμοια μέθοδο μόνο που οι επιλογές και οι υιοθετήσεις που γίνονται θα καθοδηγούνται από τις βασικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στην αρχή της μεταρρύθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης που έλαβε χώρα στην Ολλανδία, αυτή η θεωρία αποτελούσε περισσότερο μία σφαιρική φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης παρά μια θεωρία αυτήν καθ' αυτήν. Βαθμιαία όμως αναπτύχθηκε μια εξειδικευμένη διδακτική θεωρία. Αυτή η θεωρία χρησιμοποιείται ως οδηγός όχι μόνο για την κατασκευή ενός προσωρινού σχεδίου αλλά και για μία περαιτέρω επεξεργασία ολόκληρης της σειράς μαθημάτων που θα διεκπεραιώνεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας πειραματισμού και υιοθέτησης στοιχείων. **Η μεταφορά του "bricolage" πάρθηκε από τον Levi-Strauss ο οποίος την χρησιμοποίησε για να περιγράψει την διαδικασία της ανθρώπινης σκέψης. Ο Jacob (1982) χρησιμοποιούσε μια παρόμοια μεταφορά "επιδιόρθωσης" ώστε να περιγράψει την ανάπτυξη**. Οι δύο αυτές ερμηνείες ταιριάζουν στην αναπτυξιακή έρευνα, αφού η 1η μεταφορά ανταποκρίνεται πολύ καλά στην βασική διαδικασία του σχεδιασμού ενώ η 2η περιγράφει τον μακροπρόθεσμο χαρακτήρα της αναπτυξιακής έρευνας. Η τελευταία ιδιαίτερα δηλώνει το σταθερά αυξανόμενο αποτέλεσμα μίας μακροπρόθεσμης διαδικασίας υιοθέτησης – κριτικής - βελτίωσης και επεξεργασίας. **Αυτή η διαδικασία δεν αφορά μόνο ένα προϊόν αλλά περιλαμβάνει την διαμόρφωση της διδακτικής θεωρίας** : **το πρόγραμμα σπουδών και η θεωρία αναπτύσσονται μαζί.**

Στην αναπτυξιακή έρευνα αυτές είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, παρόλο που ο πραγματικός σκοπός είναι η ανάπτυξη της θεωρίας.

3.2.1 Ανάπτυξη της θεωρίας:

Καθώς διαμορφώνεται ένα πρόγραμμα σπουδών η ερώτηση που θέτει η αναπτυξιακή έρευνα είναι: «**Από τι πρέπει να αποτελείται η διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος ώστε να πληροί τις βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης**;»

Η ερώτηση αυτή απαντάται αρχικά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο όσο αφορά το χαρακτήρα του προγράμματος σπουδών. Ταυτόχρονα, απάντηση δίνεται σε ένα πιο θεωρητικό επίπεδο προερχόμενη από τα μέσα που χρησιμοποιεί ο ερευνητής για τη διαδικασία εκμάθησης.

Το 2^{ο} βήμα της αναπτυξιακής έρευνας είναι να μελετηθούν τα αποτελέσματα της διαδικασίας εκμάθησης που ακολουθήθηκε. Αυτό πραγματοποιείται φέρνοντας στην επιφάνεια σκέψεις, σκοπούς και εμπειρίες που βρίσκονται στη βάση του τελικού σχεδίου μίας σειράς μαθημάτων. **Ο σκοπός είναι να ανασύρουμε την «τοπική» διδακτική θεωρία, για το εν λόγο θέμα, η οποία υπονοείται στη σειρά διδασκαλίας.** Τέτοιοι είδους θεωρία είναι «**τοπική**», με την έννοια ότι περιγράφει τον τρόπο που αυτό το συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να διδαχτεί ώστε να πληρούνται οι βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης.

Η «**τοπική**» αυτή διδακτική θεωρία διαφέρει από τη σειρά διδασκαλίας που ακολουθείται για να διδαχτεί το θέμα αυτό. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η τοπική θεωρία επικεντρώνεται σε μία αρχή που θα κρίνει την επιλογή των διδακτικών δραστηριοτήτων που θα ακολουθηθούν. Η αρχή αυτή οφείλει να δώσει εξηγήσεις για το πως αυτές οι διδακτικές δραστηριότητες θα βοηθήσουν τους μαθητές ώστε να επαναπροσδιορίσουν τη μαθηματική γνώση. Στα στοιχεία στα οποία βασίζεται μία «τοπική» διδακτική θεωρία είναι μεταξύ άλλων:

1. άτυπη γνώση και στρατηγικές των μαθητών πάνω στις οποίες η διδασκαλία μπορεί να οικοδομηθεί.
2. Τα contextual problems μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να αφυπνίσουν την άτυπη γνώση και τις στρατηγικές των μαθητών.
3. διδακτικές δραστηριότητες που θα υποβοηθήσουν να αναπτυχθούν αναστοχαστικές διαδικασίες που υποστηρίζουν τη σχηματοποίηση και την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων.

Επίσης οι «τοπικές» διδακτικές θεωρίες θα πρέπει να περιέχουν εναύσματα θεωρητικών απόψεων που υπερβαίνουν το συγκεκριμένο θέμα στο οποίο

απευθύνεται. Σε αυτού του είδους τη θεωρία τέτοιου είδους παράγοντες θα πρέπει να αξιολογούνται έχοντας υπ' όψιν δύο παραμέτρους.

Πρώτον από το αν η οραματισμένη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών αποτέλεσε ανθρώπινη δραστηριότητα και **δεύτερον** αν υπήρξαν αποτελέσματα και ενδείξεις για την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Επεξεργασμένα παραδείγματα για τέτοιου είδους τοπικές διδακτικές θεωρίες μπορούμε να συναντήσουμε στους **Streefland (1990b) και Van den Brink (1989)**. Έτσι λοιπόν το βασικό επίπεδο της αναπτυξιακής έρευνας είναι συγκεκριμένο. Η διατύπωση μιας τοπικής διδακτικής θεωρίας αποτελεί την μετάβαση για να περάσουμε σε ένα θεωρητικό επίπεδο. Ωστόσο η θεωρία είναι ακόμη τοπική γι αυτό το λόγο το επόμενο βήμα είναι να περάσουμε από το συγκεκριμένο κάθε φορά θέμα σε κάτι πιο γενικό. **Παρόλο που το "γενικό" σε αυτό το κείμενο είναι ακόμη περιορισμένο η διδακτική θεωρία η οποία αναπτύσσεται αφορά μόνο τη μαθηματική εκπαίδευση και είναι συνδεδεμένη με την ρεαλιστική προσέγγιση. Γι αυτό το λόγο αποκαλείται εξειδικευμένη διδακτική θεωρία για τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση**. Η διδακτική θεωρία αυτού του είδους μπορεί να ερμηνευτεί μέσω κοινών χαρακτηριστικών που συναντώνται σε τοπικές διδακτικές θεωρίες επιμέρους θεμάτων. Με αυτό τον τρόπο ο **Treffers (1987)** κατασκεύασε ένα σκελετό διδακτικής θεωρίας.

Σημειώνεται ότι η θεωρία ερμηνεύεται ως μία εκ των υστέρων θεωρία παρόλα αυτά, η θεωρία αντανακλά επίσης τις βασικές αρχές των θεωρητικών απόψεων που βρίσκονται στη βάση ολόκληρης της μεταρρύθμισης.

Τα τρία συστατικά που χρησιμοποίησε ο Treffers για να δημιουργήσει το θεωρητικό σκελετό είναι:

1. η θεωρία των επιπέδων του Van Hiele (1975)
2. διδακτική φαινομενολογία του Freudeuthal (1983)
3. ιδέα της προοδευτικής μαθηματικοποίησης

Ο Treffers χρησιμοποίησε την θεωρία επιπέδων του Van Hiele για να περιγράψει από σφαιρική άποψη μία σειρά μαθημάτων. Ονόμασε τα επίπεδα που θα ακολουθηθούν ως εξής:

- ✓ διαισθητικό φαινομενολογικό επίπεδο
- ✓ τοπικό περιγραφικό επίπεδο

- ✓ επίπεδο συστηματικοποίησης του κεντρικού θέματος

Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal έρχεται να ολοκληρώσει την γενική εικόνα του σκελετού. Ο ρόλος της προοδευτικής μαθηματικοποίησης είναι να διευκολύνει την μετάβαση μεταξύ των τριών επιπέδων. Πιο συγκεκριμένα κατά τον Freudenthal, η φαινομενολογία μιας μαθηματικής έννοιας, δομής ή ιδέας σημαίνει να την περιγράφεις σε σχέση με τα φαινόμενα από τα οποία δημιουργήθηκε και επεκτάθηκε κατά τη διάρκεια της εξέλιξης της ανθρώπινης γνώσης. Η διδακτική φαινομενολογία είναι ένας τρόπος για να υποδείξουμε στον δάσκαλο τα βασικά σημεία στα οποία μπορεί να στηριχτεί ο μαθητής, ώστε να ακολουθήσει μία πορεία που να είναι παράλληλη με εκείνη που ακολούθησε η ανθρώπινη σκέψη, για την ανάπτυξη της έννοιας.

Ο Treffers διέκρινε 5 χαρακτηριστικά της προοδευτικής μαθηματικοποίησης

1. η κεντρική τοποθέτηση συναφών του εξεταζόμενου θέματος προβλημάτων (contextual problems) ως σημεία αφετηρίας και ως εφαρμογές.
2. η χρησιμοποίηση σχεδίων και μοντέλων συμπεριλαμβανομένου και προσχεδιασμένων καταστάσεων (πρότυπα)
3. την συνεισφορά των μαθητών όσον αφορά τις προσωπικές τους κατασκευές και τις ελεύθερες προσωπικές τους δημιουργίες
4. ο επικοινωνιακός χαρακτήρας της διδακτικής δραστηριότητας
5. την ανάμιξη διαφόρων μαθησιακών τεχνικών

Τα παραπάνω δείχνουν ότι η επανασύνθεση της διδακτικής θεωρίας έχει περισσότερο περιγραφικό χαρακτήρα παρά διαταχτικό χαρακτήρα.

Πιο πρόσφατα, όμως, η θεωρία επανεκδόθηκε σε πιο διαταχτική μορφή (δίνω εντολές για κάτι σύμφωνα με τις αρχές που υπάρχουν) (**Gravemeijer 1994 b**) αυτό θα παρουσιαστεί αργότερα.

3.2.2 Χαρακτηριστικά

Η προηγούμενη περιγραφή σκιαγραφεί τον εξαιρετικό χαρακτήρα αυτού του είδους ερευνητικής μεθόδου. Περιληπτικά μπορούμε να πούμε ότι η αναπτυξιακή έρευνα είναι **εξελικτική** – **στρωματοποιημένη** (**κατανεμημένη**) – και **αναστοχαστική**.

Εξελικτική

Η αναπτυξιακή έρευνα είναι εξελικτική, χαρακτηριστικό που της επισυνάπτεται λόγω της αναπτυξιακής πορείας που έχει η θεωρία την οποία στοχεύει να δημιουργήσει. Έτσι λοιπόν η θεωρία παρουσιάζεται ως βαθμιαία – επαναληπτική και – συσσωρευτική. Δεν υπάρχει μία λεπτομερής θεωρία ως αφετηρία. Η πρωταρχική σφαιρική θεωρία επεξεργάζεται, βελτιώνεται και διατυπώνεται με σαφήνεια μέσω των διαδικασιών σχεδιασμού και αξιολόγησης. Η θεωρία λοιπόν αναπτύσσεται μέσα από διαδικασίες και χαρακτηριστικό είναι ότι η θεωρία ολοκληρώνεται και παίρνει μορφή μόνο αν ακολουθεί μία αναστοχαστική πορεία.

Στρωματοποιημένη (κατανεμημένη)

Η αναπτυξιακή έρευνα θεωρείται στρωματοποιημένη εξαιτίας του ότι η ανάπτυξη της προσδοκώμενης θεωρίας πραγματοποιείται σε διαφορετικά επίπεδα. Έχουμε λοιπόν τα εξής επίπεδα στα οποία αναπτύσσεται η θεωρία:

- Στο επίπεδο των διδακτικών δραστηριοτήτων (micro theories) – θεωρίες μικρής εμβέλειας.
- Στο επίπεδο της σειράς μαθημάτων (local instruction theories) “τοπικές” διδακτικές θεωρίες.
- Στο επίπεδο της εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας.

Αυτά τα 3 επίπεδα μπορούν να διευκρινισθούν με ένα παράδειγμα που αφορά τους δεκαδικούς.

Τα στοιχειά “κλειδιά” που χαρακτηρίζουν την τοπική διδακτική θεωρία για τους δεκαδικούς είναι:

«Αλλαγή της μονάδας μέτρησης»

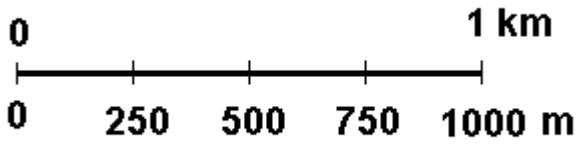
«Κλάσματα ως σημεία αναφοράς» (Benchmark fractions)

«Ο διπλά αριθμημένος άξονας»

«Προοδευτική βελτίωση»

Η ιδέα της «**αλλαγής της μονάδας μέτρησης** » θα μπορούσε να διευκρινιστεί, από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς μέσα στο πλαίσιο που υπαγορεύεται από τα χρήματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το θέμα είναι ότι οι μαθητές συνηθίζουν να μεταφράζουν τις δεκαδικές τιμές σε δολάρια ως τιμές σε σένς ή ως τιμές σε σένς και δολάρια π.χ $2,45 μεταφράζεται ως "245 cents", ή ως 2 δολάρια και 45 σένς.

Με τη πρώτη μετάφραση οι μαθητές αποφεύγουν την υποδιαστολή και αυτό τους βοηθά να αντιμετωπίσουν τους δεκαδικούς ως ακεραίους. Με τη δεύτερη μετάφραση ενδυναμώνεται η αντίληψη των μαθητών για το μέγεθος, γνωρίζοντας ότι τα 100 σένς ισοδυναμούν με 1 δολάριο. Συμπεραίνουν λοιπόν ότι για παράδειγμα τα $ 1,98 εύκολα θα θεωρηθούν ως σχεδόν 2 δολάρια. Με παρόμοιο τρόπο λοιπόν, τα $2,45 μπορούν να θεωρηθούν ως περίπου 2 και μισό δολάρια. Άλλα (benchmarks) σημεία αναφοράς μπορούν να δημιουργηθούν σκεπτόμενοι τα "τέταρτά". π.χ $0,75 είναι 3-τέταρτα και αυτό συνεπάγεται ότι έχουμε 3 τέταρτα από ένα δολάριο. Στην Ολλανδία αυτή η ιδέα «**αλλαγής της μονάδας μέτρησης**» μπορεί να επεκταθεί στη μέτρηση του μήκους, εφόσον χρησιμοποιείται ένα σύστημα μέτρησης. Αυτό οδηγεί σε έναν αριθμημένο άξονα που χρησιμοποιείται ως μοντέλο για να παρασταθούν οι δεκαδικοί αριθμοί. Ένας αριθμημένος κανόνας (χάρακας) μπορεί να μετατραπεί σε έναν "**διπλά αριθμημένο άξονα**" όπου για παράδειγμα τα χιλιόμετρα να γράφονται πάνω από τον άξονα, ενώ τα μέτρα να γράφονται κάτω από αυτόν.



σχήμα 1 Ο διπλά αριθμημένος άξονας

Στις μικρής εμβέλειας θεωρίες, "**micro theories**", που αφορούν τις διδακτικές δραστηριότητες, η άτυπη γνώση των μαθητών παίζει κεντρικό ρόλο. Σε μία δοσμένη δραστηριότητα οι ερευνητές ίσως θα περιμένουν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένες άτυπες στρατηγικές αντί για μία τυπική στρατηγική, που βασίζεται σε μία τυπική μαθηματική μετάφραση των δεκαδικών ως ομάδα δεκαδικών κλασμάτων δηλαδή 0,123 = $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}$. Η θεωρία αυτού του είδους υποστηρίζει, ότι οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ δεκαδικών και κλασμάτων στην περίπτωση π.χ. που έχουν να υπολογίσουν το συνολικό περιεχόμενο 4 μπουκαλιών χωρητικότητας 0,75 lt το καθένα. Αυτό που θα έκαναν είναι $4\times\frac{3}{4}=3$

Σε ένα πιο σφαιρικό επίπεδο, έχουμε την εισαγωγή της φαινομενολογίας στο πλαίσιο της μέτρησης καθώς και στον τρόπο που χρησιμοποιείται ο αριθμημένος άξονας (πρώτα ως μοντέλο επαναλαμβανόμενου ρυθμού χρησιμοποίησης της μονάδας μέτρησης και αργότερα ως μοντέλο για ερμηνεία των δεκαδικών αριθμών). **Το πλαίσιο της μέτρησης και ο αριθμημένος άξονας θεωρούνται χαρακτηριστικά της εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας για τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, διότι ανήκουν στο 1^{ο} και 2^{ο} χαρακτηριστικό αντίστοιχα της προοδευτικής μαθηματικοποίησης που διέκρινε ο Treffers .**

Σε κάθε επίπεδο μπορεί να διακριθεί μία κυκλική διαδικασία. Στο επίπεδο των "**micro theories**" η κυκλική διαδικασία ερμηνεύεται ως ο τρόπος που αξιολογούνται και προσαρτούνται η μικρής εμβέλειας θεωρίες.

Στο επίπεδο των "**τοπικών θεωριών**" αλλεπάλληλες εκδοχές για σειρές διδασκαλίας αξιολογούνται και προσαρτούνται από μία κυκλική διαδικασία.

Στο επίπεδο της εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας διακρίνονται πιο έμμεσοι τύποι κυκλικής διαδικασίας.

Αναστοχαστική

Η αναπτυξιακή έρευνα είναι αναστοχαστική και αυτό απορρέει από το γεγονός ότι η ανάπτυξη της θεωρίας τροφοδοτείται από τις αναστοχαστικές σχέσεις μεταξύ των προαναφερόμενων επιπέδων. Από τη μία μεριά η εξειδικευμένη διδακτική θεωρία είναι το αποτέλεσμα μίας γενίκευσης των τυπικών διδακτικών θεωριών, ενώ από την

άλλη η ίδια αυτή θεωρία θα επηρεάσει το σχέδιο της σειράς μαθημάτων και μοιραία και τις "**τοπικές θεωρίες**".

Σε κάποιο βαθμό, η αναπτυξιακή έρευνα έχει τα χαρακτηριστικά που διακατέχουν ένα ερευνητικό πρόγραμμα. Η προσδοκώμενη δομή και ανάπτυξη της εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας πραγματοποιείται μέσω σειράς ερευνητικών προγραμμάτων. Ως συνέπεια κάθε αυτόνομο ερευνητικό πρόγραμμα θα έχει περιορισμένη αξία. Αυτό σημαίνει ότι αυτού του είδους τα προγράμματα αποκτούν αξία από την ένταξή τους στη συνολική δομή ενός ερευνητικού προγράμματος. Εξετάζοντας τη θεωρητική συνεισφορά κάθε αυτόνομου ερευνητικού προγράμματος συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι ελάχιστη και αν ξεχάσουμε και την συμμετοχή τους στη δομή της θεωρίας τότε δεν μπορεί να θεωρηθεί περισσότερο από ένα πρόγραμμα καλά οργανωμένο. Παρόλα αυτά η πρόοδος ενός ερευνητικού προγράμματος εξαρτάται από τη διεκπεραίωση μικρότερων ερευνητικών προγραμμάτων.

Στις επόμενες παραγράφους θα συζητηθεί το σχέδιο ενός μικρού ερευνητικού προγράμματος και θα γίνει μετάθεση του ενδιαφέροντος σε μία μακροχρόνια προοπτική. Το σχέδιο ενός αναπτυξιακού ερευνητικού προγράμματος μπορεί να διαχωριστεί σε δύο προτάσεις:

1η Πρόταση, είναι ένα προκαταρκτικό σχέδιο.

2η Πρόταση, είναι η επεξεργασία μίας σειράς μαθημάτων που σχεδιάστηκαν στην 1η πρόταση.

Το αποτέλεσμα ενός τέτοιου ερευνητικού προγράμματος δεν θα είναι τελικό. Νέες εκδοχές της ίδιας σειράς μαθημάτων θα δουλευτούν σε νέα προγράμματα. Νέα συμπεράσματα μπορεί να διαμορφωθούν στην ανάπτυξη εναλλακτικών σειρών διδασκαλίας. Εξαιτίας αυτών το ερευνητικό πρόγραμμα περιλαμβάνει μία ευρεία σύνθεση ερευνητικών προγραμμάτων διαφόρων θεμάτων με αποτέλεσμα να χαρακτηρίζεται ως εξελικτικό και όχι ως συσσωρευτικό.

3.3 Προκαταρκτικό σχέδιο

Προτού ένα πείραμα έρευνας πραγματικά αρχίσει, ο ερευνητής θα πρέπει να κάνει μία ανάλυση της κατάστασης βασισμένος στην εξής ερώτηση: **Γιατί τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών δεν είναι επιτυχημένα ;**

Στους δεκαδικούς, η έλλειψη κατανόησης έρχεται στην επιφάνεια σε προβλήματα που αφορούν την τοποθέτηση του δεκαδικού στον άξονα των πραγματικών, την αντίληψη του μεγέθους ενός δεκαδικού αριθμού, την ικανότητα πραγματοποίησης πράξεων. Επίσης, γνωστά είναι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο θέμα της κατανόησης του πολλαπλασιασμού με αριθμό μικρότερο της μονάδας, που δίνει μικρότερο αποτέλεσμα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την επικρατούσα άποψη, ότι ο πολλαπλασιασμός μεγεθύνει (**Bell, Swan & Taylor 1981**). Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση φυσικά αναζητά την κατανόηση.

Μια τέτοιου είδους ανάλυση κάνει ορατές τις απαιτήσεις που αναμένεται να συναντήσει η καινούργια σειρά μαθημάτων. **Το αναμενόμενο είναι ότι η καινούργια σειρά μαθημάτων θα κάνει προσθήκες εκεί όπου οι προηγούμενες σειρές είχαν παραμελήσει να πραγματοποιήσουν**. Παράλληλα με αυτή την ανάλυση, θα πρέπει να αναπτυχθεί μία γενική εικόνα για τη νέα σειρά μαθημάτων προτού ξεκινήσουν τα πραγματικά πειράματα. Επίσης, ως αρχή θα πρέπει αυτή η γενική εικόνα να είναι ξεκάθαρη και λογικά αποδεκτή. Γενικώς η ανάλυση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και το προκαταρκτικό σχέδιο της σειράς μαθημάτων βασίζονται στην κεκτημένη γνώση του ερευνητή. **Πέρα από αυτό, ο ερευνητής θα χρησιμοποιήσει τη θεωρία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης εφαρμόζοντας τις κεντρικές αρχές της μέσω μεθόδων μάθησης, που εμπεριέχουν αιτιολόγηση και βασίζονται στην εμπειρία**.

Πραγματοποιώντας τα παραπάνω, η "**theory-guided bricolage**" δεν θα πρέπει να είναι περιορισμένη σε επιλογές και υιοθέτηση διαθέσιμων διδακτικών δραστηριοτήτων όπως αυτή συνηθίζει να κάνει.

3.3.1 Στρατηγικές που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό

Η εξειδικευμένη διδακτική θεωρία, όπως ορίστηκε προηγούμενα μπορεί να διατυπωθεί με άξονα τις στρατηγικές που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό. Αυτές οι στρατηγικές περιέχουν την αρχή της επανανακάλυψης, τη διδακτική φαινομενολογία και τα μεσολαβούμενα (αναδυόμενα) μοντέλα.

Η αρχή της επανανακάλυψης (Freudenthal 1973) προσφέρει την εξής συμβουλή: «Σκεφτείτε τον τρόπο που θα σας οδηγήσει να το καταλάβετε από μόνοι σας ».

Αυτή είναι βασικά η μέθοδος του Σωκράτη, παρόλο που ο ρόλος του μαθητή στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση είναι πιο ενεργός όπως ο όρος επανανακάλυψη προδιαθέτει, η αρχική διαδικασία ανακάλυψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο. **Μια ανάλυση της ιστορίας των μαθηματικών, θα αποφέρει στον ερευνητή πολλές πληροφορίες, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον σχεδιασμό της σειράς μαθημάτων**. **Όμως υπάρχει ακόμη μία προσβάσιμη πορεία. Η αναπτυξιακή έρευνα υποδεικνύει ότι οι στρατηγικές επίλυσης που αυθόρμητα διατυπώνονται από τα παιδιά, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ώστε να βάλλουν τον ερευνητή στα ίχνη μίας πιθανής επανανακαλυπτικής πορείας** (**Streefland 1985 ; Gravemeijer 1991**). Αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιου είδους πορεία απαιτεί τον σχεδιασμό μιας μακράς διάρκειας μαθησιακής διαδικασίας. Το επίκεντρο του ενδιαφέροντος δεν θα πρέπει να είναι μία κυρίαρχη ακολουθία μικρών ενοτήτων που αφορούν το κεντρικό θέμα, όπως είναι η μαθησιακή ιεραρχία του **Gagne**, αλλά μία κατευθυνόμενη επαναφεύρεση που απαιτεί μία βαθμιαία επεξεργασία και βαθιά γνώση του κεντρικού θέματος.

Μία τέτοια προσέγγιση είναι σε κάποιο βαθμό παρόμοια με αυτή που προτείνει ο **Greeno**, για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, αλλά σε κάθε περίπτωση η προηγούμενη είναι πιο άμεση.

Μπορούμε να πάρουμε τους δεκαδικούς ξανά ως παράδειγμα. Ίσως θα αποτελούσε υπερβολή το γεγονός να απαιτήσουμε από τους μαθητές να επανεφεύρουν δεκαδικά κλάσματα με τον τρόπο που ακολούθησε ο **Stevin** αρχικά. Παρόλα αυτά, ίσως θα πρέπει να επιτρέψουμε στους μαθητές να πειραματιστούν με αυτή τη διαδικασία εφεύρεσης. Το πιο εξέχον χαρακτηριστικό των δεκαδικών αριθμών είναι η ομοιότητά τους με το δεκαδικό σύστημα τοποθέτησης των ακεραίων. Όμως υπάρχει ένα ακόμα υποθάλπτον χαρακτηριστικό: η ιδέα των επαναλαμβανόμενων βελτιώσεων. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο στην μέτρηση του μήκους όπου η ακρίβεια μπορεί να βελτιωθεί ατελείωτα εισάγοντας μικρότερες μονάδες μέτρησης. Όπως για παράδειγμα χωρίζοντας τη μικρότερη μονάδα μέτρησης σε 10 τμήματα. Αυτή η ιδέα της βελτίωσης χωρίς όρια με τη βοήθεια επαναλαμβανόμενων διαιρέσεων ήταν ήδη γνωστή στους αρχαίους Αιγυπτίους, παρόλο που αυτοί δούλευαν με την επαναλαμβανόμενη δια του 2 διαίρεση. Το παραπάνω μοιάζει να ανταποκρίνεται στην φυσική προσέγγιση των παιδιών, που όταν βρίσκονται στην ανάγκη μικρότερης μονάδας μέτρησης για υπολογισμό του μήκους τείνουν να εισάγουν τα μισά και "τα μισά των μισών". Γι' αυτό το λόγο η μέτρηση του μήκους μπορεί να είναι ένα καλό

πλαίσιο για να αναπτυχθεί η ιδέα της επαναλαμβανόμενης δια του 2 διαίρεσης. Η ιδέα αυτή μπορεί να συγκριθεί με τη προσέγγιση που γίνεται στους δεκαδικούς και αφορά την επαναλαμβανόμενης διαδικασίας του "χωρίζω κάτι σε συνεχώς μικρότερα διαστήματα".

Η διδακτική φαινομενολογία (Freudenthal 1983) υποδεικνύει τις εφαρμογές ως τις πιθανές πηγές πληροφοριών για τον ερευνητή. Αν ακολουθήσουμε την ιδέα, ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν από την αυξανόμενη μαθηματικοποίηση των καθ' αυτού λύσεων των πρακτικών προβλημάτων, τότε θα μπορέσουμε να καταλήξουμε στο γεγονός ότι η αφετηρία για την διαδικασία επανανακάλυψης μπορεί να ανακαλυφθεί στις πρόσφατες εφαρμογές. Γι' αυτό το λόγο, ο ερευνητής θα πρέπει να αναλύσει τις συνθήκες των εφαρμογών ώστε να αποκτήσει άποψη για τη διδακτική τους χρήση στη διαδικασία της επανανακάλυψης (**Streefland 1993**). **Επίσης, μία διδακτική φαινομενολογική ανάλυση δίνει μία πλήρη εικόνα του πεδίου των εφαρμογών το οποίο πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν κατά την ανάπτυξη μιας σειράς μαθημάτων.**

Όσον αφορά τους δεκαδικούς, πολλές σημαντικές φαινομενολογικές απόψεις έχουν ήδη αναφερθεί, όπως : η σχέση που υπάρχει με τη μέτρηση και ιδιαιτέρως η υπάρχουσα σχέση με τα χρήματα. Όταν κάποιος κάνει υπολογισμούς με τις τιμές προϊόντων, εύκολα μπορεί να μεταπηδήσει από τα δολάρια στα σενς και αντίστροφα καθώς αποφεύγει τυπικές αριθμητικές πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Μία φαινομενολογική ανάλυση δείχνει την δυναμική που έχει η έμμεση στρατηγική της αλλαγής της μονάδας μέτρησης. Επιπλέον η αναφορά της σχέσης που υπάρχει με τα κλάσματα, ως μέτρο σύγκρισης, έρχεται στην επιφάνεια. Ακόμη, άλλα διδακτικά θέματα, όπως η επαναλαμβανόμενη δια του 2 διαίρεση και το μοντέλο της μέτρησης του μήκους, αποκαλύπτονται μέσω μιας τέτοιου είδους ανάλυσης.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που γίνεται ορατό είναι και η υποστήριξη που μπορεί ένα πλαίσιο αναφοράς κάποιου θέματος να προσφέρει. Όταν πολλαπλασιάζουμε για παράδειγμα 1.20 * 0,75 στο πλαίσιο που αφορά τις τιμές και τα βάρη, οι μαθητές μπορούν από την πλευρά τους να χρησιμοποιήσουν όλα τα είδη μη επίσημων στρατηγικών που βασίζονται στην προσωπική τους κατανόηση για το πρόβλημα. Ξεκινώντας με συγκεκριμένου είδους προβλήματα και διατηρώντας την σύνδεση μεταξύ αυτών και των πιο τυπικών διαδικασιών που αναπτύσσονται αργότερα, ίσως βοηθήσουμε με αυτόν τον τρόπο τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν το τι συμβαίνει όταν λύνεις πιο τυπικά προβλήματα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η φαινομενολογική

εξερεύνηση και η έρευνα για μη επίσημες στρατηγικές, είναι δύο πράγματα που μπορούν να συνδεθούν. Παρουσιάζοντας προβλήματα εφαρμογών στους μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν μάθει ακόμη τις συγκεκριμένες διαδικασίες ή τις ιδέες για τον τρόπο λύσης τους, βοηθάμε την ανάπτυξη μιας παραγωγικής διαδικασίας παρατήρησης των μη επίσημων στρατηγικών τους. Κάποιος θα μπορούσε να ερευνήσει για παράδειγμα, τον τρόπο που τα παιδιά λύνουν ένα πρόβλημα το οποίο απαιτεί καθορισμένη μονάδα μέτρησης με την προϋπόθεση ότι αυτά δεν έχουν μάθει το δεκαδικό σύστημα.

Διαμεσολαβητικά ή αναδυόμενα μοντέλα αναπτύσσονται στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση έτσι ώστε να συνδέσουν την επίσημη με την ανεπίσημη γνώση. Όμως ο σκοπός τους δεν περιορίζεται μόνο σε αυτό. Το ιδανικό θα ήταν τα μοντέλα να αναδύονται μέσα από τις δραστηριότητες των μαθητών. Αυτό θα έχει σαν επακόλουθο τα διαμεσολαβητικά μοντέλα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως καταλύτες σε μία αναπτυξιακή διαδικασία κατά την οποία η επίσημη γνώση να αποτελεί εξέλιξη της ανεπίσημης γνώσης. Γι' αυτό το λόγο ο ερευνητής θα πρέπει να αναζητήσει μεθόδους περιγραφής των ανεπίσημων στρατηγικών που ακολουθούν οι μαθητές, έτσι ώστε τα μοντέλα, τα διαγράμματα και οι τρόποι συμβολισμού να βελτιωθούν για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στη γενίκευση και στην τυποποίηση των στρατηγικών και της ανεπίσημης γνώσης.

Σύμφωνα με αυτό το σχέδιο, τα μοντέλα συνδέονται αρχικά με το πλαίσιο αναφοράς - context του κάθε θέματος. Αυτό σημαίνει ότι τα μοντέλα περιγράφουν (contextual problems) συναφή προβλήματα που αναφέρονται στο περιεχόμενο. Η αναφορά στην κατάσταση του περιεχομένου τους προσδίδει νόημα. Στη συνέχεια λύνοντας μια ποικιλία παρόμοιων contextual problems θα προωθηθούμε προς τη μεριά της γενίκευσης και της ανεξαρτησίας του μοντέλου. Αυτό θα οδηγήσει σε μία σίγουρη αντικειμενοποίηση (reification), έτσι ώστε το ίδιο μοντέλο να μπορέσει να λειτουργήσει ως βάση για μία περαιτέρω τυποποίηση. Με αυτό τον τρόπο, η διαδικασία επανανακάλυψης δομείται σε τέσσερα επίπεδα, τα οποία δεν έχουν να κάνουν μόνο με πραγματικά μοντέλα αλλά και με ιδέες και στρατηγικές. Με άλλα λόγια ο όρος "μοντέλο" δεν πρέπει να λαμβάνεται και τόσο τοις μετρητοίς. Μπορεί να αφορά μία πρότυπη κατάσταση, ένα σχέδιο, μία περιγραφή ή ακόμα κι έναν τρόπο συμβολισμού.

Τα τέσσερα επίπεδα μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

1. Το επίπεδο της κατάστασης, όπου εξειδικευμένη επικρατούσα γνώση και στρατηγικές χρησιμοποιούνται μέσα στο περικείμενο της κατάστασης.
2. Το επίπεδο αναφοράς, όπου μοντέλα και στρατηγικές αναφέρονται στην κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα.
3. Το γενικό επίπεδο, όπου το μαθηματικό ενδιαφέρον για τις στρατηγικές κυριαρχεί έναντι της αναφοράς στο περιεχόμενο.
4. Το επίπεδο των τυπικών μαθηματικών, όπου η εργασία πραγματοποιείται με συμβατικές διαδικασίες και συμβολισμούς.

σχήμα 2 Επίπεδα

Το συγκεκριμένο επίπεδο ίσως απαιτήσει κάποια διευκρίνηση και αυτό διότι η πραγματικότητα εκτός σχολείου μετά βίας μπορεί να μεταφερθεί εντός της τάξης. Επιπλέον η πραγματικότητα ενός ρεαλιστικού περιεχομένου δεν θα έπρεπε να είναι συνδεδεμένη με την πραγματικότητα της καθημερινότητας που υπάρχει εκτός σχολείου. **Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση έχει να κάνει με καταστάσεις που είναι εμπειρικά πραγματικές για τους μαθητές. Αυτές θα μπορούσαν να είναι καθημερινές καταστάσεις, αλλά θα μπορούσαν να είναι φανταστικές καταστάσεις, όπου οι μαθητές θα δέχονταν ως υπαρκτές. Τέλος το πιο σημαντικό θα μπορούσαν να είναι τα μαθηματικά τα οποία είναι εμπειρικά πραγματικά.** (**Davis & Hersh 1981**). Ο σκοπός της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι οι μαθητές να αναπτύξουν τα μαθηματικά από μόνοι τους και μέσω αυτής της διαδικασίας να κατανοήσουν την έννοια της αναπτυσσόμενες κοινής λογικής (**Freudenthal 1991**)

Κοιτώντας ξανά τους δεκαδικούς, γίνεται φανερό ότι ο αριθμημένος άξονας είναι ένα σημαντικό μοντέλο για τη ρεαλιστική προσέγγιση. Άλλες διδακτικές προσεγγίσεις

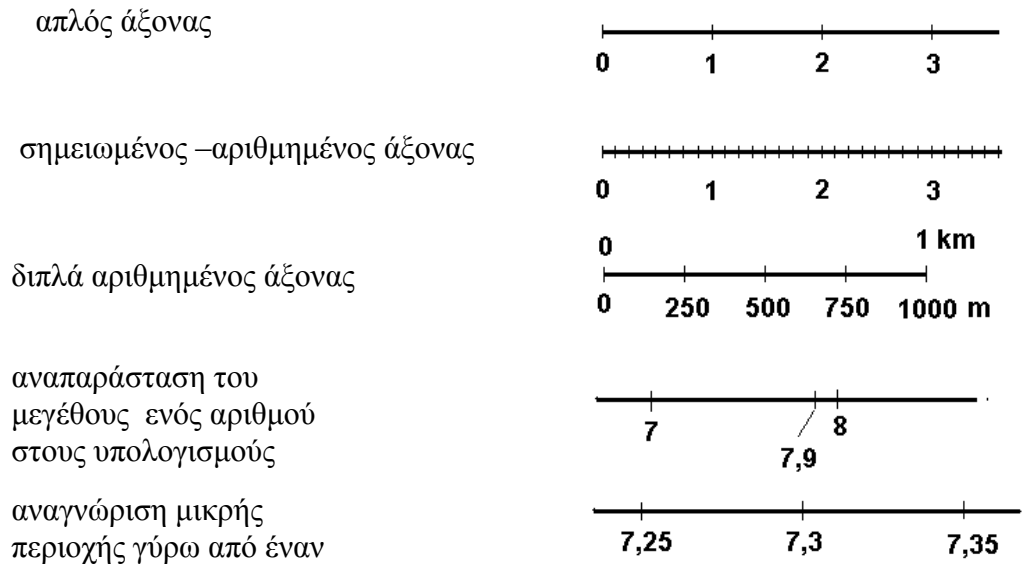
συχνά χρησιμοποιούν το χωρισμό σε δέκα κομμάτια για να απεικονίσουν τους δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, τα χωρίσματα – τεμάχια χρησιμοποιούνται για να απεικονίσουν τους δεκαδικούς αριθμούς.

Οι ερευνητές χρησιμοποιούν επιτηδευμένους κατευθυνόμενους τρόπους ώστε να ξεπεράσουν την έλλειψη κατανόηση των παιδιών προς τους δεκαδικούς αριθμούς. **Στην ρεαλιστική προσέγγιση, η αφετηρία είναι η γνώση των μαθητών.** Στα όσα αφορούν την μέτρηση, ο άξονας εισάγεται με έναν φυσικό τρόπο. Αρκετοί τρόποι που οδηγούν στη βελτίωση μπορούν να ακολουθηθούν και ιδιαίτερα αυτοί της επαναλαμβανόμενης δια του 2 διαίρεσης και της επαναλαμβανόμενης δια του 10 διαίρεσης. Η διαδικασία εναλλαγής των μονάδων μέτρησης απεικονίζεται με σημειωμένες μικρές γραμμές πάνω στον άξονα. Αργότερα αυτός ο άξονας που τώρα είναι αριθμημένος, σημειωμένος και χωρισμένος με μικρές γραμμές, θα αποτελέσει ένα μοντέλο για την ένδειξη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Στη συνέχεια αυτός ο σημειωμένος –αριθμημένος άξονας μπορεί να αντικατασταθεί από μία διπλά αριθμημένη ευθεία που δηλώνει δύο κλίμακες:

μια που θα περιέχει τις μεγάλες μονάδες μέτρησης

και μία άλλη με τις μικρότερες μονάδες μέτρησης.

Αυτό καθιστά ικανούς τους μαθητές ώστε να μεταπηδούν από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες μονάδες μέτρησης και αντίστροφα. Επίσης συμβάλλει στην αναπαράσταση του μεγέθους ενός αριθμού, στους υπολογισμούς καθώς στην αναγνώριση μιας μικρής περιοχής γύρω από έναν αριθμό (σχήμα 3).



σχήμα 3

3.3.2 Επεξεργασία μιας σειράς μαθημάτων

Το γεγονός, ότι ο προκαταρκτικός σχεδιασμός μιας σειράς μαθημάτων βασίζεται στη λεπτομέρεια, είναι καλά οργανωμένος και θεμελιωμένος στη γνώση, δεν σημαίνει ότι η επεξεργασία του στη τάξη πλεονάζει. Η καλύτερη ανάπτυξη μιας σειράς μαθημάτων δύναται να επιτευχθεί μόνο αν συνδέεται με πειράματα στο χώρο της τάξης. Επιπλέον, ο συνολικός σχεδιασμός έχει τον χαρακτήρα της συλλογής υποθέσεων, οι οποίες αξιολογούνται σε ένα εκπαιδευτικό πείραμα.

Στον πειραματισμό που πραγματοποιείται μέσα στη τάξη, ολόκληρος ο προκαταρκτικός σχεδιασμός επεκτείνεται και κατεργάζεται μέσα από μία κυκλική διαδικασία σχεδιασμού και πειράματος. Ο **Freudenthal** (**1988**) μίλησε όσον αφορά το προηγούμενο πλαίσιο εργασίας για "**πειράματα σκέψης**" και "**εκπαιδευτικό πείραμα**". Κατά τη διάρκεια σχεδιασμού μιας διδακτικής δραστηριότητας, ο ερευνητής εκτελεί ένα πείραμα σκέψης στο οποίο οραματίζεται τον τρόπο που η διδασκαλία – μάθηση θα προχωρήσει. Το επόμενο βήμα είναι αυτή η διδακτική δραστηριότητα να δοκιμαστεί στην τάξη. Σε αυτό το σημείο, ο ερευνητής ψάχνει για σημάδια που επιβεβαιώνουν ή απορρίπτουν τις απαιτήσεις του πειράματος σκέψης που έκανε. Παράλληλα με αυτά, ο ερευνητής δραστηριοποιείται για νέες πιθανές εκδοχές.

Το σύνολο των πληροφοριών που προέρχεται από τα παραπάνω εμπειρικά δεδομένα για τα νέα πειράματα, σκέψεις, πυροδοτεί την κυκλική διαδικασία της αξιολόγησης και "**της σοβαρής σκέψης**". Οι μικροί κύκλοι οδηγούν σε αυτό που θα μπορούσε να λέγεται "**προς τα εμπρός τροφοδοσία**". Οποτεδήποτε η ανάπτυξη ενός εκπαιδευτικού υλικού και της αξιολόγησής του μέσα στην τάξη, πραγματοποιείται πολύ γρήγορα, το πιθανό είναι αυτό να φανεί αμέσως από τις εμπειρίες όλης της τάξης. Καθώς το εκπαιδευτικό υλικό αναπτύσσεται, θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν προηγούμενες επιτυχίες και αποτυχίες.

Η κεντρική δραστηριότητα που καθοδηγεί τη διαδικασία "bricolage" για ένα μικρό επίπεδο είναι μία μικρού διδακτικού επιπέδου σκέψη πάνω στην μαθησιακή διαδικασία. Τα πειράματα σκέψης πρόκειται να εκτελεστούν στα πλαίσια των "micro theories" (είναι η αναπτυξιακή θεωρία που υπάρχει στο επίπεδο των διδακτικών δραστηριοτήτων) που αφορούν το μηχανισμό των εφευρούμενων διδακτικών

δραστηριοτήτων. Ο όρος “διδακτική θεωρία” θα μπορούσε να δώσει την επίπτωση, ότι η εκπαίδευση λαμβάνεται υπ’ όψιν από την μεριά της παροχής και μόνο. Τίποτε δεν μπορεί να απέχει από την αλήθεια. Το βασικότερο σημείο της εκπαίδευσης είναι οι προσωπικές νοητικές ικανότητες του μαθητή. Τέτοια πράγματα παίζουν κεντρικό ρόλο στις βασικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Γι’ αυτό το ρόλο οι “micro theories” θα πρέπει να έρθουν στο προσκήνιο διότι είναι εκείνες, οι οποίες περιγράφουν τον τρόπο που οι διδακτικές δραστηριότητες αναδεικνύουν τις προβλεπόμενες νοητικές ικανότητες των μαθητών καθώς και πως αυτές οι νοητικές ικανότητες συνεισφέρουν στην υποτιθέμενη ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας.

3.3.3 Κριτήρια

Οι προαναφερθείσες “στρατηγικές” σχεδιασμού υπονοούμενα δηλώνουν τα κριτήρια που θα χρησιμοποιηθούν από τους ερευνητές, για να κάνουν εκτίμηση της κατάστασης καθώς και να φέρουν εις πέρας βελτιώσεις που θα λειτουργήσουν ως ένα προκαταρκτικό εφόδιο για τη σειρά των μαθημάτων, που βασίζεται σε απαιτήσεις προερχόμενες από τις “στρατηγικές”. Στη συνέχεια θα εξετασθούν λεπτομερώς αυτά τα κριτήρια.

Η αρχή της επανανακάλυψης υποθέτει ότι οι προσωπικές λύσεις των μαθητών θα καλλιεργήσουν το απαιτούμενο έδαφος. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις των μαθητών θα εκφράσουν μία ποικιλία από επίπεδα λύσεων, τα οποία θα παρέχουν με τη σειρά τους ερεθίσματα που θα οδηγήσουν σε αναστοχασμό για το μαθησιακό μονοπάτι που θα πρέπει να ακολουθηθεί.

σχήμα 4 **άξονας διπλής κλίμακας**

Για παράδειγμα οι μαθητές υποχρεώνονται να βάλλουν σε μία σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τις ακόλουθες ποσότητες σε λίτρα: 0,75 lt, 0.8lt, 0.99lt και 0.109 lt. Αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί σε ένα επίσημο επίπεδο, όπως με το να συγκρίνουν το πρώτο δεκαδικό ψηφίο κάθε αριθμού (1<7<8<9) ή με το να γράψουν κάθε αριθμό με τρία δεκαδικά ψηφία (0,109<0,750<0,800<0,990). Όμως ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει έναν αριθμημένο άξονα. Αυτός ο αριθμημένος άξονας μπορεί να είναι χωρισμένος ή ακόμα θα μπορούσε να έχει μία διπλή κλίμακα που θα παρουσιάζει τα λίτρα (lt) και τα χιλιοστόλιτρα (mlt) (σχήμα 4). Στην τελευταία περίπτωση, ο μαθητής μπορεί να γράψει όλες τις ποσότητες σε χιλιοστόλιτρα ώστε να ξεφορτωθεί τον δεκαδικό τρόπο γραφής. Αντιστρόφως αυτές οι διαδικασίες επίλυσης σηματοδοτούν μία πιθανή μέθοδο μάθησης.

Αυτή η απαίτηση για ποικιλία από επίπεδα λύσεων δεν είναι μόνο σημαντική, γιατί αποτελεί επίσημο χαρακτηριστικό της ιδέες της επανανακάλυψης, αλλά η κατευθυνόμενη επανανακάλυψη υποθέτει ότι με τον τρόπο αυτό ο δάσκαλος θα βρει έναν τρόπο ενεργοποίησης για να συμβιβάσει την καθοδήγηση με την αυτοεξαρτούμενη εφεύρεση. Άλλωστε, μία παραγωγική συζήτηση στην τάξη μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν υπάρχει μία διασπορά στις λύσεις των μαθητών καθώς και στα επίπεδα των λύσεων. Εάν όλοι οι μαθητές χρησιμοποιούν την ίδια διαδικασία επίλυσης τότε δεν μπορεί να υπάρξει συζήτηση στην τάξη. Το ίδιο συμβαίνει αν όλες οι λύσεις βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. **Με άλλα λόγια, η ύπαρξη διαθέσιμων και ικανών διδακτικών δραστηριοτήτων είναι απαραίτητη για την παραγωγική διαδικασία της διδασκαλίας - μάθησης κατά την οποία οι μαθητές μπορούν να έχουν μία ουσιαστική εποικοδομητική συμμετοχή.**

Η διδακτική φαινομενολογία απαιτεί από τον ερευνητή να ψάξει για κατάλληλα "context problems". **Η καταλληλότητα των "context problems" καθίσταται τότε κριτήριο επιλογής.** Η καταλληλότητα λοιπόν έχει να κάνει αρχικά με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ του "context" (του περιεχομένου) και των αυθόρμητων στρατηγικών επίλυσης των μαθητών. Οι ερωτήσεις που προκύπτουν είναι:

- ✓ Κάνουν πράγματι οι μαθητές χρήση των πληροφοριών που προσφέρει ένα "context" ;
- ✓ Εφαρμόζουν οι μαθητές την δική τους εξειδικευμένη γνώση ;
- ✓ Μπορούν οι λύσεις που προτείνουν οι μαθητές να προσφέρουν δυνατότητες για "κάθετη" μαθηματικοποίηση ;

Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα μιας κατάστασης που αναμένεται να προσφέρει στους μαθητές στοιχεία στα οποία να μπορούν να βασιστούν.
Το ελβετικό τυρί κοστίζει $ 1,2 για 1 lb (1 pound=0.454 kg)
Πόσο κοστίζουν τα 0,75 lb;

Οι μαθητές μπορεί για παράδειγμα να μεταφράσουν τα $1,2 ως τέσσερα τέταρτα και τέσσερα nickels(=5 cents). Τρία τέταρτα από αυτό θα μπορούσε να είναι τρία τέταρτα και τρία nickels. Άλλες στρατηγικές ίσως θα χρησιμοποιούσαν διπλασιασμό ή δια του 2 διαίρεση ενώ θα είχαν υπ' όψιν ότι οι τιμές των προϊόντων είναι ανάλογες με την ποσότητα. Οι μαθητές ίσως συνειδητοποιήσουν και πουν ότι 0,75 lb είναι το μισό του 1,5 lb και γι' αυτό το λόγο η τιμή είναι το μισό από $(1,20 + 0,60) (**Gravemeijer 1992**).

Μία άλλη όψη της φαινομενολογίας εμπεριέχει την ικανότητα εφαρμογής. Σε πρώτη φάση οι λύσεις θα είναι τοπικές. Κάθε πρόβλημα προσεγγίζεται ως ένα νέο πρόβλημα και οι λύσεις θα περιέχουν ξεκάθαρα συγκεκριμένα στοιχεία μέσα από το περιεχόμενο. Μετά από λίγο όμως, πρέπει να αρχίσει να επικρατεί κάτι το κοινό και να αναπτύσσεται ένα πιο ευρύ εφαρμόσιμο κομμάτι των μαθηματικών. Ένα σημαντικό κριτήριο για τον ερευνητή αποτελεί το ενδεχόμενο η γνώση, που αναπτύχθηκε με τον παραπάνω τρόπο να μπορέσει να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις. **Όπως ειπώθηκε προηγούμενα, η διδακτική φαινομενολογία σκιαγραφεί το πεδίο εφαρμογής που θα πρέπει να θεωρηθεί.**

Το επίπεδο της δομής και ο σχετικός ρόλος που έχουν τα αναδυόμενα (μεσολαβητικά) μοντέλα, παρέχουν επίσης τα απαιτούμενα κριτήρια. Τα κριτήρια για τα αναδυόμενα μοντέλα παίρνουν την μορφή:

της "φυσικότητας",

της "κάθετη δύναμης"

και της "ευρύτητας της εφαρμογής".

Χαρακτηριστικό της ρεαλιστικής μαθηματικής προσέγγισης αποτελεί το γεγονός ότι τα μοντέλα πηγάζουν από τις προσωπικές δραστηριότητες των μαθητών. Σε αυτό οφείλεται η ανάγκη ύπαρξης της "**φυσικότητας**". Το ιδανικό θα ήταν οι μαθητές να (επαν)εφευρίσκουν τα μοντέλα από μόνοι τους.

Στις περιπτώσεις όπου ένα μοντέλο παρουσιάζεται, η απαίτηση είναι να ταιριάζει το μοντέλο με τις ανεπίσημες στρατηγικές που διατυπώνονται από τους μαθητές. Η ιδέα είναι, ότι το μοντέλο προσφέρει την ευκαιρία στους μαθητές να σταθούν πιστοί στις προσωπικές τους διαδικασίες επίλυσης. **Με άλλα λόγια, οι μαθητές δεν θα πρέπει να αλλάξουν τις προσωπικές τους διαδικασίες επίλυσης για χάρη του μοντέλου.** Το μοντέλο είναι εκείνο που πρέπει να προσαρμοστεί στις διαδικασίες σκέψης των μαθητών. (**Gravemeijer 1993**). Αυτό θα μπορούσε να γίνεται εμφανές μέσω άλλων πραγμάτων, που θα χρησιμοποιούν ευέλικτα τα μοντέλα.

Για την κάθετη δύναμη (vertical power) ίσως κριθεί αναγκαία η παρουσίασή της στην περίπτωση που οι μαθητές αυθόρμητα ελαττώνουν και κάνουν κακό προγραμματισμό στον τρόπο εργασίας τους. Η αλλαγή επιπέδου από το "αναφοράς" στο γενικό που παρουσιάζεται εδώ είναι σημαντική. **Αυτό γίνεται εμφανές όταν οι μαθητές καταστρέφουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της μοναδικής δομής που έχει ένα πρόβλημα και της μαθηματικής δομής που έχει η διαδικασία επίλυσής του**. Μία άλλη ένδειξη αλλαγής επιπέδων παρουσιάζεται, όταν οι μαθητές αναφέρουν από μόνοι τους το ζήτημα καταλληλότητας μιας προσέγγισης.

Αυτή η αλλαγή μπορεί να έρθει στην επιφάνεια καθώς οι μαθητές ασχολούνται με ένα μοντέλο. Με τους δεκαδικούς, ο αριθμημένος άξονας αρχικά θεωρήθηκε ως ένας γνώμονας με συγκεκριμένα και ακριβή χωρίσματα. Μια κατακόρυφη αλλαγή θα μπορούσε να σημαίνει ότι ο αριθμημένος άξονας γίνεται ένα μοντέλο σκέψης. Αυτό θα μπορούσε να φανερωθεί μέσω των σχεδίων των μαθητών, όταν δεν θα χρειάζονταν άλλο τον ακριβή και ολοκληρωμένο χωρισμό σε επιμέρους τμήματα.

Το ζήτημα της ικανότητας εφαρμογής είχε γίνει ήδη γνωστό από τη διδακτική φαινομενολογία. Όσον αφορά τα μοντέλα, το κριτήριο "**της ευρύτητας της εφαρμογής**" απαιτεί από τους μαθητές να είναι ικανοί να ασχοληθούν επιτυχώς με ένα μοντέλο όταν έχουν να κάνουν με μία ποικιλία από εφαρμογές του.

Η άποψη για τα κριτήρια είναι φυσικά ανολοκλήρωτη με την έννοια ότι δεν την έχουμε εξαντλήσει. Επίσης, οι κατηγορίες δεν διαφέρουν και πολύ μεταξύ τους. Ακόμη προσφέρεται μία αντιπροσωπευτική εικόνα των κριτηρίων που χρησιμοποιούνται από τους αναπτυξιακούς ερευνητές στο τομέα της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Ολοκληρώνοντας θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτά τα κριτήρια δεν αποτελούν μόνο προσδοκία των πειραμάτων της ακμής αλλά επίσης αποτελούν πηγή γνώσης για να ανακαλυφθούν οι τρόποι προσέγγισης που ενδόμυχα ακολουθούν οι μαθητές.

4η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρόλος των context problems συνηθιζόταν να είναι περιορισμένος σε εφαρμογές, που απευθύνονταν προς τους μαθητές στο τελείωμα της μαθησιακής διαδικασίας, ως ένα είδος επιπρόσθετης δουλειάς. Εδώ τα context problems έχουν ένα πιο κεντρικό ρόλο. Υποστηρίζεται η χρήση τους από το γεγονός ότι έχει διαγνωστεί μία έλλειψη στη χρήση των όσων μαθαίνονται και επίσης από το γεγονός ότι τα χαρακτηρίζει μία ανεξακρίβωτη δύναμη ώθησης. Τα context problems έχουν έναν ρόλο ο οποίος καλύπτει μεγάλη ποικιλία θεμάτων της Ολλανδικής προσέγγισης που είναι γνωστή ως ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME). Στη RME τα παραπάνω προβλήματα έχουν σημαντικό ρόλο εξ' αρχής. Έχουν οριστεί ως προβλήματα που θέμα έχουν μία κατάσταση εμπειρικά γνώριμη προς τους μαθητές. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ακόμη κι ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα context problem. Τα μαθηματικά που παρέχονται μέσω αυτών προσφέρουν ένα context (πλαίσιο αναφοράς) που θεωρητικά μπορούμε να πούμε ότι είναι εμπειρικά γνωστό για τους μαθητές.

Το γεγονός είναι, ότι τα context problems αποτελούν την αφετηρία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης διότι λειτουργούν ως σημεία αναφοράς της επανανακάλυψης των μαθηματικών από τους ίδιους τους μαθητές. Επιπροσθέτως, η κατευθυνόμενη επανανακάλυψη προσφέρει μία διέξοδο στο γενικό δίλημμα που επικρατεί και αφορά τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ της τυπικής και της άτυπης γνώσης των μαθηματικών. Αυτό το θέμα βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος της παρούσας θεματικής ενότητας, αναφέροντας ότι:

«**Πώς θα βοηθήσουμε τους μαθητές ώστε να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις των τυπικών μαθηματικών** ; »

θα δανειστούμε ένα θέμα διαφορικού λογισμού ως παράδειγμα, για να δείξουμε ότι κατά την επανανακαλυπτική διαδικασία, οι ρόλοι των context problems, του συμβολισμού και της μοντελοποίησης (τυποποίησης) είναι συνυφασμένοι μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα, χτίζουμε πάνω σε πράγματα που έχουν γίνει για τον συμβολισμό και την μοντελοποίηση και αφορούσαν πρωταρχικού επιπέδου μαθηματικά (**Streefland ; 1985; Treffers 1991 ; Gravemeijer 1994,1999**). Αυτό που προσπαθείται είναι να παρουσιαστεί ο σκελετός ο οποίος είχε αναπτυχθεί για τα

πρωταρχικού επιπέδου μαθηματικά, ως χρήσιμος και για αρκετά προχωρημένα θέματα των μαθηματικών, όπως είναι ο διαφορικός λογισμός.

Η εκκίνηση γίνεται με μία κριτική του Tall πάνω στην τυπική προσέγγιση της διδασκαλίας του διαφορικού λογισμού, εξηγώντας τα προβλήματα που προκύπτουν από τη διδασκαλία που είναι βασισμένη στην τυπική λογική ανάλυση (ανάλυση της οποίας κάθε βήμα πρέπει να είναι αληθές εφόσον βέβαια και το προηγούμενο ήταν κι αυτό αληθές).

Στη συνέχεια θα συζητηθούν κάποιες εναλλακτικές προτάσεις προτού περάσουμε στην επεξεργασία της RME προσέγγισης.

Όλη η σειρά του διαφορικού λογισμού που προσεγγίστηκε από την RME, εμπνεύσθηκε από την ιστορία των μαθηματικών. Θα περιγραφούν ορισμένα στοιχεία της ιστορίας του διαφορικού λογισμού αρχίζοντας από ευρήματα του κολεγίου του Merton τον 14° αιώνα μέχρι τον Γαλιλαίο, τα οποία είναι ενδιαφέροντα από διδακτικής σκοπιάς. Είναι αποδεικτό ότι οι διακριτές συναρτήσεις καθώς και τα γραφήματά τους έπαιξαν σημαντικό ρόλο διαμεσολαβητού μεταξύ των context problems που έπρεπε να λυθούν και του τυπικού διαφορικού λογισμού ο οποίος ήταν σε ανάπτυξη. Κλείνοντας θα συζητηθεί η προσέγγιση της RME για τη δυνατότητα που αυτή προσφέρει ώστε να μπορέσουν τα τυπικά μαθηματικά να αναδυθούν, αντί να γίνει προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ τυπικής και άτυπης γνώσης.

4.1.1 ΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ

Ο παραδοσιακός τρόπος οργάνωσης ενός θέματος:

Σύμφωνα με τον **Tall (1991)**, οι μαθηματικοί τείνουν να κάνουν ένα τυπικό σφάλμα κατά τον σχεδιασμό ενός προγράμματος διδασκαλίας που αφορά τον διαφορικό λογισμό. Ο γενικός τρόπος προσέγγισης του θέματος από ένα μαθηματικό, περιορίζεται στην προσπάθεια που αυτός κάνει για να απλουστευτεί όσο το δυνατό γίνεται ένα σύνθετο μαθηματικό θέμα, σπάζοντας το σε μικρότερα κομμάτια διατάσσοντας τα σε μία λογική από μαθηματικής άποψης σειρά. Από τη μεριά του ειδικού αυτά τα κομμάτια λαμβάνονται υπ' όψιν ως τμήματα μιας ολότητας. Από την άλλη μεριά όμως, αυτή του μαθητή τα μεμονωμένα κομμάτια ίσως θεωρηθούν ως ξεχωριστά τμήματα ενός μεγάλου πάζλ, για το οποίο ο μαθητής δεν έχει ολοκληρωμένη εικόνα. Θα μπορούσε να είναι ακόμη χειρότερο, εάν ο μαθητής δεν συνειδητοποιήσει την ύπαρξη μιας μεγάλης εικόνας. Ο μαθητής ίσως φανταστεί ότι το κάθε κομμάτι αποτελεί μία μεμονωμένη εικόνα, κάτι το οποίο αποτρέπει τη σύνθεση. Το αποτέλεσμα ίσως να είναι, ότι ο μαθητής κατασκευάζει μία εικόνα στο μυαλό του για κάθε κομμάτι ξεχωριστά, χωρίς όμως να επιτυγχάνει σύζευξη όλων αυτών για τη δημιουργία μιας ολότητας.

Ως παράδειγμα έχουμε τον Tall ο οποίος περιγράφει ένα πιθανό πρόγραμμα διδασκαλίας για τη διαφόρηση.

Παρουσιάζει την ακόλουθη λογική σειρά ως εξής: για να μπορέσει κάποιος να κατανοήσει την παράγωγο συνάρτησης **f'(x)** θα πρέπει να έχει στη διάθεσή του την έννοια του ορίου. Αυτό θα χρησιμεύσει όταν κάποιος υποχρεωθεί να πάρει το όριο του πηλίκου του ρυθμού μεταβολής $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ όταν το h τείνει στο 0 ($h \to 0$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Έτσι προκύπτει, ότι η έννοια του ορίου θα πρέπει να προηγείται της παραγώγου. Επιπλέον, κάποιος ίσως αποφασίσει, ότι είναι ευκολότερο να πάρει το όριο στην περίπτωση που το x έχει συγκεκριμένη τιμή. Τότε το επόμενο βήμα θα ήταν να

παρουσιαστεί το x ως μεταβλητή και με τον τρόπο αυτό να εισαχθεί η ιδέα της παραγώγου.

Όμως για τον μαθητή η εισαγωγή της έννοιας του ορίου ξαφνικά φαντάζει χωρίς αιτιολογία ύπαρξης μαζί με όλα τα προβλήματα κατανόησης που μπορεί μία τέτοια κίνηση να φέρει. Το επόμενο μεγάλο πρόβλημα είναι η μετάβαση από ένα όριο με συγκεκριμένη τιμή για το x σε εκείνο που η τιμή του x μεταβάλλεται κι αυτό διότι παίρνοντας το όριο σε μία συγκεκριμένη θέση ερχόμαστε σε αντίθεση με την παρουσία της **f'(x)** ως συνάρτηση της οποίας οι τιμές περιγράφουν την κλίση του γραφήματος της **f'(x)**.

4.1.2 Εναλλακτικές προσεγγίσεις

Μία λογική εναλλακτική προσέγγιση, σύμφωνα με τον Tall θα μπορούσε να είναι η αναζήτηση καταστάσεων οι οποίες να μπορούν να λειτουργήσουν ως άτυπες αφετηρίες από όπου θα ήταν δυνατή η ανάπτυξη της αντίληψης. Γι αυτό το θέμα ο Tall επιχειρηματολογεί ώστε να δίνεται περισσότερο ενδιαφέρον στην οπτική απεικόνιση των μαθηματικών ιδεών καθώς και στην ύπαρξη πιο παραστασιακών εμπειριών στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να αποκτήσουν εμπειρία από μία ποιοτική σφαιρική εισαγωγή μιας μαθηματικής ιδέας. Αυτή η ποιοτική εισαγωγή μετέπειτα θα δημιουργήσει την ανάγκη για μία πιο τυπική περιγραφή των ιδεών που εμπεριέχονται. **"Ο γραφικός διαφορικός λογισμός"** (ξεκάθαρος, λεπτομερής και ευκολονόητος) αποτελεί μία εναλλακτική προσέγγιση που αναπτύχθηκε από τον **Tall (1985,1986)**.

Αυτό που χαρακτηρίζει την προσέγγιση του Tall είναι η δυναμική της όψη. Η προοπτική που επικρατεί είναι εκείνη της μεταβλητής που δεν παίρνει ποτέ σταθερές τιμές. Εδώ το γράφημα παίζει έναν κεντρικό ρόλο: το γράφημα χρησιμοποιείται για να δείξει τον τρόπο που η εξαρτημένη μεταβλητή (π.χ. y ή f(x)) μεταβάλλεται όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή (x) μεταβάλλεται διαρκώς. Αυτό που φαίνεται αρχικά, είναι οι μεταβολές στην εξαρτημένη και ο ρυθμός αυτών των μεταβολών, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν όσον αφορά την αύξηση, την ελάττωση και την κλίση της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο. Αυτό βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν μια διαισθητική άποψη για την παράγωγο. Ωστόσο, η αντίληψη για την παράγωγο ως μέτρο του ρυθμού μεταβολής, παραμένει μάλλον υπονοούμενη, αφού ο πρωταρχική εστίαση γίνεται στην κλίση του γραφήματος.

Ο Tall παρατηρεί, ότι το πρόβλημα της σειράς μαθημάτων που αφορούν τον διαφορικό λογισμό είναι η μετάβαση από τις γεμάτες ενδιαφέρον συζητήσεις που βασίζονται στις εικόνες – γραφήματα προς την τυπική μαθηματική λογική. Οι μαθητές μεταφράζουν έναν ορισμό ο οποίος βασίζεται σε μία οπτική εικόνα ως μία περιγραφή, ως μοντέλο της εικόνας, αντί ως έναν μαθηματικό ορισμό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μία τυπική λογική διαδικασία (τυποποίηση).

Ίσως η οπτική εξερεύνηση να μπορεί να σταθεί περισσότερο από μόνη της. Στην πρόταση του Tall, η σχέση μεταξύ γραφήματος και φαινομένων της πραγματικής ζωής περιορίζεται σε μία μικρή εισαγωγική φάση. Για το κυρίως μέρος οι συναρτήσεις και τα γραφήματά τους εμπεριέχονται σε έναν μαθηματικό κόσμο.

4.1.3 Πραγματοποιώντας σύνδεση μεταξύ μιας αυθεντικής εμπειρίας και ενός μαθηματικού συστήματος συμβόλων

Σε αντίθεση με τον Tall, ο **Kaput (1994α)** επικεντρώνει το ενδιαφέρον στη σχέση μεταξύ συστημάτων μαθηματικών συμβόλων, όπως είναι τα γραφήματα (γραφικές παραστάσεις) και καθημερινής πραγματικότητας.

Το πρόβλημα κατά την άποψή του, είναι το χάσμα που υπάρχει μεταξύ των τυπικών μαθηματικών που τα παρομοιάζει με ένα νησί και της κυρίως ηπειρωτικής χώρας που είναι η πραγματική ανθρώπινη εμπειρία. Διευκρινίζει αυτό το χάσμα χρησιμοποιώντας τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των μαθηματικών συναρτήσεων, που είναι ορισμένες από αλγεβρικούς τύπους και των εμπειρικών συναρτήσεων οι οποίες περιγράφουν καθημερινού τύπου φαινόμενα. Για να τραβήξει την προσοχή, για τη θέση που πήρε αναφέρει τη ρητορική ερώτηση του **Thomas Tucker** η οποία είναι: « **Όλες οι συναρτήσεις που συναντώνται στην πραγματική ζωή, προέρχονται από αποδεδειγμένους αλγεβρικούς τύπους ;** », «**Υπάρχουν τέτοιοι**; » (αναφέρεται από τον Kaput 1994α, 384).

Παρατηρεί ότι ακόμα και το πιο αποτελεσματικό εκπαιδευτικό λογισμικό δεν μπορεί να αντεπεξέλθει σε αυτό το πρόβλημα. Το παραπάνω, συμφωνεί, ότι αφήνεται στα προγράμματα των υπολογιστών να συνδέουν συναρτήσεις με τα γραφήματα τους. Όσο αφορά τον παραπάνω παραλληλισμό που έγινε μεταξύ νησιού και ηπειρωτικής χώρας οι αλγεβρικές συναρτήσεις με τα γραφήματά τους ανήκουν στο νησί που αφορά τα τυπικά μαθηματικά.

Για να δοθεί λύση στον διαχωρισμό αυτόν, ο Kaput αναζητά καταστάσεις όπου οι μαθητές θα μπορούν να εκμεταλλευτούν στο έπακρο τις δικές τους αυθεντικές εμπειρίες για να προχωρήσουν στην εξερεύνηση και ακόμη να αντεπεξέλθουν με τέτοιου είδους τυπικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών. Προσπαθεί να δημιουργήσει μία κατάσταση με τη βοήθεια ενός λογισμικού που βρίσκεται σε ανάπτυξη με την ονομασία **Math Cars** (αυτοκίνητα των μαθηματικών).

Η ισχύς αυτής της πρότασης έγκειται στον εσωτερικό τρόπο σύνδεσης που υπάρχει μεταξύ των διάφορων συστημάτων απεικόνισης. Με αυτόν τον τρόπο, η καθημερινή εμπειρία της κίνησης ενός οχήματος μπορεί να συνδεθεί με μία τυπική γραφική απεικόνιση. Αυτή η σύνδεση προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να αξιολογήσουν τις εικασίες που οι ίδιοι αναπτύσσουν για τις γραφικές αναπαραστάσεις – απεικονίσεις.

Αυτό που μπορεί να σημειωθεί είναι, ότι ο Kaput παίρνει το ήδη υπάρχον και έτοιμο σύστημα συμβόλων ως αφετηρία και το οποίο είναι συνεπές με την προσωπική του αντίληψη για το μαθηματικό σύστημα, που αυτό με τη σειρά του είναι ευκρινώς διαφορετικό από την εμπειρία της καθημερινότητας. Άλλοι όμως, προσπαθούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ή να επανανακαλύψουν από μόνοι τους αυτό το σύστημα συμβόλων.

4.1.4 Ανακάλυψη γραφημάτων

Οι **Disessa, Hammer, Shern και Kolpakowski (1991**), είναι εκείνοι οι οποίοι περιέγραψαν μία διδακτική περίοδο, όπου οι μαθητές ανακάλυπταν γραφήματα κι αυτή η αναφορά αποτελεί έναν άλλο τρόπο προσέγγισης, μολονότι το προηγούμενο δεν θεωρείται ως αποτέλεσμα ενός επαρκούς διδακτικού σχεδιασμού. Το γεγονός είναι ότι, η διαδικασία της ανακάλυψης ήταν λίγο ως πολύ τυχαία.

Οι μαθητές είχαν προγραμματίσει προσομοιώσεις των κινήσεων που γίνονται στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιώντας μία χελώνα από το λογισμικό της **Logo** η οποία άφηνε ίχνη πίσω της με τη μορφή κουκίδων, σε όλο το φάσμα της οθόνης. Το επόμενο βήμα ήταν να ζητηθεί από τους μαθητές να αναπαραστήσουν σε ένα κομμάτι χαρτί χρησιμοποιώντας μολύβι την πορεία των κινήσεων μιας από τις προσομοιώσεις που είχαν δουλέψει Οι λύσεις που απέδωσαν οι μαθητές και οι οποίες εμπνεύστηκαν σε κάποιο βαθμό από τα ίχνη των κουκίδων της προσομοίωσης στον υπολογιστή, διαμόρφωσαν τις προϋποθέσεις για την έναρξη συζητήσεων και σειρών από

δραστηριότητες μέσα από τις οποίες αναδύθηκε μία γραφικού τύπου αναπαράσταση για τις παραπάνω κινήσεις προσομοίωσης.

Ενώ αποδεχόμαστε το γεγονός ότι η καθοδήγηση από τον δάσκαλο ίσως να επηρέασε την διαδικασία της ανακάλυψης περισσότερο από ότι η ίδια η ιδέα της ανακάλυψης προδιαθέτει (**Disessa et al 1991**), φτάνουμε στο συμπέρασμα να πούμε ότι εάν ήταν δυνατό να έχουμε από τους ίδιους τους μαθητές μία ανακάλυψη γραφικών παραστάσεων της απόστασης με το χρόνο **(s-t)** και της ταχύτητας με το χρόνο **(u-t)**, τότε δεν θα προέκυπτε η διχογνωμία μεταξύ τυπικών μαθηματικών και αυθεντικών εμπειριών, όπως προϋπέθεσε ο Kaput. Όσον αφορά τους μαθηματικούς τρόπους συμβολισμού, αυτοί θα αναδύονταν με έναν φυσικό τρόπο μέσα από τις δραστηριότητες των μαθητών και τα τυπικά μαθηματικά που αυτούς συνοδεύουν θα παρουσιάζονταν ως προέκταση των αυθεντικών εμπειριών των μαθητών.

Κατά την **Meira (1995)** μπορούμε να πάμε αυτή τη λογική ακόμη ένα βήμα πιο πέρα, με το να αποδεχτούμε τη διαλεκτική σχέση που υπάρχει μεταξύ τύπων που χρησιμοποιούνται και του μαθηματικού νοήματος που δημιουργείται. Σύμφωνα με αυτή τη δυναμική άποψη, οι συμβολισμοί που αναδύονται καθώς οι έννοιες που αναπτύσσονται και αφορούν αυτούς διαμορφώνονται κατά τη διαδικασία ανάπτυξης του συμβολισμού. **Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, τα συστήματα τύπων περιγράφουν τις πολύπλοκες δραστηριότητες από τις οποίες προέρχονται και παράλληλα αυτές οι δραστηριότητες σχηματίζουν τις έννοιες που αναδύονται.**

4.1.5 Συμπεράσματα

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω εναλλακτικές προσεγγίσεις που παρουσιάζονται έναντι των παραδοσιακών τρόπων διδασκαλίας του διαφορικού λογισμού, προκύπτουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- ✓ Ο συνολικός σκοπός είναι να σχεδιαστεί ένα διδακτικό πρόγραμμα που θα βασίζεται στην διαίσθηση – ενόραση.
- ✓ Επιπλέον, θα πρέπει να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να θεμελιώσουν την κατανόηση νέων εννοιών πάνω στην δική τους άτυπη προϋπάρχουσα γνώση.
- ✓ Συμπερασματικά, η διδασκαλία θα πρέπει να βασίζεται πάνω στην προσωπική συνεισφορά των μαθητών που θα λαμβάνει χώρα κατά τη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης.

Μπορούν να διακριθούν 3 διαφορετικοί προσανατολισμοί μέσα από αυτές τις εναλλακτικές προσεγγίσεις.

- ✓ Βοηθώντας τους μαθητές να αναπτύξουν ποιοτικές (γενικές) αντιλήψεις που θα λειτουργήσουν ως βάση για την διαδικασία κατανόησης.
- ✓ Δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές θα μπορούν να αντεπεξέρχονται με επιτυχία σε βασικές ιδέες, με το να αναπτύξουν και να αξιολογούν υποθέσεις.
- ✓ Ενθαρρύνοντας την διαδικασία επανανακάλυψης του διαφορικού λογισμού.

Η διαφορά μεταξύ των δύο πρώτων και του τρίτου έγκειται στο γεγονός, ότι οι πρώτοι δύο προσανατολισμοί προσπαθούν να βοηθήσουν τους μαθητές να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ της άτυπης γνώσης τους και των τυπικών μαθηματικών. Σε αντίθεση, ο τρίτος προσπαθεί να ξεπεράσει αυτόν τον διχασμό σκοπεύοντας σε μία διαδικασία κατά την οποία τα τυπικά μαθηματικά αναδύονται μέσα από τις μαθηματικές δραστηριότητες των μαθητών.

Αυτός είναι επίσης και ο σκοπός της RME, όπου ο διδακτικός σχεδιασμός στοχεύει στη δημιουργία ευκαιριών για να αναδυθεί η τυπική μαθηματική γνώση.

4.2 Καθοδηγούμενη επανανακάλυψη και προοδευτική μαθηματικοποίηση

Το υποθάλπτον χαρακτηριστικό που ενώνει όλες τις εναλλακτικές προσεγγίσεις είναι η άποψη ότι η μάθηση των μαθηματικών θα πρέπει να διακατέχεται από τα γνωρίσματα που έχει η ανάπτυξη της αντίληψης και όχι από τη διαδικασία συσσώρευσης κομματιών της γνώσης. Αυτή η προοπτική είναι συνεπής με μία πιο γενική ιδέα που λέει, **ότι ο δρόμος που ακολούθησε το ανθρώπινο είδος στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης είναι επίσης εκείνος ο δρόμος που πρέπει να ακολουθήσει ο κάθε ένας ξεχωριστά ώστε να αποκτήσει τη μαθηματική γνώση. Μία άποψη η οποία ενισχύθηκε από τον Polya (1963) και τον Freudenthal (1973, 1991).**

Η αφετηρία για τον Freudenthal βρίσκεται στην κριτική που άσκησε στην παραδοσιακή μαθηματική εκπαίδευση. Αντιτάχθηκε έντονα σε αυτό που ο ίδιος

ονόμαζε αντι-διδακτική αντιστροφή **(Freudenthal 1973)**, όπου τα τελικά αποτελέσματα της δουλειάς των ερευνητών μαθηματικών λαμβάνονταν ως αφετηρίες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ως εναλλακτική προσέγγιση υποστήριζε, **ότι η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να έχει ως αφετηρία πρωταρχικά τα μαθηματικά ως δραστηριότητα και όχι τα μαθηματικά ως ένα έτοιμο δημιουργημένο σύστημα. (Freudenthal 1971, 1973, 1991)**. **Γι' αυτόν η ύψιστη μαθηματική δραστηριότητα είναι η "μαθηματικοποίηση" που σημαίνει "οργάνωση" από μαθηματική άποψη**. Ο Freudenthal διέγνωσε αυτή τη δραστηριότητα των μαθητών ως έναν δρόμο προς την επανανακάλυψη των μαθηματικών.

Σημειώνεται ότι δεν απαιτείται από τους μαθητές να επανανακαλύψουν τα πάντα από μόνοι τους. Αναφορικά με αυτό, ο **Freudenthal (1991)** μιλά για κατευθυνόμενη επανανακάλυψη. Για εκείνον, το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στον χαρακτήρα της μαθησιακής διαδικασίας παρά στην ανακάλυψη αυτή καθ' αυτή. **Η ιδέα είναι να επιτραπεί στους μαθητές να θεωρήσουν τη γνώση που κατέχουν ως προσωπικά δική τους γνώση, για την οποία υπεύθυνοι είναι αυτοί και μόνο**. Το τελευταίο υπονοεί συγκεκριμένους κοινωνικούς (κανόνες) (**Yackel and Cobb, 1996**). Για παράδειγμα, νόρμες όπως : «**Δεν μαθαίνεις μαθηματικά με το να υποθέτεις τι έχει ο δάσκαλος στο μυαλό του, αλλά με το να βρεις τη λύση από μόνος σου».**

Σύμφωνα με τον Freudenthal, η μαθηματικοποίηση μπορεί να εμπεριέχει μαθηματικοποίηση ενός θέματος από την καθημερινότητα καθώς και μαθηματικοποίηση ενός μαθηματικού θέματος (**Freudenthal 1971**). Ο ίδιος δεν διακρίνει βασικές διαφορές μεταξύ των δύο δραστηριοτήτων. Εξαιτίας αυτού, η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να ξεκινήσει μαθηματικοποιώντας θέματα από την καθημερινότητα.

Ωστόσο, η επανανακάλυψη απαιτεί από τους μαθητές να μαθηματικοποιήσουν επίσης την προσωπική τους μαθηματική δραστηριότητα. Σχετικά με αυτό, ο **Treffers (1987)** διέκρινε την οριζόντια και κάθετη μαθηματικοποίηση.

Η οριζόντια μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη διαδικασία περιγραφής ενός context problem με μαθηματικούς όρους, ώστε να μπορεί να λυθεί με μαθηματικά μέσα.

Η κάθετη μαθηματικοποίηση αναφέρεται στην μαθηματικοιποίηση μιας προσωπικής μαθηματικής δραστηριότητας. Μέσω της κάθετης μαθηματικοποίησης, ο μαθητής φτάνει σε ένα υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών.

Αυτό που βοηθά τους μαθητές να κατασκευάσουν τα νέα μαθηματικά είναι η διαδικασία της προοδευτικής μαθηματικοποίησης, η οποία συμπεριλαμβάνει στοιχεία από την οριζόντια και την κάθετη.

Ο **Freudenthal (1971, p.417)** εκφράζει το προηγούμενο ως «το αντικείμενο που απλά λειτουργεί σε πρώτο επίπεδο και γίνεται αντικείμενο μελέτης για το επόμενο». Παρόλο που ο Freudenthal έχει υπ' όψιν του μικρού τύπου επίπεδα, μία συνένωση μπορεί να γίνει με τη πιο μακροσκοπικά λεπτομερή αναφορά της **Sfard (1991)** για τη μαθηματική ανάπτυξη, η οποία βασίζεται σε μία ιστορική ανάλυση.

Η Sfard παρατηρεί, ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία αντικειμενοποίησης – υποστασιοποίησης (reification) κατά την οποία οι διαδικασίες επαναμεταφράζονται ως αντικείμενα. Ένα από τα παραδείγματα που δίνει είναι εκείνο των συναρτήσεων. Αρχικά παρουσιάστηκαν ως υπολογιστικές εντολές. Αυτή η διαδικασία λαμβάνει τόσο της προσοχής, που ο χαρακτήρας της καθ΄ αυτού λειτουργίας της περνά απαρατήρητος. Βαθμιαία όμως, έγιναν οι απαραίτητοι διαχωρισμοί και οι διαφόρου τύπου συναρτήσεις προσδιορίστηκαν. Όλο και περισσότερο, οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται ως αντικείμενα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Η ανάλυση της Sfard υποθέτει ότι οι μαθητές θα πρέπει να περάσουν από την ίδια διαδικασία. **Οι μαθητές θα βρίσκονται σε θέση να αντιληφθούν την έννοια της συνάρτησης ως αντικείμενο, μόνο εάν έχουν γνωρίσει εμπειρικά τις συναρτήσεις ως διαδικασίες.**

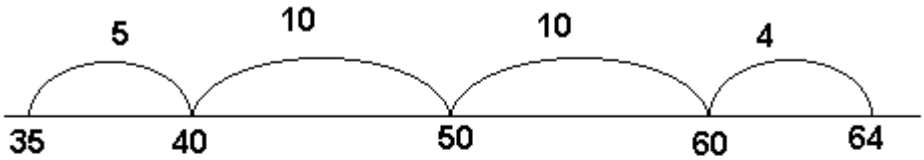
4.2.1 Η προοπτική που έχει ένας διδακτικός σχεδιασμός

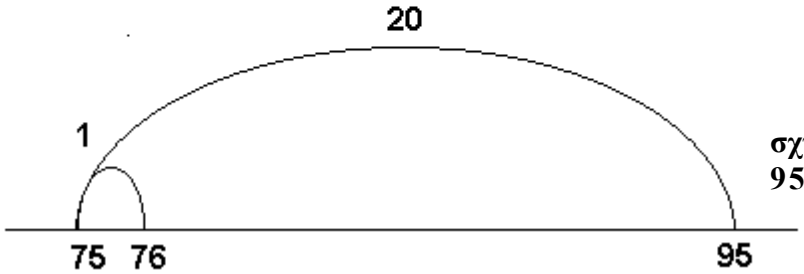
Στην προσέγγιση που γίνεται με τη μέθοδο της επανανακάλυψης, τα context problems έχουν τον ρόλο κλειδιού στην όλη διαδικασία. Τα κατάλληλα επιλεγμένα context problems προσφέρουν δυνατότητες στους μαθητές να αναπτύξουν άτυπες υψηλού επιπέδου στρατηγικές επίλυσης ειδικές για τα εν λόγω κάθε φορά context problems. Αυτές οι άτυπες διαδικασίες επίλυσης, μπορούν να λειτουργήσουν ως "πατήματα" ανακαλύψεων ή ως καταλύτες που θα επιταχύνουν την αφαίρεση, την τυποποίηση και

τη γενίκευση. Με άλλα λόγια στην RME τα context problems αποτελούν τη βάση για την προοδευτική μαθηματικοποίηση.

Εκείνος που ευθύνεται για τον διδακτικό σχεδιασμό προσπαθεί να αναλύσει μία συλλογή από context problems τα οποία να μπορέσουν να οδηγήσουν σε μία σειρά από διαδικασίες οριζόντιας και κάθετης μαθηματικοποίησης ώστε μαζί να συμβάλλουν στην επίτευξη του στόχου που δεν είναι άλλος από την επανανακάλυψη των μαθηματικών. Βασικά η ερώτηση που καθοδηγεί τον σχεδιαστή είναι : « **Πώς θα μπορούσα να το είχα εγώ ανακαλύψει αυτό** ; ». Εδώ ο σχεδιαστής θα λάβει υπ' όψιν τη δική του γνώση και μαθησιακή εμπειρία. Επιπροσθέτως, μπορεί από τη μεριά του να μελετήσει την ιστορία των μαθηματικών ως πηγή έμπνευσης καθώς επίσης και τις άτυπες στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την προσπάθειά τους να λύσουν προβλήματα εφαρμογών, για τα οποία όμως δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων τη διαδικασία επίλυσης τους. Ως παραδείγματα: (**Streefland, 1990 και Gravemeijer 1994**).

σχήμα 1 Υπολογίζοντας 35 + ... = 64 πάνω στον άδειο αριθμημένο αξονα





σχήμα 2 μοντέλο αφαίρεσης 95-19=95-20+1

Έρευνα πάνω στον σχεδιασμό σειρών διδασκαλίας που διέπονται από τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση σε πρωτοβάθμιο επίπεδο, έχουν επιδείξει ότι, η ιδέα των αναδυόμενων μοντέλων μπορεί να λειτουργήσει ως μία δυνατή στρατηγική στον τομέα σχεδιασμού (Gravemeijer 1999).

Εδώ σημείο εκκίνησης αποτελούν οι ειδικές για την κάθε κατάσταση μέθοδοι επίλυσης, οι οποίες στην συνέχεια μοντελοποιούνται (γίνονται πρότυπο για άλλες).

Αρχικά τα context problems επιλέγονται ώστε να προσφέρουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν αυτές τις ειδικές για την κάθε κατάσταση μεθόδους επίλυσης. Κατόπιν αυτού, αυτές οι μέθοδοι μοντελοποιούνται. **Με αυτή την έννοια, τα μοντέλα αναδύονται μέσα από τη δραστηριότητα των μαθητών**.

Ακόμη κι αν αυτά τα μοντέλα δεν αποτελούν γνήσιες επανανακαλύψεις των ίδιων των μαθητών, μεγάλη προσοχή δίνεται στο να πλησιαστούν οι ανακαλύψεις των μαθητών όσο το δυνατό γίνεται, **επιλέγοντας μοντέλα που συνδέονται με τη μαθησιακή πορεία των μαθητών**.

Ένα άλλο κριτήριο είναι η δυναμική που έχουν τα μοντέλα για να υποστηρίξουν την κάθετη μαθηματικοποίηση. Η ιδέα είναι να αναζητηθούν μοντέλα τα οποία θα μπορούν να τυποποιηθούν και να γενικευτούν ώστε να αναπτυχθούν σε αυτούσιες υπάρξεις, τέτοιες ώστε να μπορέσουν να γίνουν στη συνέχεια μοντέλα για μαθηματικές λογικές διαδικασίες. Ως παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε μία σειρά διδασκαλίας στην οποία ο κανόνας (χάρακας) θεωρείται αρχικά ως μοντέλο που επαναλαμβάνει μονάδες μέτρησης και αναπτύσσεται στη συνέχεια σε ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται να ερμηνεύσει λογικά νοητικές στρατηγικές υπολογισμών με αριθμούς μεγαλύτερους του 100 **(Stephan, 1998 ; Gravemeijer, 1999)**. Σε αυτή τη διδακτική σειρά, οι μαθητές μετρούν διάφορα μεγέθη με το να επαναλαμβάνουν κάποια βασική μονάδα μέτρησης καθώς και μία μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης, που αποτελείται από 10 βασικές μονάδες. Αυτή η μέτρηση με δεκάδες και μονάδες μοντελοποιείται με έναν χάρακα (κανόνα) 100 μονάδων, φτιαγμένο από μονάδες και δεκάδες. Κατόπιν η πράξη της μέτρησης επεκτείνεται στην αύξηση, ελάττωση και σύγκριση μεγεθών. Αυτές οι καταστάσεις προωθούν τις στρατηγικές μέτρησης που παριστάνονται με τόξα πάνω σε έναν σχηματοποιημένο κανόνα (ή άξονα) ή παριστάνονται με μία άδεια αριθμημένη γραμμή. (**Whitney 1988, Treffers 1991**).

Τελικά, οι συμβολισμοί των τόξων στην αναπαριστούμενη άδεια αριθμημένη γραμμή θα χρησιμοποιηθούν για να επεξηγήσουν και να αξιολογήσουν στρατηγικές όπως είναι να υπολογίζεις κάποιος 95-19 αφαιρώντας 20 και προσθέτοντας την μονάδα (**σχήμα. 2**). Με αυτόν τον τρόπο, η αριθμημένη γραμμή λειτουργεί ως μοντέλο για τη μαθηματική λογική διαδικασία που ακολουθήθηκε.

Η μετάβαση που έχουμε είναι από ένα μοντέλο που έχει ένα φυσικό σχήμα και απεικονίζει κάτι προς τον τρόπο που χρησιμοποιείται αυτό το μοντέλο. Ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής σκέφτεται για αυτό το μοντέλο ακολουθεί την ίδια μετάβαση. Από τη μία μεριά έχει μοντέλα που εξάγουν το νόημά τους από την κατάσταση που

μοντελοποιείται στο αντίστοιχο context problem και από την άλλη μεταβαίνει στην κατάλληλη χρήση τους για να καταλήξει σε αριθμητικές σχέσεις.

Στην τελευταία φάση, η διαδικασία της σκέψης των σχέσεων μεταξύ αριθμών θα επιβάλλει τη χρήση του αριθμημένου άξονα. Σε σχέση με αυτό, μπορούν να διακριθούν διαφορετικοί τύποι δραστηριοτήτων (**Gravemeijer 1994**, **Gravemeijer**, **Cobb, Bowers και Whitenack**.

(1) δραστηριότητα στο επίπεδο του τι υποχρεούται ένας μαθητής να κάνει (μέτρηση με τη χρήση δεκάδων και μονάδων)

(2) δραστηριότητα στο επίπεδο της αναφοράς (ως επεξήγηση των θέσεων πάνω στον χάρακα θεωρείται η διαδικασία επανάληψης της μονάδας μέτρησης)

(3) γενική δραστηριότητα (χρησιμοποιώντας την αριθμημένη γραμμή πάνω στον άξονα για να αποδειχθούν οι υπολογιστικές μέθοδοι).

(4) τυπική μαθηματική λογική: Το να αναπτύσσεις τη μαθηματική λογική κάνοντας χρήση αριθμητικών σχέσεων ενώ βρίσκεσαι στο μαθηματικό πεδίο όπου δομούνται οι αριθμητικές σχέσεις.

Σημειώνεται ότι ο όρος μοντέλο πρέπει να κατανοηθεί πολυδιάστατα. Δεν αποτελεί μόνο μια επιγραφή (**κατά τον Lehrer και Romberg 1996** ο όρος **incription:** επιγραφή αναφέρεται σε συμβολισμούς που έχουν ένα φυσικό σχήμα) αλλά το οτιδήποτε αυτό ακολουθεί και συνθέτει το μοντέλο στα πλαίσια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Επιπλέον, το ίδιο μοντέλο μπορεί να περιλάβει πολλές πτυχές επιγραφών – φυσικών συμβολισμών (**Lehrer και Romberg 1996**) π.χ από ένα κανονικό χάρακα μέχρι μία άδεια γραμμή. Η σημείωση "αναδυόμενη" δίνει έμφαση στην συνέχεια που έχει αυτή η διαδικασία. Αυτή η σημείωση χρησιμοποιείται επίσης για να αναφέρει το γεγονός, ότι το **μοντέλο αναδύεται από τη δραστηριότητα των μαθητών**. Επιπρόσθετα, τα μαθηματικά που σκοπεύει κάποιος να αναπτύξει (όπως για παράδειγμα, η ανάπτυξη της δομής των αριθμητικών σχέσεων) αναδύονται σε μία διαδικασία διαδοχής.

Θα μπορούσε να σημειωθεί, ότι ο σκοπός δεν περιορίζεται μόνο στο να βοηθηθούν οι μαθητές στη επεξεργασία, των προσωπικών τους άτυπων κατανοήσεων και άτυπων στρατηγικών επίλυσης, στο βαθμό που θα τους επιτρέψει να αναπτύξουν περισσότερο τυπικά μαθηματικές κατανοήσεις και στρατηγικές. Ο σκοπός είναι να διατηρηθεί και

η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών αντιλήψεων και πραγμάτων που αυτές περιγράφουν, η τελική κατανόηση των τυπικών μαθηματικών θα πρέπει να μένει συνδεδεμένη, ή όπως λέει ο Freudenthal, να έχει τις ρίζες της στην κατανόηση των πραγμάτων που περιγράφονται και που είναι καθημερινού τύπου φαινόμενα τα οποία οι μαθητές έχουν γνωρίσει εμπειρικά .

Αναφορικά με τα προηγούμενα, είναι επιθυμητό να δοθεί έμφαση στο ότι βλέπουμε την μοντελοποίηση και τον συμβολισμό ως το πιο ουσιώδη κομμάτι μιας οργανωμένης δραστηριότητας που σκοπεύει να φέρει εις πέρας ένα πρόβλημα. **Με άλλα λόγια η ανάπτυξη του μοντέλου καθώς και των συμβολισμών – φυσικών σχημάτων που αυτά το αποτελούν, συμβαδίζουν με την ανάπτυξη της μαθηματικής αντίληψης που αποκτάται για το πρόβλημα.** Από τη μία μεριά, ο συμβολισμός εξάγει το νόημα του από την κατάσταση που περιγράφει. Από την άλλη μεριά, ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αντιληπτό ένα πρόβλημα επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τον συμβολισμό μέσω του οποίου απεικονίζεται μία κατάσταση. Με αυτήν την έννοια, συμφωνούμε με την **Meira, (1995, p 27)** η οποία υποστηρίζει μία δυναμική δραστηριότητα με άποψη, σύμφωνα με την οποία οι συμβολισμοί και νοήματα αναπτύσσονται μαζί σε μία διαλεκτική διαδικασία.

Στη συνέχεια, θα γίνει προσπάθεια να περιγραφεί το σχέδιο μιας σειράς μαθημάτων για το διαφορικό λογισμό στα πλαίσια της RME, όσον αφορά την στρατηγική σχεδιασμού των αναδυόμενων μοντέλων. Η αρχή θα γίνει αναπαριστώντας μερικές σημαντικές στιγμές στη ιστορία του διαφορικού λογισμού. Το θέμα είναι, ότι παρόλο που η επανανακάλυψη δεν υπονοεί απαραίτητα την αναγκαιότητα ύπαρξης ως αφετηρία της ιστορίας των μαθηματικών, εν τούτοις αυτή η σειρά μαθημάτων για το διαφορικό λογισμό αποτελεί παράδειγμα του πόσο μπορεί η ιστορία των μαθηματικών να εμπνεύσει τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης. Επίσης, η ιστορία του διαφορικού λογισμού προσφέρει γνώση στο τι μπορεί να αποτελέσει αναδυόμενο μοντέλο για τον διαφορικό λογισμό.

4.3 Ένα ιστορικό σχεδιάγραμμα

Η γέννηση της κινηματικής στο κολέγιο του Merton

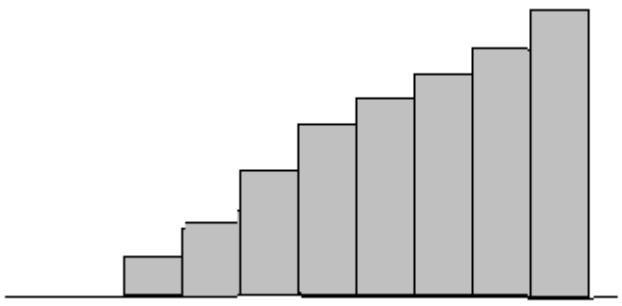
Στο πρώτο μισό του 14^{ου} αιώνα οι λογικιστές και οι μαθηματικοί σε συνεργασία με το κολέγιο του Merton και την Οξφόρδη εξερεύνησαν την ταχύτητα ως μέτρο της κίνησης. Προσπάθησαν να βρουν μία περιγραφή της απόστασης που διανύει ένα

σώμα, το οποίο κινείται με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. (**Clagett, 1959**). Αυτό το πρόβλημα δεν ήταν εύκολο διότι η ταχύτητα του σώματος συνεχώς μεταβαλλόταν και η έννοια της κίνησης καθώς και της μεταβολής της ήταν πολύ γενικά ορισμένες σύμφωνα με τον Αριστοτέλη. Η κίνηση και η μεταβολή της αναφέρονταν στη θερμοκρασία, στο μέγεθος και στο μέρος (**Lindberg, 1992**). Όλες αυτές οι ιδιότητες του σώματος μπορούν αλλάξουν. Η ερμηνεία της κίνησης ως η εναλλαγή των σημείων θέσης έγινε το κεντρικό θέμα μελέτης στο κολέγιο του Merton. Ο Clagett περιέγραφε το προαναφερθέν ως «η γέννηση της κινηματικής στο κολέγιο του Merton».

Εκείνη την εποχή οι επιστήμονες στο κολέγιο του Merton χρησιμοποίησαν την ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας καθώς και περιγραφές της ταχύτητας ενός κινούμενου αντικειμένου. Όμως δεν υπήρχε ξεκάθαρος ορισμός της ταχύτητας όπως: η απόσταση που διανύθηκε προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα ($\Delta s/\Delta t$). Επίσης το σίγουρο είναι ότι δεν υπήρχε ορισμός για την στιγμιαία ταχύτητα ως το όριο του λόγου μεταβολής της απόστασης με το χρόνο. (ds/dt), διότι μπορούσαν μόνο να δουλέψουν, σύμφωνα με τον Ευκλείδη, δηλαδή με αναλογίες ισοδυνάμων μονάδων μέτρησης (λόγους πραγμάτων).

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα που επιτεύχθηκε ήταν ο νόμος του Merton που λέει ότι: Όταν η ταχύτητα ενός αντικειμένου αυξάνεται ανάλογα με το χρονικό διάστημα από μία τιμή 0 μέχρι μία τιμή V σε χρονικό διάστημα t, τότε η απόσταση που διανύθηκε είναι ίση με τη μισή απόσταση που διανύει ένα αντικείμενο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα V στο χρονικό διάστημα t. Ο σύγχρονος συμβολισμός είναι:

$$S(t)= \frac{1}{2}\, v\cdot t$$



σχήμα 3 Αναπαράσταση ταχύτητας από το ύψος ορθογωνίων

Πρόσθεσαν την εικασία, ότι η απόσταση που καλύφθηκε στο πρώτο μισό μιας τέτοιας κίνησης είναι το 1/3 της απόστασης που καλύπτεται στο δεύτερο μισό. Όμως αυτό εμφανίζεται δύσκολο να αποδειχθεί.

4.3.1 Το γράφημα ως μοντέλο για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα ταχύτητας – χρόνου.

Ο Nichole Oresme ήταν ο πρώτος ο οποίος ξεκίνησε να σχεδιάζει γραφήματα καταστάσεων, για να οπτικοποιήσει το πρόβλημα. Περιέγραφε πως γεωμετρικά στοιχεία, όπως γραμμές ή ορθογώνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν την τιμή μιας μεταβλητής: το μήκος μιας γραμμής ή η επιφάνεια του ορθογώνιου αναπαριστά την τιμή της μεταβλητής. Αυτά τα στοιχεία μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος μιας οριζόντιας γραμμής που αναπαριστά το χρόνο.

Καθώς ο Nichole Oresme εξερευνούσε την απόσταση που διανύθηκε από ένα αντικείμενο το οποίο κινούνταν με συνεχώς μεταβαλλόμενη ταχύτητα, γνώριζε ότι η ταχύτητα αυξάνει με ισοδύναμες ποσότητες σε ισοδύναμα χρονικά διαστήματα. Το γράφημα όπου αναπαρίσταται η ταχύτητα με το ύψος του ορθογωνίου και το επιλεγμένο χρονικό διάστημα με το πλάτος αυτού, απεικονίζεται στο **σχήμα 3**.

Ο Oresme μπορούσε να προσεγγίσει την απόσταση που διανύθηκε σε κάθε χρονικό διάστημα λαμβάνοντας υπ' όψιν τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος και την σταθερή ταχύτητα που είχε στο διάστημα αυτό. Η επιφάνεια του ορθογωνίου αναπαριστά αυτήν την απόσταση. Ο Oresme αποκάλεσε "γραμμή της έντασης" εκείνη τη διαγώνια γραμμή που διέρχεται από τις κορυφές των ορθογωνίων στο γράφημα και η οποία δημιουργείται όταν παρθούν τα χρονικά διαστήματα πολύ μικρά. Παρατήρησε ότι είναι μία ευθεία γραμμή και ότι το άθροισμα όλων των επιφανειών των ορθογωνίων αποτελεί μία προσέγγιση της επιφάνειας του τριγώνου, που δημιουργείται μεταξύ της "γραμμής της έντασης", και του οριζόντιου άξονα. Το αποτέλεσμα είναι ότι η απόσταση που διανύθηκε είναι ίση με την επιφάνεια του τριγώνου: $\frac{1}{2}Vt$.

Η δυναμική αυτής της γραφικής αναπαράστασης εμφανίζεται όταν προσπαθήσει κάποιος να αποδείξει την υπόθεση ότι: η απόσταση που καλύπτεται στο πρώτο μισό μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης είναι το 1/3 της απόστασης που καλύπτεται στο

δεύτερο μισό. Αυτό μπορεί να προέλθει εύκολα αν επεξεργαστούμε τις επιφάνειες του γραφήματος.

4.3.2 Ο Γαλιλαίος ερευνά την ελεύθερη πτώση

Το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν τα προηγούμενα αποτελέσματα οφείλεται στο ότι ασχολούνται με φαινόμενα που βασίζονται σε γενικές ιδέες και αρχές. Η κινηματική αποτελεί μία επιστήμη του επιχειρήματος παρά του πειράματος . Ο Γαλιλαίος ήταν αυτός που τον 17° αιώνα πραγματοποίησε τη μετάβαση προς την πειραματική φυσική. Έκανε την εικασία, ότι εάν ένα αντικείμενο εκτελεί ελεύθερη πτώση τότε κινείται με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα. Σχεδίασε πειράματα με αντικείμενα να κινούνται με σταθερή επιτάχυνση και εφάρμοσε τον νόμο του Merton στην πραγματική κίνηση.

Επιπλέον ο Γαλιλαίος έδωσε μία εξήγηση για τη σχέση που υπάρχει μεταξύ του τετραγώνου του χρόνου και της απόστασης, χρησιμοποιώντας προσθέσεις και αφαιρέσεις. Το επιχείρημα του ήταν, ότι ο λόγος των αποστάσεων που διανύθηκαν σε δύο ίσα χρονικά διαστήματα είναι $1:3$ δηλ. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$. Εάν βέβαια διαιρεθεί ο χρόνος σε τέσσερα ίσα χρονικά διαστήματα τότε είναι:

$$\Delta t_1=\Delta t_2 \qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{3}S_2}{S_2}=\frac{1}{3}$$

$$\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3=\Delta t_4 \qquad \frac{S_1}{S_3}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{S_1}{S_4}=\frac{1}{7}$$

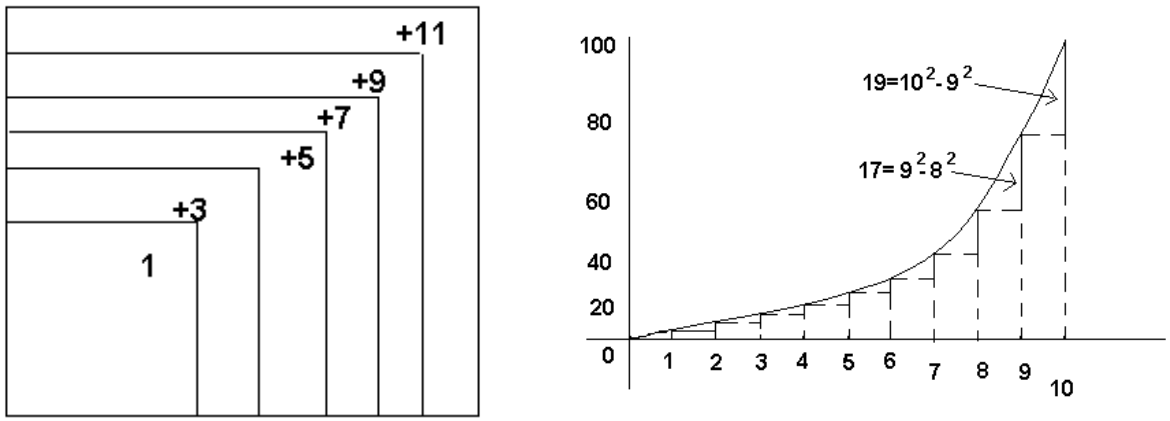
$1:3:5:7$ και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε μια σειρά από περιττούς αριθμούς. Ο Γαλιλαίος ήξερε ότι αυτές οι σειρές περιττών καταλήγουν στο τετράγωνο που υπάρχει στη σχέση χρόνου – απόστασης και με τη βοήθεια αυτού αξιολόγησε την εικασία του. Δημιούργησε με καρφιά μία τσουλήθρα. Οι αποστάσεις μεταξύ των καρφιών ήταν ανάλογες με τους παραπάνω περιττούς αριθμούς. Άφησε λοιπόν μία μπάλα να κυλήσει και έδειξε ότι η μπάλα αυτή χρειάστηκε τον ίδιο χρόνο για να προσπεράσει το κάθε ένα συνεχόμενο καρφί.

Τα πειράματα του Γαλιλαίου επιβεβαίωσαν ότι η απόσταση που διανύεται κατά την ελεύθερη πτώση αυξανόταν γραμμικά κατά τη διάρκεια κάθε χρονικού διαστήματος και από το αποτέλεσμα έφτασε στο συμπέρασμα, ότι η σχέση μεταξύ απόστασης χρόνου πρέπει να είναι τετραγωνική. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν, βρέθηκε το πιο ουσιώδες κομμάτι της συνάρτησης. Έγινε λοιπόν μία δυναμική αρχή για τον διαφορικό λογισμό. Εδώ η ιστορία σταματά, για να σκεφτούμε τι μπορούμε να μάθουμε από όλα αυτά.

4.3.3 Εξετάζοντας στο μικροσκόπιο τα αναδυόμενα μοντέλα

Μελετώντας την ιστορία του διαφορικού λογισμού και προσεγγίζοντας τον από την άποψη των αναδυόμενων μοντέλων, γινόμαστε μάρτυρες μιας ανάπτυξης του διαφορικού λογισμού η οποία ξεκινά με προβλήματα ως μοντέλα για την απόσταση και την ταχύτητα. Αρχικά, τέτοιου είδους προβλήματα αντιμετωπίστηκαν με ξεχωριστές προσεγγίσεις όπου σε κάθε μία αναλογούσε η εικόνα ενός ξεχωριστού γραφήματος. Αργότερα, παρόμοια γραφήματα που αρχικά παρουσιάζονταν με μία διακριτή μορφή και αργότερα με μία συνεχή, διαμόρφωσαν τη βάση για περισσότερο τυπικό διαφορικό λογισμό. Από τη μία μεριά των αναδυόμενων μοντέλων, θα μπορούσαμε να πούμε ότι γραφήματα διακριτών συναρτήσεων εμφανίζονται ως μοντέλα μιας κατάστασης, στην οποία η ταχύτητα και η απόσταση ποικίλουν, ενώ αργότερα αυτά τα γραφήματα αναπτύσσονται σε μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη μιας τυπικής μαθηματικής λογικής για τον διαφορικό λογισμό. Ωστόσο δεν είναι το γράφημα που αντικειμενοποιείται αλλά η δραστηριότητα. Αναφορικά με αυτό μπορούμε να μιλήσουμε για μία διαδικασία αντικειμενοποίησης. Για παράδειγμα, η πράξη της πρόσθεσης (αφαίρεσης) αντικειμενοποιείται και στη συνέχεια γίνεται το μαθηματικό αντικείμενο της ολοκλήρωσης (“παραγώγισης”). Η εικόνα, το γράφημα, υποστηρίζουν εποπτικά και την δραστηριότητα και την αντικειμενοποίηση της.

Είναι θεμιτό να προστεθεί, ότι δεν λαμβάνουμε τόσο κυριολεκτικά την έννοια της αντικειμενοποίησης. Για πολλούς μαθητές, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι κάτι μεταξύ μιας διαδικασίας και ενός αντικειμένου, ειδικά για την περίπτωση του διαφορικού λογισμού. Για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός, ότι η υποθάλπτουσα διαδικασία θα αποτελέσει ένα ουσιώδες κομμάτι του μαθηματικού αντικειμένου που



σχήμα 5 Αθροίσματα και προσαυξήσεις

αναπτύσσονται με αυτόν τον τρόπο, ο Tall χρησιμοποίησε τον όρο "**procept**". Επίσης, θα πρέπει να δεχτούμε το γεγονός, ότι η ανάπτυξη δεν θα είναι τόσο γραμμική (να αναπτύσσεται με σταθερό ρυθμό και προσανατολισμό) όσο οι περιγραφές προϋποθέτουν. Οι μαθητές θα μπορούν να μεταβαίνουν εμπρός και πίσω μεταξύ διαδικασίας και αντίληψης των αντικειμένων, πράγμα που κάθε φορά εξαρτάται από τα προβλήματα που υποχρεούνται να λύσουν.

Κοιτάζοντας την ιστορία του διαφορικού λογισμού, μας έρχεται στο μυαλό ο χαρακτηρισμός που έδωσε ο Kaput για το διαφορικό λογισμό ως "**τα μαθηματικά της αλλαγής**". Κατά τη διάρκεια της προσπάθειας που γίνεται για να χειραγωγηθεί αυτή η αλλαγή, ρόλο κλειδιού έπαιξε η μέθοδος προσέγγισης μιας συνεχούς μεταβαλλόμενης ταχύτητας με τη βοήθεια των διακριτών συναρτήσεων. Οι σειρές από προσθέσεις και αφαιρέσεις μπορούν να θεωρηθούν με έναν τρόπο ως ο ακατέργαστος προκάτοχος του διαφορικού λογισμού. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτήν την ιδέα στον διδακτικό σχεδιασμό, ξεκινώντας την έρευνα πάνω σε διακριτά σχέδια. Επίσης τα μαθηματικά που αφορούν σειρές των προσθέσεων και αφαιρέσεων προσφέρουν την ευκαιρία για επανανακάλυψη μιας ξεχωριστής παραλλαγής του βασικού θεωρήματος του διαφορικού λογισμού, σε ένα πρώιμο στάδιο.

Μία άλλη ιστορική άποψη, που μοιάζει σχετική για το διδακτικό σχεδιασμό είναι η εισαγωγή στο περιεχόμενο της ταχύτητας και της απόστασης. Αυτό μοιάζει να είναι ένα πλαίσιο αναφοράς κατάλληλο για μαθητές γυμνασίου. Αυτό συμβαίνει διότι από γενικής άποψης η ταχύτητα είναι μία αμφισβητούμενη έννοια γι' αυτούς. Επίσης η ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητα μοιάζει να είναι περισσότερο υπολογίσιμη από κάθε άλλη ιδέα που μοιάζει όμως απλή όπως είναι η μέση ταχύτητα.

4.3.4 Μία σειρά μαθημάτων για τον διαφορικό λογισμό στα πλαίσια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. (RME)

Σκέψεις όπως οι προηγούμενες επεξεργάζονται σε μία σειρά μαθημάτων για το διαφορικό λογισμό, που αναπτύσσεται για μαθητές ηλικίας 16 – 17 σε τάξεις γυμνασίου με προσανατολισμό προς τις θετικές επιστήμες. Η σειρά μαθημάτων ονομάζεται Πρόσθεση και Αφαίρεση, Απόσταση και Ταχύτητα (**Som & Verschil, Afstand & Snelheid – Kindit, 1997**). Ένα από τα κεφάλαια αυτής της σειράς βασίζεται σε ένα κείμενο του Polya με θέμα την ιστορία του Γαλιλαίου **(Polya , 1963)**.

Η ενότητα ξεκινάει με δραστηριότητες πάνω στις σειρές. Οι ιδιότητες και οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σειρών καθώς και τα αθροίσματά τους αλλά και οι προσαυξήσείς του ερευνούνται από τους μαθητές (**σχήμα 5**). Με αυτή τη διαδικασία, ο μαθητής αναπτύσσει αλγεβρικά εργαλεία που μπορεί να τα χρησιμοποιήσει σε μετέπειτα προβλήματα. Επίσης, θεωρείται ότι έτσι γίνεται μία πρώτη εισαγωγή στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συμβόλων της πρόσθεσης και των αθροισμάτων, των αυξήσεων και των συμβόλων της αφαίρεσης. Η έννοια του ορίου χρησιμοποιείται μόνο διαισθητικά μέχρι το τέλος της ενότητας.

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ αθροισμάτων και διαφορών αναπαρίσταται από τα εξής σύμβολα – τύπους:

: $\Delta n^2=2K+1$ και $\Sigma(2K+1)=n^2$. Αυτές οι ιδιότητες αναπαρίστανται οπτικά με γραφήματα. Γενικά η ξεχωριστή περίπτωση του κυρίως θεωρήματος αναπαρίσταται ως : $\Delta S(n)=D(K)$ και $\Sigma D(\kappa)=S(n)-S(0)$. Οι μαθητές χρησιμοποιούν υπολογιστές κατάλληλους για τη σχεδίαση γραφημάτων κατά την ενασχόλησή τους με τέτοιου είδους έρευνα. Μέσω γραφημάτων και πινάκων μπορούν να φτάσουν στο συμπέρασμα ότι $\Delta 3^n=2\cdot 3^k$ και με τη βοήθεια του θεωρήματος μπορούν να αποδείξουν ότι $\Sigma 3^\kappa=\frac{1}{2}(3^n-3^0)$.

Μετά από αυτή τη ξεχωριστή ανάλυση, πραγματοποιήθηκε η μετάβαση προς την μοντελοποίηση – τυποποίηση του χρόνου, της απόστασης και της ταχύτητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το στοιχείο κλειδί για την έννοια των αναδυόμενων μοντέλων είναι ότι τα μοντέλα αρχικά αναδύονται ως μοντέλα μιας κατάστασης, η οποία είναι εμπειρικά γνωστή στους μαθητές. Παρόμοια πορεία με τα αναδυόμενα μοντέλα, ακολουθούν και τα διακριτά γραφήματα τα οποία δεν εισάγονται ως αυθαίρετα

συστήματα συμβολισμού, αλλά ως μοντέλα ξεχωριστών προσεγγίσεων της κίνησης. Εφόσον οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι με συνεχή γραφήματα, επιλέγεται να προσεγγιστεί γράφημα της ταχύτητας το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Σημείο εκκίνησης αποτελεί, η μεσαιωνική αντίληψη για τη στιγμιαία ταχύτητα. Το θέμα συμβολισμού της ταχύτητας εισάγεται στο κείμενο που αφηγείται τη δουλειά του Γαλιλαίου. Οι πληροφορίες που δίνονται στους Μαθητές για τον ορισμό που είχε η στιγμιαία ταχύτητα στην εποχή του Γαλιλαίου αφορούν την απόσταση που καλύπτει ένα κινούμενο αντικείμενο, εάν αυτό διατηρήσει την στιγμιαία ταχύτητά του για μία δοσμένη χρονική περίοδο. Σε αυτό το περιεχόμενο, το πρόβλημα που τίθεται είναι το πως θα οπτικοποιηθεί η κίνηση ενός αντικειμένου το οποίο κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Καθώς θα αγωνίζονται οι μαθητές να λύσουν αυτό το πρόβλημα ίσως σκεφτούν να συμβολίσουν τις στιγμιαίες ταχύτητες με μικρά ορθογώνια. Εάν πάλι δεν το σκεφτούν από μόνοι τους και αφού όμως εργαστούν για λίγη ώρα ώστε να βρουν λύση αυτή η εκδοχή θα παρουσιαστεί προς τους μαθητές.

Εμμέσως πλην σαφώς, θα μπορούσε να σημειωθεί, ότι πάντα θα υπάρχει μία ένταση μεταξύ μιας προσέγγισης με θετική ανοδική πορεία που να επωφελείται των ανακαλύψεων των μαθητών και της ανάγκης:

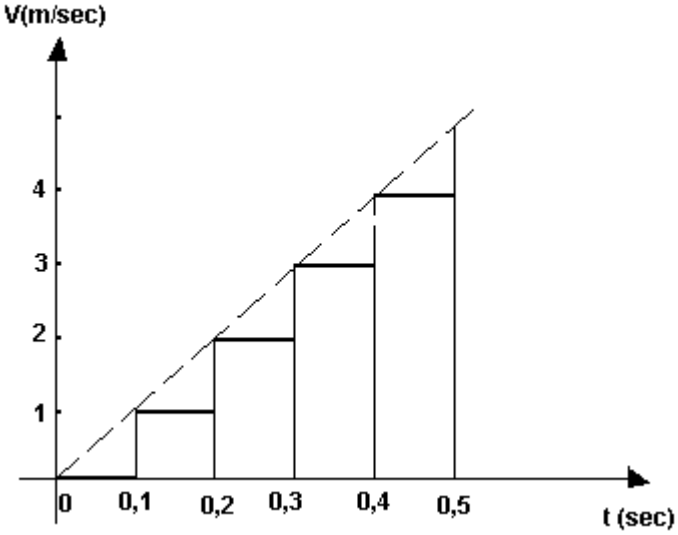
(α) για επίτευξη συγκεκριμένων εκπαιδευτικών σκοπών καθώς

(β) και για τον εκ των προτέρων σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων.

Ως συνέπεια ένα επίσης καθοδικό φαινόμενο είναι αναπόφευκτο να μην παρουσιαστεί στη διδασκαλία. Ωστόσο η σκέψη κλειδί για τους δασκάλους, είναι ότι οι μαθητές βιώνουν εμπειρικά αυτά τα καθοδικά φαινόμενα ως ανοδικά με την έννοια ότι είναι λύσεις που θα μπορούσαν να είχαν βρει από μόνοι τους. Για το σχεδιαστή της διδασκαλίας, αυτό που έχει αξία είναι να αγωνίζεται να διατηρήσει το κενό όσο το δυνατό πιο μικρό γίνεται μεταξύ του "**που βρίσκονται οι μαθητές**" και του "**τι εισάγεται**" ως βοήθεια προς αυτούς. Επιπλέον, οι δάσκαλοι μέσω της επικοινωνίας με τους μαθητές θα είναι ικανοί να μειώσουν αυτό το κενό.

Επιστρέφοντας στο περιεχόμενο της θεματικής ενότητας, αυτό που θέλουμε να τονιστεί είναι, ότι παρόλο που η ιδέα της χρήσης μικρών ορθογωνίων μπόρεσε να μεταδοθεί στους μαθητές, δεν σημαίνει αυτομάτως ότι λύθηκαν και όλα τα προβλήματα. Ένα βασικό πρόβλημα είναι αυτό του συντονισμού του ύψους και του

πλάτους των ορθογωνίων όταν αυτά χρησιμοποιούνται ως μία βαθμωτή (διακριτή) προσέγγιση για να οπτικοποιήσουν μία κίνηση.



σχήμα 6 Διακριτή προσέγγιση της συνεχούς μεταβαλλόμενης ταχύτητας

Στη συνέχεια, το θέμα της έρευνας θα είναι η σχέση που υπάρχει μεταξύ της επιφάνειας που περικλείεται από το γράφημα και τον οριζόντιο άξονα και της συνολικής απόστασης που καλύπτεται σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Για να το κατανοήσουν αυτό οι μαθητές, απαιτείται από τη μεριά τους να αντεπεξέλθουν στη σχέση που προκύπτει μεταξύ της κίνησης – της αναπαράστασης – και της προσέγγισης. Όλη αυτή η διαδικασία κατά την οποία αναπτύσσονται μαζί, ο τρόπος που μοντελοποιείται - τυποποιείται η κίνηση και η ανάπτυξη της έννοιας της κίνησης που μοντελοποιείται, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος κατευθυνόμενης επανανακάλυψης η οποία έρχεται σε αντίθεση με τη παραδοσιακή διαδικασία του μαθαίνω ένα νόμο που απευθείας δίνει την εξίσωση της επιφάνειας με την απόσταση.

Αρχικά στους μαθητές ειπώθηκε η ιστορία του Γαλιλαίου, ο οποίος έφτασε στο συμπέρασμα ότι η ταχύτητα κατά την ελεύθερη πτώση ενός αντικειμένου συνεχώς αυξάνεται. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν τη βαθμωτή γραφική παράσταση που προσεγγίζει το είδος αυτό της κίνησης. (**σχήμα 6**)

Ακολουθώντας το πρόβλημα του Γαλιλαίου ετίθετο ως εξής: « **Πόση είναι η απόσταση που διανύει το αντικείμενο**; ». Εδώ λοιπόν, αφού έχει σχεδιαστεί η βαθμωτή προσέγγιση της κίνησης, αναμένεται από τους μαθητές να συνδέσουν την

επιφάνεια, που περικλείεται από τη βαθμωτή γραφική παράσταση, με την επιφάνεια του τριγώνου που δημιουργείται από μία συνεχή γραμμή: S(t)= $\frac{t*10t}{2} = 5t^2$

Αυτός ο τύπος στον οποίο καταλήξαμε αποκαλύπτει τη τετραγωνική σχέση που υπάρχει μεταξύ απόστασης – χρόνου, την οποία ο Γαλιλαίος συνήθιζε εμπειρικά να ελέγχει στις υποθέσεις του. **Σύμφωνα με αυτόν τον υπολογισμό, το πρώτο βήμα έγινε όταν το ενδιαφέρον μεταπήδησε από την περιγραφή της κίνησης προς τον υπολογισμό θεμελιωδών μεγεθών**.

Μετά από αυτή την εισαγωγή στον ολοκληρωτικό λογισμό, οι μαθητές άρχισαν να δουλεύουν προβλήματα με θέμα τον διαφορικό λογισμό. Αυτό σημαίνει, ότι έπρεπε να προσδιορίσουν ταχύτητα μέσα από γραφικές παραστάσεις αποστάσεις – χρόνου και μέσα από τύπους. Σε δραστηριότητες που ακολουθούν το μοντέλο θα ξεκινήσει να λειτουργεί από τη μία μεριά ως μοντέλο εύρεσης της μορφής διαφορικών και ολοκληρωτικών συναρτήσεων και από την άλλη μεριά ως μοντέλο για συγκεκριμένους αλγεβρικές συναρτήσεις. Συγχρόνως επιτεύχθηκε μετάβαση από προβλήματα που συγκεντρώνουν το ενδιαφέρον τους σε θέματα από την καθημερινή ζωή προς τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις. Για να επιτευχθεί αυτή η μετάβαση και από την πλευρά των μαθητών, θα πρέπει να αναπτύξουν έναν σκελετό αναφοράς που θα τους καθιστά ικανούς να κοιτάζουν τέτοιου είδους προβλήματα από μαθηματικής άποψης **(Gravemeijer 1999).** Αυτό είναι λοιπόν που προσπαθεί αυτή η σειρά μαθημάτων να αναπτύξει, δηλαδή την παραγωγή ενός τέτοιου σκελετού, που θα βοηθάει τους μαθητές να εξάγουν μαθηματικές έννοιες και σχέσεις.

Σε αυτή την οραματισμένη διαδικασία της προοδευτικής μαθηματικοποίησης, οι συμβολισμοί και τα μοντέλα παίζουν το ρόλο κλειδιού. Η διακριτή συνάρτηση είναι το κεντρικό μοντέλο σε συνδυασμό με την βαθμωτή γραφική της παράσταση που λειτουργεί ως περιγραφή. Αυτό το μοντέλο αποτελεί τη βάση για την ολοκλήρωση και τη διαφορική μέσω αθροισμάτων και διαφορών. Παρόλο που η διακριτή συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως το στήριγμα που δίνει ώθηση και συνάφεια στο μοντέλο, η οπτική αναπαράσταση παίζει επίσης σημαντικό ρόλο. Σύμφωνα με τον Zatour (αναφέρεται από την Meira 1995) γίνεται αποδεκτό ότι η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων βοηθά ώστε να γίνουν τα μαθηματικά το επίκεντρο του ενδιαφέροντος.

4.3.5 Η δημιουργία μιας μαθηματικής πραγματικότητας

Η ερώτηση που τοποθετήθηκε στην αρχή της θεματικής ενότητας ήταν: « **Πώς θα βοηθηθούν οι μαθητές ώστε να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις των τυπικών μαθηματικών ;»** Κεντρικό ρόλο στην όλη τοποθέτηση έπαιξε η προσέγγιση που αφορούσε την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME). Αυτή η προσέγγιση διαφοροποιείται από άλλες προσεγγίσεις για τον λόγο του ότι ξεπερνάει το διχασμό που υπάρχει μεταξύ τυπικής και άτυπης γνώσης, με το να σχεδιάζει διδακτικά μία μαθησιακή πορεία κατά την οποία οι μαθητές επανανακαλύπτουν τα τυπικά μαθηματικά. Ο ιδανικός τρόπος ανάπτυξης μίας τέτοιας μαθησιακής πορείας θα ήταν τα τυπικά μαθηματικά να αναδυθούν μέσω μαθηματικών δραστηριοτήτων που θα γίνονται από τους μαθητές. Αυτός ο ιδανικός τρόπος συνδέεται με το επιχείρημα του **Freudenthal (1991) ότι «Τα μαθηματικά θα πρέπει να αρχίζουν και να συνεχίζονται βασισμένα στην κοινή λογική».** Ο Freudenthal ερμήνευε αυτό το γνωμικό με δυναμικό τρόπο και πρόσθετε ότι η κοινή λογική δεν είναι στατική. Επισήμανε, για παράδειγμα, ότι αυτό που θεωρείται κοινή λογική για κάποιον που είναι μαθηματικός, διαφέρει σημαντικά για κάποιον άλλον απλό άνθρωπο. Επιπροσθέτως τόνισε ότι η κοινή λογική αναπτύσσεται σε σειρές μαθημάτων. Εξαιτίας αυτού, στην πρώτη φάση της σειράς μαθημάτων, έγινε περιγραφή της στιγμιαίας ταχύτητας όσον αφορά την απόσταση που θα μπορούσε να καλυφθεί στην περίπτωση που είχαμε σταθερή ταχύτητα. Αυτή η ερμηνεία αποτελεί μία δραστηριότητα κοινής λογικής.

Με παρόμοιο τρόπο, η διακριτή προσέγγιση της μεταβαλλόμενης ταχύτητας, μπορεί να θεωρηθεί κι αυτή ως δραστηριότητα κοινής λογικής. Μέχρι λοιπόν να ολοκληρωθεί η σειρά μαθημάτων, η δραστηριότητα σε περιβάλλον δομημένο με επίπεδα και κλίσης γραφικών παραστάσεων θα έχει αποτελέσει κοινή λογική για τους μαθητές.

Αυτή η εξέλιξη ίσως αποτελέσει το ρόλο των context problems στην RME. Όπως ειπώθηκε προηγούμενα, τα context problems ορίζονται ως προβλήματα που αφορούν καταστάσεις εμπειρικά γνωστές στους μαθητές. Το παραπάνω παράδειγμα θεωρείται ως η απόδειξη της συμφυούς ανάπτυξης εμπειρικής πραγματικότητα και μαθηματικής εξέλιξης για τον μαθητή.

Ο Freudenthal δίνει την ακόλουθη εξήγηση: «Προτιμώ να εισάγω τον όρο "πραγματικότητα" ως εκείνο το οποίο, σε συγκεκριμένη φάση, η κοινή λογική εμπειρικά γνωρίζει ως πραγματικό » (Freudenthal, 1991 p17). Αυτή η χρήση του όρου "πραγματικότητα" στην RME βρίσκεται σε αρμονία με την χωρική μεταφορά του Greeno (1991). Από αυτό φτάνουμε στο συμπέρασμα, ότι ο συνολικός σκοπός του διδακτικού σχεδιασμού είναι να υποστηρίζει την βαθμιαία ανάδυση αυτού που θεωρείται ως κάτι το οποίο μοιραζόμαστε, δηλαδή της μαθηματικής πραγματικότητας.

Εάν οι μαθητές βιώσουν εμπειρικά την διαδικασία της επανανακάλκυψης μαθηματικών ως μία επέκταση της κοινής λογικής, τότε μόνο θα ξεπεράσουν το διχασμό μεταξύ της καθημερινότητας και των μαθηματικών. Τότε λοιπόν μαζί θα αποτελούν μέρος της πραγματικότητας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει μία αναστοχαστική σχέση μεταξύ της χρήσης των context problems και της ανάπτυξης της εμπειρικής πραγματικότητας του κάθε μαθητή. Από τη μία μεριά τα context problems είναι βαθιά ριζωμένα σε αυτήν την πραγματικότητα και από την άλλη μεριά η λύση τους, βοηθά τους μαθητές να επεκτείνουν την πραγματικότητα. Μολοταύτα αυτός ο δυναμικός χαρακτήρας της πραγματικότητας ερμηνεύει τα context problems ως αφετηρίες διδακτικών σειρών που συχνά συνδέονται με την καθημερινότητα των μαθητών. Αυτό ακριβώς συμβαίνει και στη σύνδεση της ταχύτητας με την απόσταση, όπου η σύνδεση αυτή προσφέρει στους μαθητές τους τρόπους για να αιτιολογήσουν και να δράσουν λογικά εξ' αρχής.

5η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Γενικά Συμπεράσματα

Η οραματισμένη εκπαίδευση ονομάστηκε "Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση" και βασίστηκε πάνω σε ορισμένες αρχές. Οι αρχές αυτές είναι:

- ✓ Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση αναζητά την **ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ.**
- ✓ Αφετηρία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η "**ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ**" (Έχει λοιπόν μαθητοκεντρικό χαρακτήρα).
- ✓ Η ιδέα του Freudenthal για ανάπτυξη μιας μαθηματικής εκπαίδευσης είχε τον εξής χαρακτήρα: «**Τα μαθηματικά ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα**».
- ✓ **Η αρχή της επανανακάλυψης και της κατευθυνόμενης επανανακάλυψης** θα δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να επανανακαλύψουν τα μαθηματικά μέσω της διπλής μορφής της διαδικασίας της **μαθηματικοποίησης**.

  Μαθηματικοποιώντας λοιπόν ένα κεντρικό θέμα από την καθημερινότητα, εμπειρικά γνωστό στους μαθητές (εξαιτίας του γεγονότος αυτού προέκυψε το όνομα ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση) έχουμε την έννοια της **οριζόντιας μαθηματικοποίησης**, ενώ μαθηματικοποιώντας ένα μαθηματικό θέμα έχουμε την έννοια της ΚΑΘΕΤΗΣ μαθηματικοποίησης.
- ✓ Μέσω της μαθηματικοποίησης υπονοείται η ύπαρξη μεγάλης **ΑΥΤΟΝΟΜΙΑΣ** των μαθητών. Έχουμε λοιπόν την βασική αρχή που λέει ότι:

  ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ΚΑΙ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΜΑΘΑΙΝΟΝΤΑΙ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΩΠΙΚΩΝ ΔΙΑΝΟΗΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ.
- ✓ Μέσω της προηγούμενης βασικής αρχής προκύπτει μία άλλη αρχή που υποστηρίζει, ότι μόνο αν οι μαθητές αναπτύξουν τα μαθηματικά από μόνοι τους θα οδηγηθούν στην κατανόηση της έννοιας της **ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΗΣ ΚΟΙΝΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ**

Το ερώτημα που προέκυψε και αναζητούσε απάντηση ήταν το εξής: «**Από τι πρέπει να αποτελείται η διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος ώστε να πληροί τις βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης ;»**

Η ερώτηση αυτή απαντάται αρχικά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο όσον αφορά τον χαρακτήρα του προγράμματος σπουδών αλλά και σε ένα θεωρητικό επίπεδο όσον αφορά τα μέσα που χρησιμοποιεί ο ερευνητής για τη διαδικασία εκμάθησης.

Έτσι λοιπόν η διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος αποκτά τον χαρακτήρα και τη δομή μιας πειραματικής έρευνας. Σε αυτό το πείραμα η έρευνα θα αποτελείται από δύο φάσεις. Η $1^{η}$ φάση αφορά τον προκαταρκτικό σχεδιασμό και η $2^{η}$ φάση αφορά την επεξεργασία της σειράς μαθημάτων.

Ο προκαταρκτικός σχεδιασμός θα βασίζεται στη λεπτομέρεια, θα είναι καλά οργανωμένος και θεμελιωμένος στη γνώση. Επίσης θα έχει τον χαρακτήρα συλλογής υποθέσεων, οι οποίες θα αξιολογούνται σε ένα εκπαιδευτικό πείραμα. Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού ο ερευνητής, σύμφωνα με τον **Freudenthal** εκτελεί ένα νοητικό πείραμα στο οποίο θα οραματίζεται τον τρόπο που η διδασκαλία και η μάθηση θα προχωρήσουν. Το επόμενο βήμα είναι αυτή η διδακτική δραστηριότητα να δοκιμαστεί στην τάξη. Σε αυτό το σημείο, ο ερευνητής ψάχνει σημάδια επιβεβαίωσης ή απόρριψης των απαιτήσεων του νοητικού πειράματος. Παράλληλα με αυτά δραστηριοποιείται για νέες πιθανές εκδοχές. Το σύνολο των πληροφοριών που συλλέγεται από τα εμπειρικά δεδομένα των νοητικών πειραμάτων πυροδοτεί την κυκλική διαδικασία **αξιολόγησης** και **επεξεργασίας**.

Ο ερευνητής λοιπόν κατασκευάζει μία προσωρινή συλλογή από διδακτικές δραστηριότητες, οι οποίες δουλεύονται με μία επαναληπτική διαδικασία σχεδιασμού και αξιολόγησης. Για να κατασκευαστεί λοιπόν ένα προσωρινό σχέδιο ο ερευνητής μπορεί να πάρει ιδέες από διάφορες πηγές και να τις ταιριάξει στην πρωτότυπη δραστηριότητα που ετοιμάζει. Τέτοιες πηγές έμπνευσης μπορεί να είναι σχολικά προγράμματα, κείμενα με θέμα τη μαθηματική εκπαίδευση, ερευνητικές αναφορές κ.α. σημειώνεται ότι υιοθετώντας μία δραστηριότητα που βρίσκεται σε μία σειρά μαθημάτων ή σε μία πειραματική προσέγγιση δεν σημαίνει και την αυτόματη υιοθέτηση της διδακτικής θεωρίας που αυτή βασίζεται. Η προσέγγιση αυτή λέγεται "**theory guided bricolage**"

Οι επιλογές και οι υιοθετήσεις δραστηριοτήτων για τον προκαταρκτικό σχεδιασμό μιας σειράς μαθημάτων που ακολουθεί ο αναπτυξιακός ερευνητής καθοδηγούνται

από τη θεωρία για την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση που βασίζεται στις γενικές αρχές που διέπουν τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Στη θεωρία αυτή βασίζεται και η δεύτερη φάση ενός πειράματος έρευνας που είναι η περαιτέρω επεξεργασία ολόκληρης της σειράς μαθημάτων η οποία διεκπεραιώνεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας πειραματισμού – επεξεργασίας – αξιολόγησης – βελτίωσης και υιοθέτησης στοιχείων.

Το αποτέλεσμα της 2ης φάσης είναι να αναπτυχθεί μία "**τοπική**" διδακτική θεωρία, που υπονοείται στη σειρά διδασκαλίας, η οποία θα περιγράφει τον τρόπο που το συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να διδαχθεί ώστε να πληρούνται οι βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης. Η τοπική διδακτική θεωρία διαφέρει από τη σειρά διδασκαλίας που ακολουθείται για να διδαχτεί το θέμα αυτό. Η διαφορά είναι ότι η θεωρία αυτή επικεντρώνεται σε μία αρχή που θα κρίνει την επιλογή των διδακτικών δραστηριοτήτων που θα ακολουθηθούν. Επίσης η αρχή αυτή επεξηγεί για το πως αυτές οι διδακτικές δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές ώστε να επανανακαλύψουν τα μαθηματικά.

Τα στοιχεία στα οποία βασίζεται μία "τοπική διδακτική θεωρία" και κατ' επέκταση ο τρόπος που ένα συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να διδαχτεί ώστε να πληρούνται οι βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης είναι:

1. η διδασκαλία θα πρέπει να οικοδομηθεί πάνω στην άτυπη γνώση και τις στρατηγικές των μαθητών. Έτσι λοιπόν οι διδακτικές δραστηριότητες που θα επιλεγούν θα πρέπει να συνδέονται με την άτυπη γνώση και τις στρατηγικές των μαθητών.
2. τα "context problems" που θα χρησιμοποιηθούν πρέπει να είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να αφυπνίζουν την άτυπη γνώση και τις στρατηγικές που παρουσιάζουν αυθόρμητα οι μαθητές όταν τους ζητηθεί να επιλύσουν ένα πρόβλημα.
3. ο σκοπός των διδακτικών δραστηριοτήτων θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών στους μαθητές που θα τους οδηγούν με αυτό τον τρόπο σε παραγωγικές λειτουργίες όπως: σχηματοποίηση, εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων και περικοπή – αφαίρεση.

Επίσης η τοπική διδακτική θεωρία θα πρέπει να περιέχει ιδέες προχωρημένου επιπέδου που ξεπερνούν το συγκεκριμένο θέμα για το οποίο αναπτύσσεται. Αυτές οι θεωρητικές ιδέες θα αξιολογούνται σύμφωνα με 2 από τις αρχές της ρεαλιστικής

εκπαίδευσης: 1ον Από το αν η συγκεκριμένη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών αποτέλεσε μέρος μιας ανθρώπινης δραστηριότητας.

και 2ον Αν υπήρξαν αποτελέσματα και ενδείξεις για την ενεργή συμμετοχή των μαθητών.

Τα στοιχεία της τοπικής διδακτικής θεωρίας αντανακλούν τις βασικές αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης.

Το επόμενο βήμα είναι να περάσουμε από κάτι το συγκεκριμένο, όπως είναι η "τοπική" διδακτική θεωρία, σε κάτι πιο θεωρητικό, όπως είναι η εξειδικευμένη διδακτική θεωρία για τη ρεαλιστική εκπαίδευση. Ο λόγος που αποκαλείται με την προηγούμενη έκφραση είναι ότι αυτή η διδακτική θεωρία αφορά μόνο την μαθηματική εκπαίδευση και είναι συνδεδεμένη με τη ρεαλιστική προσέγγιση.

Ο **Treffers (1987)** κατασκεύασε ένα σκελετό διδακτικής θεωρίας χρησιμοποιώντας κοινά χαρακτηριστικά που συναντώνται σε τοπικές διδακτικές θεωρίες επιμέρους θεμάτων.

Τα τρία συστατικά που χρησιμοποίησε ο Treffers για να δημιουργήσει τον θεωρητικό σκελετό είναι:

1. Η θεωρία των επιπέδων του Van Hiele (1975)
2. Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal (1983)
3. Η ιδέα της προοδευτικής μαθηματικοποίησης

Ο Treffers χρησιμοποίησε τη θεωρία επιπέδων του Van Hiele για να περιγράψει από σφαιρικής άποψης μια σειρά μαθημάτων. Ονόμασε τα επίπεδα που θα ακολουθηθούν ως εξής:

Α. Διαισθητικό – φαινομενολογικό επίπεδο

Β. Τοπικό περιγραφικό επίπεδο

Γ. Επίπεδο συστηματικοποίησης του κεντρικού θέματος

Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal ολοκληρώνει τη γενική εικόνα του σκελετού.

Ο ρόλος της προοδευτικής μαθηματικοποίησης είναι να διευκολύνει τη μετάβαση μεταξύ των τριών επιπέδων.

Ο Treffers διέκρινε 5 χαρακτηριστικά της προοδευτικής μαθηματικοποίησης.

1. Η κεντρική τοποθέτηση των contextual problems ως σημεία αφετηρίας και εφαρμογών.
2. Η χρησιμοποίηση σχεδίων και μοντέλων συμπεριλαμβανομένων και προσχεδιασμένων καταστάσεων (πρότυπα)
3. Η συνεισφορά των μαθητών όσον αφορά τις προσωπικές τους κατασκευές και τις ελεύθερες προσωπικές τους δημιουργίες
4. Ο επικοινωνιακός χαρακτήρας της διδακτικής δραστηριότητας
5. Η ανάμιξη διαφόρων μαθησιακών τεχνικών

Αξίζει να σημειωθεί, ότι προτού ένα πείραμα έρευνας πραγματικά αρχίσει, ο ερευνητής θα πρέπει να κάνει ανάλυση της κατάστασης βασισμένος στην εξής ερώτηση:

«Γιατί τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών δεν είναι επιτυχημένα ;»

Γενικά η ανάλυση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και ο προκαταρκτικός σχεδιασμός μιας σειρά μαθημάτων, βασίζονται στην κεκτημένη γνώση του ερευνητή. Πέρα από αυτό ο ερευνητής θα χρησιμοποιήσει τη θεωρία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, εφαρμόζοντας τις κεντρικές αρχές της μέσω **ΜΕΘΟΔΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ**, που εμπεριέχουν αιτιολόγηση και βασίζονται στην εμπειρία.

Ο σκελετός λοιπόν της εξειδικευμένης διδακτικής θεωρίας που ορίστηκε προηγούμενα μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή των στρατηγικών που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό ενοτήτων. Αυτές οι στρατηγικές αποτελούν αντιστοίχηση των χαρακτηριστικών της προοδευτικής μαθηματικοποίησης που διέκρινε ο Treffers. Έτσι έχουμε:

1. Διδακτική φαινομενολογία
2. Τα μεσολαβούμενα (αναδυόμενα μοντέλα)
3. Η συνεισφορά των μαθητών όσον αφορά τις προσωπικές τους κατασκευές και ελεύθερες προσωπικές τους δημιουργίες
4. Η αρχή της επανανακάλυψης και της κατευθυνόμενης επανανακάλυψης
5. Η ανάμιξη διαφόρων μαθησιακών τεχνικών – μεθόδων - αρχών

1. **Η διδακτική φαινομενολογία** απαιτεί από τον ερευνητή να ψάξει για κατάλληλα "context problems". Έτσι λοιπόν η διδακτική φαινομενολογία (**Freudenthal 1983**) υποδεικνύει τις εφαρμογές ως τις πιθανές πηγές πληροφοριών για τον ερευνητή. Μία φαινομενολογική ανάλυση των συνθηκών εφαρμογής τους βοηθά τον ερευνητή να αποκτήσει άποψη για τη περαιτέρω διδακτική τους χρήση στη διαδικασία της επανανακάλυψης **(Streefland 1993).** Η καταλληλότητα λοιπόν των "context problems" είναι διπλή και επίσης έχει να κάνει και με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ του περιεχομένου με τις αυθόρμητες στρατηγικές επίλυσης των μαθητών. **Οι ερωτήσεις που πρέπει να απαντώνται θετικά από ένα "context problem" είναι:**

1. κάνουν πράγματι οι μαθητές χρήση των πληροφοριών που προσφέρει ένα context ;
2. εφαρμόζουν οι μαθητές την δική τους εξειδικευμένη γνώση ;
3. μπορούν οι λύσεις που προτείνουν οι μαθητές να προσφέρουν δυνατότητες για " **κάθετη** " μαθηματικοποίησης ;

Ένα άλλο κριτήριο για τον ερευνητή αποτελεί το ενδεχόμενο η γνώση που αναπτύχθηκε με τον παραπάνω τρόπο να μπορέσει να εφαρμοστεί σε πολλές περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι η διδακτική φαινομενολογία σκιαγραφεί το πεδίο εφαρμογής που θα πρέπει να θεωρηθεί.

Η διδακτική αρχή που αναπτύσσεται εδώ είναι: (Δ1) : "Η δημιουργία συγκεκριμένης βάσης προσανατολισμού".

2. Διαμεσολαβητικά ή αναδυόμενα μοντέλα αναπτύσσονται στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση ώστε να συνδέουν την επίσημη με την ανεπίσημη γνώση. Τα μοντέλα λοιπόν συνδέονται αρχικά με το περιεχόμενο – πλαίσιο αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι τα μοντέλα περιγράφουν αρχικά "contextual problems" του πλαισίου. Στη συνέχεια λύνοντας παρόμοια "contextual problems" θα προωθηθούν προς τη γενίκευση και ανεξαρτησία του μοντέλου. Αυτό βοηθά το ίδιο το μοντέλο να λειτουργήσει ως βάση για μια περαιτέρω τυποποίηση. Με αυτή τη σειρά λοιπόν, η διαδικασία επανανανακάλυψης δομείται σε τέσσερα επίπεδα, τα οποία δεν έχουν να κάνουν μόνο με πραγματικά μοντέλα αλλά και με ιδέες, στρατηγικές.

1. Το επίπεδο της επικρατούσας κατάστασης

2. Το επίπεδο αναφοράς (context)
3. Το γενικό επίπεδο
4. Το επίπεδο τυπικών μαθηματικών

Καταλήγοντας, σύμφωνα με το χαρακτηρισμό των επιπέδων και τον σχετικό ρόλο των αναδυόμενων μοντέλων, προσφέρονται τα απαιτούμενα **κριτήρια** τους. **Τα κριτήρια αυτά παίρνουν τη μορφή :**

1. της φυσικότητας
2. της κάθετης δύναμης
3. της ευρύτητας της εφαρμογής

Η διδακτική αρχή που αναπτύσσεται εδώ είναι: (Δ2): "Χρησιμοποίηση μοντέλων-σχημάτων και συμβόλων"

3. Η συνεισφορά των μαθητών όσον αφορά τις προσωπικές τους κατασκευές και τις ελεύθερες προσωπικές τους δημιουργίες.

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση και κατ' επέκταση η διδακτική φαινομενολογία σε επίπεδο σχεδιασμού υποστηρίζει ότι μία κατάσταση πραγματική ή φανταστική ή ακόμη ένα πρόβλημα σε πλαίσιο καθορίζεται ως η αφετηρία της εκμάθησης των μαθηματικών που στη συνέχεια διερευνάται από δραστηριότητες **οριζόντιας μαθηματικοποίησης**.

Τέτοιες δραστηριότητες είναι: η οργάνωση του προβλήματος, η αναγνώριση και περιγραφή συγκεκριμένων μαθηματικών σε γενικό πλαίσιο, η ανακάλυψη σχέσεων και στρατηγικών, η ανακάλυψη ομοιοτήτων σε φαινομενικά διαφορετικές καταστάσεις και τέλος μεταφορά σε ένα γνωστό μαθηματικό πρόβλημα.

Η διαδικασία μετάφρασης καταλήγει στη δημιουργία ενός μοντέλου το οποίο επεξεργάζεται μαθηματικά στη φάση της **κάθετης μαθηματικοποίησης**.

Τέτοιες δραστηριότητες είναι: αναπαράσταση μιας σχέσης με μαθηματικούς τύπους, χρήση ήδη γνωστών μοντέλων, προσαρμογή και βελτίωση αυτών και τέλος έχουμε αφαίρεση και γενίκευση.

Η διδακτική αρχή που αναπτύσσεται εδώ είναι: (Δ3) :

"Ανάθεση ειδικών δραστηριοτήτων στους μαθητές

(ελεύθερη δημιουργία – πρόκληση για διαπραγμάτευση)"

4. Η αρχή της επανανακάλυψης και της κατευθυνόμενης επανανακάλυψης

Η αρχή της επανανακάλυψης και της κατευθυνόμενης επανανακάλυψης αποτελούν την αλληλεπιδραστική σχέση μεταξύ μαθητών και δασκάλων. Η αρχή της επανανακάλυψης προσφέρει την εξής συμβουλή: «**Σκεφτείτε τον τρόπο που θα σας οδηγήσει να το καταλάβετε από μόνοι σας**». Αυτή είναι η μέθοδος του Σωκράτη, που όμως στη ρεαλιστική εκπαίδευση ο ρόλος του μαθητή είναι πιο ενεργός. Η αρχή της επανανακάλυψης υποθέτει ότι οι προσωπικές λύσεις των μαθητών θα καλλιεργήσουν το απαιτούμενο έδαφος με μία ποικιλία από επίπεδα λύσεων, που θα παρέχουν με την σειρά τους ερεθίσματα στον ερευνητή για το μαθησιακό μονοπάτι που θα πρέπει να ακολουθηθεί. Η ποικιλία επιπέδων λύσεων, σύμφωνα με την αρχή της επανανακάλυψης, θα βοηθήσει τον δάσκαλο να συμβιβάσει την καθοδήγηση με την αυτονομία των μαθητών.

Η διδακτική αρχή που αναπτύσσεται εδώ είναι: (Δ4): "Αλληλεπιδραστική Διδασκαλία"

5. Η ανάμιξη διαφόρων μαθησιακών τεχνικών.

Η διδακτική αρχή που αναπτύσσεται εδώ είναι: **(Δ5): ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**. Σε όλες τις διδακτικές αρχές από $Δ_1$ έως $Δ_5$ που διατυπώθηκαν παραπάνω συνδέονται οι μαθησιακές αρχές από M_1 έως M_5. Η σύνδεση δεν είναι ένα προς ένα αλλά αποτελείται από μία πολύπλοκη συνδεσμολογία των παρακάτω πέντε μαθησιακών αρχών με τις προηγούμενες 5 διδακτικές αρχές.

Οι μαθησιακές αρχές είναι

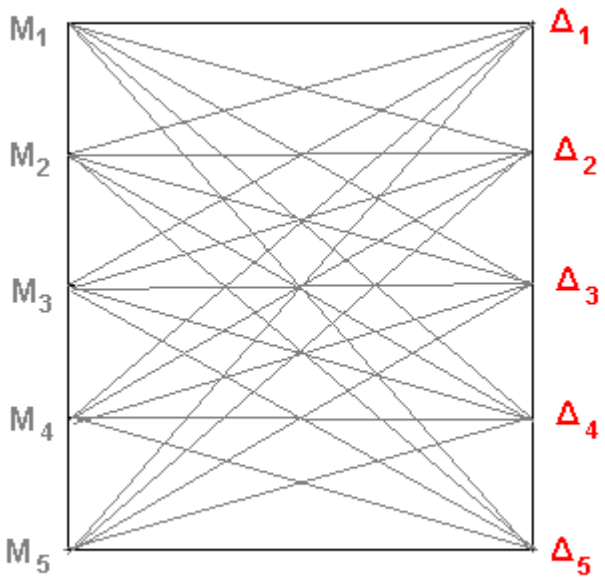
(Μ1): Η μάθηση ως κατασκευή (η γνώση κατασκευάζεται)

(Μ2): Η μάθηση ως διαδοχή επιπέδων

(Μ3): Η αναστοχαστική διάσταση της μάθησης

(Μ4): Η μάθηση ως κοινωνική δραστηριότητα (η κοινωνική διάσταση της μαθηματικής εκπαίδευσης)

(Μ5): Ο δομικός χαρακτήρας της μάθησης



Δ1: "Η δημιουργία συγκεκριμένης βάσης προσανατολισμού"

Δ2: "Χρησιμοποίηση μοντέλων-σχημάτων και συμβόλων"

Δ3: "Ανάθεση ειδικών δραστηριοτήτων στους μαθητές

(ελεύθερη δημιουργία – πρόκληση για διαπραγμάτευση)"

Δ4: "Αλληλεπιδραστική Διδασκαλία"

Δ5: ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ & ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι μαθησιακές αρχές και οι διδακτικές αντανακλούν τις θεμελιώδεις αρχές της ρεαλιστικής μαθησιακής εκπαίδευσης για το σχεδιασμό διδακτικών ενοτήτων.

Ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων πραγματοποιείται σε ειδικά κέντρα έρευνας και ανάπτυξης και έρχεται εις πέρας από ειδικούς του τομέα διδακτικής των μαθηματικών. Οι δάσκαλοι (μαθηματικοί της εκπαίδευσης) από την πλευρά τους περιορίζονται στο να κάνουν σημαντικές συνεισφορές στο είδη διαμορφωμένο εσωτερικό του σκελετού του σχεδίου. Η προσαρμογή λοιπόν των διδακτικών ενοτήτων στο περιβάλλον της τάξης απαιτεί σχεδιασμό σε μικρότερη κλίμακα και υπεύθυνος γι' αυτό θεωρείται ο δάσκαλος. Ο ρόλος του δασκάλου στο σχεδιασμό και εφαρμογή των διδακτικών ενοτήτων στη διδασκαλία ερμηνεύεται ως αυτός του καθοδηγητή και αντιπαραβάλλεται για καλύτερη κατανόηση του ρόλου του ως του σκηνοθέτη παρά του σεναριογράφου. Προσπαθώντας να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι στο θέμα των διδακτικών ενοτήτων αναφέρονται ότι οι ουσιώδεις διδακτικές ενότητες θα πρέπει να έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

1) Τυπικά χαρακτηρίζονται πάντα από ένα όνομα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι τα "Αριθμογώνια" (**2η θεματική ενότητα 2.4.1**)

2) Να αντιπροσωπεύουν κεντρικούς σκοπούς και αρχές της διδασκαλίας των μαθηματικών.

3) Να είναι από μόνες τους πλούσιες πηγές για μαθηματικές δραστηριότητες

4) Να είναι εύκαμπτες και να προσαρμόζονται εύκολα στις καταστάσεις ακόμη και μιας ιδιαίτερης τάξης.

5) Να βασίζονται σε μαθηματικές ψυχολογικές και παιδαγωγικές αντιλήψεις που διέπουν και διαμορφώνουν την διδασκαλία και την μάθηση. Με τον χαρακτήρα αυτό γίνονται εργαλεία **εμπειρικής έρευνας** και **αντικείμενα μελέτης**.

Ένα παράδειγμα διδακτικής ενότητας που βασίζεται στα "Αριθμογώνια" (2η θεματική ενότητα 2.4.1) αποτελείται από μία σειρά καθηκόντων και προβλημάτων που αναπτύσσονται με φυσικό τρόπο από το μαθηματικό περιεχόμενο. Η γενική δομή μιας τέτοιας διδακτικής ενότητας είναι:

1) Δίνεται στους μαθητές μία δραστηριότητα δηλαδή ένα πρόβλημα και τους ζητείται να κάνουν ορισμένα πράγματα.
2) Η πρώτη προσέγγιση γίνεται μέσω της διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών όπου οι μαθητές επικοινωνούν τις ιδέες τους.

3) Μέσω αυτής της δραστηριότητας ζητείται από τους μαθητές να διατυπωθεί ο κανόνας και εξασφαλίζεται το γεγονός ότι έχει κατανοηθεί από όλους τους μαθητές.
4) Ζητείται να διατυπωθεί ο προηγούμενος κανόνας μέσω αυστηρών μαθηματικών που οδηγούν στον συμβολισμό και στην τυποποίησή του.
5) Δίνονται εφαρμογές προς λύση στους μαθητές ώστε έτσι να καλύπτονται διαφορετικές περιπτώσεις του κανόνα.

Ζητείται από τους μαθητές να αντιμετωπίσουν άλλα προβλήματα που ακολουθούν το παραπάνω ύφος – είδος.

6η ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Θέμα: Η ιδιότητα της πρόσθεσης στους λογαρίθμους

Γενική Περιγραφή:

Η παρακάτω διδακτική ενότητα αποτελεί μία εφαρμογή της γενικής δομής που εμφανίζεται να έχει μία διδακτική ενότητα και των ουσιωδών χαρακτηριστικών της, έτσι όπως περιγράφηκαν στη θεματική ενότητα: "**Γενικά Συμπεράσματα**"

1) **Η διδακτική φαινομενολογία** για αυτή τη διδακτική ενότητα απαιτεί την επιλογή ενός "context problem" κατάλληλα επιλεγμένου ώστε να ικανοποιεί τα **3 κριτήρια**. Το context problem που επιλέχθηκε είναι ένα πρόβλημα με Τίτλο "**Ανάπτυξη**". Αυτό το πρόβλημα, θέμα έχει την αύξηση της καλυπτόμενης επιφάνειας από υδρόφυτα, σε χρόνο αντίστοιχο των εβδομάδων ανάπτυξης. Είναι ένα πρόβλημα υπαρκτό, όπου οι μαθητές έχουν άμεση εποπτεία, το γνωρίζουν εμπειρικά ή μπορούν να το φανταστούν. Αμέσως μετά την αναμενόμενη διαπραγμάτευση μεταξύ δασκάλου και μαθητών που σκοπό έχει την πλήρη κατανόηση της κατάστασης που περιγράφεται στο πρόβλημα, θα δοθεί στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας που θα αποτελέσει έναν οδηγό δραστηριοτήτων του μαθητή μέσα στην τάξη.

(a) στο φύλλο εργασίας αρχικά δίνεται ένας πίνακας τιμών, όπου οι μαθητές θα κάνουν χρήση των πληροφοριών που αυτός προσφέρει με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας γραφικής παράστασης (της εκθετικής $f(x)=2^x$).

(b) Οι μαθητές αφού εφαρμόσουν τη δική τους προϋπάρχουσα γνώση για την κατασκευή της γραφικής παράστασης, θα απαντήσουν στις ερωτήσεις που ο δάσκαλος υποβάλλει μέσω του φύλλου εργασίας.

(c) Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας προσφέρουν δυνατότητες για οριζόντια και κάθετη μαθηματικοποίηση με αποκορύφωμα τον ορισμό και τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(d) Τέλος η γνώση που προσδοκάται να κατασκευαστεί μέσω αυτής της διδακτικής πορείας θα εφαρμοστεί σε υπολογισμούς, που καλούνται οι μαθητές να πραγματοποιήσουν στην 6η ερώτηση.

Μέσω της συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας θα επιτευχθεί σύνδεση μεταξύ της διδακτικής αρχής: "**Η δημιουργία συγκεκριμένης βάσης προσανατολισμού** " και της μαθησιακής αρχής: «**Η μάθηση ως κατασκευή**».

2) Το ρόλο του διαμεσολαβητικού ή αναδυόμενου μοντέλου στο πρόβλημα θα παίξει η γραφική παράσταση της 2^x. Όπου αρχικά θα χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την επικρατούσα κατάσταση και στη συνέχεια θα ερμηνεύσει τη σχέση της εκθετικής 2^x με τη λογαριθμική $\log_2\theta$.

Το κριτήριο της φυσικότητας θα εκπληρωθεί μιας και το μοντέλο της γραφικής παράστασης αλλά και του λογαρίθμου ως διαδικασία (ο χρόνος που χρειάστηκε για να αναπτυχθεί η καλυπτόμενη επιφάνεια με παράγοντα αύξησης το 2) θα αναπτυχθεί από τους μαθητές.

Επίσης θετική είναι η απάντηση και στο κριτήριο της **κάθετης δύναμης**, όπου οι μαθητές θα αποφύγουν να κάνουν κακό προγραμματισμό στον τρόπο εργασίας τους, πράγμα στο οποίο θα συμβάλλουν οι παρεμβάσεις του δασκάλου και η πορεία που υποδεικνύεται από το φύλλο εργασίας. Αξίζει να σημειωθεί, ότι από την πλευρά των μαθητών αναμένεται σύνδεση μεταξύ της δομής που έχει το πρόβλημα και της μαθηματικής δομής που έχει η διαδικασία επίλυσής του.

Τέλος η **ευρύτητα της εφαρμογής** θα εκπληρωθεί θετικά στην τελευταία ερώτηση, όπου οι μαθητές θα πραγματοποιήσουν τους απαιτούμενους υπολογισμούς,

Η σύνδεση που πραγματώνεται είναι μεταξύ της διδακτικής αρχής: "**Χρησιμοποίηση μοντέλων – σχημάτων και συμβόλων**" και της μαθησιακής αρχής:

"**Η μάθηση ως διαδοχή επιπέδων**"

3) Η συνεισφορά των μαθητών όσον αφορά τις προσωπικές τους κατασκευές και τις ελεύθερες προσωπικές τους δημιουργίες θα πραγματοποιηθεί στις ερωτήσεις 5 - 6, όπου μέσω των παραδειγμάτων $\log_2 16=4$ και $\log_2 3+1=\log_2 6$ κ.α θα τους ζητηθεί να εκφράσουν σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα τον ορισμό και την ιδιότητα της πρόσθεσης που υπάρχει στους λογαρίθμους.

Η σύνδεση τότε, που αναπτύσσεται μεταξύ της διδακτικής αρχής: "**Ανάθεση ειδικών δραστηριοτήτων στους μαθητές**" και της μαθησιακής αρχής: "**Η Αναστοχαστική διάσταση της μάθησης**" θεωρείται επιτυχημένη.

4) Μία άλλη στρατηγική του διδακτικού σχεδιασμού που θα λάβει χώρα είναι: **Η αρχή της επανανακάλυψης και της κατευθυνόμενης επανανακάλυψης**, όπου ο χαρακτήρας των ερωτήσεων του φύλλου εργασίας προτρέπει τους μαθητές αλλά και τους κατευθύνει να βρουν τη λύση από μόνοι τους. Ο δάσκαλος διαπραγματεύεται σε κάθε σημείο της διδασκαλίας, τις απαντήσεις των μαθητών και επεμβαίνει μόνο όταν

χρειάζεται για να δώσει την ονομασία λογάριθμος καθώς και τον συμβολισμό (τυποποίηση) $\log_2\theta$.

Ο ρόλος λοιπόν του δασκάλου χαρακτηρίζεται ως εκείνος του **ενορχηστρωτή**. Η διδακτική αρχή που υπάρχει εδώ είναι: η "**Αλληλεπιδραστική διδασκαλία**" σε συνδυασμό με την μαθησιακή αρχή: "**Η μάθηση ως κοινωνική δραστηριότητα**".

5) "**Η σύνδεση των μαθησιακών διαδρομών και πραγματικότητας**" ως διδακτική αρχή με το "**Δομικό χαρακτήρα της μάθησης**" θα οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή της έννοιας αλλά και της ιδιότητας του λογαρίθμου.

Βασική ιδέα

Ο υπολογισμός του χρόνου που απαιτείται για να αναπτυχθεί μία καλυπτόμενη επιφάνεια από υδρόφυτα για συγκεκριμένες τιμές θα μας δώσει την αφορμή για χρησιμοποίηση της γεωμετρικής προόδου. Η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης 2^x σε συνδυασμό με τη γεωμετρική πρόοδο θα μας οδηγήσει στην ανάγκη υπολογισμού του χρόνου και κατ' επέκταση της εισαγωγής της έννοιας του λογαρίθμου. Ο ορισμός της έννοιας του λογαρίθμου ως η μοναδική λύση της εκθετικής α^x θα μας οδηγήσει στην ιδιότητα του λογαρίθμου.

Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής ενότητας οι μαθητές θα μπορούν:

- ✓ να ορίζουν την έννοια του λογαρίθμου
- ✓ να λύνουν μία εκθετική εξίσωση με τη βοήθεια λογαρίθμων
- ✓ να υπολογίζουν λογαριθμικές παραστάσεις που περιέχουν αθροίσματα

Επίσης οι μαθητές θα μπορούν να συνδέουν την εκθετική με τη λογαριθμική συνάρτηση καθώς θα γνωρίζουν, ότι ο λογάριθμος αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο φαινομένων, όπως είναι η αύξηση φυσικών μεγεθών.

Απαιτούμενες γνώσεις και υλικά:

Οι μαθητές είναι απαραίτητο να γνωρίζουν :

- ➢ Τους τύπους της γεωμετρικής προόδου και της εκθετικής συνάρτησης

- Τις ιδιότητες των δυνάμεων
- Να είναι εφοδιασμένοι με χαρτί μιλιμετρέ και έναν απλό υπολογιστή τσέπης.

Ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές θα είναι χωρισμένοι σε ομάδες (δυάδες) μία σε κάθε θρανίο και κάθε ομάδα θα αποτελεί μία ξεχωριστή μονάδα μέσα στην τάξη.

Η επικοινωνία θα πραγματοποιηθεί σε 2 επίπεδα, σε αυτό που αφορά στα μέλη μίας μόνο ομάδας και σε αυτό που αφορά την επικοινωνία μεταξύ των ομάδων σε ολόκληρη πλέον την τάξη.

Ο δάσκαλος θα μπορεί έτσι να επικοινωνεί με κάθε ομάδα ξεχωριστά και όταν το κρίνει απαραίτητο να επικοινωνεί με ολόκληρη την τάξη.

Κάθε ομάδα θα έχει στη διάθεσή της ένα φύλλο εργασίας, ενώ κάθε μαθητής θα σημειώνει, ότι κρίνει απαραίτητο στο τετράδιό του.

Φύλλο εργασίας:

1) Η ανάπτυξη της καλυπτόμενης επιφάνειας από υδρόφυτα σε επισκόπηση εβδομάδων φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Εβδομάδες:	***Επιφάνεια (m^2)***
0	1
$1^η$	2
$2^η$	4
$3^η$	8
$4^η$	16
$5^η$	32

Να κάνετε σε μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση. Να εξετάσετε με οποιονδήποτε τρόπο, αν τα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται πάνω σε μία καμπύλη.

2) Να εκτιμήσετε με τη βοήθεια του γραφήματος μετά από πόσες περίπου ημέρες θα υπάρξουν $20m^2$ καλυπτόμενης επιφάνειες από υδρόφυτα;

3) Να βρείτε μετά από πόσες ημέρες θα υπάρξουν $40m^2$ $80\ m^2$ και $10\ m^2$ καλυπτόμενης επιφάνειας από υδρόφυτα; Να χρησιμοποιήσετε το γράφημα ως

επαλήθευση για την απάντηση που δώσατε μόνο στη περίπτωση της επιφάνειας των 10 m^2.

4) Βρείτε ένα ικανοποιητικό μοντέλο που να εκφράζει τα m^2 της καλυπτόμενης επιφάνειας από υδρόφυτα σε σχέση με το πλήθος εβδομάδων που απαιτούνται για την επίτευξη αυτού.

5) Σύμφωνα με το μοντέλο υπολογισμού του πλήθους εβδομάδων που αναπτύξατε στην προηγούμενη ερώτηση εξηγείστε τα παρακάτω αποτελέσματα

$\log_2 16=4$

$\log_3 27=3$

$\log_5 25=2$

6) Τι νόημα θα μπορούσαν να έχουν οι παρακάτω εξισώσεις; Για το συγκεκριμένο πρόβλημα; Να εκφράσετε τις παρακάτω διαδικασίες με έναν γενικό τύπο που θα θεωρηθεί ως ιδιότητα για τους λογαρίθμους και να γίνει η απόδειξη του σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου.

$\log_2 3+1=\log_2 6$

$\log_2 7+1=\log_2 14$

$\log_2 6+\log_2 2=\log_2 12$

Εφαρμογές: Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

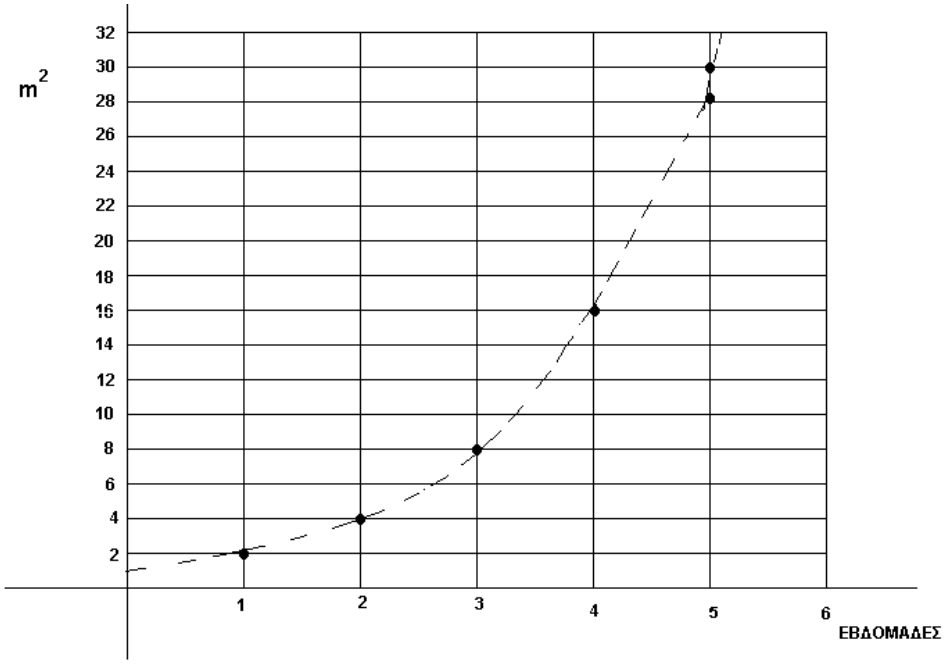
$\log_{10} 0,001$ $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10}$ $\log_2 3+2\log_2 4+3\log_2 3$

Σύντομη ανάλυση αναμενόμενης διδακτικής πορείας

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές επιλέγουν μία κλίμακα πάνω στο μιλιμετρέ χαρτί και απεικονίζουν τα σημεία σε Καρτεσιανό επίπεδο. Εδώ θα προηγηθεί διαπραγμάτευση για το σημείο 0, όπου απεικονίζει την εβδομάδα που δεν έχει συμπληρωθεί. Παρόλα αυτά όμως η αρχική καλυπτόμενη επιφάνεια είναι 1 m^2.

Η διάταξη όμως των σημείων πάνω στο επίπεδο δεν δημιουργεί βεβαιότητα για την καμπύλη, πάνω στην οποία ανήκουν.

Στο σημείο αυτό ο δάσκαλος, αφού αφήσει για μικρό χρονικό διάστημα τους μαθητές να πειραματιστούν, θα φανερώσει τη μορφή της καμπύλης που είναι $\Psi=2^{\nu}$, $\nu=0,1,2\ldots$



Σχήμα 1

Στην 2η ερώτηση ο μόνος τρόπος είναι να υπολογίσουν την τετμημένη του σημείου με τεταγμένη τα 20 m^2. Η αναμενόμενη απάντηση των μαθητών είναι 4,3 εβδομάδες.

Η αναμενόμενη αυτή απάντηση των μαθητών στην 2η ερώτηση και σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι «από t=0 με καλυπτόμενη επιφάνεια $1m^2$ σε t=2 με καλυπτόμενη επιφάνεια $2m^2$» θα τους οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ο διπλασιασμός της καλυπτόμενης επιφάνειας απαιτεί 1 εβδομάδα. Έτσι θα καταλήξουν ότι από t=4,3 εβδομάδες για $20m^2$ σε $40m^2$ απαιτούνται t=4,3+1=5,3 εβδομάδες. Έχοντας υπ' όψιν οι μαθητές αυτή την αναλογία, θα απαντήσουν ότι χρειάζονται 3,3 εβδομάδες για καλυπτόμενη επιφάνεια ίση με 10 m^2, με την αιτιολόγηση ότι 4,3 εβδομάδες απαιτήθηκαν για 20 m^2.

Όμοιες απαντήσεις αναμένεται να δοθούν και για τις 6,3 εβδομάδες που απαιτούνται για 80 m^2 καλυπτόμενης επιφάνειας.

Στο σημείο αυτό ο δάσκαλος θα προτείνει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το λόγο των τιμών της ακολουθίας.

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=2$$

Εκτελώντας οι μαθητές διαιρέσεις των διαδοχικών τιμών θα παρατηρήσουν ότι ο λόγος είναι 2. Δημιουργείται λοιπόν η εικόνα της γεωμετρικής προόδου ως ακολουθίας.

Εδώ ο δάσκαλος θα προτείνει το σταθερό λόγο 2 να τον ονομάσουν παράγοντα ανάπτυξης, όπου σε συνδυασμό με τα καλυπτόμενα τετραγωνικά μέτρα (m^2) να

εκφράζεται το πλήθος των εβδομάδων. Ο μηχανισμός αυτός εύρεσης του χρόνου θα θεωρηθεί και θα ονομαστεί από το δάσκαλο ως **λογάριθμος**, με συμβολισμό: $\mathbf{log_2}$

Στην ερώτηση 4 οι μαθητές θα περιγράψουν αρχικά τη διαδικασία εύρεσης του χρόνου για μία ειδική περίπτωση ως:

$\log_2 10$ θεωρείται ο χρόνος που απαιτείται για να υπάρξουν 10 m^2 καλυπτόμενης επιφάνειας αν ο παράγοντας αύξησης είναι 2.

Στην $5^η$ ερώτηση η αιτιολόγηση που θα δοθεί από πλευράς μαθητών για την αριθμητική παράσταση $\mathbf{log_2 16=4}$ είναι: Ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη 16 m^2 με παράγοντα αύξησης το 2 είναι 4 εβδομάδες (θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή t=0 είχαμε καλυπτόμενη επιφάνεια 1 m^2).

Μερικοί μαθητές όμως θα εμπλακούν σε διαδικασίες σύγκρισης και των άλλων δύο αριθμητικών παραστάσεων $\log_3 27=3$ και $\log_5 25=2$ και θα φτάσουν στο συμπέρασμα ότι υψώνοντας το 2 στο χρόνο που απαιτείται έχουμε τα αντίστοιχα m^2 δηλαδή $2^4=16$, $3^3=27$ και $5^2=25$.

Σε αυτό το σημείο ο δάσκαλος, αφού απομονώσει τον περιγραφικό χαρακτήρα του λογαρίθμου ως εύρεσης χρόνου θα προτείνει να γίνει διαπραγμάτευση για την αλγεβρική μορφή του. Στη συνέχεια κι αφού έχοντας υπ' όψιν τη γεωμετρική πρόοδο με σταθερό λόγο το 2 που παρατηρήθηκε στην $3^η$ ερώτηση, η διαπραγμάτευση θα καταλήξει στη μορφή $\log_2 16=4 \Leftrightarrow 2^4=16$

που θα πάρει τη γενική μορφή $\log_\alpha \theta=x \Leftrightarrow \alpha^x=\Theta$

Η παραπάνω διαπίστωση θα καταλήξει στον ακόλουθο ορισμό: **ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α ώστε να βρούμε το θ. Η εκθετική εξίσωση $\alpha^x=\Theta$ έχει μοναδική λύση που συμβολίζεται με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α, με $\alpha>0$ $\alpha \neq 1$ και $\theta>0$**

Από τον παραπάνω ορισμό θα προκύψει άμεσα ότι: **αν $\alpha>0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta>0$ τότε $\forall x \in \mathbf{R}$**

Ισχύει $\log_\alpha \alpha^x = x$ $\quad \alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

$\log_\alpha 1 = 0$ $\quad \log_\alpha \alpha = 1$

Στην $6^η$ ερώτηση οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν τη λογαριθμική παράσταση:

$\log_2 3+1=\log_2 6$ στηριζόμενοι στο γεγονός ότι ο χρόνος που μεσολαβεί για να διπλασιαστεί η ανάπτυξη από $3m^2$ σε $6m^2$ είναι 1 εβδομάδα. Ο συμβολισμός αυτός από την $4^η$ ερώτηση θα είναι $\log_2 2=1$ και θα τους οδηγήσει στο συμπέρασμα $\log_2 3+\log_2 2=\log_2 6$.

Αιτιολογώντας ομοίως και τις άλλες 2 λογαριθμικές παραστάσεις θα καταλήξουν διαισθητικά στο συμπέρασμα ότι $\log_2 \alpha+\log_2 b=\log_2 \alpha b$.

Στο σημείο αυτό ο δάσκαλος θα απαιτήσει να διατυπωθεί η παραπάνω ιδιότητα σε αυστηρή μαθηματική ορολογία με στόχο οι μαθητές να εκφραστούν μέσω συμβόλων.

Η τελευταία ερώτηση έχει στόχο τη θεσμοθέτηση, δηλαδή την κατοχύρωση της αλήθειας για τη νέα μαθηματική γνώση που έχει προκύψει. Η κατοχύρωση αυτή θα γίνει μέσω της απόδειξης, η οποία θα υλοποιηθεί όταν οι μαθητές με υπόδειξη του δασκάλου ακολουθήσουν τα παρακάτω βήματα:

1^{ο} να εφαρμόσουν τον ορισμό της έννοιας του λογαρίθμου για $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ και $\theta_1, \theta_2, \theta>0$

υποθέτοντας ότι: αν $\log_\alpha\theta_1=x_1$ **(1)** και $\log_\alpha\theta_2=x_2$ **(2)**

Τότε $\alpha^{x_1}=\theta_1$ $\alpha^{x_2}=\theta_2$

2^{η} να πολλαπλασιάσουν κατά μέλη τις εξισώσεις

$\alpha^{x_1}\cdot \alpha^{x_2}=\theta_1\theta_2$

$\alpha^{x_1+x_2}= \theta_1\theta_2$

3^{η} να εφαρμόσουν τη σχέση που συνδέει τους λογαρίθμους με την εκθετική, από τον ορισμό $\log_\alpha\theta_1\theta_2=x_1+x_2$

4^{η} να αντικαταστήσουν με τις αρχικές σχέσεις **(1), (2)**
$\log_\alpha\theta_1\theta_2 = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

Τέλος οι μαθητές θα επιχειρήσουν να εφαρμόσουν το νέο μαθηματικό εργαλείο που ήδη έχουν δημιουργήσει πάνω σε εκφράσεις, οι οποίες παρουσιάζουν κάποια μικρή απόκλιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βιβλιογραφία 1ης Θεματικής Ενότητας

Arsac.G.et al: `Teacher`s Role and Reproducibility of Didactial Situations`, Educational Studies in Mathematics 23, 5-29

Artigue, M& Perrin- Glorian, M.-J: 1991, `Didactic Engineering, Research and Development Tool: Some Theoretical Problems Linked to this Duality`, For the Learning of Mathematics 11, 13-18.Balacheff, N. et al:1992, `What is Research in Mathematics Education and What Are Its Results? Discussion Intsruction 33, December, 17-23

Bauersfeld, H.: 1988, `Quo Vadis? Zu den Perspektiven der Fachdidaktik`, Mathematica Didactica 11, 3-24

Becker, J. P & Miwa, T.: 1989, Proceedings of the U. S- Japan Seminar on Mathematical Problem Solving, Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science and Mathematics (ED 304 3/5).

Bigalke, H .- G: 1985, `Beitrage zur wissenschaftstheoretischen Diskussion der Mathematikdidaktik` in M. Bonsch , and L. Schaffner, Theorie und Praxis. Schriftenreihe aus dem F B Erziehungswissenschaften I der Universitat Hannover.

Brousseau, G: 1986 , Fondements et Methodes de la Didactique desMathematiques. These d'Etat, Universite de Bordeaux I.

Brown, S I. & Cooney, Th . J : 1991, Stalking the dualism between theory and practice. Zentralblan fur Didaktik der Mathematik 20, 112-117.

Burscheid, H- J : 1983, `Formen der wissenschaftlichen Organisation in der Mathematikdidaktik`, Journal fur Mathematikdidaktik 4, 219-240.

Clark, Ch. M & Yinger, R. J: 1987, `Teacher Planning`, in J. Calderhead (ed), Exploring Teachers` Thinking, The Falmer Press, London.

Clifford, G.J & Guthrie, J. W: 1988, Ed school, A Brief for Professional Education, University of Chicago Press, Chicago.

D'Ambrosio, U: 1986, `Socio-Cultural Bases for Mathematical Education`, Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education, Birkhauser, Boston, MA, 1-6.

Dorfler, W:1994, `The Gulf between Mathematics and Mathematics Education`, in What is Research in Mathematics Education and What Are its Results?(Background papers for an ICMI Study Conference), International Commission on Mathematical Instruction, University of Maryland, College Park, MD.

Dress, A: 1974, Spekulationen uber Aufgaben und Moglichkeiten einer Didaktik der Mathematik, Zentralblan fur Didaktik der Mathematik 3, 129-131.

Fischer,R : 1980, `Zur Ideologie der Selbstbeschrankung im Mathematikstudium`,in Mathematikunterricht un Universitaten. Zweiter Teil. Zeitschrift fur Hochschuldidaktik, Vienna, Sonderheft S3, 32-72.

Fischer, R & Malle, G: 1983, Mensch und Mathematik, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Freudenthal H : 1974, Sinn und Bedeutung den Didaktik der Mathematik, Zentralblan fur Didaktik der Mathematik 3, 122-124.

Freudenthal,H :1986 Review of Yves Chevallard, `La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigne`, Educational Studies in Mathematics 17. 323- 327.

Freudenthal H: 1987 `Theoriebildung zum Mathematikunterricht`, Zentralblatt fur Didaktk der Mathematik 3, 96-103.

Freudenthal, H: 1991, Revisiting Mathematics Education. China Lectures, Kluwer Academic Publischers, Dordrecht.

Gravermeijer K: 1994, Educational Development and Development Research in Mathematics Education`, Journal for Research in Mathematics Education 25 (5), 443-525.

Griesel, H:Uberlegungen zur Didaktik der Mathematik ais Wissenschaft, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 3, 115-119.

Jackson, Ph.A:1968, Life in Classrooms, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Kilpatrick, J: 1993, `B`EYOND Face Value: Assessing Research in Mathematics Education` in G. Nissen and M.Blomhoj (eds), Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. Roskilde University, Denmark, 15-34.

Krygowska, A Z: 1972, `Mathematik-didaktische Forschung an der Padagogischen Hochschule Krakau`, Beitruge zum Mathematikunterricht 1971, Schroedel Hannover, 117-125.

Mclntosch, A and Qualding D: 1975, `Arithmogons`, Mathematics Teaching 70. 18-23.

Malik, F : 1986, Strategie des Managements komplexer Systeme, Haupt, Bern.

Otte, M: 1974, Didaktik der Mathematik als Wissenschaft, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 3, 125-128.

Riedel, M : 1988 , Fur eine zweite Philosophie, Suhrkamp, Franfurt a.M

Schon , D :1987, Educating the Reflective Practitioner, Jossey-Bass, San Francisco, CA.

Schupp, H: 1970 `Evaluation eines Curriculums`, Der Mathematikunterricht 25, 22-42.

Schwab, J: 1983, `The Practical 4: Something for Curriculum Professors to Do`, Curriculum Inquiry 13, 239-265.

Schweiger, F:1994, `Mathematics is a Language`, in D.F.Robitaille, et al.(eds), Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education Quebec 1992, Les Presses de l'Universite Laval, Sainte Foy, 197-309.

Sierpinska A:1993,`Criteria for Scientific Quality and Revelance in the Didactics of Mathematics`, in G.Nissen, and M.Blomhoj(eds), Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics, Roskilde University Denmark, 35-74.

Simon, H A: 1970, The Sciences of the Artificial, MIT-Press, Cambridge, MA.

Smith, a: 1980, A Coherent Set of Decisions, the Stanley Lecture, Manchester Polytechnic.

Thommen, J-P: 1983, Die Lehre von der Unternehmensfuhrung, Haupt, Bern and Stuttgart.

Tietz, H: 1974 Zur Didaktik der Mathematik, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 3, 131-132.

Voigt, J : 1991, Interaktionsanalysen in der Lehrerbildung, Zentrealblatt fur Didaktik der Mathematik 20, 161-168.

Von Harten , G & Steinbring, H:1991, Lesson transcripts and their role in the in-service training of mathematics teachers, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 20, 169-177.

Von Hayek, F.A:1956, `The Theory of Complex Phenomena`, in F.A. Von Hayek (ed), Studies in Philosophy, Politixs, Economics, Routledge &Kegan Paul, London 1967, 22-42.

Winter, H: 1985, `Reduktionistische Ansatze in der Mathematikdidaktik`, Der Mathematikunterricht 31, 75-88.

Winter, H: 1986, `Was heiβt und zu welchem Ende studiert man Mathematikdidaktik?`,in H.Schanze (ed), Lehrerbildung in Aachen-Geschicht, Entwicklungen, Perspektiven, Padagogische Hochschule, Aachen, 174-194.

Wittmann, E Ch: 1984, `Teaching Units as the Intergrating Core of Mathematics Education,`Educational Studies in Mathematics 15,25-36.

Wittmann E.Ch :1985, `Clinical Interviews embedded in the "philosophy of the teaching units"- a means of developing teachers` attitudes and skills`, in B.Christiansen(ed), Systematic Cooperation between Theory and Practise in Mathematics Education, Mini-Conference at ICME 5,Adelaide 1984,Copenhagen:Royal Danish School of Education, Dept.of Mathematics 1985, 18-31.

Βιβλιογραφία 2ης Θεματικής Ενότητας

Bell, A.W:1976, `A Study of pupils` proof-explanations in mathematical situations`,Educational Studies in Mathematics 7, 23-40.

Bigalke, H-G .et al: 1974, `Didaktik der Mathematik`, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 109-132.

Easley, J:1977, On Clinical Studies in Mathematics Education. The Information Reference Center for Science, Mathematics and Environmental Education, Columbus,Ohio.

Freudenthal, H:1978, Weeding and Sowing, Reidel,Dordrecht.

Galbraith, P.L:1981, `Aspects of proving:A clinical investigation of process`, Educational Studies in Mathematics 12,1-18.

Herscovics, N and Bergeron, J.C:1980, The Training of Teachers in the Use of Clinical Methods. Paper submitted to ICME IV Berkeley, Concordia University Monreal.

Heβler, C, Kasper, S, and Stuber, U:1980, Beobachtungen von Denkprozessen beim kombinatorischen Zahlen am Beispiel “Mini-Gruppen-Karte”, Seminarbericht SS1980, Universitat Dortmund, Institut fur Didaktik der Mathematik, 1-20.

Lakatos, I:1976, Proofs and Refutations, Cambridge University Press.

Mclntosh, A and Quadling, D:1975, `Arithmogons`, Mathematics Teaching 70, 18-23.

Muller, G.and Wittmann, E:1978, Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Vieweg,Braunschweig.

Schupp, H:1976, `Einfuhrung in stochastisches Denken anhand des Galtonbrettes`,Beitrage zum Mathematikunterricht, 202-205.

Simon, H.A :1970, The Sciences of the Artificial, M.I.T. Press, Cambridge,Mass.

Walther G:1978,`Arithmogons- eine Anregung fur den Rechenunterricht in der Primarstufe`, Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 6,325-328.

Wittmann, E:1977, `Die Geometrie der Schulmilchtuten und die lokalen Experten`, Beitrage zum Mathematikunterricht, 307-310.

Wittmann E:1980a, `Die Mini-Gruppen-Karte der Deutschen Bundesbahn`, in:Vollrath, H-J. (Hrsg):Sachrechnen, Stuttgart, 124-135.

Wittmann, E:1980b, `Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg, Braunschweig.

Wittmann, E: 1982, `Mathematisches Denken bei Vor-and Grundschulkindern. Eine Einfuhrung in psychologisch-didaktische Experimente, Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden.

Βιβλιογραφία 3ης Θεματικής Ενότητας

Bell, A,Swan, M&Taylor,G:1981, `Choice of Operation in Verbal Problems with Decimal Numbers`, Educational Studies in Mathematics 12(4),399-420.

Bruner, J: 1994, Four Ways to Make Meaning. Invited Address at the AERA Conference 1994, New Orleans.

Cobb, P,Perlwitz, &Underwood,D:(1996), `Constructivism and Activity Theory: A Consideration of Their Similarities and Differences as they Relate to Mathematics Education`,in H.Mansfield, N.Pateman&N.Bednarz(eds),

Mathematics for Tomorrow's Young Children:International Perspectives on Curriculum, Kluwer Academic Publishers,Dordrecht.

Cobb,P,Yackel,E&Wood, T:1992, `A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education`, Journal for Research in Mathematics Education 23, 2-33.

Davis, P.J&Hersch, R: 1981, The Mathematical Experience, Houghton Mifflin, Boston,MA.

De Lange Jnt,J: 1987, Mathematics,Insight and Meaning, OW&OC,Utrecht.

Ernest, P: 1991, The Philosophy of Mathematics Education, The Falmer Press,London.

Freudenthal,H: 1973, Mathematics as an Educational Task,Reidel,Dordrecht.

Freudenthal, H: 1983, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,Kluwer Academic Publishers,Dordrecht.

Freudenthal,H: 1988, `Ontwikkelingsonderzoek`, in K.Gravemeijer &K.Koster(eds),Onderzoek,Ontwikkeling en Ontwikkelingsonderzoek,OW&OC,Utrecht.

Freudenthal, H: 1991, Revisiting Mathematics Education,Kluwer Academic Publishers,Dordrecht.

Gagne,R.M:1977,The Conditions of Learning(3rd ed),Holt,Rinehart&Winston Inc,New York.

Gagne,R.M &Briggs, L.J: 1979,Principles of Instructional Design(2nd ed),Holt,Rinehart&Winston Inc,New York.

Gravemeijer,K: 1991,`An Instruction-Theoretical Reflection on the Use of Manipulatives`,in L.Streefland(ed),Realistic Mathematics Education in Primary School, CD-β Press, Utrecht,57-76.

Gravemeijer,K: 1992, Micro-Didactics in Mathematics Education. Paper presented at the AERA Conference 1992, San Francisco, CA.

Gravemeijer, K: 1993, `The Empty Number Line as an Alternative Means of Representation for Addition and Subtraction`, in J. de Lange, I.Huntly, C.Keitel &M.Niss (eds),Innvation in Mathematics Education by Modeling and Applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 141-149.

Gravemeijer, K: 1994a, `Educational Development and Development Research in Mathematics Education`, Journal for Research in Mathematics Education 25(5),443-471.

Gravemeijer, K: 1994b, Developing Realistic Mathematics Education, Cdβ-Press, Utrecht.

Greeno, J.G: 1991, `Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain`, Journal for Research in Mathematics Education 22, 170-218.

Jacob, F: 1982, `Evolution and Tinkering`, Science 196. 1161-1166, 10 June 1977 :republished in The Possible and the Actual,Pantheon Books,New York,1982.

Kamii,C,Lewis,B. A& Livingstone Jones, S: 1993,`Primary Arithmetic: Children Inventing Their Own Procedures`, Arithmetic Teacher, Vol.41, no 4,220-203.

Kuhn, T.S : 1970, The Structure of Scientific Revolutions(2nd ed),Chicago University Press,Chicago.

Lakatos, I: 1978, Mathematics, Science and Epistemology, Cambridge University Press,Cambridge.

Lampert, M: 1985, `H`OW DO Teachers Manage to Teach? Perspectives on the Problems of Practice`,Harvard Educational Review 55, 178-194.

Lampert M: 1989, `Choosing and Using Mathematical Tools in Classroom Discource`, in J. Brophy (ed), Advances in Research on Teaching, Vol. 1, JAI Press Inc, Greenwich, CT,233-264.

Lampert, M: 1990, `When the Problem is not the Question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching`, American Educational Research Journal 27, 29-63.

Lawler, R. W: 1985, Computer Experience and Cognitive Development: A Child's Learning in a Computer Culture, Ellis Horwood Ltd,Chichester, and John Wiley &Sons, New York.

Merrill, M.D ,Li, Z&Jones, M.K : 1990, `Limitations of First Generation Instructional Design`, Educational Technology XXX(1), 7-11.

NCTM Research Advisory Committee: 1988, `NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Responses from the Research Community`, Journal for Research in Mathematics Education 19, 338-344.

Romberg, T.A: 1973, Development Research: An Overview of How Development-Based Research Works in Practice, Wisconsin-Madison, Madison,WI.

Romiszowski, A.J: 1981, Designing Instructional Systems, London,Kogan Page.

Sfard, A: 1991, `On the Dual Nature if Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin`, Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.

Steffe L.P: 1983, `The Teaching Experiment Methodology in a Constructivist Research Program`, in M.Zweng, T.Green,J.Kilpatrick, H.Pollak&M.Suydam(eds), Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhauser Inc, Boston,MA, 469-471.

Streefland, L: 1990a, `Free Productions on Teaching and Learning Mathematics`, in K.Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen& L.Streefland(eds), Contexts, Free Productions, Tests and Geometry in Mathematics, OW&OC, Utrecht,33-52.

Streefland, L: 1990b, Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

Streefland, L: 1993, `The Design of a Mathematical Course:A Theoretical Reflection`, Educational Studies in Mathematics25(1/2),109-136.

Treffers, A: 1987, Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project, Reidel,Dodrecht.

Van den Brink, J: 1989, Realistisch Rekenonderwijs aan Jonge Kinderen, Freudenthal Institute, Utrecht.

Van Hiele, P.M: 1973, Begrip et Inzicht, Muusses, Purmerend.

Walker, D.F: 1992, `Methodological Issues in Curriculum Research`, in P.Jackson (ed), Handbook of Research on Curriculum,Macmillan,New York,89-118.

Βιβλιογραφία 4ης Θεματικής Ενότητας

Bishop, AJ,Clements, K, Keitel, Ch, Kilpatrick, J. and Laborde, C.(eds): 1996, International Handbook on Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

Clagett, M: 1959, Science of Mechanics in the Middle Ages, The University of Wisconsin Press, Madison.

Dijksterhuis, EJ: 1980, De Mechanisering van het Wereldbeeld, Meulenhoff, Amsterdam.

DiSessa, A.A, Hammer, D,Sherin, B and Kolpakowski, T: 1991, `Inventing graphing:meta-representational expertise in children`, Journal of Mathematical Behavior 10, 117-160.

Freudenthal, H: 1971, `Geometry between the devil and the deep sea`, Educational Studies in Mathematics 3,413-435.

Freudenthal, H: 1973, Mathematics as an Educational Task, D.Reidel,Dordrecht.

Freudenthal, H: 1991, Revisiting Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gravemeijer, K: 1994, `Educational development and educational research in mathematics education`, Lournal for Research in Mathematics Education 25(5),443-471.

Gravemeijer, K: 1999, `How emergent models may foster the constitution of formal mathematics`, Mathematical Thinking and Learning I (2), 155-177.

Gravemeijer, K, Cobb, P., Bowers, J. and Whitenack, J: in press, `Symbolizing, modeling, and instructional design`, in P. Cobb, E. Yackel and K. McClain(eds), Communicating and Symbolizing in Mathematics: Perspectives on Discource, Tools, and Instructional Design, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.

Greeno, J.G: 1991, `Number sense as situated knowing in a conceptual domain`, Journal for Research in Mathematics Education 22,170-218.

Kaput . J. J: 1994a, `The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience`, in R. Biehler, R.W. Scholz, R.Straβer, B.Winkelmann(eds), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp.379-397.

Kaput, J.J: 1994b, `Democratizing access to calculus: new routes to old roots`, in A.H.Schoenfeld(ed), Mathematical Thinking and Problem Soving, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hove, UK.

Kindt, M: 1996, Som & verschil, afstand&snelheid. Differentiaal-en Integraalrekening deel I, Freudenthal Institute, Utrecht.

Lehrer, R. and Romberg, T: 1996, `Exploring children's data modeling`, Cognition and Instruction 14, 69-108.

Lindberg, D.C: 1992, The Beginnings of Western Science, The University of Chicago Press, Chicago.

Meira, L: 1995, `The microevolution of mathematical representations in children's activity`, Cognition and Instruction 13(2), 269-313.

Nemirovsky, R: 1994, `On ways of symbolizing: The case of laura and velocity sign`, Journal of Mathematical Behavior 13,389-422.

Nemirovsky: 1995, Personal communication.

Polya, G: 1963, Studies in Mathematics, Volume XI, Mathematical Methods in Science, School Mathematics Group, Stanford.

Sfard, A: 1991, `On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin`, Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.

Streefland, L: 1985, `Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron`, Nieuwe Wiskrant, 5, 1, 60-67.

Streefland, L: 1990, Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

Stephan, M: 1998, Supporting the Development of One First-grade Classroom's Conceptions of Measurement: Analyzing Students' Learning in Social Context, Unpublished Doctoral Dissertation, Vanderbilt University, Nashville, TN.

Tall, D. O: 1985, `The gradient of a graph, Mathematics Teaching 111, 48-52.

Tall, D. O: 1986, `A graphical approach to integration`, Mathematics Teaching 114, 48-51.

Tall, D. (Ed): 1991, Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Treffers, A: 1987, Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project, D. Reidel, Dodrecht.

Treffers, A: 1991, `Didactical background of a mathematics program for primary education`, in L. Streefland (ed), Realistic Mathematics Education in Primary School, CD-β Press, Utrecht, pp. 21-57.

Whitney, H: 1998, `Mathematical reasoning, early grades`, Princeton (unpublished paper).

Yackel, E. and Cobb, P: 1996, `Sociomath norms, argumentation, and autonomy in mathematics`, Journal for Research in Mathematics Educ